Количество выравниваний.

Лазарева София

8 февраля 2023 г.

Условие:

Выведите рекуррентную формулу количества всех возможных выравниваний последовательностей длины n и m пользуясь разбиением всех выравниваний на непересекающиеся блоки. (1.5 балл)

Получите точную формулу, основываясь на начальные условия и рекуррентную формулу. (1.5 балл)

Воспользуйтесь приближением Стирлинга чтобы получить приближенную формулу количества выравниваний. (1)

Решение:

1. Применим динамику. Для того, чтобы посчитать число всех возможных выравниваний строк $|a| = n, |b| = m$ воспользуемся динамикой по подстрокам.

Базой динамики будет число выравниваний строк $a_{1...i}$ и b_1 для всех $i = 1...n$ равное единице. Аналогично число выравниваний для a_1 и $b_{1...j}$ для всех $j = 1...m$.

Предположим, что на момент подсчёта всех выравниваний строк $a_{1...i}$ и $b_{1...j}$, мы уже знаем количество выравниваний строк $a_{1...i-1}, b_{1...j}$, $a_{1...i-1}, b_{1...j-1}$, $a_{1...i}, b_{1...j-1}$. Тогда для того, чтобы посчитать число выравниваний строк $a_{1...i}$ и $b_{1...j}$ необходимо просуммировать выравнивания их подстрок, т.е. `count[i][j] = count[i-1][j] + count[i-1][j-1] + count[i][j-1]`.

Число выравниваний исходных строк будет лежать в элементе `count[n][m]`.

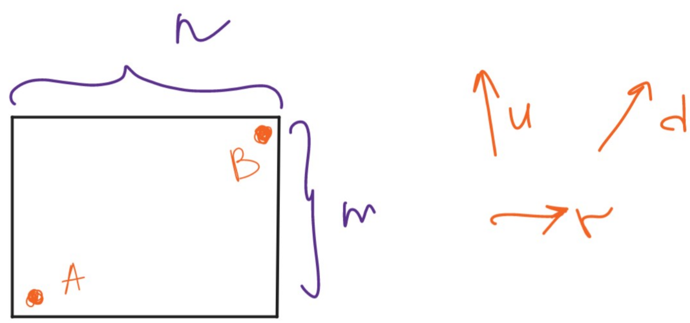

Рис. 1:

2. Нам необходимо добраться из точки `A(0, 0)` попасть в точку `B(m, n)`, `m < n`, используя перемещения только вверх (u), вправо (r) или вверх-вправо (d). Если рассмотреть отдельно каждую координату, то переместиться по пути `0 -> m` можно за `|r| + |d| = m`, где `|r|` - количество перемещений вправо (аналогично для `d, u`). Для перемещений `0 -> n` необходимо `|u| + |d| = n`.

Очевидно, что максимальное число перемещений по диагонали равно `min(m, n) = m` (мы не можем уйти за пределы этой размерности). Тогда количество перемещений по диагонали будет изменяться в пределах `0...m`. Число способов выбрать местоположение этих диагоналей равно сочетаниям без повторений:

$$\sum_{i=0}^{M} C_M^i.$$

Фиксирование `|d|` обеспечивает однозначное определение `|r| и |u|`. Тогда достаточно перебрать вариант перестановки одного из этих координат (выберем `|u|`). Число способов выбрать `|u|` из `|m|` равно числу способо выбрать `n - |d|` из `|m| + |n| - |d|` и соответственно равно

$$\sum_{i=0}^{M} C_{N+M-i}^{M}.$$

В окончательном варианте получим следующее соотношение:

$$\texttt{count[i][j]} = \sum_{i=0}^{M} C_M^i \cdot C_{N+M-i}^{M} = \sum_{i=0}^{M} \frac{(N+M-i)!}{i! \cdot (M-i)! \cdot (N-i)!}$$

3. Воспользуемся приближением Стирлинга для вычисления факториалов: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$:

$$\texttt{count[i][j]} = \sum_{i=0}^{M} \frac{\sqrt{2\pi(M+N-i)}(M+N-i)^{M+N-i}}{\sqrt{2\pi(M-i)}\sqrt{2\pi(N-i)}\sqrt{2\pi i}(M-i)^{M-i}(N-i)^{N-i}(i)^{i}}$$