4 Widerstandsmessung

4.1 Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

Beim gleichzeitigen Messen von Strom und Spannung treten notwendigerweise durch die **Belastung des Spannungsmesswerkes** und durch den **Innenwiderstand des Strommesswerkes zusätzliche systematische Fehler** auf.

Prinzipiell sind **zwei Arten der Messwerksanordnung** möglich. Je nach Anordnung spricht man von **stromrichtiger** oder **spannungsrichtiger** Messung.

Es ist darauf zu achten, dass z.B. bei stromrichtiger Messung nur ein „**pseudorichtiger**“[2] Strom gemessen wird, der aber immerhin dem tatsächlich fließenden Laststrom entspricht. Dies gilt für die gemessene Spannung nicht mehr. Bei stromrichtiger Messung entspricht die gemessene Spannung nicht mehr der Lastspannung sondern ist um den Spannungsabfall am Strommesswerk erhöht.

4.1.1 Stromrichtige Messung, spannungsrichtige Messung

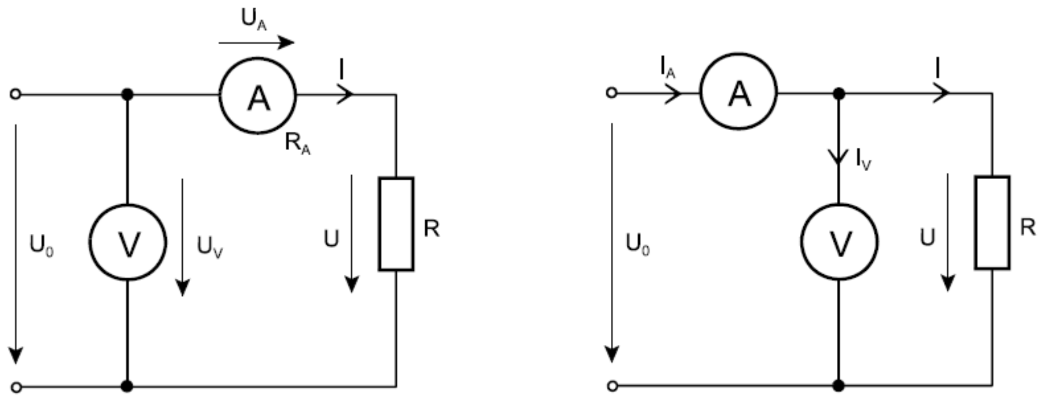


Abbildung 28: a) Stromrichtige Schaltung b) Spannungsrichtige Schaltung

Bei beiden Schaltungen wird gleichzeitig Spannung und Strom am Widerstand gemessen.

Bei der **stromrichtigen** Messung (Abb. 28a) zeigt das **Voltmeter** einen **falschen Messwert** an, dieser ist:

$$\boxed{U_V = U + R_A \cdot I} \qquad (16)$$

Der **Spannungsabfall am Innenwiderstand des Amperemeters** wird mitgemessen, dagegen wird der Strom (pseudo-)richtig gemessen. Mit dem bekannten Innenwiderstand R_A des Strommessers kann mit der **Korrekturgleichung**

$$\boxed{U = U_V - R_A \cdot I} \qquad (17)$$

2 Der Begriff **pseudorichtig** soll in diesem Zusammenhang andeuten, dass die Messgröße (Strom oder Spannung) vom Messwerk völlig korrekt erfasst wird. Durch die Beeinflussung des Kreises durch das Messwerk ist aber die ursprünglich vorhanden Messgröße verändert worden!

der richtige Spannungsmesswert ermittelt werden.

Bei der **spannungsrichtigen** Messung (Abb. 28b) wird die Spannung richtig gemessen, aber der **Strom I_V des Voltmeters** ist ein Fehlerstrom, der vom Amperemeter **mitgemessen** wird:

$$\boxed{I_A = I + I_V} \qquad (18)$$

Mit dem bekannten Innenwiderstand R_V des Voltmeters ergibt sich die **Korrekturgleichung**

$$\boxed{I = I_A - \frac{U}{R_V}} \qquad (19)$$

Es stellt sich die Frage, wann die stromrichtige Schaltung und wann die spannungsrichtige Schaltung verwendet werden soll. Allgemein gilt, dass die **Wahl der strom- oder spannungsrichtigen Messmethode durch die Größe des Lastwiderstandes *R* bestimmt** wird.

Ist dieser **klein** ($< 1k\Omega$) so ist im allgemeinen der Innenwiderstand R_V des Voltmeters zu vernachlässigen und die **spannungsichtige** Methode vorzuziehen. Ist der Lastwiderstandes hingen sehr **groß** ($>100k\Omega$) so wird durch die Parallelschaltung des Messwerkes der Messkreis zu sehr beeinflusst, und es ist die **stromrichtige** Methode vorzuziehen. Die Serienschaltung von R und R_A sollte aber beachtet werden und eine **Fehlerabschätzung** durchgeführt werden. Als **Entscheidungshilfe** dient:

$$\boxed{\frac{R_V}{R} > \frac{R}{R_A}} \qquad (20)$$ dann **spannungsrichtige** Schaltung

$$\boxed{\frac{R}{R_A} > \frac{R_V}{R}} \qquad (21)$$ dann **stromrichtige** Schaltung

Zur **Entscheidung ob eine Korrekturrechnung durchgeführt werden muss**, werden folgende Kriterien verwendet:

- **Stromrichtige Schaltung** (G_U = relativer Fehler des Spannungsmessers):

$$\boxed{\frac{R_A \cdot I}{U} \leqslant G_U \Rightarrow R_A \leqslant G_U \cdot R} \qquad (22)$$ dann braucht nicht korrigiert zu werden

- **Spannungsrichtige Schaltung** (G_I = relativer Fehler des Strommessers):

$$\boxed{\frac{I_V}{I} \leqslant G_I \Rightarrow \frac{R}{G_I} \leqslant R_V} \qquad (23)$$ dann braucht nicht korrigiert zu werden

Beispiel 10: Ein Widerstand R_X, von welchem bekannt ist, dass er in der Größenordnung von 80Ω liegt, soll durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung gemessen werden. Zur Verfügung stehen ein Strommesser mit dem Messbereichsendwert $1A$ bei einem Innenwiderstand von 2Ω sowie ein Spannungsmesser mit dem Messbereichsendwert von $40V$ bei einem Innenwiderstand von $5k\Omega$ (jeweils *Klasse 0.5*). Welche Messschaltung soll verwendet werden? Es werden in der günstigsten Messschaltung $0.42A$ sowie $35.5V$ gemessen. Falls notwendig, ist eine Korrekturrechnung durchzuführen!

a) Welche Messschaltung?

$$\frac{R_V}{R_x} = \frac{5000}{80} = 62{,}5\,; \quad \frac{R_x}{R_A} = \frac{80}{2} = 40$$ ☞ spannungsrichtige Schaltung ist günstiger

Messwerte in spannungsrichtiger Schaltung: Anzeige $I_a = 0{,}42A$; $U_a = 35{,}5V$

b) Korrektur notwendig? nein, wenn gilt: $\frac{R_X}{G_{rI}} \leq R_V$

☞ $\frac{80\Omega}{0{,}005} \leq 5000\Omega$? 16000Ω > 5000Ω ! Korrektur notwendig

---

Damit ergibt sich für R_X:

$$R_X = \frac{U_V}{I_A - U_V / R_V} = \frac{35{,}5V}{0{,}42A - 35{,}5V / 5000\Omega} = 85{,}98\Omega$$

Der systematische Fehler ist

$$\frac{F}{R_X} = \frac{G_U}{U_a} + \frac{G_I}{I_a} = \frac{0{,}5\% \cdot 40V / 100\%}{35{,}5V} + \frac{0{,}5\% \cdot 1A / 100\%}{0{,}42A} = 0{,}0175; \quad (1{,}75\%)$$

und der abs. Fehler

$$F = \frac{F}{R_X} R_X = 0{,}0175 \cdot 85{,}98\Omega = 1{,}5\Omega$$

Damit ist $R_X = 85{,}98\Omega \pm 1{,}5\Omega$ bzw. $R_X = 85{,}98\Omega \pm 1{,}75\%$

4.1.2 Messung kleiner Widerstände

Zur genauen Bestimmung vergleichsweise kleiner Widerstandswerte ist die spannungsrichtige Schaltung die richtige Wahl. Um jedoch **nennenswerte Spannungsabfälle** zu generieren, sind - speziell bei sehr kleinen Widerständen - **relativ hohe Messströme** notwendig. **Kontakt- und Lei-**

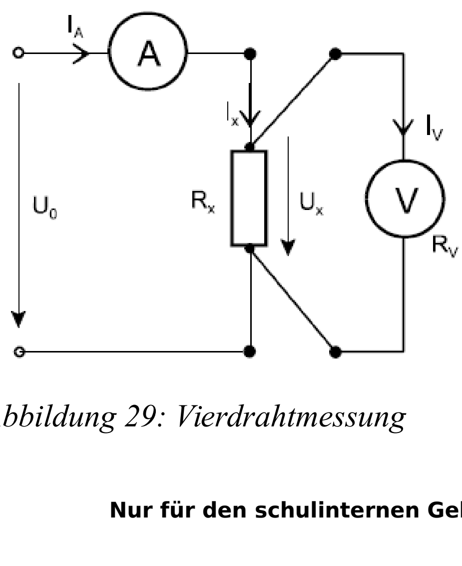


Abbildung 29: Vierdrahtmessung

tungswiderstände in den Messleitungen beginnen aber bei hohen Strömen das **Messergebnis signifikant zu verfälschen**.

Um diesen Problemen aus dem Weg zu gehen, ist es zweckmäßig **Strom- und Spannungsmesspfad zu trennen**, d. h. den Spannungsabfall am Messobjekt direkt mit **separaten Leitungen**, sogenannten "**Sense-Leitungen**" zu messen.

Diese **zusätzlichen Messleitungen für die Spannungsmessung** müssen lediglich den dafür notwendigen (sehr kleinen) Messstrom tragen und haben somit auf das Messergebnis praktisch keinen Einfluss. Der **große Messstrom wird über eigene Leitungen zugeführt**, die darin hervorgerufenen parasitären Spannungsabfälle sind ohne Einfluss auf das Ergebnis. Nachteilig ist aber die aufwändigere Verdrahtung.

Viele höherwertige Multimeter haben die Möglichkeit der sogenannten **Vierdrahtmessung** eingebaut.

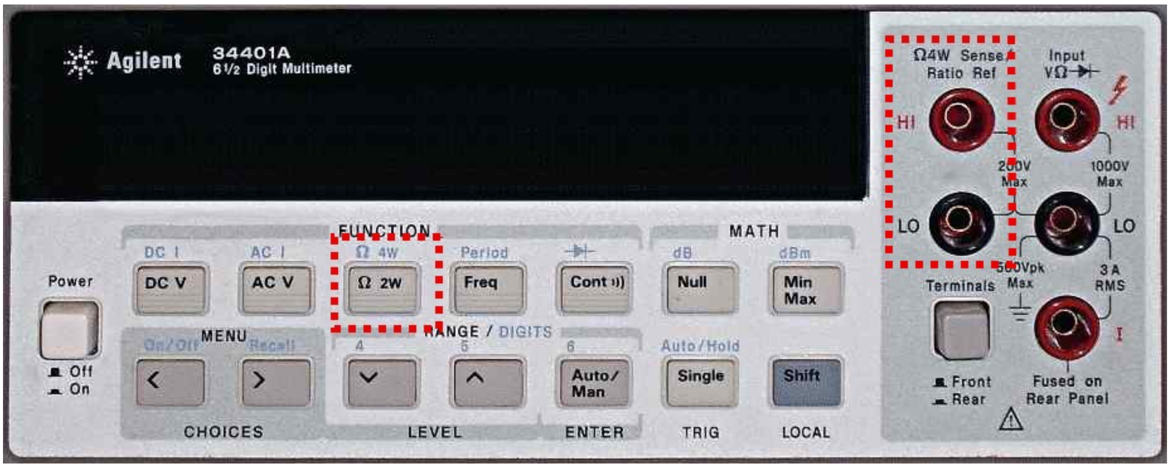


Abbildung 30: Multimeter mit Vierdrahtoption zur Widerstandsmessung

Ähnliche Schaltungsstrukturen sind bei geregelten Stromversorgungen hoher Leistung zu finden. Mittels Sense-Leitungen wird die Ausgangsspannung direkt am zu versorgenden Schaltungsteil gemessen, wodurch die (evtl. störenden) Spannungsabfälle durch Leitungen, Kontaktstellen, usw. ausgeregelt werden können!

4.1.3 Messung sehr großer Widerstände

Bei der Messung sehr großer Widerstände (Richtwert: $>20M\Omega$) wird die **geringe Größe des noch fließenden Stromes** bei den üblichen kleinen Messspannungen zum Problem. Die **Messspannung muss erhöht werden**, man spricht dann von **Isolationsmessgeräten.** Diese bieten umschaltbare Messspannungen ab etwa $100V$ **bis zu mehreren** kV.

Der Hauptbedarf der Messung sehr hoher Widerstände (Giga- bis Teraohm-Bereich) liegt bei der **Messung an Isolierstoffen** (Kunststoffe, Kabel, Folien usw.) → Isolationsmessung.

4.2 Analoge Ohmmeter

Analoge Widerstandsmessgeräte bestehen meist aus einem **Zeigermessgerät mit Drehspulmesswerk**, einem **einstellbaren Vorwiderstand** und einer **Hilfsspannungsquelle** (Batterie).

Mit **kurzgeschlossenen Messspitzen** wird mit dem Vorwiderstand der **Ausschlag** α_0 eingestellt. Danach wird der **Ausschlag** α_1 **bei angeschlossenem** R_x bestimmt. Es gilt:

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{R_V}{R_V + R_x} \Rightarrow R_x = R_V \frac{(1-\beta)}{\beta}} \quad (24)$$

Üblicherweise wird α_0 auf **Vollanschlag** eingestellt und die - **stark nichtlineare - Skalierung** entsprechend eingeteilt.Wegen des großen, über alle denkbaren Messwerte reichenden **Messbereichs** $0 \ldots \infty$ ist nur im mittleren Bereich der Skala ein einigermaßen genaues Ablesen möglich. Manche Widerstandsmesser haben einen **umschaltbaren Messbereich (unterschiedliche Vorwiderstände)**, um im mittleren Skalenbereich jeweils andere Werte bevorzugt ablesen zu können.

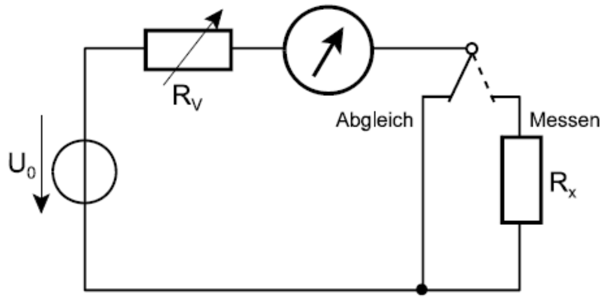


Abbildung 31: Analoges Ohmmeter - Schaltung (links) - stark nichtlineare Skala (rechts)

Die Speisung aus einer - fast immer - nicht stabilisierten Spannungsquelle (Batterie mit alterungsbedingt absinkender Spannung) ändert sich jedoch prinzipbedingt auch die Skalierung. Auch im mittleren Teil der Skala liegen daher die **typischen Fehlergrenzen bei Verwendung eines Drehspulmesswerkes etwa *10%* vom Messwert**. Lediglich die Verwendung eines Kreuzspulinstruments bringt hier Besserung, meist wird (wurde) jedoch der Widerstandsmessbereich als Zusatz in Multimetern realisiert und das dort vorhandenen einfache Drehspulmesswerk benützt.

Aufgrund der Nachteile wie der komplizierteren Anwendung, den größeren Messfehlern, der mechanischen Empfindlichkeit sind analoge Widerstandsmessgeräte **im praktischen Laborbetrieb de facto vollständig durch digitale Multimeter mit Widerstandsmessung verdrängt** worden.

4.3 Digitale Widerstandsmesser

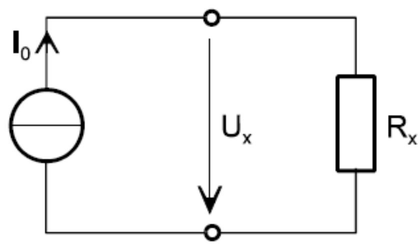


Abbildung 32: Widerstandsmessung mit Konstantstromquelle

In Digitalmultimetern und anderen Multimetern mit Messverstärkern wird ein **Widerstandsmessverfahren mit Konstantstromquelle** verwendet.

Da diese Geräte (z. B.: wegen des *ADC*) eigentlich nur Spannungen messen können, wird ein **konstanter Strom** in den Messkreis eingeprägt und der sich einstellende Spannungsabfall gemessen (verstärkt / gewandelt), wodurch in weiterer Folge über das Ohm'sche Gesetz leicht auf den Widerstand geschlossen werden kann.

Der **Konstantstrom fließt durch R_x**, wobei der **Spannungsabfall U_x proportional zu R_x** ist. Damit kann der Wert von R_x direkt durch Spannungsmessung ermittelt werden.

Nachteilig an der obigen Schaltung erweist sich die **Aufteilung des konstanten Messstroms I_0**, bedingt durch den **endlichen Eingangswiderstand R_M** Messgerätes (für $R_M >> R_x$ kann dieser systematische Fehler meist vernachlässigt werden) und des Innenwiderstandes R_I der Quelle selbst.

Wegen des endlichen Spannungsmessbereichs der folgenden Stufe muss die Konstantstromquelle in Stufen (automatisch) umschaltbar sein, z. B.: *0,1µA*; *1µA*; *10µA*; *100µA*; *1mA.*

Beispiel 11: Ein Widerstand R_X soll wird mittels eines digitalen Spannungsmessers mit Geräteinnenwiderstand R_M durch einprägen eines konstanten Stromes I_0 aus einer Stromquelle (Innenwiderstand R_I) gemessen werden. Gesucht: Gleichung für R_X unter Berücksichtigung der Leckströme durch R_I und R_M.

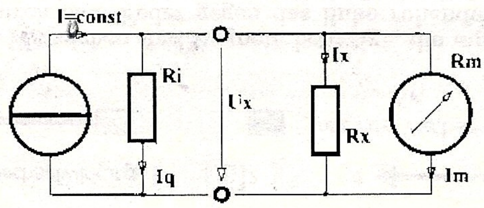


Abb. 9. Widerstandsmessung mittels konstantem Strom

~~$U_X = I_X \cdot R_X = k_0 \cdot R_X$~~ → Linearer Zeigerausschlag.

Nachteilig an der obigen Schaltung erweist sich die Aufteilung des konstanten Meßstroms I_0 bedingt durch den endlichen Innenwiderstand $\mathbf{R_M}$ des Meßgerätes (für Werte $\mathbf{R_X}$ □ $\mathbf{R_M}$ kann dieser systematische Fehler vernachlässigt werden), und der Quelle $\mathbf{R_I}$ selbst. Soll der Fehler durch die Stromteilung einberechnet werden, so ergibt sich für $\mathbf{R_X}$ (mit $R_{M0} = R_M // R_I$ und $I_{M0} = I_M + I_Q$):

$$I_0 = I_X + I_{M0} \qquad U_X = I_X \cdot R_X = I_{M0} \cdot R_{M0}$$

$$I_0 = \frac{U_X}{R_X} + \frac{U_X}{R_{M0}} \qquad R_X = \frac{U_X}{I_0 - \frac{U_X}{R_{M0}}}$$

Eine praktische Realisierung mittels **Operationsverstärker** (*OPV*) zeigt Abb. 33.

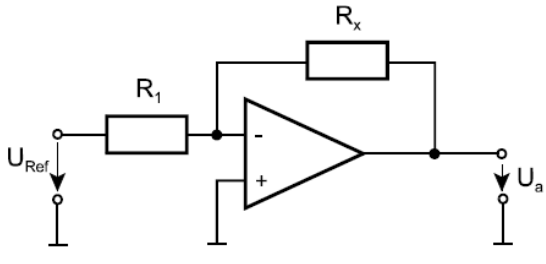


Abbildung 33: Strom-Spannungswandler mit OPV

Einen idealen[3] *OPV* vorausgesetzt wird der durch beide Widerstände fließende Konstantstrom I_0 nur durch die Referenzspannung U_{Ref} sowie den Widerstand R_1 bestimmt:

$$\boxed{I_0 = \frac{U_{Ref}}{R_1}} \qquad (25)$$

Die **Genauigkeit** der Messung hängt damit ebenfalls nur mehr von diesen Größen ab und die **Messbereichserweiterung** kann leicht durch **Änderung von R_1, U_{Ref}** oder beiden realisiert werden.

R_X berechnet sich damit aus:

$$\boxed{R_X = R_1 \cdot \left(\frac{U_a}{U_{Ref}}\right)} \qquad (26)$$

Bei **sehr kleinen Widerstandswerten** kann man die Übergangswiderstände an den Anschlussklemmen und Verbindungsleitungen nicht mehr vernachlässigen. Durch Anwendung der **Vierdrahtmessung** (vgl. §4.1.2) können aber auch diese kleine Widerstandswerte erfasst werden.

4.4 Weitere Widerstandsmessmethoden

4.4.1 Vergleich mit einem Referenzwiderstand

4.4.1.1 Spannungsvergleich

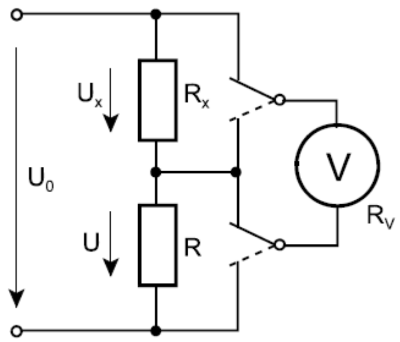


Abbildung 34: Spannungsvergleich

Eine **von systematischen Fehlern freie Widerstandsmessung** stellt der **Vergleich mit einem bekannten Referenzwiderstand *R*** dar. Hierfür werden der unbekannte Widerstand R_X und der Referenzwiderstand R in Serie geschalten und an eine **konstante Spannung U_0** gelegt. Es ergibt sich:

$$\boxed{R_X = \frac{R \cdot U_X}{U}} \qquad (27)$$

Bei Verwendung eines Vielfachmessgerätes ist darauf zu achten, dass ***U* und U_X im gleichen Messbereich** gemessen werden (eine Änderung des Messbereiches ist im allgemeinen mit einer Ände-

3 Die Spannung zwischen den beiden Eingangsklemmen (- und +) ist exakt *0* Volt. Es liegt somit auch der invertierende Eingang (–) virtuell auf Masse. Weiters hat der ideale OPV einen Eingangswiderstand von ∞, womit der Eingangsstrom 0 wird und es daher am eingangseitigen Stromknoten zu keiner Stromteilung kommt.

rung des Innenwiderstandes verbunden). Wird dies berücksichtigt, lässt sich zeigen, dass der Innenwiderstand R_V des Messgerätes keinen Einfluss auf die Messung hat!

Beispiel 12: Es ist die Unabhängigkeit der Messung von R_X vom Innenwiderstand R_V des Messgerätes zu beweisen!

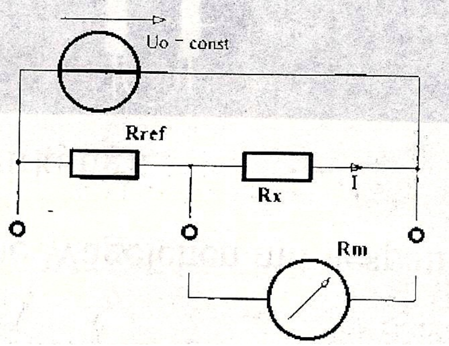
Wird die Spannung an den beiden Widerständen gemessen so ist die Parallelschaltung des Innenwiderstandes **R**$_M$ des **MW** zu beachten. Für die Teilspannung ergibt sich:

$$U_{REF} = U_0 \cdot \frac{R_{REF} // R_M}{R_{REF} // R_M + R_X} = U_0 \cdot \frac{R_{REF} R_M}{R_{REF} R_M + R_X (R_{REF} + R_M)}$$

$$U_X = U_0 \cdot \frac{R_X // R_M}{R_X // R_M + R_{REF}} = U_0 \cdot \frac{R_X R_M}{R_X R_M + R_{REF} (R_X + R_M)}$$

Werden die beiden Teilspannungen **U**$_X$ und **U**$_{REF}$ zueinander in Relation gesetzt. So fällt der Einfluß des Innenwiderstandes **R**$_M$ des **MW** aus der Rechnung und es ergibt sich für **R**$_X$:

$$R_X = R_{REF} \frac{U_X}{U_{REF}}$$



4.4.1.2 Stromvergleich

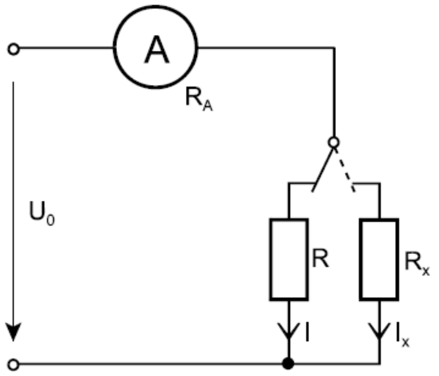


Abbildung 35: Stromvergleich

$$U_0 = (R + R_A) \cdot I_x = (R + R_A) \cdot I$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{R_X = (R + R_A) \cdot \frac{I}{I_X} - R_A}} \qquad (28)$$

Hierbei wird ebenfalls zwischen dem **bekannten Widerstand *R*** und **unbekannten *R*$_X$ umgeschaltet** und dabei **jeweils der Strom gemessen**. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

4.5 Brückenschaltungen

Brückenschaltungen dienen zur **Messung von Widerständen und Impedanzen**. Die Grundschaltung wurde von **Wheatstone** (1843) angegeben. Sie besteht aus **zwei Spannungsteilern** mit den Widerständen R_1 bis R_4, die an der **Brückenspeisespannung U_0** liegen.

Brückenschaltungen lassen sich mit Gleich- oder Wechselspannungen oder entsprechenden Strömen betreiben.

Abb. 36 zeigt die Grundschaltung. Zwischen den Punkten A und B lässt sich die **Brückendiagonalspannung U_d** abgreifen. Es wird zwischen **Abgleich-** und **Ausschlagmessbrücken** unterschieden.

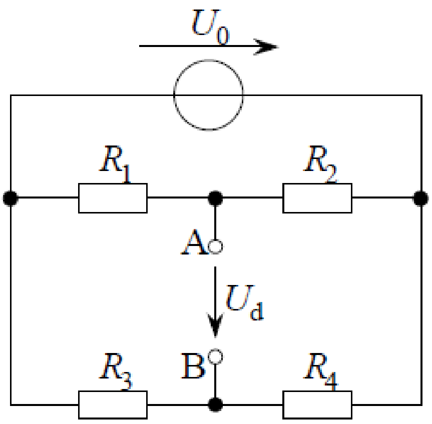


Abbildung 36: Wheatstone-Brücke

4.5.1 Widerstandsmessbrücke

Mit der Schaltung nach Abb. 37 soll die Größe des **unbekannten Widerstandes R_1** bestimmt werden. Ein zweiter Widerstand, z. B. R_3 wird **variabel** ausgeführt.

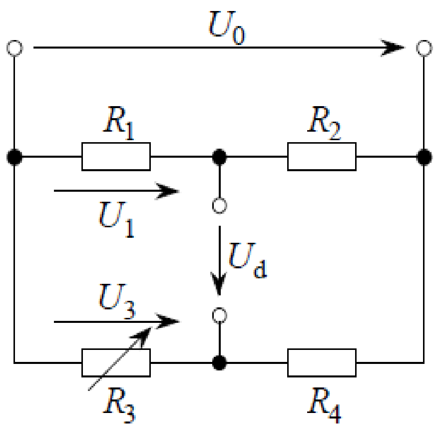


Abbildung 37: Widerstandsmessbrücke

Die Brücke ist **abgeglichen**, wenn die **Brückendiagonalspannung U_d null** ist, also wenn gilt:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}} \qquad (29)$$

Der **gesuchte Widerstandswert R_1** ergibt sich zu :

$$R_1 = \frac{R_2}{R_4} \cdot R_3 \qquad (30)$$

Falls, (wie oft üblich) gilt $R_2 = R_4$ folgt $R_1 = R_3$.

4.5.2 Schleifdrahtmessbrücke

Die früher oft verwendete Schleifdrahtmessbrücke findet man häufig als **selbstabgleichende Brückenschaltung**. Abbildung 38 zeigt das Prinzipschaltbild.

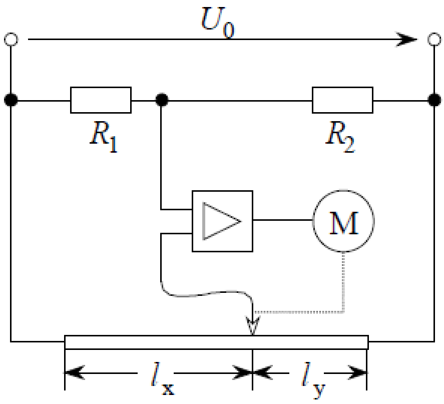


Abbildung 38: Schleifdrahtmessbrücke

Die Brückenwiderstände R_3 und R_4 werden durch ein Potentiometer („Schleifdraht“) gebildet. Die Brückendiagonalspannung wird verstärkt und der Potentiometerabgriff über den Motor M verstellt, bis die Abgleichbedingung erfüllt ist. Es gilt:

$$R_x = \frac{l_x \cdot \rho}{A} \quad ; \quad R_y = \frac{l_y \cdot \rho}{A} \qquad (31)$$

Dabei sind: l_x, l_y … Länge des Schleifdrahtabgriffs

ρ ….... spezifischer Widerstand des Schleifdrahtes

A ….... Querschnitt des Schleifdrahtes

Die Abgleichbedingung lautet:

$$R_1 = \frac{l_x}{l_y} \cdot R_2 \qquad (32)$$

4.5.3 Ausschlagbrücken

Neben ihrer Funktion als **Impedanzmessbrücke** bilden die Brückenschaltungen die wichtigsten Zwischen- oder Interfaceschaltungen zum **Anschluss von Messwertaufnehmern (Sensoren)**.

Da die Widerstands- oder Impedanzänderungen aufgrund der Änderung der physikalischen oder technischen Messgrößen oft sehr klein sind, misst man diese Änderungen **in der Umgebung des Abgleichpunktes**.

4.5.3.1 Gleichspannungs-Ausschlagbrücke

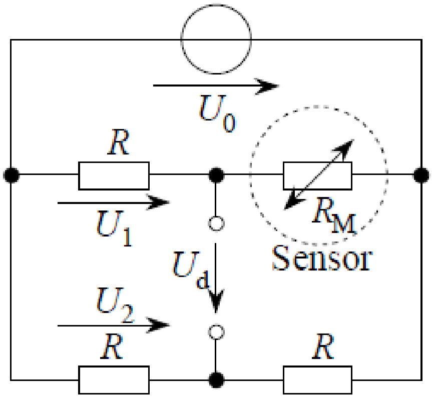


Abbildung 39: Gleichspannungsgespeiste Ausschlagbrücke

Abbildung 39 zeigt die prinzipielle Schaltung. Für den als Funktion der Messgröße veränderlichen **Widerstand des Messwertaufnehmers** (Sensors) $\boldsymbol{R_M}$ gilt :

$$\boxed{R_M \;=\; R \pm \Delta R \;=\; R\left(1 \pm \frac{\Delta R}{R}\right)} \qquad (33)$$

Die **Messspannung** $\boldsymbol{U_d}$ ergibt sich dann mit $U_d = U_2 - U_1$ zu :

$$\boxed{U_d \;=\; U_0\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{R+R_M}\right) \;=\; \frac{U_0}{2}\cdot\frac{R_M - R}{R_M + R}} \quad (34)$$

Obiger Ausdruck für $\boldsymbol{U_d}$ **kann als Funktion von** $\boldsymbol{R_M/R}$ umgeschrieben werden ($\boldsymbol{U_d = f(R_M/R)}$):

$$\boxed{U_d \;=\; \frac{U_0}{2}\cdot\frac{\frac{R_M}{R}-1}{\frac{R_M}{R}+1}} \qquad (35)$$

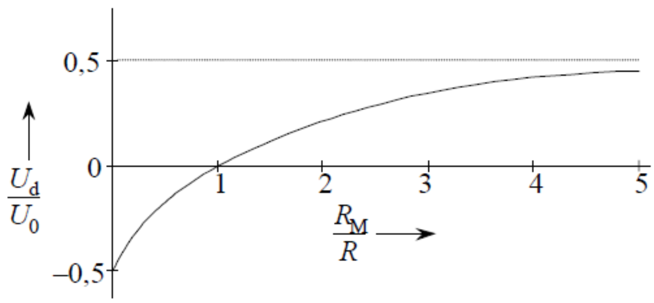


Abbildung 40: Brückenkennlinie

Diese Kennlinie ist **nichtlinear**. Man erkennt die Grenzfälle:

$$\boxed{\begin{array}{l} R_M \rightarrow 0 \;\Rightarrow\; U_d \rightarrow -U_0/2 \\ R_M \rightarrow R \;\Rightarrow\; U_d \rightarrow 0 \\ R_M \rightarrow \infty \;\Rightarrow\; U_d \rightarrow +U_0/2 \end{array}} \qquad (36)$$

Meist wird nur in Umgebung des **Abgleichpunktes** $\boldsymbol{R_M/R = 1}$ gemessen und die Kennlinie **linearisiert**, wobei dann **nur kleine Widerstandsänderungen** $\boldsymbol{\Delta R \ll R}$ zugelassen werden.

Bei vielen Messaufgaben verwendet man Aufnehmerelemente, die ihre Widerstandswerte als Funktion der Messgröße gegenläufig ändern. Bekanntestes Beispiel sind Dehnungsmessstreifen. Es handelt sich also um Brückenschaltungen, bei denen ein, zwei oder vier Widerstände veränderlich ausgeführt sind → **Viertelbrücke** (Abbildung 42, Seite 4-13), **Halbbrücke**, **Vollbrücke.**

4.5.3.2 Ausschlagbrücke mit Stromspeisung

Bei **hochohmigen Aufnehmern** kann die **Speisung** der Brückenschaltung mit **konstantem Strom** vorteilhaft sein.

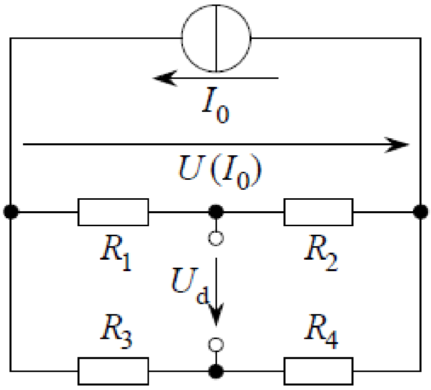


Abbildung 41: Stromgespeiste Ausschlagbrücke

Bei einer **fast abgeglichenen Viertelbrückenschaltung** mit $R_2 = R_3 = R_4 = R$ und $R_1 = R(1+\Delta R/R)$ folgt schließlich :

$$\boxed{U_d \approx -\frac{I_0}{4}\cdot\Delta R} \qquad (37)$$

Wie aus Abbildung 42, Seite 4-13 ersichtlich sind natürlich auch für stromgespeiste Ausschlagmessbrücken Viertel-, Halb- und Vollbrückenschaltungen möglich!

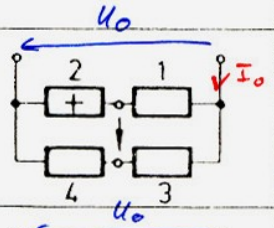
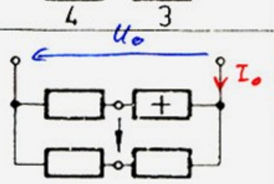
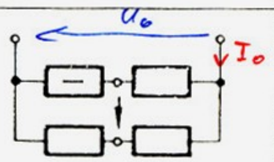
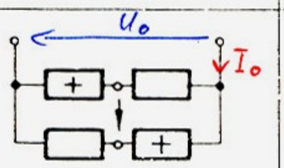
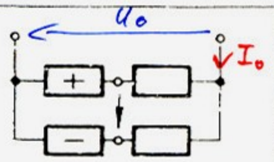
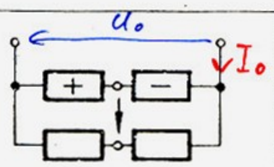
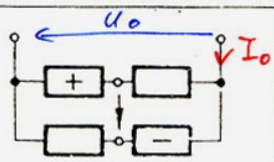
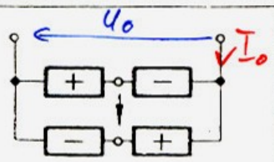
		U_0 – gespeist	I_0 – gespeist	
a		$U_d \approx + \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d \approx \frac{I_0}{4} \Delta R$	Viertel-brücke
b		$U_d \approx - \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d \approx - \frac{I_0}{4} \Delta R$	
c		$U_d \approx - \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d \approx - \frac{I_0}{4} \Delta R$	
d		$U_d \approx \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d = \frac{I_0}{2} \Delta R$	
e		$U_d \approx \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d = \frac{I_0}{2} \Delta R$	Halb-brücke
f		$U_d = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d = \frac{I_0}{2} \Delta R$	
g		$U_d \approx - \frac{U_0}{4} \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2$	$U_d = - \frac{I_0}{4} \frac{\Delta R}{R_0} \Delta R$	
h		$U_d = U_0 \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_d = I_0 \Delta R$	Voll-brücke

Abbildung 42: Diagonalspannung U_d für verschiedene Brückenanordnungen. Die nicht bezeichneten Widerstände haben den Wert R_0, die mit "+" gekennzeichneten $R_0 + \Delta R$, die mit "-" gekennzeichneten den Wert $R_0 - \Delta R$

Beispiel 13: Es ist die Begründung für Gleichung (37) abzuleiten, unter der Annahme der fast abgeglichenen, stromgespeisten Viertelbrücke!

9.2.2 Ausschlagbrücke mit Stromspeisung

Bei hochohmigen Aufnehmern kann die Speisung der Brückenschaltung mit einem konstanten Strom vorteilhaft sein. Aufgrund der Stromeinspeisung ergibt sich an der Parallelschaltung der beiden Spannungsteiler $(R_1+R_2)\|(R_3+R_4)$ die Spannungsdifferenz $U(I_0)$. *1)

$$U(I_0) = I_0 \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}.$$

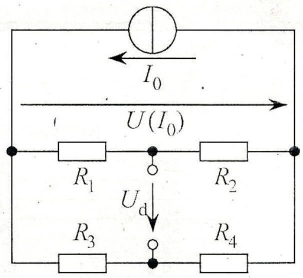


Abb. 9-14: Ausschlagbrücke mit Stromspeisung

Setzt man diese Brückenspannung $U(I_0) = U_0$ in die Gleichung für U_d der Weatstonschen Brücke ein, dann erhält man für die Diagonalspannung U_d

$$U_d = I_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}.$$

Bei einer fast abgeglichenen Viertelbrückenschaltung mit $R_2 = R_3 = R_4 = R$ und $R_1 = R(1+\Delta R/R)$ folgt schließlich

$$U_d \approx \frac{-I_0}{4} \cdot \Delta R.$$

*1) $\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4} = \frac{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U_0\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right) = U_0\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) \\ U_3 &= U_0\left(\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) = U_0\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right) \end{aligned}\right\} U_d = U_3 - U_1$$

$$U_d = U_0 \frac{R_3(R_1+R_2) - R_1(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = U_0 \frac{\cancel{R_3R_1} + R_2R_3 - \cancel{R_1R_3} + R_1R_4}{(\ )(\ )} =$$

$$U_0 \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} =$$

$$= I_0 \frac{\cancel{(R_1+R_2)}\cancel{(R_3+R_4)}}{\Sigma R} \cdot \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{\cancel{(R_1+R_2)}\cancel{(R_3+R_4)}} = I_0 \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

$R_2 = R_3 = R_4 = R \qquad R_1 = R\left(1+\frac{\Delta R}{R}\right)$

$$U_d = I_0 \frac{R^2 - R\cdot(R+\Delta R)}{4R + \Delta R} \approx -\frac{I_0}{4}\cdot\Delta R$$

4.5.4 Brückeninnenwiderstand

Jedes Netzwerk, bestehend aus Spannungsquellen, Widerständen sowie zwei Ausgangsklemmen, lässt sich nach dem Helmholtz'schen Satz durch eine **Serienschaltung von äquivalenter Spannungsquelle $U_{äq}$ und äquivalentem Innenwiderstand $R_{äq}$** beschreiben.

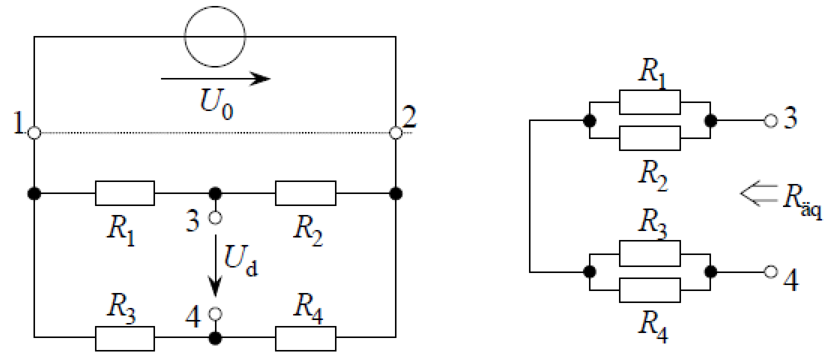


Abbildung 43: Brückenschaltung mit Ersatzschaltung

Dies ist insbesondere dann interessant, wenn die **Beeinflussung der Brückendiagonalspannung** durch die Anschaltung einer mit endlichem **Eingangswiderstand R_B behafteten Messeinrichtung** untersucht werden soll.

Beispiel 14: Unter der Voraussetzung einer idealen Spannungsquelle U_0 mit dem Innenwiderstand $R_0 = 0\ \Omega$ (Ebene 1–2), sollen die Parameter ($U_{äq}$, $R_{äq}$, I_B bei bekanntem R_B) der Ersatzspannungsquelle nach Abbildung 43 rechts berechnet werden !

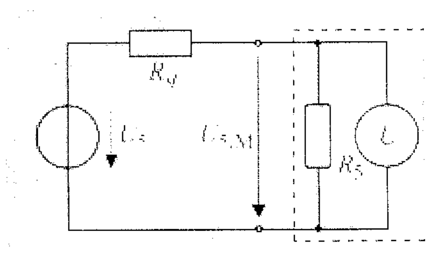
$$U_1 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_4 = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$U_d = U_1 - U_3 = U_0 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

$$= U_0 \frac{R_2 R_3 - R_4 R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Bei der Messung dieser Spannung ist zu beachten, dass sie mit einem beträchtlichen Quellenwiderstand R_q aufgrund der Spannungsteiler verbunden ist. Bei idealer Quelle der Speisespannung U_0 (mit $R_0 = 0$ zwischen dem oberen Anschluss von R_4 und dem unteren Anschluss von R_3) ist unmittelbar an der Schaltung ersichtlich:



Ersatzschaltung für die Ausgangsspannung

 Nur für den schulinternen Gebrauch!

$$R_q = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Für eine symmetrische Brücke mit $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ gilt damit $R_q = R$.

Zusammen mit einem nicht idealen Spannungsmessgerät mit einem Innenwiderstand $R_5 < \infty$ kann das zu einer beträchtlichen Messabweichung führen, da die gemessene Spannung $U_{5,M}$ gegenüber der Leerlaufspannung U_5 um den Faktor $R_5/(R_5 + R_q)$ kleiner ist; siehe reale Spannungsquelle.

4.6 Quelleninnenwiderstand

Nicht alle Widerstände lassen sich so einfach bestimmen. Ein Beispiel dafür ist die **Bestimmung des Innenwiderstandes einer Spannungsquelle**. Es bestehen prinzipiell drei Möglichkeiten

a) **Leerlauf- und Kurzschlussmessung**

Während die Messung der Leerlaufspannung mit den heutige üblichen hochohmigen (digitalen) Spannungsmessern üblicherweise sehr einfach und genau möglich ist, kann die **Messung des Kurzschlussstromes große Probleme** bereiten. Bei sehr nie derohmigen Spannungsquellen treten extreme Kurzschlussströme auf, die einerseits schwierig zu messen sind (Messbereich, Stromtragfähigkeit der Messleitungen, ...), andererseits aber auch durch enorme **am Innenwiderstand dissipierten Energien** zur Zerstörung der Spannungsquelle führen können (z. B.: Autobatterie)

b.) **Messung von zwei Punkten auf Quellenkennlinie**

Messung von **Leerlaufspannung und einem Lastfall**. Ist der **Innenwiderstand sehr klein**, so ist der Spannungsabfall zufolge der Belastung ebenfalls sehr klein und der **Messfehler** durch die Fehlerfortpflanzung sehr groß. Der Innenwiderstand entspricht:

$$\boxed{R_i = \frac{\Delta U}{I_{Last}} \quad ; \quad \Delta U = U_{Last} - U_0} \qquad (38)$$

c.) **Spannungskompensation**

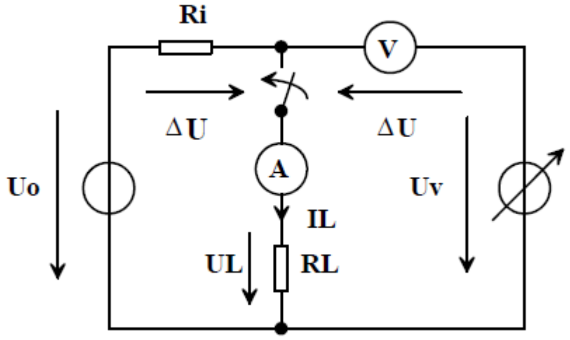


Abbildung 44: Bestimmung des Quelleninnenwiderstands durch Spannungskompensation

Eine **elegante Methode** zur Bestimmung des Quelleninnenwiderstandes besteht dar in das in der Schaltung in Abbildung 44 die **variable Quelle** solange justiert wird, bis das **Voltmeter keinen Ausschlag** mehr zeigt. Hierbei kann in den **kleinsten Messbereich** geschaltet werden die Messung ist daher **sehr genau**.

Nach dem Abgleich wird der **Schalter umgelegt** und der **Spannungsabfall am Volt meter** abgelesen, er **entspricht dem Abfall am Innenwiderstand**.

$$\boxed{R_i = \frac{\Delta U}{I}} \qquad (39)$$

Wegen der **Hochohmigkeit des Voltmeters** fließt der **Laststrom** de facto **ausschließlich aus der zu messenden Quelle**.

Mittels dieser Methode können Innenwiderstände von geregelten Labornetzteilen bestimmten werden. **Vorteil**: **Messung kann sehr genau ohne Schaden durchgeführt werden (*mΩ*-Bereich)**.