6 Signalklassen und Signalkennwerte

Die in weiterer Folge eingeführten Definitionen gelten allgemeinen für **jede Art** von physikalischen Signalen – somit gleichermaßen für Strom *i(t)* als auch Spannung *u(t)*. Sollen für veränderliche Signale Kennwerte gefunden werden so müssen folgen Eigenschaften des Signals beschrieben werden:

- **Beschreibung des Zeitverhaltens des Signals (kann beliebig kompliziert werden).**
- **Angaben über den Wert oder die Größe des Signals.**
- **Für einfache Signale die Beschreibung der Kurvenform.**

6.1 Signalklassen

Ein Signal kann als die Veränderung einer physikalischen Größe oder Eigenschaft (z.B.: Spannung, Druck oder Lichtstärke) die als Träger der Information dient, verstanden werden.

Für diese Veränderungen können Kennwerte definiert werden die eine einfache Charakterisierung des Signals ermöglichen.

Prinzipiell lassen sich die Signale nach der **Art oder Systematik** dieser Veränderung der physikalische Größe in mehrere Klassen einteilen:

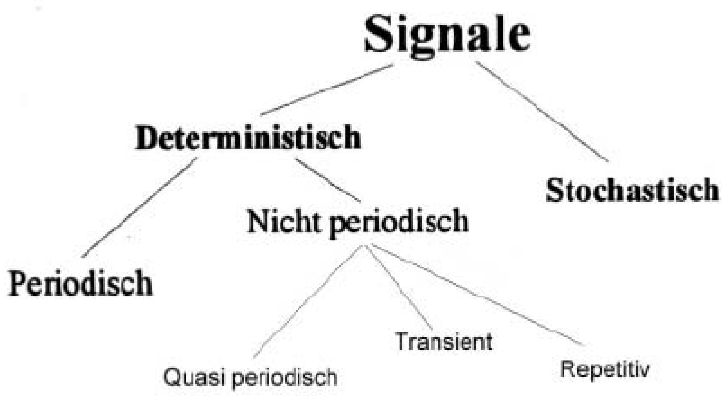


Abbildung 1: Unterteilung der Signale in verschiedene Klassen

Lässt sich der Signalverlauf **zeitlich vorhersagen** oder folgt er **mathematischen Gesetzmäßigkeiten**, so fällt das Signal in die Klasse der **deterministischen** Signale (vorhersagbar), anderenfalls ist das Signal **stochastischer** Natur.

Für deterministische Signal gilt, dass sie für jeden beliebigen Zeitpunkt eindeutig definiert sind.

6.1.1 Deterministische Signale

Deterministische Signale sind in eindeutiger Weise funktional darstellbar. Das bedeutet, der **Momentanwert *x(t)*** des Signals kann für **jeden beliebigen Zeitpunkt *t*** berechnet werden.

Kann die mathematische Beschreibung des Signals durch elementare mathematische Funktionen erfolgen, so wird das Signal zu den Elementarsignalen gezählt (z.B. Rechteck-, Dreieck-, Sägezahn- oder Sinusfunktionen).

Sind die, das Signal beschreibenden Kennwerte wie Amplitude und Frequenz für jeden Beobachtungszeitraum gleich so fällt des Signal in die Klasse der **periodischen** Signale.

Dies bedeutet, dass sich der zeitliche Verlauf des Momentanwertes *x(t)* nach einer Zeitspanne *T* exakt wiederholt[1].

Die Signalkennwerte können zu beliebigen Zeitpunkten gemessen werden (nicht notwendiger Weise gleichzeitig).

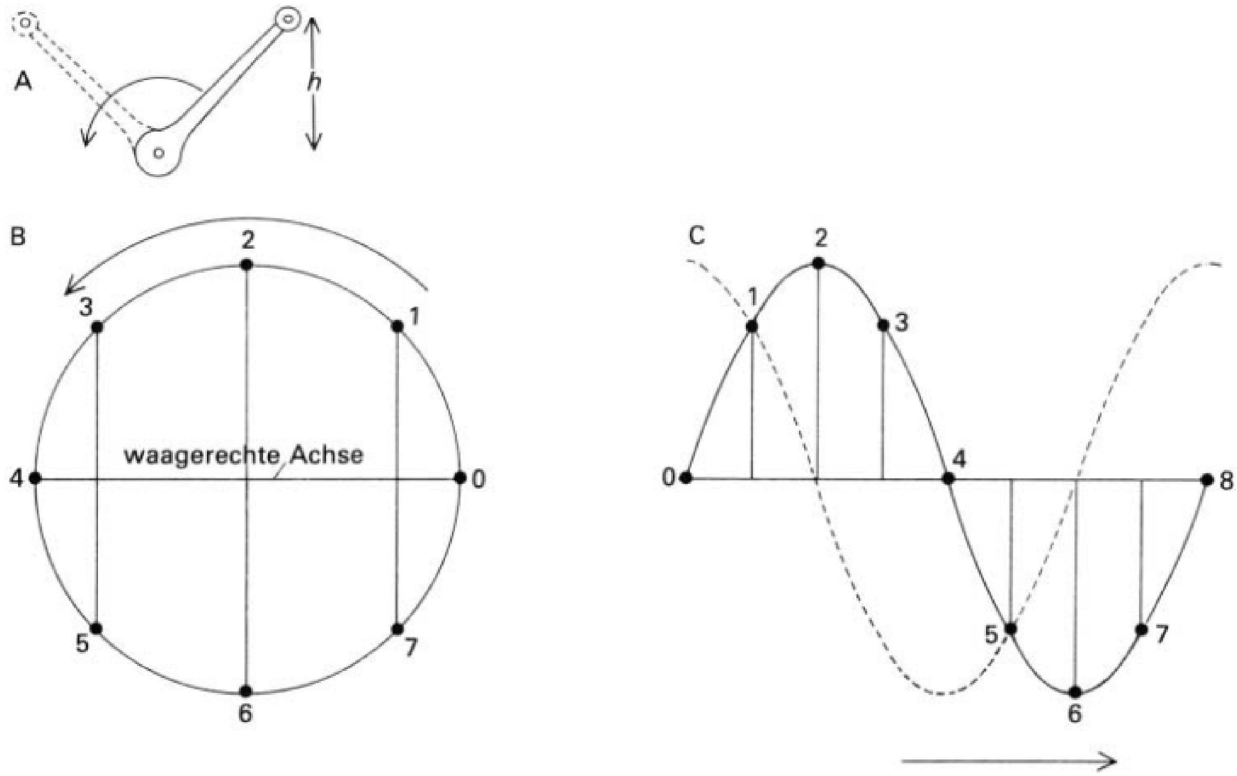


Abbildung 2: Konstruktion der Sinusfunktion über mechanische Kurbel

Für den Fall der Sinusfunktion lässt sich deren Konstruktion einfach auf ein mechanisches Analogon zurückführen. Wird die Bewegung einer Kurbel (**A**) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω

1 Die Zeitspanne *T* nach der sich die Momentanwerte *x(t)* des Signals wieder **exakt** wiederholen, wird als **Periodendauer** des Signals bezeichnet. Es ist also nur notwendig das Signal innerhalb einer Periodendauer *T* zu beobachten um seinen zukünftigen Verlauf vollständig beschreiben zu können.
Wird beispielhaft von einer sinusförmigen Änderung der Momentanwerte ausgegangen, so beschreibt die Periodendauer auch die Zeit die zwischen zwei Schwingungskämmen.

(**B**) über die Zeit betrachtet dargestellt, so entsteht hierdurch eine sinusförmige Auslenkung (Elongation) *h* des Kurbelgriffes (**C**).

6.1.1.1 Periodische Signale

Für periodische Signale (z.B.: Sinus-, Dreieck-, Rechtecksignal) gilt, dass sich die Momentanwerte *x(t)* nach der **Periodendauer *T*** exakt wiederholen.:

$\boxed{x(t) = x(t + kT)}$ (1) für $k = 0, 1, 2, \ldots$ T ... Periodendauer des Signals

Für sinusförmige Größen bedeutet dies, dass die **Periode *T*** also der Zeit entspricht, nach der die maximale Auslenkung nach einer **vollständigen Schwingung** wieder erreicht wird. Sie wird gewöhnlich in **Sekunden** *s* angegeben.

Die **Anzahl der Auslenkungen pro Sekunde** kann aus dem Kehrwert der Periodendauer *T* errechnet werden und wird **Frequenz *f*** bezeichnet. Sie berechnet sich zu:

$\boxed{f = 1/T}$ (2) f ... Frequenz[2] des Signals $[f] = 1/s = Hz$

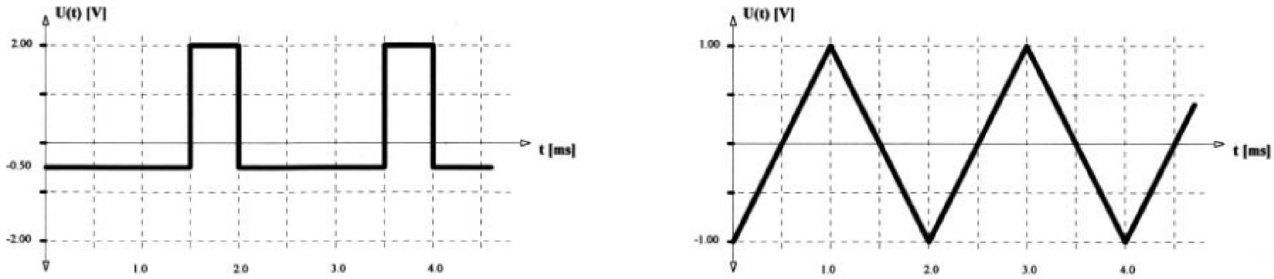


Abbildung 3: Beispiel für periodische Funktionen, z.B. Rechteck- und Dreieckfunktion

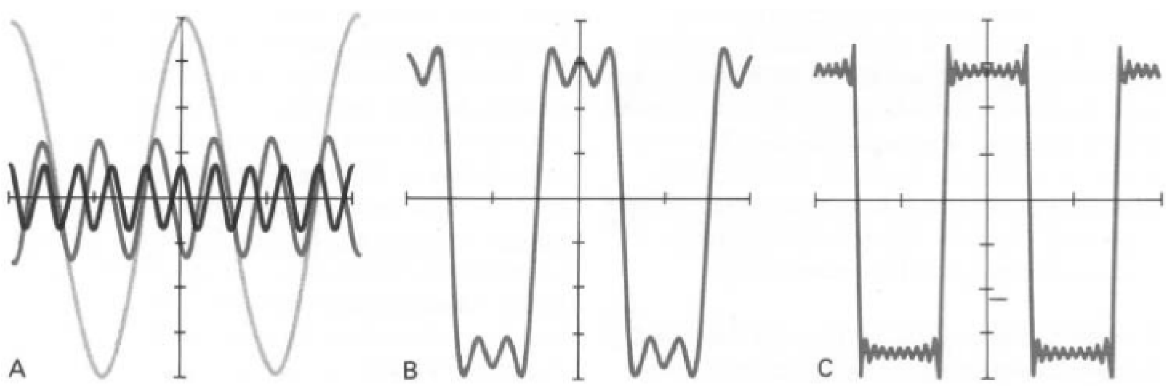


Abbildung 4: (A) - Drei Sinusschwingungen mit den Frequenzen f_0, $3f_0$ und $5f_0$,
(B) – Überlagerung der drei Sinusschwingungen durch Addition,
(C) – Annäherung einer Rechteckschwingung durch Sinus-Komponenten; dargestellt ist die Summe der ersten 19 Glieder der Fourierreihe.

2 Die Frequenz des **Kammertones A** beträgt ***440Hz***. Die Periodendauer der Schwingung berechnet sich entsprechend zu $T = 1/f = 2{,}2727ms$

Eine wesentliche Eigenschaft aller periodischen Signale ist, dass sie sich unabhängig von der Signalform in eine sg. Fourierreihe zerlegen lassen.

Das Signal kann somit über seine **Grundschwingung** (gegeben durch die Periodendauer des Signals) und die **Oberschwingungen**[3] dargestellt werden.

Das bedeutet, dass sich jedes periodische Signal aus einer Überlagerung von einzelnen Sinusschwingungen bestimmter Amplitude, Frequenz und Phasenlage darstellen lässt.

Aus den obigen Überlegungen lässt sich die **übergeordnete Bedeutung der Sinusfunktion**[4] unter den periodischen Signalen erklären.

6.1.1.2 Nicht periodische Signale

Zeigt das Signal keinerlei Periodizität im Kurvenverlauf so fällt es unter die **nicht periodischen** Signale.

Eine Untergruppe dieser nicht periodischen Signale stellen die **quasiperiodische** Signale dar. Diese zeigen zwar für kurze Beobachtungszeiträume Periodizität, für längere Beobachtungszeiträume zeigen sich jedoch Schwankungen der Signalkennwerte.

In diese Klasse von Signalen fallen z.B. die **Resonanzphänomene**. Diese erscheinen über kurze Zeiträume beobachtet als periodisches Signal. Für längere Zeiträume ändern sich die Signaleigenschaften (z.B.: Amplitude der Schwingung) aber nachhaltig.

Eine andere Untergruppe, vor allem im Bereich der Digitaltechnik sehr verbreitet, stellen die **repetitiven** Signale dar. Diese zeigen zwar für kurze Beobachtungszeiträume identische Impuls- oder Kurvenformen, aber ständig wechselnde Signalpausen (z.B. Impulsgruppen – der Impuls zeigt immer die gleiche Form aber die Pausen zwischen den Impulsen variieren).

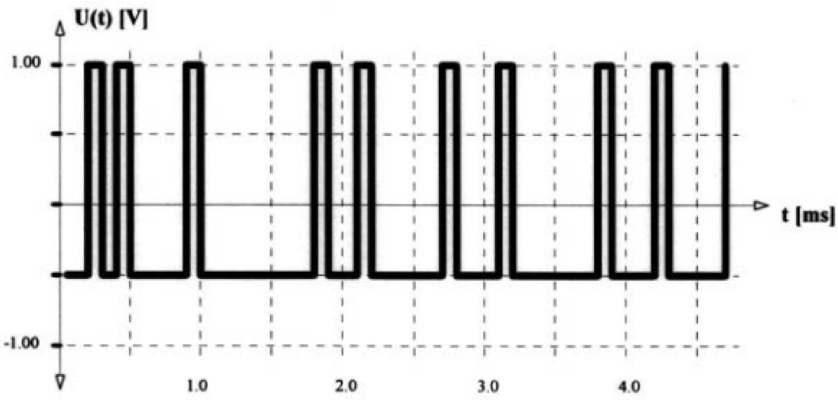


Abbildung 5: Beispiel für ein repetitives Signal an Hand von Rechteckimpulsen

3 Die Frequenz der Oberschwingungen ist immer ein **ganzzahliges Vielfaches** der Frequenz der Grundschwingung. Grund- und Oberschwingungen werden auch als **Harmonische** bezeichnet – hierbei ist die **erste Harmonische** die **Grundschwingung**, dem entsprechend ist die erste Oberschwingung die **zweite Harmonische**.

4 **Alle physikalischen Schwingungen** folgen der Sinusfunktion (z. B.: Pendelbewegung des Federpendels) oder einer Überlagerung von verschiedenen Sinusschwingungen!

Abschließend sei noch die Gruppe der **transienten** Signale erwähnt, diese treten im allgemeinen bei Ein- und Ausschaltvorgängen auf und zeigen keinerlei Regelmäßigkeit.

Sie charakterisieren ein System beim **Übergang** von einem Zustand (z.B. Ruhe- oder Ausgangszustand) in den Folgezustand (angeregter oder eingeschwungener Zustand).

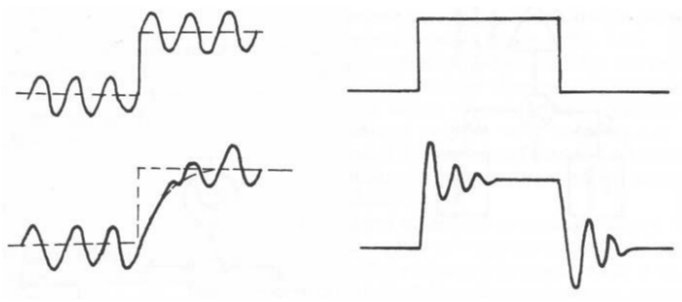


Abbildung 6: Beispiel für ein transientes Signal an Hand von Rechteckimpulsen, oben Eingang, unten Ausgang des Systems.
***links**: überlagerter Sprung – Signalverzerrungen aufgrund mangelhafter Übertragungseigenschaften eines Systems.*
***rechts**: ringing – Schwingung eines resonanzfähigen Systems beim Übergang zwischen zwei stabilen Zuständen, z.B.: logisches Signal innerhalb einer digitalen Baugruppe.*

6.1.1.3 Stochastische Signale

Stochastische Signale zeichnen sich durch ihren rein zufälligen Zeitverlauf aus.

Es können für keinen Zeitpunkt Momentanwerte des Signals berechnet oder angegeben werden und das Signal ist somit auch nicht vorhersagbar, sondern zeigt einen vollständig statistischen Charakter.

Ein Beispiel für ein stochastische Signal stellt das thermische **Rauschen**[5] (weißes Rauschen – thermal noise oder Johnson noise) in ohmschen Widerständen dar. Die Rauschgrößen können durch Ihren Effektivwert, ihre spektrale Verteilung oder durch ihre Amplitudenverteilung beschrieben werden.

Das Rauschen ist im Allgemeinen ein **störender** Signalanteil, der seine Ursprung nicht immer im System selbst haben muss, sondern auch von außen in des System eingestreut werden kann. Normalerweise ist der Rauschanteil an einem Signal **unerwünscht** es zeigt sich jedoch, dass jedes Signal notwendigerweise einen bestimmten **Rauschanteil aufweisen muss**. Ein Signal ohne Rauschen ist **technisch unmöglich**.

Eine wichtige Kenngröße des Signals ist deshalb sein *Signal-Rauschabstand SNR* (signal to noise ratio).

Dieser gibt das Verhältnis von Signalleistung zu Rauschleistung an

5 Thermisches Rauschen wird durch die statistische Bewegung der Elektronen innerhalb des Kristallgitters von Halbleitern oder allgemein kristallinen Festkörpern verursacht. Die spektrale Verteilung thermischen Rauschens ist nahezu eine Gleichverteilung, deshalb auch der Name weißes Rauschen.

und wird im Allgemeinen in *dB* angegeben.

$$\boxed{SNR = 10 \log (P_{SIGNAL}/P_{NOISE})} \qquad (3) \qquad [SNR] = dB$$

Beispiel 1: Bei Empfangsversuchen an einer Richtfunkstrecke wurde ein *SNR* von *-3dB* gemessen. Die wievielfache Sendeleistung ist erforderlich, um ein *SNR* von *+3dB* zu erreichen? Welches *SNR* kann erreicht werden wenn senderseitig die Leistung um *10dB* erhöht wird?

4fach - +7dB

6.2 Signalkennwerte

Im Allgemeinen können für beliebige Signalformen keine vollständigen Beschreibungen gefunden werden[6].

Wird die Betrachtung aber auf elementare – „einfachste“ Signalformen reduziert so können für deren zeitlichen Verlauf mathematische Beschreibungen gefunden werden.

Für ein **sinusförmiges Signal** gibt es eine elementare mathematische Beschreibung:

$$\boxed{x(t) = \hat{X} \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \qquad (2)$$

mit $\hat{X}$ als **Scheitel- oder Spitzenwert** des Signals. Der **zeitliche Verlauf** wird durch die Sinusfunktion beschrieben. **Wie schnell** sich das Signal ändert wird durch seine **Frequenz** (**Kreisfrequenz ω**) $f = \omega/2\pi$ festgelegt. Die Angabe eines **Phasenwinkels φ** ist nur dann sinnvoll wenn das Signal relativ zu einem Bezugszeitpunkt oder einem Referenzsignal beschrieben werden soll.

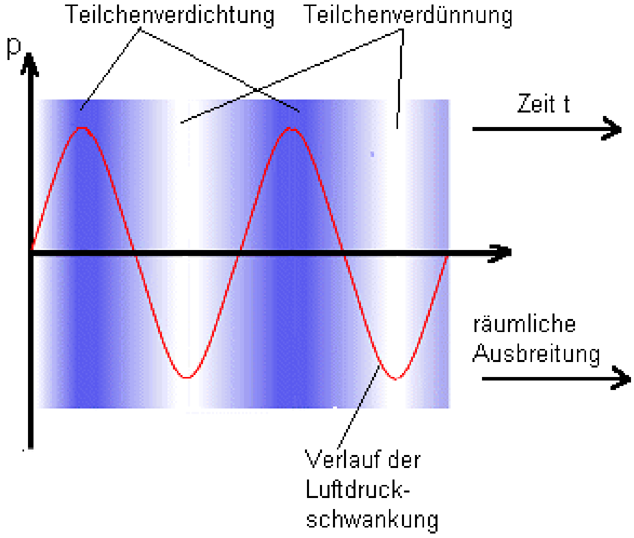


Abbildung 7: Ein "reiner" sinusförmiger Ton

6 z.B. lässt sich ein Rauschsignal (*noise*) nicht vollständig beschreiben, sein Verhalten kann lediglich über statistische Kennwerte beschreiben werden. Sein zeitliches Verhalten kann weder beschrieben noch vorausgesagt werden. Es können auch keine Aussagen über seinen augenblicklichen Wert getroffen werden.

Als Beispiel für ein sinusförmiges Signal kann die, von einer akustischen Signalquelle hervor gerufene Luftdruckschwankung herangezogen werden. Diese Luftdruckschwankungen werden vom Menschen als Ton[7] wahrgenommen. Wird hierbei die Größe f – Frequenz – variiert so nehmen wir dies als Änderung der Tonhöhe wahr. Wird die Größe $\hat{X}$ (Amplitude) variiert so ist dies als Lautstärkeänderung wahrnehmbar. „Reine" sinusförmige Töne kommen in der Natur praktisch nicht vor. Wird eine Stimmgabel nur ganz leicht angeschlagen so ist ihr Ton nahezu sinusförmig. Wird der Luftdruck über ein Mikrofon aufgezeichnet und auf einem Oszilloskop dargestellt so folgt er einer Sinusfunktion (vgl. Abb. 7).

6.2.1 Begriffsdefinitionen

Für die Beschreibung eines zeitlich veränderlichen periodischen Signals sind sogenannte Kennwerte (Kenngrößen) definiert.

Signalkennwerte stellen eine komprimierte Form an Information der zeitlich veränderlichen Signale dar.

Ein Kennwert beschreibt dabei eine bestimmte Eigenschaft einer Kurvenform.

Die Kennwerte gliedern sich in **lineare** (Kenngrößen erster Ordnung) und **quadratische** Kenngrößen (Kenngrößen zweiter Ordnung).

Lineare Kenngrößen sind dadurch gekennzeichnet, das Sie sich stets auf ein **einzelnes Signal** beziehen, **Kenngrößen zweiter Ordnung** beziehen sich entweder auf das **quadrierte Signal** oder auf das **Produkt zweier Signale**.

Im folgenden sollen die wichtigsten in der Messtechnik verwendeten Kenngrößen vorgestellt und am Beispiel einer **reinen Sinusfunktion ohne Gleichanteil mit der Amplitude** $\hat{S} = 1{,}0$ berechnet werden.

6.2.1.1 Momentanwert

Unter dem Momentanwert eines Signals *x(t)* oder schlicht *X* versteht man den augenblicklichen oder aktuellen Funktionswert des Signals.

Der Momentanwert stellt in der computerbasierten Messtechnik die wichtigste Messgröße dar.

Erst aus einer Reihe von gemessenen Momentanwerten werden weitere Kenngrößen des Signals ermittelt.

Für unser Sinussignal gilt:

$$\boxed{x(t) = X = \hat{X}\cdot\sin(\omega t + \varphi) = \hat{S}\cdot\sin(\omega t) = \sin(\omega t)} \qquad (3)$$

7 Der Ton eines Musikinstrumentes setzt sich in allgemeinen aus einer Überlagerung von mehreren sinusförmigen Schwingungen zusammen. Diese werden als Harmonische bezeichnet. Die Anzahl der überlagerten Harmonischen und deren Amplitudenverteilung beschreibt die Klangfarbe eines Musikinstruments.

6.2.1.2 Spitzenwert

Der Spitzen- oder Scheitelwert $\hat{X}$ ist jener Wert eines Signals in positiver oder negativer Richtung, der im betrachteten Intervall den größten Momentanwert darstellt.

Für unser Referenz-Sinus-Signal gibt es sowohl in positiver als auch in negativer Richtung einen solchen Spitzenwert:

$$\boxed{\hat{X}_{+} = -\hat{X}_{-} = \hat{S} = 1} \qquad (4) \qquad (V_P)$$

Speziell in tabellarisch gestalten Zusammenfassungen von Signalkennwerten wird an die Einheit des Spitzenwerts oft ein tiefgestelltes "***P***" (für "Peak") angehängt. Im obigen Beispiel im Fall eines Spannungssignals: V_P

6.2.1.3 Spitze-Spitze - Wert

Stellt die Differenz zwischen größten und kleinsten gemessenen Momentanwert im betrachteten Intervall dar.

Ist im Allgemeinen die Differenz zwischen positiven und negativen Spitzenwert.

Für den Sinus-Fall bedeutet dies:

$$\boxed{X_{PP} = \hat{X}_{+} - \hat{X}_{-} = 2 \cdot \hat{S} = 2} \qquad (5) \qquad (V_{PP})$$

6.2.1.4 Arithmetischer Mittelwert

Stellt das zeitliche Mittel aller innerhalb der Periodendauer *T* liegenden Momentanwerte *X* der Funktion dar.

Der Mittelwert stellt somit den Gleichanteil des Signals dar.

Für ein **allgemeines Signal** kann der **Mittelwert** $\overline{X}$ formal durch

$$\overline{X} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\, dt \qquad (6)$$

gebildet werden. Das Signal müsste also bis "in alle Ewigkeit" bewertet werden, was natürlich nicht möglich ist. Man kann also den arithmetischen Mittelwert allgemeiner Signale prinzipiell nur für ein **betrachtetes Zeitintervall** τ (formal: Integrationsintervall) angeben.

Liegen **periodische** Signale vor vereinfacht sich die Angelegenheit glücklicherweise dramatisch. Es ist nicht notwendig, das Signal länger als **eine Periodendauer *T*** zu bewerten, da danach keine zusätzlichen Informationen über das Signal gewonnen werden können.

Damit vereinfacht sich die Gleichung (6) zu: $\overline{X} = \frac{1}{T} \int_0^{T} x(t)\, dt$ (7)

Für unser **Sinussignal** ergibt eine Berechnung[8]: $\boxed{\overline{X} = 0}$ (8)

Der arithmetische Mittelwert unserer gleichanteilsfreien Sinus-funktion ist, wie zu erwarten war, gleich Null.

Ist der so berechnete Gleichanteil eines Signals Null, so handelt es sich um eine reine Wechselgröße.

Die Herleitung der obigen Beziehung für den arithmetischen Mittelwert kann einfach aus dem arithmetischen Mittelwert für natürliche Zahlen abgeleitet werden. Dieser berechnet sich durch **Summation** und anschließender **Division** durch die Anzahl der Summanden. Wird von diesem Ansatz auf zeitlich kontinuierliche Signale übergegangen, so wird die Summation durch Integration ersetzt und die Normierung durch eine Division mit der Integrationsperiode T erreicht.

In heutigen, **digital** arbeitenden (abtastenden) Messsystemen wird der arithmetische Mittelwert oft durch Analogtechnik (Filter, Tiefpass, Kondensator, …) gebildet und erst danach digitalisiert (einfache Systeme ohne Rechenwerk - Multimeter). In hochwertigeren Geräten wird das Signal direkt digitalisiert und der Mittelwert intern berechnet (Prozessor).

Dabei wird Gleichung (5) angenähert durch $$\boxed{\overline{X} \approx \frac{1}{n\cdot\Delta\tau}\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot\Delta\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \qquad (9)$$

Mit der Summenformel (9) kann der Mittelwert durch die Momentanwerte X_i näherungsweise gebildet werden.

Dies ist in computergestützten Anlagen durchaus üblich.

Durch hinreichend kleine Intervalle $\Delta\tau$ kann der dadurch verursachte Fehler immer vernachlässigbar klein gehalten werden.

Weiters spricht man vom Begriff "**moving average**", wenn nur eine bestimmte feste Anzahl $n = a$ (z.B.: *0-2000*) von Messwerten zur Mittelwertbildung herangezogen wird. Ein Ringspeicher behält dabei immer die letzten a Messwerte. Dies ist dann sinnvoll wenn der Mittelwert einer gewissen zeitlichen Schwankung unterworfen ist, zur Messung aber nur die jüngere Vergangenheit herangezogen werden soll (Sprungantwort eines Übertragungssystemes).

Beispiele 2 und 3: Ermittlung des arithmetischen Mittelwertes zu nachfolgenden Messreihen :

2) *0.55, 2.56, 1.44 , 0.72, 3.45, -0.98, 4.71, 4.98, 1.62, -0.71, 4.95, -0.05, 4.63, 4.19, 4.05, -0.63, 3.28, -0.95, 2.38, -0.19*;

3) *7.094 , 6.937, 6.658, 7.241, 6.759, 6.787, 6.509, 7.364, 6.562, 7.452, 7.213, 6.504, 7.342, 7.496, 6.906, 7.063, 6.636, 7.491, 7.438, 6.548*;

8 Durch Substitution von $z = \omega t$ ergibt sich ein Integrationsintervall von 0 bis 2π und $\overline{X}$ kann berechnet werden:

$$\overline{X} = \frac{\hat{S}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(z)dz = \left[-\frac{\hat{S}}{2\pi}\cos(z)\right]_0^{2\pi} = -\frac{\hat{S}}{2\pi}\cdot(1-1) = 0$$

6.2.1.5 Gleichrichtwert

Völlig analog zum arithmetischen Mittelwert kann der sogenannte Gleichrichtwert $|X|$ berechnet werden, wenn man anstatt der zeitlich veränderlichen Funktion *x(t)* ihren Betrag $|x(t)|$ verwendet.

Um den in Gleichung (6) auftretenden Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, beschränken wir uns vorerst auf **periodische Signale**. Das erforderliche Integrationsintervall τ überstreicht nun (wie gehabt) genau eine Periode T des Signals:

$$|X| = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} |x(t)|dt \qquad (10)$$

Der Gleichrichtwert stellt den arithmetischen Mittelwert der Absolutbeträge der periodischen Funktion *x(t)* über die Periodendauer *T* dar.

Das Signal wird also vor der Mittelung gleichgerichtet, was in vielen Messgeräten tatsächlich auch so geschieht.

Für unser Sinussignal ergibt eine Berechnung[9]:

$$\boxed{|S| = \frac{2}{\pi}\hat{S} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637} \qquad (11)$$

Bei sinusförmigen Größen kann der Gleichrichtwert aus dem Spitzenwert durch Multiplikation mit *2/π* berechnet werden.

Achtung: Dies gilt nur für gleichanteilsfreie rein sinusförmige Größen!

Wie beim arithmetischen Mittelwert kann auch hier mit der Summenformel der Gleichrichtwert durch die Momentanwerte X_i näherungsweise gebildet werden:

$$\boxed{|X| \approx \frac{1}{n\cdot\Delta\tau}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\cdot\Delta\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|} \qquad (12)$$

Beispiele 4 und 5: Ermittlung des Gleichrichtwertes der Messreihen aus Beispiel 2 und 3!

9 Durch Substitution von $z = \omega t$ ergibt sich ein Integrationsintervall von *0* bis *2π*. Dieses wird einfach in zwei Hälften gesplittet - das Intervall, in dem die Funktion positiv ist wird normal berechnet. Im Teilintervall mit negativen Funktionswerten *sin(x)* wird die Funktion einfach mit (-*1*) multipliziert und somit die Funktionswerte positiv gemacht (= Absolutwertbildung):

$$|X| = \frac{\hat{S}}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(z)|\,dz = = \frac{\hat{S}}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(z)dz + \int_{\pi}^{2\pi}-\sin(z)\,dz\right) = \left[-\frac{\hat{S}}{2\pi}\cos(z)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\hat{S}}{2\pi}\cos(z)\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{\hat{S}}{2\pi}\cdot(2+2) = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

6.2.1.6 Effektivwert (RMS[10])

Angenommen, wir haben eine zeitlich **periodische** Wechselspannung *u(t)* vorliegen:

$$\boxed{u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)} \tag{13}$$

Diese Spannung liegt an einem **Widerstand *R*** an, es ergibt sich ein **zeitlich veränderlicher Strom *i(t)*** dabei wird eine **zeitlich veränderliche Leistung *P(t)*** umgesetzt:

$$\boxed{P(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u(t)^2}{R}} \tag{14}$$

Welche Wirkleistung *P* wird an *R* umgesetzt?

Der **Momentanwert** der Leistung *P(t)* ist **zeitabhängig**, der Widerstand erwärmt sich jedoch nach einer gewissen Zeit auf eine **konstante Temperatur** (vgl. Glühlampe)!

Es muss also der **Mittelwert der Leistung** gebildet werden:

$$P = \overline{P(t)} = \frac{\overline{u(t)^2}}{R} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2 \, dt}{R} \stackrel{!}{=} \frac{{U_{eff}}^2}{R} \tag{15}$$

Dabei haben wir für den **Effektivwert der Spannung U_{eff}** die Definition

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2 \, dt} \tag{16}$$

benutzt.

Wir können wir also definieren:

> **Der Effektivwert der Spannung *U_{eff}* am Widerstand *R* ist jener Spannungswert einer Wechselspannung, der die selbe Leistung wie ein entsprechender Gleichstrom hervorruft.**

Die **Verallgemeinerung** auf allgemeine Signale *x(t)* liegt auf der Hand:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 \, dt} \tag{17}$$

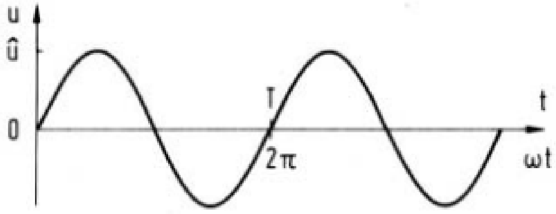
Aus dieser Beziehung folgt der Name **quadratischer Mittelwert** für den Effektivwert.

Für das **reine Sinussignal** mit Amplitude 1 führt dies zu:[11] $\boxed{S_{eff} = 1/\sqrt{2}}$ (18)

10 **RMS - Root Mean Square** beschreibt die mathematische Operation zur Berechnung des Effektivwertes. Das Signal wird quadriert, anschließend der Mittelwert gebildet und daraus die Quadratwurzel gezogen.

11 Wie üblich substituieren wir $z = \omega t$, Die Lösung des Integrales erfolgt durch **partielle Integration** unter vorhergehender Anwendung der Beziehung ***$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$***:

$$X_{eff}^2 = \frac{\hat{S}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(z)\,dz = \frac{\hat{S}^2}{2\pi}\left[-\sin(z)\cdot\cos(z) + \int_0^{2\pi}\cos^2(z)\,dz\right]_0^{2\pi} = \frac{\hat{S}^2}{2\pi}\left[-\sin(z)\cdot\cos(z) + z - \int_0^{2\pi}\sin^2(z)\,dz\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{\hat{S}^2}{2\pi}\left[-\sin(z)\cdot\cos(z) + z\right]_0^{2\pi} = \frac{\hat{S}^2}{2}$$



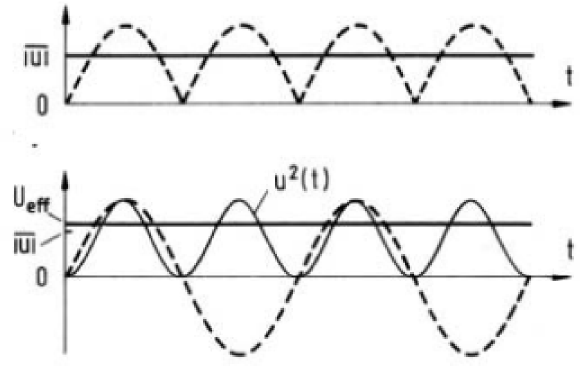


Abbildung 8: Signalkennwerte für sinusförmiges Signal - Gleichrichtwert und Effektivwert

Schaltungstechnisch kann man zur analogen Lösung dieser Operation auf fertige Analogmultiplizierer-Chips[12] zurückgreifen. Die damit gewonnene Spannung wird dann in sogenannten "***True-RMS***" Multimetern digitalisiert und zur Anzeige gebracht.

In einfachen Geräten werden hingegen die Wechselspannungen oft als rein sinusförmig vorausgesetzt, und der Effektivwert dann aus dem Spitzenwert oder Gleichrichtwert durch Division durch den Crest- bzw. Multiplikation mit dem Formfaktor gewonnen, (siehe Abschnitte 6.2.1.7 und 6.2.1.8) was bei nicht-sinusförmigen Messignalen zu erheblichen Fehlern führen kann!

Der Effektivwert kann aber ebenfalls wieder näherungsweise durch eine Summenformel bestimmt werden:

$$X_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n \cdot \Delta\tau} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \Delta\tau} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2} \qquad (19)$$

Mit Prozessorunterstützung ist dieser wiederum relativ leicht aus den Momentanwerten des Signals zu bestimmen.

Anmerkung: Günstig für die Berechnung des Effektivwertes aus Zeitreihen ist, wenn die **Messpunkte innerhalb einer festen Anzahl von Perioden (Nulldurchgängen) erfasst werden**. Dies deckt sich dann mit der Definition des Effektivwertes, welcher über eine Signalperiode zu bilden ist. Wird er über mehrere Perioden gebildet, so hätte das keinen Einfluss auf das Signal. Ein "moving average" Verfahren hingegen wäre schlecht weil die **Zeitdauer $a \cdot \Delta\tau$ im allgemeinen periodenfremd** ist und der Effektivwert in der **Anzeige schwanken** würde. Zuverlässige Ergebnisse erhält man dabei nur, wenn die Messdauer sehr viel größer als die Signalperiode ist - angeschnittene Perioden fallen dann nicht mehr ins Gewicht.

Beispiel 6 und 7: Ermittlung des Effektivwertes der Messreihen aus Beispiel 2 und 3.

Da der Effektivwert ein quadratischer Kennwert (also eine Kenngröße zweiter Ordnung) ist, können bei zusammengesetzten Signalen die ein-

12 z. B.: MPY634 von Burr-Brown → http://www.ti.com/product/mpy634

zelnen Effektivwerte nicht einfach addiert (lineare Summation) werden.

Vielmehr muss zur Ermittlung des Gesamteffektivwertes die geometrische Summe gebildet werden.

Beispielsweise bestehe eine Signal aus einem Wechselanteil $x_{AC}(t)$ und einem Gleichanteil $x_{DC}(t)$. Den Effektivwert des Gesamtsignals $x_{GES}(t)$ erhält man aus den Teileffektivwerten $X_{eff,AC}$ und $X_{eff,DC}$ aus:

$$\boxed{X_{eff,GES} = \sqrt{X_{eff,AC}^2 + X_{eff,DC}^2}} \quad (20) \qquad \text{für } x(t) = x_{AC}(t) + x_{DC}(t)$$

6.2.1.7 Scheitelfaktor

Der Scheitelfaktor C (crest factor) ist als das Verhältnis zwischen Spitzenwert $\hat{X}$ und Effektivwert X_{eff} definiert:

$$\boxed{C = \frac{\hat{X}}{X_{eff}}} \quad (21)$$

Für **rein sinusförmige** Signale gilt:

$$\boxed{C = \frac{\hat{X}}{\frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}} \quad (22)$$

Für ein Rechtecksignal würde $C = 1$ und für ein Dreiecksignal $C = \sqrt{3}$.

Der Scheitelfaktor charakterisiert die „Gleichförmigkeit“ eines Signals.

Enthält das Signal wenige schnelle Änderungen und zeigt auch keine Sprünge so liegt der Scheitelwert in der Größenordnung von *1...2*, z.B. sinusförmiges oder dreieckförmiges Signal. Zeigt das Signal hingegen sprunghafte oder abrupte Änderungen so steigt der Scheitelfaktor an.

Ein Beispiel für ein sich extrem sprunghaft änderndes Signal stellt die mathematische Idealisierung des **Diracimpulses**[13] $\boldsymbol{\delta(t)}$ dar. Diese Impulsform zeigt durch das Verschwinden des Effektivwertes einen **Scheitelfaktor von** ∞.

Der Scheitelfaktor wird also für die Charakterisierung der Signalform herangezogen.

Im Allgemeinen gilt, das auch True-RMS (effektivwertrichtige) Multimeter den Effektivwert eines Signals nur bis zu einem gewissen Scheitelfaktor richtig bestimmen (typisch *5 – 10*). Übersteigt der

13 Mathematisch ist der Diracimpuls $\delta(t)$ folgendermaßen definiert: Das Signal ist für alle Zeitpunkte $t \neq 0$ gleich Null. Die Amplitude errechnet sich aus der Forderung, das die Fläche unter der Kurve ***1.00*** ist. Dies bedeutet, das die Amplitude für immer kleinere Impulsbreiten gegen ∞ gehen muss. Es handelt sich also um einen **unendlich hohen und unendlich schmalen Impuls**!

Scheitelfaktor des Signals diesen Grenzwert so ist auch bei diesen Messgeräten die Anzeige falsch.

6.2.1.8 Formfaktor

Der Formfaktor[14] *F* ist als das Verhältnis zwischen Effektivwert X_{EFF} und Gleichrichtwert $|X|$ definiert:

$$\boxed{F = \frac{X_{eff}}{|X|}} \qquad (23)$$

Für **rein sinusförmige** Signale gilt:

$$\boxed{F = \frac{\frac{\hat{X}\cdot 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\hat{X}\cdot 2}{\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{2^3}} = 1{,}1107} \qquad (24)$$

6.2.1.9 Welligkeit

Die Welligkeit *W* eines Signals ist definiert als das Verhältnis des Effektivwertes des Wechselanteils $X_{eff,AC}$ und des Gleichanteils[15] $X_{eff,DC}$

$$\boxed{W = \frac{X_{eff,AC}}{X_{eff,DC}} = \frac{X_{eff,AC}}{X_{DC}}} \qquad (25)$$

Die Welligkeit eines Signals ist vor allem in Zusammenhang mit Gleichspannungsversorgungen von großer Aussagekraft in Bezug auf die Qualität der Versorgung.

Idealerweise sollte die Welligkeit gleich Null sein.

Eine geringe Restwelligkeit lässt sich aber normalerweise nicht vermeiden.

Beispiel 8: Gegeben ist ein Sinusspannnung $u(t) = 3V\cdot sin(314\cdot t)$. Bestimme den Spitzenwert, den Spitze-Spitze-Wert den arithmetischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert des Signals! Welche Frequenz *f* besitzt das Signal?

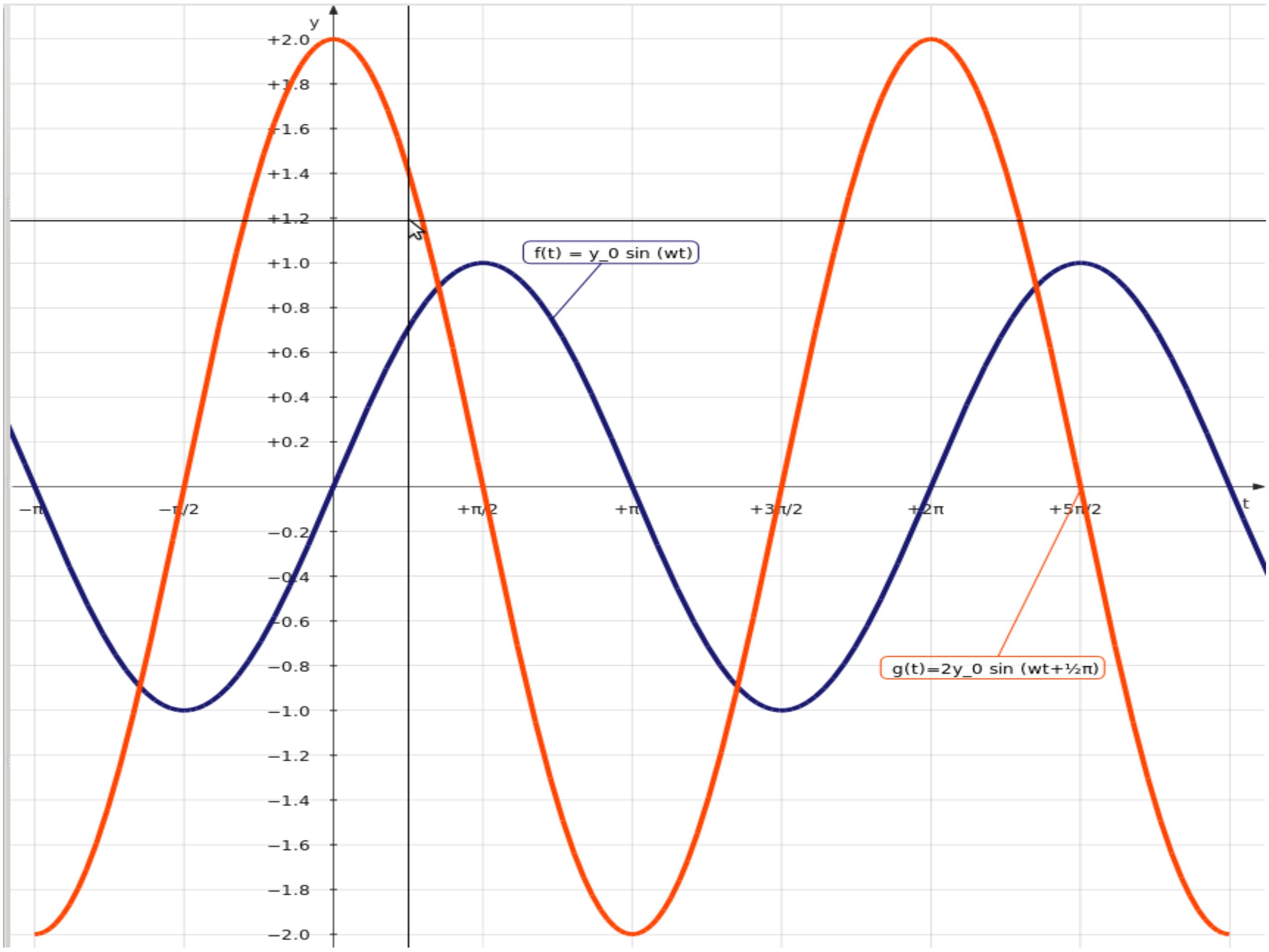
3V - 6V - 0V - 1,911V - 2,121V – 50Hz

Beispiel 9: Skizziere die Signale $x_1(t) = x_0\cdot sin(\omega t)$ sowie $x_2(t) = 2\cdot x_0\cdot sin(\omega t+\pi/2)$ in ein Diagramm!

---

14 Wird üblicherweise bei einfachen Messgeräten zur Bildung des Effektivwertes verwendet. Der Gleichrichtwert kann schaltungstechnisch einfach durch Gleichrichtung und Glättung über ein *RC*-Glied erreicht werden. Bei Verwendung eines Drehspulmesswerks wird die Glättung ohne weitere elektronische Maßnahmen, durch die mechanische Trägheit des Messwerks erreicht.

15 Für eine Gleichgröße fallen natürlich die drei Signalkenngrößen arithmetischer Mittelwert, Gleichrichtwert und Effektivwert zusammen. Es gilt somit: $\hat{X} = |X| = X_{eff} = X_{DC}$


f(t) = y_0 sin (wt)
g(t)=2y_0 sin (wt+½π)
y
t
+2.0
+1.8
+1.6
+1.4
+1.2
+1.0
+0.8
+0.6
+0.4
+0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
−1.2
−1.4
−1.6
−1.8
−2.0
−π
−π/2
+π/2
+π
+3π/2
+2π
+5π/2