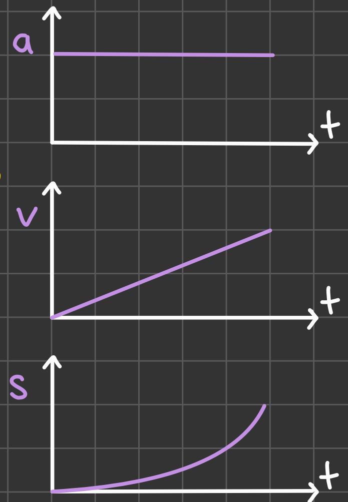
Differenzialgleichungen

Bsp.: $F_a = -F_G$
$m \cdot a = -m \cdot g$
$a = -g$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = s'' = -g$$ diff. gl.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = s' = \int -g\,dt = -gt + c$$ ($c \to v_0$)



Freier Fall ohne Luftwiderstand $\quad c = s(0) = s_0$

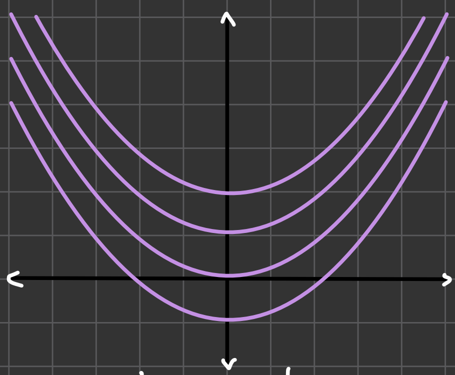
$$s(t) = \int(-g \cdot t + v_0)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + c \to s(t) = -\frac{g}{2} + v_0 t + s_0 \to \text{Lsg.}$$

Eine Gleichung der Form $f(x, y, y', y'', \dots)$, in der neben einer Funktion $y = f(x)$, auch Ableitungen der Funktion vorkommen, heißt gewöhnlich Differenzialgleichung.
Die Ordnung der höchsten Ableitung heißt Ordnung der Differentialgleichung.

Bsp.: $y' = 2x$

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

Kurvenschar



weitere Angabe: z.B. P(1|2) soll Teil der Lösung sein.
$2 = 1 + c \to c = 1$
$y = x^2 + 1$ ..... speziellere Lösung

Die zusätzlichen Angaben nennt man: → Die Aufgaben nennt man dann:

- > Anfangswerte (für $t=0$ oder $x=0$) bzw.
- > Randwerte (für $t \neq 0$ oder $x \neq 0$)

- > Anfangswertaufgabe bzw.
- > Randwertaufgaben

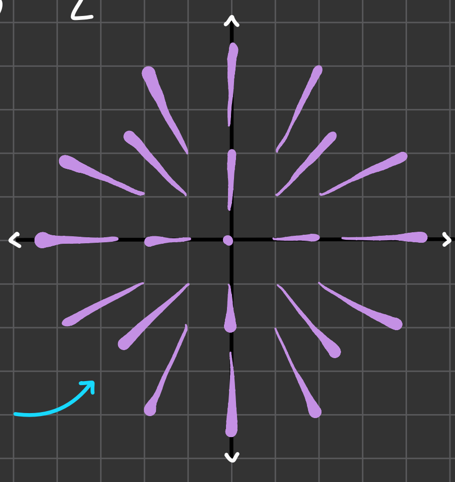
Bsp.: $y'' + x = 1 \to y'' = 1 - x \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

$$y' = \int (1 - x)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + c_1 \to y'(0) = 2 = 0 - \frac{0}{2} + c_1 \to c_1 = 2$$

$$y = \int \left(x - \frac{x^2}{2} + 2\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + c_2 \to y(0) = 1 = -\frac{0^3}{6} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + c_2 \to c_2 = 1$$

Allgemeine Lösung: $y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$

Partikuläre / Spezielle Lösung: $y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$



Durch Anfangswerte für y' & y ergeben sich erst Punkt und Steigung.
Lösung der Differenzialgleichung, heißt suchen einer Kurve, die z.B. durch Punkt- und Linienelement gegeben ist.

WHD: Differenzenquotient → Steigung im Intervall $k=\Delta y:\Delta x$ → mittlere Änderungsrate
Differenzialquotient → Steigung im „Punkt" $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y:\Delta x$ → Steigung → Ableitung

HÜ: 3.8 ; 3.9 b,c,e ; 3.10 b

3.14 Ermittle die Funktion f, die für x > 0 wie folgt definiert ist:
(1) Die Steigung ihrer Tangente in jedem Punkt (x|y) ihres Graphen ist gleich der Wurzel aus der x-Koordinate des Punktes.
(2) Außerdem ist $\left(1\middle|\frac{2}{3}\right)$ ein Punkt ihres Graphen.

1: $f'(x)=\sqrt{x}$ 2: $f(1)=\frac{2}{3}$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sqrt{x}\;\Big|\cdot dx \to df(x)=x^{\frac{1}{2}}dx\;\Big|\int \to f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$f(1)=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}+c\;\Big|-\frac{2}{3} \to c=0 \quad \to f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

3.15 Ein Intercity-Express (ICE) setzt sich aus dem Stillstand mit einer mittleren Beschleunigung von 0,5 m/s² in Bewegung.
a) Stelle die Differentialgleichung für die Weg-Zeit-Funktion s dieser Bewegung während der Dauer der Beschleunigung auf. Ermittle ihre allgemeine Lösung.
b) Gib nun die spezielle Lösung der Differentialgleichung aufgrund der gegebenen Anfangsbedingungen an.
c) Ermittle die Zeitdauer und die Länge der Fahrstrecke bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von 200 km/h.

$a=0{,}5\,\frac{m}{s^2}$
$v_0=0$
$s_0=0$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2} \qquad v=\frac{ds}{dt}$$

$$s=\iint a\,dt^2=\int v\,dt$$

a: $s(t)=\iint 0{,}5\,dt^2=0{,}25t^2+c_1t+c_2=0{,}25t^2+v_0t+s_0$

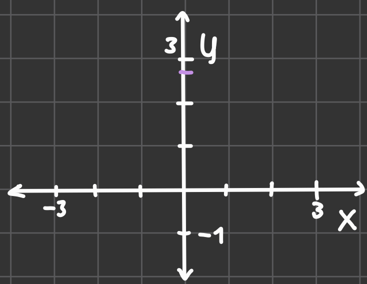
b: $0{,}25t^2+v_0t+s_0=0{,}25t^2+0t+0=0{,}25t^2$

c: $v(t)=200\,\frac{km}{h}=\frac{500}{9}\,\frac{m}{s}=\int 0{,}5\,dt=0{,}5t \to t=\underline{\underline{111{,}\dot{1}\,s}} \to s(111{,}\dot{1}\,s)=0{,}25\cdot t^2=\underline{\underline{386\,m}}$

3.23 Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung im angegebenen Bereich der (x, y)-Ebene für die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten:
a) $y'=y$, $-2\le x\le 4$, $-1\le y\le 5$ b) $y'=x\cdot y$, $-3\le x\le 3$, $-1\le y\le 3$

$c=e^{c_1-c_2}$ $\quad y=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot c$

b: $y'=yx \to \frac{dy}{dx}=yx\;\Big|\cdot\frac{dx}{y} \to \frac{1}{y}dy=x\,dx\;\Big|\int \to \ln(y)+c_1=\frac{x^2}{2}+c_2$



Neues Lösungsverfahren: DGL 1. Ordnung: Trennen der Variablen

Bsp.: $x+y\cdot y'=0 \qquad y(4)=3$

$y\cdot y'=-x$ Trennen

$y\cdot\frac{dy}{dx}=-x \qquad y'=\frac{dy}{dx}$

$y\,dy=-x\,dx \;\Big|\int$

$$\frac{y^2}{2}+c_1=-\left(\frac{x^2}{2}+c_2\right) \qquad c_3=c_1+c_2$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c_3\;\Big|\cdot 2 \qquad c_4=2\cdot c_3$$

$$y^2+x^2=c_4 \quad (\text{z.B. } c_4=r^2)\to \text{Kreis}$$