Bodediagramme zusammengesetzter Frequenzgänge

Wenn eine Übertragungsfunktion *G(s)* und damit ein Frequenzgang *G(jω)* als **Produkt** mehrerer Teilfunktionen bzw. Teilfrequenzgänge dargestellt werden kann gelten folgende Zusammenhänge:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \dots G_n(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \dots |G_n(j\omega)|$$

$$\lg|G(j\omega)| = \lg|G_1(j\omega)| + \lg|G_2(j\omega)| + \cdots + \lg|G_n(j\omega)|$$

Die **Betragskennlinie** kann also – aufgrund der **logarithmischen Darstellung** – einfach **additiv** aus den einzelnen Beiträgen $G_1, G_2, \dots, G_n$ zusammengesetzt werden.

Für den **Phasenverlauf** gilt:

$$\arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega) + \cdots + \arg G_n(j\omega)$$

Das **Argument** (**= der Phasenwinkel**) von *G* wird ebenso einfach **additiv** aus den Argumenten der einzelnen Teilfunktionen zusammengesetzt, auch wenn diese **linear skaliert** dargestellt werden!

Es ist damit möglich Bodediagramme **komplizierter Frequenzgänge** durch **Aufspalten** in ein Produkt einfacher Funktionen und **grafisches Zusammensetzten** zu zeichnen.

Beispiel: Phasenanhebendes System

$$G(s) = \frac{1 + s\,T_1}{1 + s\,T_2}\,, \qquad T_1 = 1\,, \quad T_2 = 0{,}2$$

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega\,T_1}{1 + j\omega\,T_2} = \underbrace{\boxed{\left(1 + j\omega\,T_1\right)}}_{G_1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{1 + j\omega\,T_2}}}_{G_2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2\,T_1^2}{1 + \omega^2\,T_2^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2$$

Näherung für kleine Kreisfrequenzen ($\omega \ll 1/T_1$):

$$\left.\begin{array}{l} |G_1| \approx 1\,,\ \arg G_1 \approx 0 \\ |G_2| \approx 1\,,\ \arg G_2 \approx 0 \end{array}\right\} \implies |G| \approx 1\,,\ \arg G \approx 0$$

Näherung für große Kreisfrequenzen ($\omega \gg 1/T_2$):

$$\left.\begin{array}{l} |G_1| \approx \omega\, T_1 = \omega\,,\ \arg G_1 \approx 90^\circ \\ |G_2| \approx \dfrac{1}{\omega\, T_2} = \dfrac{5}{\omega}\,,\ \arg G_2 \approx -90^\circ \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |G| \approx 5\,,\ \arg G \approx 0$$

Die Knickfrequenzen ω_{k1} und ω_{k2} liegen bei:

$$\omega_{k1} = \frac{1}{T_1} = 1\,, \quad \omega_{k2} = \frac{1}{T_2} = 5$$

Exakte Berechnung der Phasenanhebung:

$$\frac{d}{d\omega} \arg G(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\Big[\arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2\Big] = 0$$

$$\frac{T_1}{1+\omega^2 T_1^2} - \frac{T_2}{1+\omega^2 T_2^2} = 0$$

$$T_1\,(1+\omega^2 T_2^2) = T_2\,(1+\omega^2 T_1^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1\, T_2}}}}$$

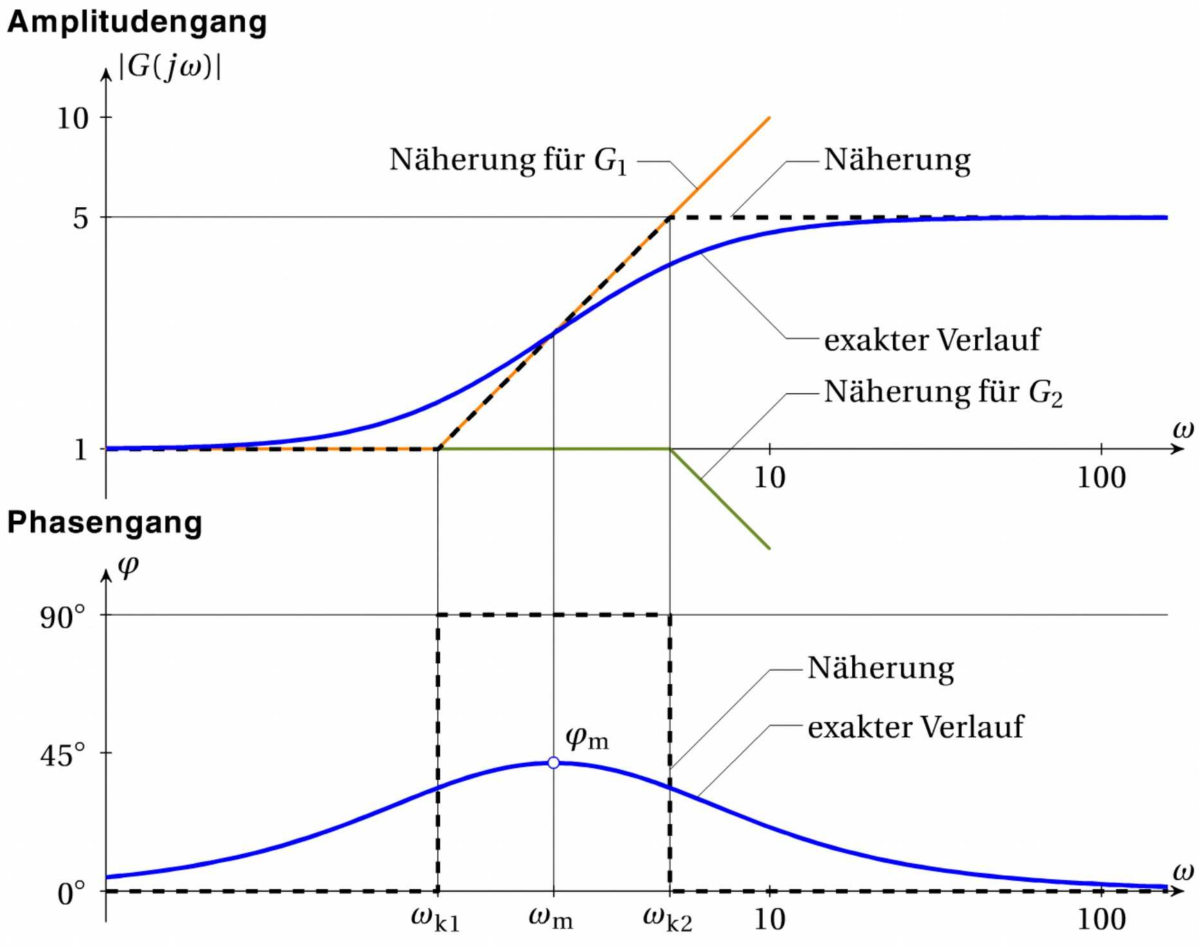


Bild 1.31 Bodediagramm eines phasenanhebenden Systems

Die maximale Phasenanhebung tritt im geometrischen Mittel ω_m zwischen den beiden Knickfrequenzen $\omega_{\mathrm{k}1}$ und $\omega_{\mathrm{k}2}$ auf. Sie berechnet sich zu:

$$\max[\arg G(j\omega)] = \arg G(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_\mathrm{m}} = \arctan\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \arctan\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$
$$= \arctan\sqrt{5} - \arctan\sqrt{\frac{1}{5}} = 41{,}8^\circ$$

Beispiel: Bodediagramm einer zusammengesetzten Übertragungsfkt.

$$G(s) = \frac{2\,s^2 + 4{,}1\,s + 0{,}2}{s^2 + s}$$

→ Nullstellen von Zähler und Nennerpolynom berechnen (= ÜF faktorisieren):

$$G(s) = \frac{2\,(s^2 + 2{,}05\,s + 0{,}1)}{s^2 + s} = \frac{2\,(s+2)\,(s+0{,}05)}{s\,(s+1)}$$
$$= \frac{2\cdot 2\cdot 0{,}05}{1}\cdot\frac{(1+0{,}5\,s)\cdot(1+20\,s)}{s\,(1+s)} = \frac{(1+0{,}5\,s)\cdot(1+20\,s)}{5s\,(1+s)}$$

Damit ergibt sich der Frequenzgang als Produkt von Teilfunktionen:

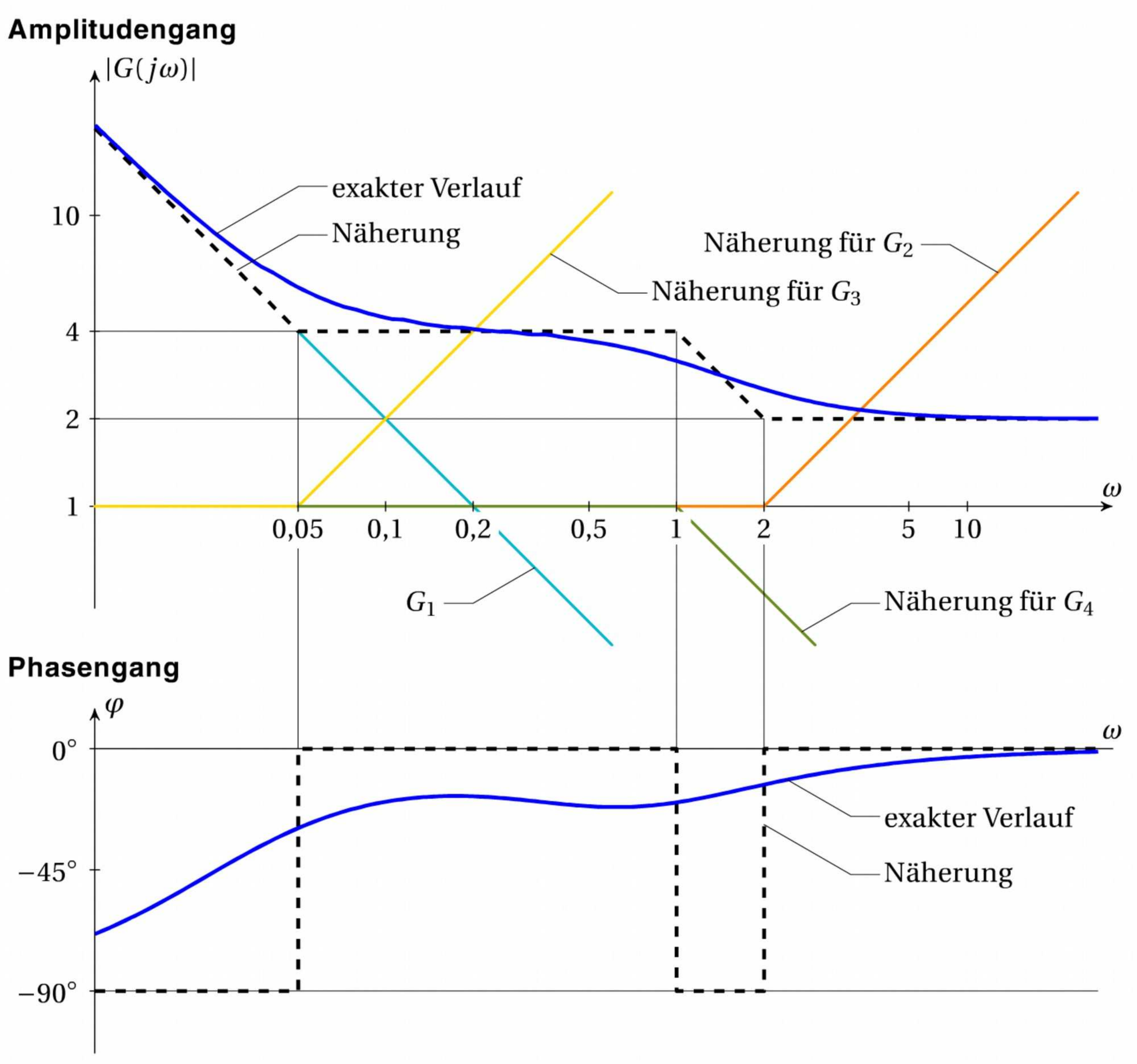
$$G(j\omega) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{5\,j\omega}}}_{G_1}\cdot\underbrace{\boxed{(1+0{,}5\,j\omega)}}_{G_2}\cdot\underbrace{\boxed{(1+20\,j\omega)}}_{G_3}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{1+j\omega}}}_{G_4}$$

Die Knickfrequenzen der Teilfrequenzgänge G_2, G_3 und G_4 berechnen sich zu:

$$\omega_{\mathrm{k}2} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,,\quad \omega_{\mathrm{k}3} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,,\quad \omega_{\mathrm{k}4} = 1$$

G_1 ist ein Integrator, die Betragskennlinie ist eine Gerade mit der Steigung -1 (das entspricht $-20\,\mathrm{dB/Dekade}$). Die Durchtrittsfrequenz ω_D ist jene Kreisfrequenz, bei der die Betragskennlinie die 0 dB-Linie schneidet, bei der also gilt: $|G_1(j\omega)| = 1$:

$$|G_1(j\omega)| = \frac{1}{5\omega} = 1\Big|_{\omega=\omega_\mathrm{D}} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_\mathrm{D} = 0{,}2$$



Exakter Verlauf des Frequenzgangs:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+0{,}5^2\omega^2}\cdot\sqrt{1+20^2\omega^2}}{5\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -90^\circ + \arctan 0{,}5\omega + \arctan 20\omega - \arctan\omega$$