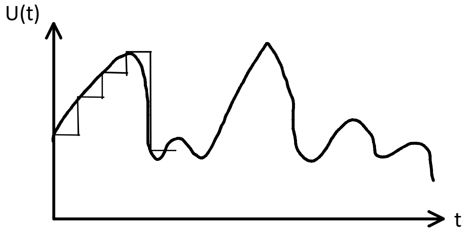
Signaltheorie

Montag, 26. September 2022 08:08

//26.09.2022 - 1.Stunde



= Summe(k=1/n){a_k * coskt + b_k * sinht)

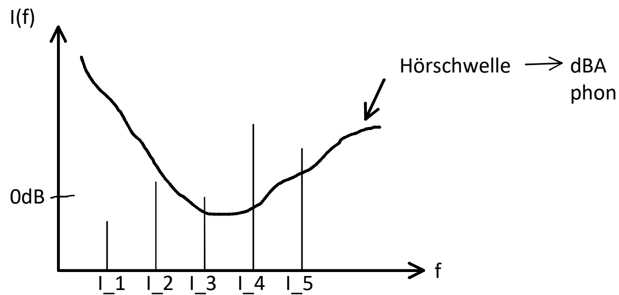
f_abtast > 2*f_max

20kHz --> 44,1kHz

16bit U_max/U_0 = 96dB --> zugeordnet 16 Bit, also 2^16 Permutationen --> 1,41 Mb/s

Verlustlos komprimieren:
- Speicherung der Fourier Reihe
- Alle notwendigen Daten werden Gespeichert
- Am Ende ist eine Rücktransformation nötig, um wieder auf's Ursprüngliche Signal zu kommen

MP3:



24kHz

(Bei Video werden Flächen zusammengefasst, und nicht Linien.
Grund: es ändert sich eher nichts)

//26.09.2022 - 2.Stunde

// MPEG: Motion Pictures Engineering Group

Einführung in die Systemtheorie

Linearität: k*u(t) --> k*y(t)
Homogenität: u_1 + u_2 --> y_1 + y_2

Zeitvarianz: u(t+T) --> y(t+T)
Kausalität: t=0, y(t)=0, h(t)= 0, wenn t<0 (Ausgangssignal nie vor Eingangssignal!)

Ein lineares System n-ter Ordnung wird durch folgendes Differentialgleichungssystem betrieben:

$$\boxed{a_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots y + b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \dots + b_0 u}$$

//siehe Discord für Glg.;
// des Komische Zeichen
//ist gleich wie das d von
//dy/dt

--> Definition!

Linearität: Alle Differntialquotienten kommen nur in erster (=linearer) Ordnung vor!
Bzw. nur in 1. Grades vor --> Keine Hochzahl größer 1

Zeitinvarianz (Stationarität): Koeffizienten a_n, b_k sind konstanten!

Allgemeine Lösung von (1) im Zeitbereich durch Integration Ergebnis:

Allgemeine Lösung von (1) im Zeitbereich durch Integration Ergebnis:

$$\boxed{y(t) = \text{Intergral}(0/t)\{u(t') * h^*(t - t_1)\, dt'\}}$$

--> Allgemeines Lösung für lineare Filter. Die Kunst liegt in der Bestimmung von h(t).

Obiges Integral wird auch als Faltungsintegral bezeichnet.
--> Faltung (Symbol ⊗)

$$\boxed{y(t) = u(t) \otimes h(t)} \quad (1)$$

//30.09.2022

Korrektur von der letzten Stunde ... "so afoch geht des leider ned" - "wir miaßns bei der Funktion lossn"

t' hat nichts mit einer Ableitung zu tun, sondern ist nur eine Art Hilfsvariable

// MS von 3.10. fehlt

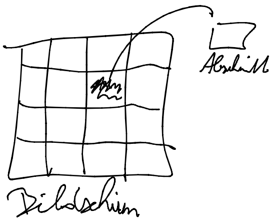
// 07.10.2022

Zapf:
- Wieso Faltungsintergral: Lösung ist für alle Eingangsspannungen
- Verlustlos & Verlustbehaftete Komprimierung

Kompression Videodaten:

1) Fourier-Reihen-Zerlegung
   einzelne Matrizen

   z.B. 16*16 Pixel



--> von Ortsraum -_> Frequenzraum

Intensitäten über den Ort

Intensitätsänderung über den Ort
--> Frequenz

2) Anstatt jedes Bild abspeichern --> nur Änderungen

3) Eigenheiten des menschlichen Auges werden berücksichtigt --> verlustbehaftete (Daten-) Kompression

//10.10.2022 - Zapf

Faltung:

$$u(t) = k\,t$$
$$h(t) = t$$

$$\int_0^T (k\,t' \cdot (t - t'))\, dt' = \int_0^T (k t t' - k t'^2)$$

$$= \frac{1}{2} k \cdot t \cdot t'^2 - \frac{1}{3} k t'^3 \Big|_0^T =$$

$$y(t) = \frac{1}{2} k t T^2 - \frac{1}{3} k T^3$$

Messbereich: -2V ... 8V
Auflösung 10mV

$$2^x = \frac{MB}{A} = \frac{10V}{10mV} = 1000$$

$$x = \underline{\underline{10}} \quad (\Rightarrow 2^{10} \dots 1024 \text{ Permutationen})$$

Datenrate ermitteln, wenn wir (Sinus-)Signale bis zu 50kHz abtasten wollen

$$f_{abtast} = 2 \cdot 50\,kHz = 100\,kHz$$

$$\text{Datenrate} = 1024 \cdot 100\,kHz = \underline{\underline{1{,}024\ \frac{Mbit}{s}}} \approx 1\ \frac{Mbit}{s}$$

$$= \frac{1}{8}\ \frac{MByte}{s}$$

Quantisierungsfehler = +/- 1/2 * Auflösung = +/- 5mV

Fehlerfortpflanzung

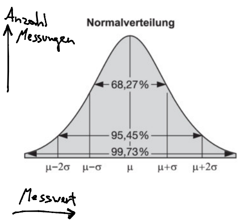
$$(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) = x\cdot y + \Delta x\cdot y + x\cdot\Delta y + \cancel{\Delta x\cdot\Delta y} \quad \text{(vernachl.)}$$

$$= x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\cdot y\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)$$

$$= x\cdot y\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\cancel{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{x\cdot y}}\right) \quad \text{(vernachl.)}$$

Warum ist das nicht ein reales Beispiel?
- Fehler wird in +/- angegeben
  - Mit beiden Extremwerten angeben

Was ist die Standardabweichung? Was ist die Varianz?



68% gilt nur bei Normalverteilung

σ^2 ... Varianz

σ ... Standardabweichung

Varianz $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

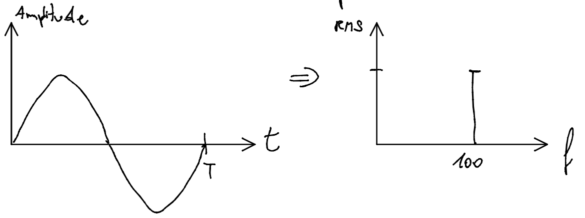
Standardabweichung $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

(bei 1 σ höhe = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ · Mittelwert
& enthält 68,27% der Werte)

Für was brauchen wir Transformationen? (z.B. Faltungsintegral, …)
- Komprimieren von Daten z.B. Audio- & Videodaten

FFT: Zeit --> Frequenz

Sinustransformation: 100 Hz Sinus-Signal



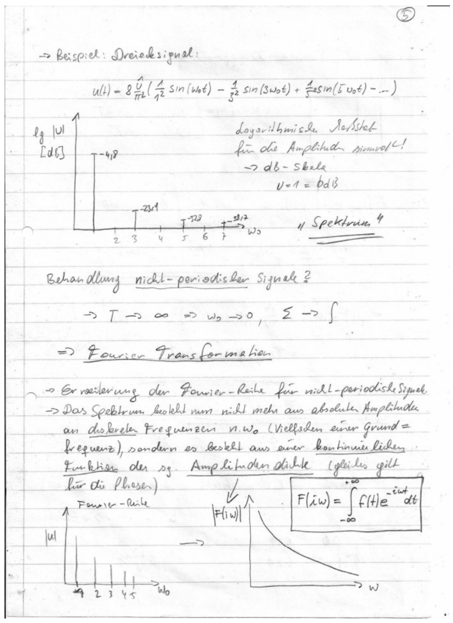
Rahmenbedingungen für FFT:
- Bis höchste Vorkommende Frequenz // Rest interessiert uns nicht

- Signal muss Periodisch sein --> kommt real nicht vor, darum kurze Teilabschnitte als Ideal annehmen

//14.10.2022

Betrag des Frequenzgangs

04_Betrag-des…



⑤

-> Beispiel: Dreiecksignal:

$$u(t) = 8\frac{\hat{U}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega_0 t) - \dots\right)$$

logarithmische Maßstab für die Amplituden sinnvoll!
-> dB-Skala
U=1 = 0dB

"Spektrum"

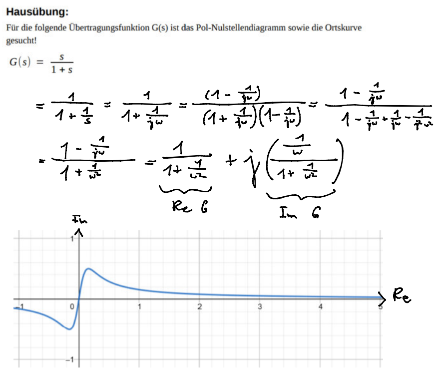
Behandlung nicht-periodischer Signale?

-> $T \to \infty \Rightarrow \omega_0 \to 0$, $\Sigma \to \int$

=> Fourier Transformation

-> Erweiterung der Fourier-Reihe für nicht-periodische Signale
-> Das Spektrum besteht nun nicht mehr aus absoluten Amplituden an diskreten Frequenzen $n \cdot \omega_0$ (Vielfachen einer Grund=frequenz), sondern es besteht aus einer kontinuierlichen Funktion der sg. Amplitudendichte (gleiches gilt für die Phasen)

$$\boxed{F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt}$$



Hausübung:

Für die folgende Übertragungsfunktion G(s) ist das Pol-Nulstellendiagramm sowie die Ortskurve gesucht!

$$G(s) = \frac{s}{1+s}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\omega}} = \frac{\left(1-\frac{1}{j\omega}\right)}{\left(1+\frac{1}{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{j\omega}\right)} = \frac{1-\frac{1}{j\omega}}{1-\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j^2\omega^2}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{j\omega}}{1+\frac{1}{\omega^2}} = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{\omega^2}}}_{\text{Re } G} + j\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{\omega}}{1+\frac{1}{\omega^2}}\right)}_{\text{Im } G}$$

//17.10.2022

// WDH Betrag des Frequenzgangs

Ortskurven

05_Ortsku…

Sinn der Ortskurve?

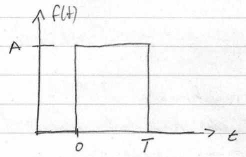
- Man sieht die Konvergenz der Funktion --> (für FFT gut, weil dann müssen wir z.B. nur bis 5 ω_0 Transformieren

Wieso ist die Fourier Transformation (händisch) unendlich viel Arbeit?

- Wir müssen für alle ω ausrechnen
- Nicht wegen den Grenzen!

Beispiel Fourier-Transformation:

Beispiel: Fourier-Transformation:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^T A \cdot e^{-i\omega t} \, dt$$

$$= -\frac{A}{i\omega} \cdot e^{-i\omega t} \Big|_0^T = \underline{\underline{\frac{A}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega T}\right)}}$$

konj. kompl. $e^{+i\omega T}$

kann max ±1 sein

$$\Rightarrow |F(i\omega)| = \frac{A}{\omega} \sqrt{(1-\cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T)}$$

$\rightarrow 1 - 2\cos\omega T + \underbrace{\cos^2\omega T + \sin^2\omega T}_{1}$
$= 2(1-\cos\omega T)$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2}\,\frac{A}{\omega}\sqrt{1-\cos(\omega T)}}}$$

Laplace-Transformation

Problem bei der Fourier-Transformation:

→ Viele Signale können nicht Fourier-transformiert werden, weil das Integral nicht konvergiert ($\rightarrow \infty$)

Bsp.:

$$f(t) = \begin{cases} \phi & t < \phi \\ e^{at} & t \geq \phi \end{cases}$$

Sonderfall $a = 0 \rightarrow$ Einheitssprung

$$f(t) = \begin{cases} \phi & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{(a-i\omega)t} \, dt$$

$\rightarrow \infty \quad \forall a \geq 0!$

Ausweg: Laplace Transformation

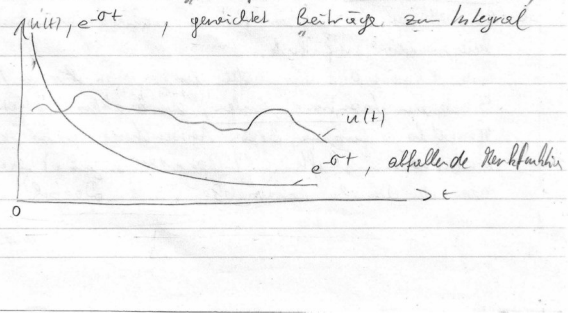
→ Erweiterung der Fourier-Transformation, nützlich insbesondere für Signale, für die die Fourier-Transformierte nicht konvergiert (z.B.: Stufenfunktion = Einheitssprung)

Einführung einer Dämpfungskonstante σ (oft auch δ genannt) und kombiniert diese mit der (reellen) Frequenz ω zur komplexen Frequenz $s = \sigma + i\omega$

$$\lim_{\sigma \to 0} L(s) = F(i\omega)$$

$$\lim_{\sigma \to \phi} \mathcal{L}(s) = \mathcal{F}(i\omega)$$ (oft in der Literatur so zu finden)

$e^{-\sigma t}$ kann als „Merkfunktion" betrachtet werden, gewichtet Beiträge zum Integral



(Ein psychologisches Analogon wäre das Lesen eines Buches: An die zuletzt gelesenen („neueren") Seiten (Kapitel) kann man sich stets besser erinnern als an die zeitlich weiter zurückliegenden.)

Für die hier zu behandelnden kausalen Signale können auch die Beiträge vor $t = 0$ weggelassen werden.

Mit allem Bisherigen folgt die Definition „Einseitige Laplace transformierte für kausale Signale":

$$F(s) = \boxed{\mathcal{L}(u(t)) = u(s) = \int_0^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt} \qquad (3)$$

Das Verfahren wurde ungarischen Mathematiker Jozeph Miksa Petzval (1807–1891) erstmal systematisch eingesetzt, während der französische Mathematiker Pierre Simon Laplace (1749–1827) – nach dem das Verfahren benannt wurde – nur im Rahmen seiner Wahrscheinlichkeitsstudien einführte.
Erste Hinweise auf die Idee findet man bereits beim Schweizer Leonhard Euler (1707–1783)[27], die exakten mathematischen Grundlagen für die breite Anwendung in Technik und Naturwissenschaften (1950er–1960er Jahre) erarbeitete aber der Deutsche Mathematiker Gustav Doetsch (1892–1977)

(3) kann immer konvergent gemacht werden, wenn σ groß genug gewählt wird (mathematisch beweisbar!)

→ Beispiel (contd) von vorhin:

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{(a-\sigma-i\omega)t}\, dt = \frac{1}{a-\sigma-i\omega}\, e^{(a-\sigma-i\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sigma+i\omega-a} = \frac{1}{s-a} = F(s)$$

Einheitssprung: $a = 0 \rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$

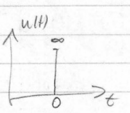
↳ Laplace Transformierte d. 1-Sprungs

Einschub

Impulsantwort: → $\boxed{\text{nach Rücktransformation S 10}}$

$\delta(t) = u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

Dirac – Impuls: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$y(t) = \int_0^{t} \delta(t') \cdot h(t-t')\, dt' \overset{!}{=} h(t)$$

Die Impulsantwort eines LTI-Systems entspricht seiner Übertragungsfunktion!

Laplace – Rücktransformation:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(s)\, e^{st}\, d\omega \overset{s=\sigma+j\omega}{=} \boxed{\frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} u(s)\, e^{st}\, ds} \qquad (4)$$

// 21.10.2022

Angabe der Messgenauigkeit eines Messgeräts

$U \pm 2\,\%$ ⇒ [illegible]

// 21.10.2022

Angabe der Messgenauigkeit eines Messgeräts

$U_m \pm 2\%$ $\Rightarrow$ unbekannte Messfehler

$\pm 2\%$ (2)
↳ Anzahl der Standardabweichungen // Sigma

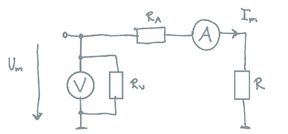
Bsp bekannte Messfehler:

$R(20°C) = 100\,\Omega$

$P = \frac{U^2}{R}$ Leistungsmessung bei 30°C $\Rightarrow$ $\Delta R = 2\,\Omega$, weil ich weiß, dass $R(30°C) = 102\,\Omega$ ist

+ ich weiß, dass $U_m = U_w + 1\%\, U_w$ wegen Stromrichtiger Messung

Fehlerfortpflanzung:



$$P = \frac{U_m^2 + (1\% + 1\%)\cdot U_m^2}{R + 2\%\ R} = \frac{U_m\ \cancel{(1+2\%)}}{R\ \cancel{(1+2\%)}} = \frac{U_m}{R}$$

Weil beide Fehler in dieselbe Richtung gehen, heben sich die Fehler auf

Bsp)

$$P = I^2 \cdot R = I_m^2\ \cancel{(1+2\%)} \cdot R\ \cancel{(1-2\%)}$$

$I + 1\%$ -2%

Hebt sich **nur** auf, **wenn** kleiner Anteil von 1, weil wir nehmen dann an: $\frac{1}{1-x} = 1+x$; $\frac{1}{1+x} = 1-x$

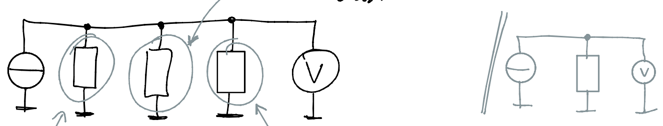
??? für $x \ll 1$

// 24.10.2022

Ohmmeter: wie misst man den Widerstand ohne den Strom zu messen? Also wie ist funktioniert ein Ohmmeter

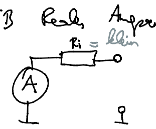
- Konstantstromquelle & Shunt-Widerstand

Ersatzschaltbild:



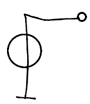
SB ideales Amperemeter

SB Reales Amperemeter

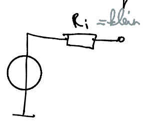


// R_L zw.

SB Ideales Spannungsquelle



SB Reale Spannungsquelle

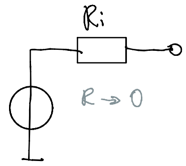


// Alle Verbraucher sind Ersatzspannungsquellen
// Diode ist konstantspannungsquelle

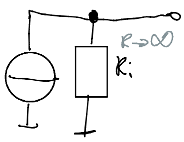
Bsp ziemlich ideale Spannungsquelle: Netzgeräte

Reale Spannungsquelle Reale Stromquelle Reales Voltmeter Reales Amperemeter

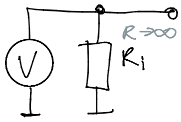
Reale Spannungsquelle



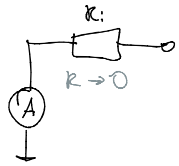
Reale Stromquelle



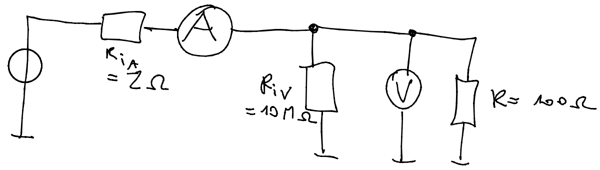
Reales Voltmeter



Reales Amperemeter



Bestimmte Messfehler
Stromrichtige oder Spannungsrichtige



$I_m = \frac{U_0}{R_{iA} + R} = I_w + 2\%$

$U_m = U_w + 1\%$

} bekannte Messfehler $\Rightarrow$ $R_m = \frac{U_m}{I_m}$

$R_w = \frac{U_m - 1\%}{I_m - 2\%}$

$= R_m + 1\%$

Einschränkung:
gilt nur für $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x$
$x \ll 1$
$x < 10\%$
$\Rightarrow$ bekannter MF muss unter 10% des MW liegen

Teststoff:

- Physikalische Größen, Einheiten, Formeln
  - SI-Größen + Einheiten
  - Kraft, Druck, Drehmoment
  - Arbeit, Energie, Leistung
  - f, T, c, λ, Plancksches Wirkungsquantum "E_photon= h*f= (hquer) *ω"

- Schaltung + Ri von VM, AM, Uq, Iq
- Grundlagen Digitalisierung von Messwerten:
  - Auflösung, Quantisierungsfehler, Abtaststheorem, Permutation, Wertebereich, Datenrate
- Messfehler
  - Bekannt, unbekannt
  - Fehlerfortpflanzung
  - Normalverteilung, Standardabweichung
- Transformation t-->f
  - Wieso?
  - Verlustlos, Verlustbehaftet } Datenkompression
  - Was ist eine Faltung?
  - Fourier-Reihe, Fourier-Transformation
    - Wann kann man sie verwenden?
    - Grenzen

// Fourier

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) \cdot e^{-j\omega t}\right) dt$$