Bodediagramme

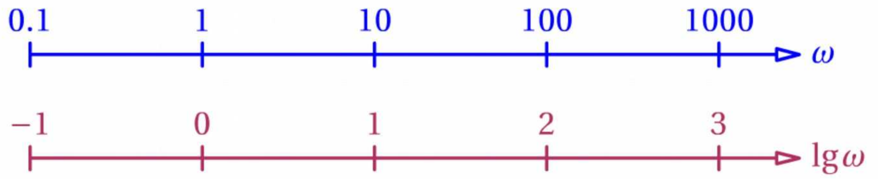
Das Bodediagramm ist die getrennte Darstellung des Betrags $|G(j\omega)|$ und des Arguments $\arg G(j\omega)$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω.

Bodediagramme haben in der Regelungstechnik eine besonders große Bedeutung: Viele wichtige Eigenschaften eines Regelkreises lassen sich sehr einfach aus dem Bodediagramm der offenen Regelschleife ablesen. Aus diesem Grund beruhen viele klassische Entwurfsverfahren für Regler auf der Frequenzgangsdarstellung im Bodediagramm.

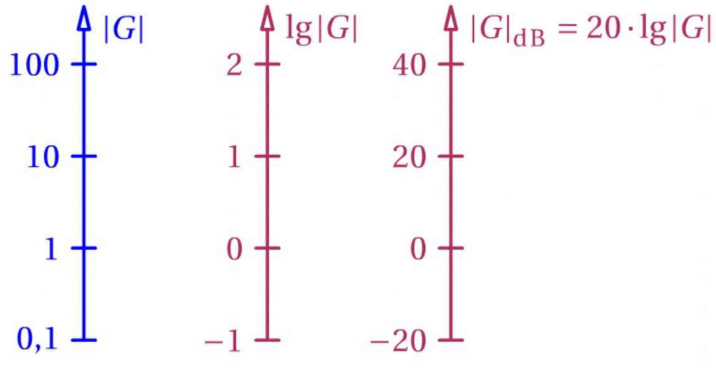
Die Skalierung von ω und $|G(j\omega)|$ erfolgt üblicherweise im logarithmischen Maßstab, der sich durch folgende Eigenschaften auszeichnet:

- Es sind beliebig große (positive) Bereiche darstellbar, wobei die relative Genauigkeit in jedem Punkt gleich ist. Das heißt, eine prozentuelle Abweichung ist in jedem Punkt der gleiche Abstand.
- Eine Multiplikation mit einem Faktor k bedeutet nicht eine *Streckung* eines Kurvenverlaufs, sondern dessen *Verschiebung*; nach oben oder rechts für $k > 1$, nach unten oder links für $k < 1$.
- Ein bestimmer Abstand zwischen zwei Werten x_1 und x_2 entspricht nicht der *Differenz* $x_2 - x_1$, sondern dem *Verhältnis* x_2 / x_1 der beiden Werte.
- Im doppelt-logarithmischen Maßstab ist jede Potenzfunktion $y = x^n$ eine Gerade mit der Steigung n.

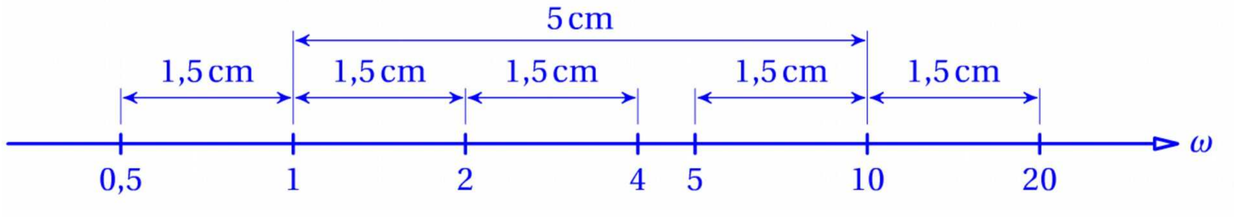
Skalierung für ω:



Skalierung für |G|:



Bei der Erstellung von lokarithmisch skalierten Diagrammen kann z. B.: ein Maßstab von *5cm/Dekade* zielführend sein. Damit ergibt sich eine leicht zu merkende **Skalierungshilfe**:



Bodediagramm eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (PT$_1$-Element):

$$G(s) = \frac{k}{1 + s\,T_1}\,, \qquad k = 10\,, \quad T_1 = 2$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega\,T_1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2\,T_1^2}} = \frac{|Z|}{|N|} = \frac{10}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \arg Z - \arg N = 0 - \arctan\frac{\omega T_1}{1} = -\arctan 2\omega$$

Näherung für kleine Kreisfrequenzen ($\omega \ll 1/T_1$):

$$|G| \approx k = 10$$

$$\arg G \approx 0$$

Näherung für große Kreisfrequenzen ($\omega \gg /T_1$):

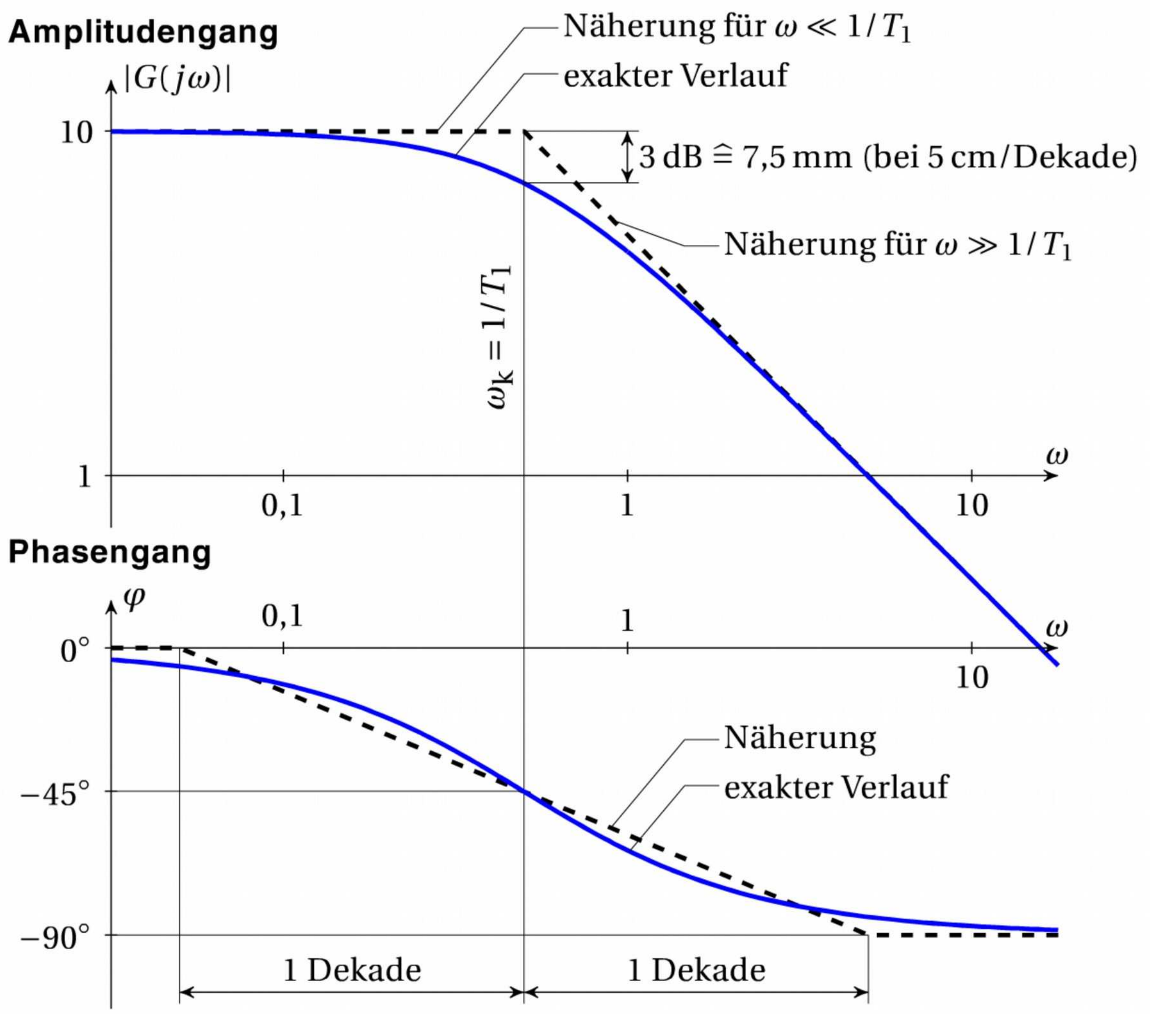
$$|G| \approx \frac{k}{\omega T_1} = \frac{5}{\omega}$$

$$\arg G \approx -90°$$

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\arg G(j\omega)$
0	10	0
0,1	9,8	−11,3°
0,5	7,07	−45,0°
0,7	5,81	−54,5°
1,0	4,47	−63,4°
2	2,43	−76°
∞	0	−90°

Die **Asymptoten des Amplitudenganges** (Betragsverlauf) für kleine und große Frequenzen sind in weiten Bereichen eine gute Näherung für den realen Amplitudengang dar. Nennenswerte Abweichungen ergeben sich in der Umgebung der Schnittpunkte der zwei Asymptoten, der sogenannten **Knickfrequenz ω_K**:

$$\left.\begin{array}{ll} |G| \approx k & \text{für } \omega \ll 1/T_1 \\ |G| \approx \dfrac{k}{\omega T_1} & \text{für } \omega \gg 1/T_1 \end{array}\right\} \implies k = \left.\frac{k}{\omega T_1}\right|_{\omega=\omega_k} \implies \underline{\underline{\omega_k = \frac{1}{T_1}}}$$



Die Asymptoten für den **Phasengang** ($\varphi = 0$ für kleine und $\varphi = -90°$ für große Kreisfrequenzen) bilden in der Umgebung der Knickfrequenz ω_k leider keine gute Näherung für den tatsächlichen Verlauf. Eine brauchbare Näherung ergibt aber ein linearer Übergang zwischen den beiden Asymptoten in einem Bereich von $0{,}1\,\omega_k \ldots 10\,\omega_k$, und die Asymptoten selbst außerhalb davon.

Maximaler Fehler der Asymptoten des Amplitudenganges

Der maximale Fehler der Knickzugnäherung des Amplitudengangs tritt offenbar bei der Kreisfrequenz $\omega_k = 1/T_1$ auf. Hier gilt:

$$|G_{\text{exakt}}| = \left.\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}\right|_{\omega=1/T_1} = \frac{k}{\sqrt{1+T_1^2/T_1^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$|G_{\text{genähert}}| = k$$

$$\frac{|G_{\text{genähert}}|}{|G_{\text{exakt}}|} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \approx 3\,\text{dB}$$

Steigung des Amplitudenganges

Ein Betragsverlauf nach der n-ten Potenz von ω entspricht im Bodediagramm einer Geraden mit der Steigung n:

$$\lg \omega^n = n \cdot \lg \omega$$

Dies gilt auch für negative Potenzen: Beispielsweise verläuft die Asymptote beim PT1-Element für große Kreisfrequenzen nach $1/\omega$; sie ist also eine Gerade mit der Steigung -1 oder $-20\,\mathrm{dB/Dekade}$.