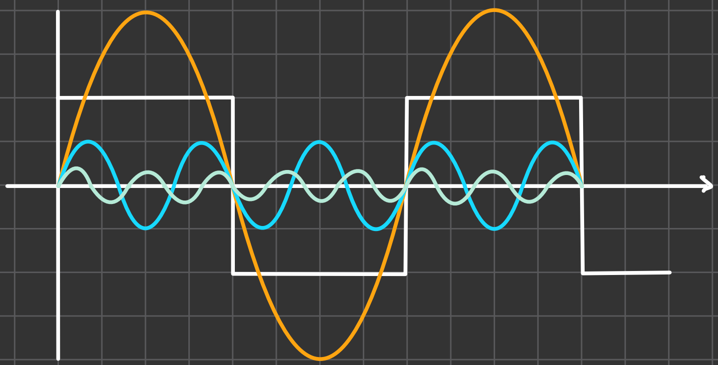
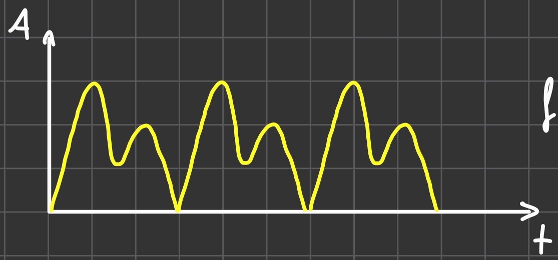
Fourierreihen

Jede Periodische Funktion kann aus einer Summe von Sinus- und/oder Cosinusschwingungen zusammengesetzt werden



Periodische Funktion



$f(x) = f(x+a)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)\right]$$

a_n, b_n ... Fourier-koeffizienten

Sei f eine 2π-periodische funktion. Ist das Periodenintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegbar, in denen f sowohl stetig als auch monoton ist, so kann die Funktion in eine Fourierreihe zerlegt werden.

f... Trigonometisches Polynom

Amplituden-Phasen-Form

$$A_n \cdot \sin(n \cdot x + \varphi_n) = a_n \cdot \cos(n \cdot x + \varphi) + b_n \cdot \sin(n \cdot x + \varphi)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Berechnung der Koeffizienten $[0;2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos(x)\,dx + \int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin(x)\,dx + \int_0^{2\pi} a_2 \cdot \cos(x)\,dx \ldots$$

In der Amplituden-Phasen-Form

$A_1 \cdot \sin(x+\varphi)$ 1. Harmonische oder Grundschwingung

$A_2 \cdot \sin(2x+\varphi)$ 2. — " — oder 1. Überschwingung

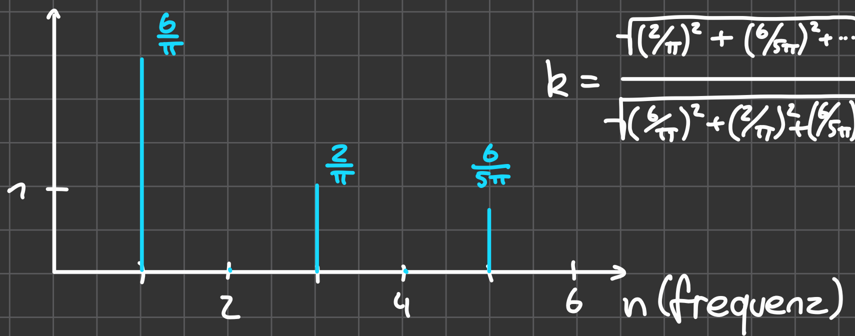
$A_3 \cdot \sin(3x+\varphi)$ 3. — " — 2. — " —

$$\text{Klirrfaktor: } k = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \cdots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^3 + A_3^2 + \cdots}}$$

→ Nur Oberwellen

→ + Grundschwingung

Amplituden-Phasenform (Rechteckschwingung)



$$k = \frac{\sqrt{(2/\pi)^2 + (6/5\pi)^2 + \dots}}{\sqrt{(6/\pi)^2 + (2/\pi)^2 + (6/5\pi)^2 \dots}} = 0{,}36 \qquad A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$$

Periode T statt 2π & Fourierkoeffizienten

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \, t)] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n_0 \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x)\, dx \qquad \text{Gleichrichtwert: } \frac{a_0}{2}$$

$\boxed{\text{Das Integrationsintervall kann beliebig verschoben werden}}$

Güte der Näherung

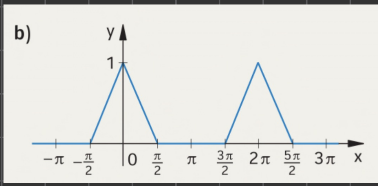
$$f(x) \approx s_M(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot x)]$$

Fourierkoeffizienten

FOURIER-Koeffizienten, wenn f gerade oder ungerade

	2π-periodisch	T-periodisch
f gerade Kosinusreihe (mit Gleichanteil)	$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\,dx$; $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$; $b_n = 0$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$	$a_0 = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t)\,dt$; $a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt$; $b_n = 0$ $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)$
f ungerade Sinusreihe (kein Gleichanteil)	alle $a_n = 0$ $b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$	alle $a_n = 0$ $b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$

5.54 b)

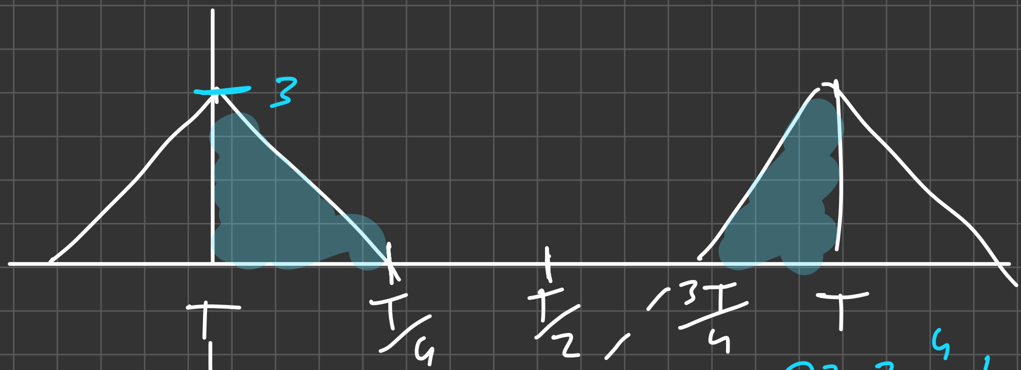


- gerade
- $b_n = 0$
- $f(t) = \frac{-2}{\pi} t + 1$
- $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos(n \cdot t)\, dt =$

$\frac{\pi}{2} \to 0 \qquad 0 \to 0$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{\pi} t\right)}_{f} \cdot \underbrace{(\cos(n \cdot t))}_{g'}\, dt = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi} t\right) \frac{\sin(nt)}{n} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} \Rightarrow$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(nt)}{n}\, dt = \frac{4}{\pi^2 n} \int_0^{\pi/2}$$



$$f(t) = \begin{cases} 3 - 3 \cdot \frac{4}{T} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n \cdot w_0 \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \underbrace{\left(3 - 3 \cdot \frac{4}{T}\right)}_{f} \cdot \underbrace{\cos(n \cdot w_0 \cdot t)\, dt}_{g'}$$

$$= \frac{4}{T} \cdot \Bigg(\underbrace{\left(3 - 3 \cdot \frac{4}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{\sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)}{n \cdot \omega_0} \Bigg|_0^{T/4} \Bigg)}_{0} - \int_0^{T/4} \left(-3 \cdot \frac{4}{T} \cdot \frac{\sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)}{n \cdot \omega_0} \right) dt$$

$$= \frac{4}{T} \cdot \frac{3 \cdot 4}{T \cdot n \cdot \omega_0} \cdot \int_0^{T/4} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \, dt = \frac{48}{T^2} \cdot \left(\frac{-\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)}{n \cdot \omega_0} \right) \Bigg|_0^{T/4}$$

$$= \frac{48}{T^2 \cdot n^2 \cdot \omega_0^2} \cdot \left(-\cos\left(n \cdot \omega_0 \cdot \frac{T}{4}\right) + \underbrace{\cos(0)}_{1} \right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{48}{\cancel{T^2} \cdot \frac{2^2 \pi^2}{\cancel{T^2}} \cdot n^2} \cdot \left(-\cos\left(n \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{4}\,2}\right) + 1 \right)$$

$$\frac{\cancel{48}}{\cancel{4} \cdot \pi^2 \cdot n^2} \cdot \left(1 - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{12}{\pi^2 \cdot n^2} \cdot \left(1 - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right)$$