Einführung in die Systemtheorie

Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität, Homogenität

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$u(t)$ ... Eingangssignal
$y(t)$ ... Ausgangssignal
$h(t)$ ... Impulsübertragungsfkt.

<u>Linearität:</u> $k \cdot u(t) \Rightarrow k \cdot y(t)$
<u>Homogenität</u> $u_1 + u_2 \Rightarrow y_1 + y_2$

<u>Zeitinvarianz:</u> $u(t+T) \Rightarrow y(t+T)$
<u>Kausalität</u> $t \equiv \emptyset,\ y(t) \equiv \emptyset,\ h(t) \equiv \emptyset$ wenn $t < \emptyset$
(Ausgangssignal nie vor Eingangssignal!)

höchste Ableitung!
Ein lineares <u>System n-ter Ordnung</u> wird durch folgendes <u>Differentialgleichungssystem</u> beschrieben:

$$\boxed{a_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{\partial^m u}{\partial t^n} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} + \dots + b_0 u_0} \qquad (1)$$

$\rightarrow$ Definition! (muß man jetzt glauben!)

<u>Linearität:</u> Alle Differentialquotienten kommen nur in erster (= linearer) Ordnung vor!
<u>Zeitinvarianz (Stationarität):</u> Koeffizienten a_k, b_k sind Konstanten!

Allgemeine Lösung von (1) im Zeitbereich durch Integration. Ergebnis:

$$\boxed{y(t) = \int_0^t u(t')\, h(t-t')\, dt'}$$

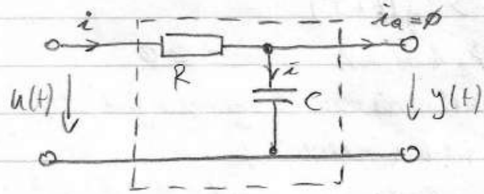
$\rightarrow$ Allgemeine Lösung für lineare Filter. Die Kunst liegt in der Bestimmung von $h(t)$!

Obiges Integral wird auch als <u>Faltungsintegral</u> bezeichnet!

$\Rightarrow$ <u>Faltung</u> (Symbol $\otimes$) des Eingangssignals $u(t)$ mit der Impulsübertragungsfunktion $h(t)$:

$$\boxed{y(t) = u(t) \otimes h(t)} \quad (2)$$

<u>Beispiel zu Gl (1), (2):</u> <u>RC-Filter</u>



Kirchhoff: $y(t) = u(t) - R \cdot i(t) \qquad / Q = C \cdot y$

$$y(t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \underbrace{\int i(t)\, dt}_{Q} \qquad / \tfrac{d}{dt}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y} = \frac{i(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C\dot{y}$$

$$\Rightarrow y(t) = u(t) - RC\dot{y}$$

$$\Leftrightarrow u(t) = y(t) + RC\frac{dy(t)}{dt} = y(t) + \tau \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{1}{\tau} u(t)} \quad (\text{vgl } (1)!)$$

$\Rightarrow$ Filter ersten Ordnung (LC ... 2. Ordnung)

Allgemein: Die Zahl der speichernden Elemente (= Blindelemente) gibt Ordnung

Lösung obigen Differentialgleichung mittels integrierendem Faktor („Euler'scher Multiplikator"): $e^{t/\tau}$

$$\underbrace{e^{t/\tau}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{e^{t/\tau}}{\tau}y(t)} = \frac{e^{t/\tau}}{\tau}u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\cdot e^{t/\tau}\right] = \frac{e^{t/\tau}}{\tau}u(t)$$

$$\downarrow \int_0^t$$

$$\underbrace{\int_0^t \frac{d}{dt'}\left[y(t')\cdot e^{t'/\tau}\right]dt'} = \int_0^t \frac{e^{t'/\tau}}{\tau}u(t')\,dt'$$

$$y(t')e^{t'/\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{t'/\tau}u(t')\,dt'$$

$$y(t)e^{t/\tau} - y(0) = \text{—— " ——} \quad \Big/ \;\begin{array}{l}\text{Anfangsbed:}\\ y(0)=0\end{array}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t u(t')\,e^{\frac{t'-t}{\tau}}\,dt'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^t u(t')\,e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\,dt' \\ \hline y(t) = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^t u(t')\,h(t-t')\,dt' \end{array}}$$

$\Leftrightarrow$ (untere Zeile) → Faltungsintegral!

$$\Leftrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}$$

→ $h(t)$ = Impulsübertragungsfunktion des RC-Glieds!

Einschub: Fourier-Reihe, Fourier Transformation

Fourier - Reihe: Zerlegung periodischer Signale in ihre Frequenzbestandteile!

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)\right) \\ \text{mit} \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \cos(kt)\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \end{aligned}}$$

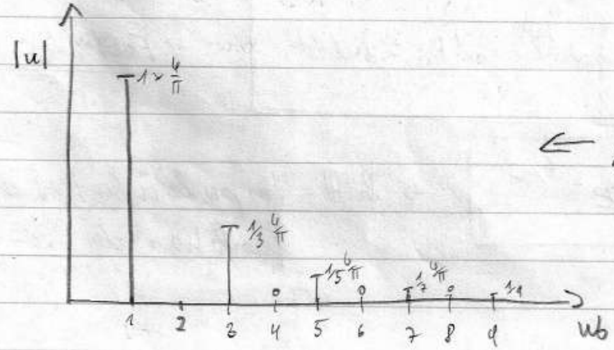
Amplituden der einzelnen Frequenzanteile

-> Signal kann in unendliche Summe von Sinus- und Cosinus-Termen zerlegt werden

-> Amplituden zu jeder Frequenz (a_k, b_k) gibt an, wie „stark" diese Frequenz im Signal enthalten ist

-> Beispiel Rechtecksignal (Folie)

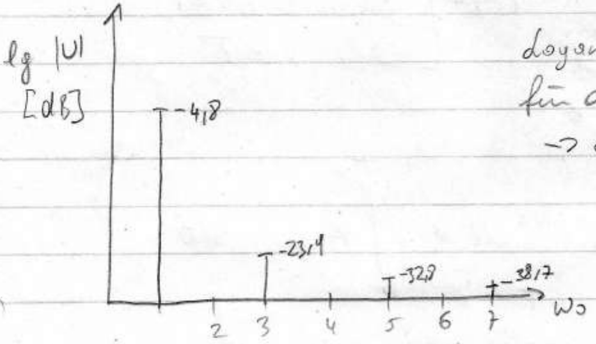
$$u(t) = 4\frac{\hat{U}}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \dots\right)$$



← „Spektrum"

→ Beispiel: Dreiecksignal:

$$u(t) = 8\frac{\hat{U}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega_0 t) - \ldots\right)$$



logarithmischer Maßstab für die Amplituden sinnvoll!
→ dB-Skala
$U=1 = 0\,dB$

„Spektrum"

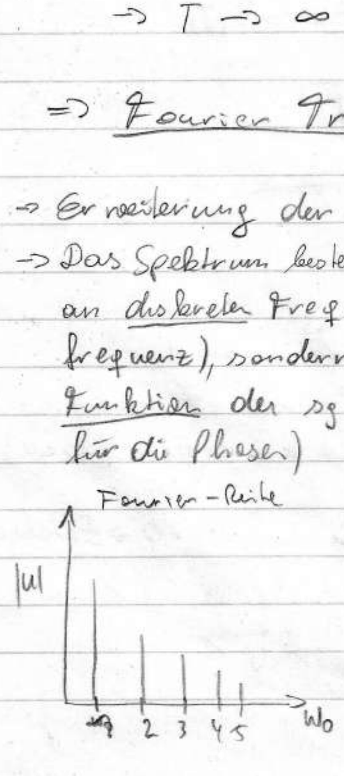
Behandlung nicht-periodischer Signale?

$$\rightarrow T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow 0, \quad \Sigma \rightarrow \int$$

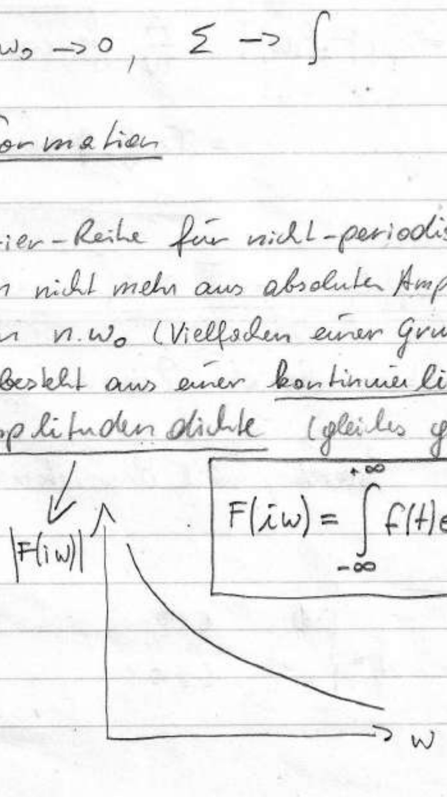
⇒ Fourier Transformation

→ Erweiterung der Fourier-Reihe für nicht-periodische Signale
→ Das Spektrum besteht nun nicht mehr aus absoluten Amplituden an diskreten Frequenzen $n \cdot \omega_0$ (Vielfachen einer Grund=frequenz), sondern es besteht aus einer kontinuierlichen Funktion der sg. Amplitudendichte (gleiches gilt für die Phasen)

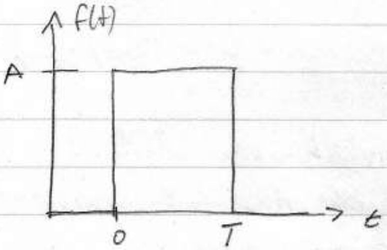
$$\boxed{F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt}$$



→



Beispiel: Fourier-Transformation:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{T} A \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

konj. kompl. $e^{+i\omega T}$

$$= -\frac{A}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{0}^{T} = \underline{\underline{\frac{A}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega T}\right)}}$$

$$\Rightarrow |F(i\omega)| = \frac{A}{\omega} \sqrt{(1-\cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T)}$$

$$\rightarrow 1 - 2\cos\omega T + \underbrace{\cos^2\omega T + \sin^2\omega T}_{1}$$

$$= 2(1 - \cos\omega T)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2}\,\frac{A}{\omega} \sqrt{1 - \cos(\omega T)}}}$$

Laplace - Transformation

Problem bei der Fourier - Transformation:

→ Viele Signale können nicht Fourier-transformiert werden, weil das Integral nicht konvergiert ($\rightarrow \infty$)

Bsp:

Sonderfall $a = 0$ → Einheitssprung

$$f(t) = \begin{cases} \phi & t < \phi \\ e^{at} & t \geq \phi \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} \phi & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-i\omega)t}\, dt$$

$\rightarrow \infty \quad \forall a \geq 0!$

<u>Ausweg:</u> Laplace Transformation

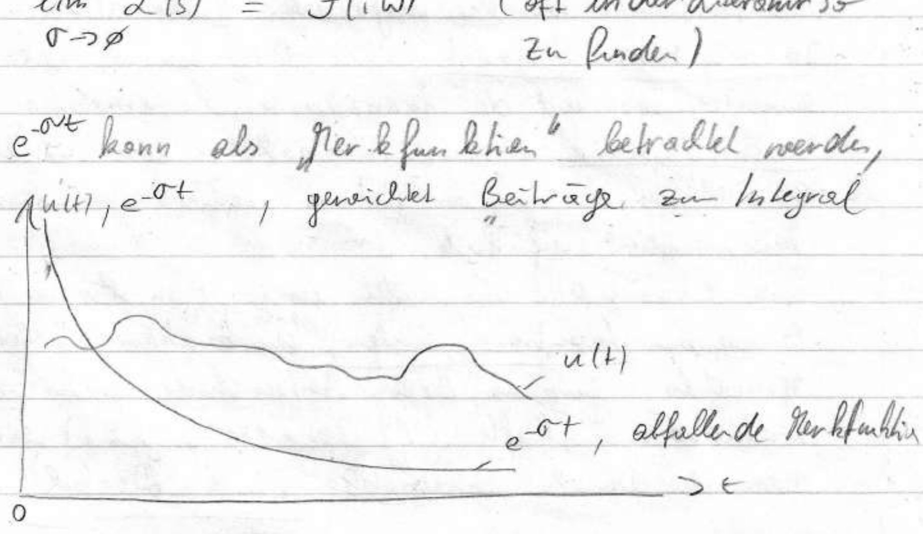
→ Erweiterung der Fourier-Transformation, nützlich insbesondere für Signale, für die die Fourier-Transformierte nicht konvergiert (z.B.: Stufenfunktion = Einheitssprung)

Einführung einer Dämpfungskonstante $\underline{\sigma}$ (oft auch δ genannt) und kombiniert diese mit der (reellen) Frequenz ω zur <u>komplexen Frequenz $s = \sigma + i\omega$</u>

$$\lim_{\sigma \to 0} L(s) = F(i\omega)$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathcal{L}(s) = \mathcal{F}(i\omega)$$ (oft in der Literatur so zu finden)

$e^{-\sigma t}$ kann als „Merkfunktion" betrachtet werden, gewichtet „Beiträge" zum Integral



(Ein psychologisches Analogon wäre das Lesen eines Buches: An die zuletzt gelesenen („neueren") Seite (Kapitel) kann man sich stets besser erinnern als an die zeitlich weiter zurückliegenden.)

Für die hier zu behandelnden kausalen Signale können auch die Beiträge vor $t=0$ weggelassen werden.

Mit allem Bisherigen folgt die Definition „Einseitige Laplacetransformierte für kausale Signale":

$$F(s) = \boxed{\mathcal{L}(u(t)) = u(s) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\, dt} \qquad (3)$$

Das Verfahren wurde ungarischen Mathematiker Jozeph Miksa Petzval (1807–1891) erstmal systematisch eingesetzt, während der französische Mathematiker Pierre Simon Laplace (1749–1827) – nach dem das Verfahren benannt wurde nur im Rahmen seiner Wahrscheinlichkeitsstudien einführte.
Erste Hinweise auf die Idee findet man bereits beim Schweizer Leonhard Euler (1707–1783)[27], die exakten mathematischen Grundlagen für die breite Anwendung in Technik und Naturwissenschaften (1950er–1960er Jahre) erarbeitete aber der Deutsche Mathematiker Gustav Doetsch (1892–1977)

(3) kann immer konvergent gemacht werden, wenn σ groß genug gewählt wird (mathematisch beweisbar!)

→ Beispiel (contd) von vorhin:

$$F(i\omega) = \int_0^\infty e^{(a-\sigma-i\omega)t}\,dt = \frac{1}{a-\sigma-i\omega}\, e^{(a-\sigma-i\omega)t}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sigma+i\omega-a} = \frac{1}{s-a} = F(s)$$

Einheitssprung: $a=0 \rightarrow \underline{\underline{F(s)=\frac{1}{s}}}$

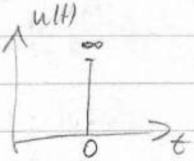
↳ Laplace Transformierte d. 1-Sprungs

Einschub

<u>Impulsantwort:</u> → $\boxed{\text{nach Rücktransformation S 10}}$

$$\delta(t)=u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Dirac-Impuls: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$y(t) = \int_0^t \delta(t')\cdot h(t-t')\,dt' \overset{!}{=} h(t)$$

Die Impulsantwort eines LTI-Systems entspricht seiner Übertragungsfunktion!

<u>Laplace-Rücktransformation:</u>

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(s)\, e^{st}\, d\omega \overset{s=\sigma+j\omega}{=} \boxed{\frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} U(s)\, e^{st}\, ds} \quad (4)$$

Symbolische Schreibweise:

$F(s)$ ist die Laplace-Transformierte von $f(t)$

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) \quad \text{oder} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \quad \text{oder} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$$

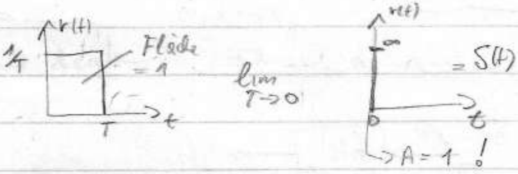
Bisher bekannte Laplace-Transformierte:

$$f(t)\begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ e^{at} & \text{für } t\geq 0 \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Sonderfall Einheitssprung:

$$\varepsilon(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ 1 & \text{für } t\geq 0 \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) = \frac{1}{s}$$

Dirac-Impuls $\delta(t)$:



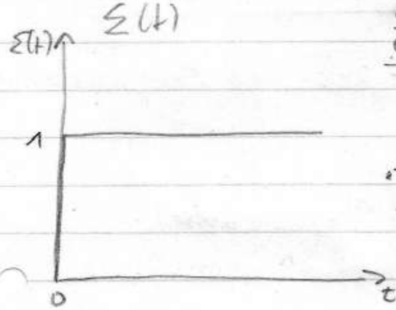
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)\cdot e^{-st}\,dt = 1\cdot e^{-s0} \overset{!}{=} 1 \quad \forall\ \omega \text{ in } s=\sigma+j\omega$$

Das bedeutet, dass alle Frequenzen im Spektrum gleich stark vertreten sind. Damit eignet sich der Dirac-Impuls gut, um die Eigenschaften eines dynamischen Systems zu ermitteln, da alle Frequenzen gleichzeitig gleich stark angeregt werden. Jede Über- oder Untergewichtung bestimmter Frequenzanteile im Ausgangssignal sind dann auf das Systemverhalten zurückzuführen!

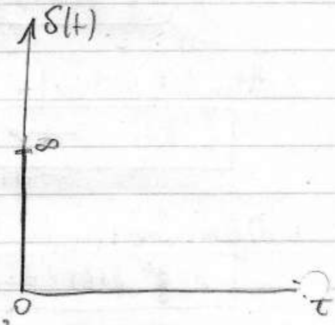
→ Einschub Impulsantwort (S. 9)

Einheitssprung $\varepsilon(t)$ und der Dirac-Impuls $\delta(t)$ sind die am häufigsten betrachteten Eingangsgrößen für dynamische Systeme. Beide stehen in enger Beziehung zueinander:



$$\frac{d}{dt}\,\varepsilon(t) \overset{!}{=} \delta(t) \longrightarrow$$

$$\int_{-0}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \overset{!}{=} \varepsilon(t) \longleftarrow$$



$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} \longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} \longleftarrow$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \qquad\qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Eine Differentialgleichung im Zeitbereich wird zu einer algebraischen Gleichung im Laplace-Bereich (Frequenzbereich, Bildbereich).

$$\left(\int \circ\!\!-\!\!\bullet \;\; \cdot \qquad \frac{d}{dt} \circ\!\!-\!\!\bullet \;\; : \qquad (!) \right)$$

-> Anwendung der Laplace-Transformation auf das Faltungsintegral (2)!

$$\boxed{y(t) = u(t) \otimes h(t) = \int_0^t u(t')\, h(t-t')\, dt' \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \underline{\underline{U(s) \cdot H(s) = Y(s)}}}$$

-> Faltungssatz

-> Aus der Faltung wird eine Multiplikation!

Eigenschaften der Laplace - Transformation:

- Linearität (Überlagerung)

$$\boxed{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)}$$

- Ähnlichkeitssatz (Skalierung der Zeit- bzw. Frequenzachse)

$$\boxed{f(kt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right)}$$

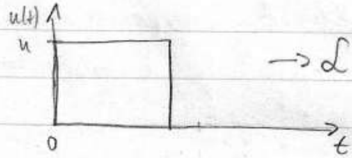
- Dämpfungssatz (Verschiebung der Frequenzachse)

$$\boxed{e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s+a)}$$

- Verschiebungssatz (zeitliche Verschiebung)

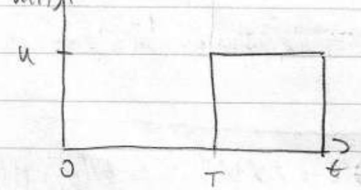
$$\boxed{f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) e^{-sT}}$$

Beweis:



$\rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$

$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \int_0^\infty u(t-T) e^{-st} dt$$



$e^{-st'}$

Substitution:
$t - T = t'$
$\frac{dt'}{dt} = 1 \Rightarrow dt' = dt$

$$= \int_{-T}^{\infty} u(t') e^{-s(t'+T)} dt'$$

$$= e^{-sT} \int_0^\infty u(t') e^{-st'} dt' = e^{-sT} \cdot U(s) \quad \# \text{ q.e.d.}$$

$\hookrightarrow$ Kausalität $\forall t < 0$ gibts kein Signal

Weitere Beispiele von Laplace-Transformierten

	$u(t)$ $(f(t))$	$U(s)$ $(F(s))$
Rampe	t	$1/s^2$
Exponentialfunktion	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
Sinusfunktion	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
Cosinusfunktion	$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

→ Tabellenbücher z.B. Bronstein

- Differentiation im Zeitbereich:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)}$$

Beweis: $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)\, e^{-st}\, dt' \overset{\text{Part. Int.}}{=} \int u v' = uv - \int v u'$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt'}_{F(s)} = -f(0) + sF(s) \quad \# \text{ qed.}$$

- Integration im Zeitbereich

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\, d\tau \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s)}$$

Beim Rechnen mit dynamischen Systemen gehört die Differentiation und die Integration neben der Faltung zu den wichtigsten Operationen! Auch sie vereinfachen sich drastisch in eine Multiplikation bzw. Division durch die komplexe Frequenzvariable s.

- Bestimmung des Anfangswertes für $f(t)$

$$\boxed{f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)}$$

→ Falls die Grenzwerte existieren lässt sich ziemlich schnell der Anfangswert des Zeitverlaufes bestimmen!

· Bestimmung des Endwertes $f(\infty)$ von $f(t)$

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)}$$

→ Falls die Grenzwerte existieren lässt sich ziemlich schnell der Endwert des Zeitverlaufs bestimmen!

→ Die Zeit t und die komplexe Frequenz s verhalten sich invers!

Beispiel: Laplace-Transformation der DGL (1) eines linearen Systems:

$$a_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_0 y_0 = b_m \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} + \dots + b_0 u_0$$

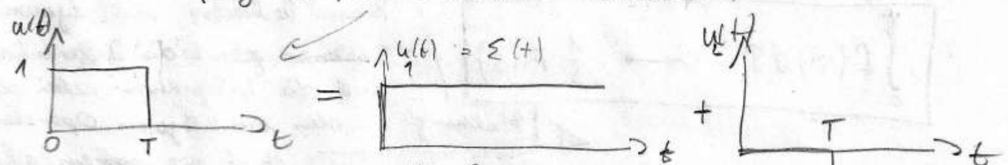
(Zeitbereich)

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \dots +$$

→ Aus der Differentialgleichung wurde eine algebraische Gleichung!

Beispiel: Gesucht ist die Laplace-Transformation für folgende Funktion $u(t)$ im Zeitbereich:



$\mathcal{L}\{u_1(t)\} = \frac{1}{s}$ (ε-Fkt)

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-T/s}\right)}$$

$\mathcal{L}\{u_2(t)\} = -\frac{1}{s} \cdot e^{-T/s}$

$-\varepsilon$ verschoben um T

Linearität (Überlagerungssatz)

→ Verschiebungssatz + Linearität ($k = -1$)

Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich:

Totzeit (Verschiebungssatz)

$$\boxed{h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}} \quad \left(\cdot e^{-T_t s}\right) \quad (8)$$

→ Summen-Standardform, a_n kann ohne Einschränkung immer 1 gesetzt werden (durch dividieren!)

Faktorenzerlegung der Übertragungsfunktion

$$\boxed{h(s) = k \cdot \frac{(s-\alpha_1)\cdot(s-\alpha_2)\cdot \dots \cdot (s-\alpha_m)}{(s-\beta_1)\cdot(s-\beta_2)\cdot \dots \cdot (s-\beta_n)} = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s-\beta_j)}} \quad \left(\cdot e^{-T_t s}\right)$$

α_i ... Nullstellen
β_j ... Pole

} der Übertragungsfunktion $h(s)$

→ Produkt-Standardform der Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich

Faktorisierung (Überführung Summen-Standardform ⇔ Produkt Stdfm.

Bsp: $h(s) = \frac{2s}{s^2+4s+3}$

→ Zähler / Nenner polynom getrennt betrachten
→ 0-Stelle („Wurzel") berechnen (α_i)
→ $(s-\alpha_1)(s-\alpha_2) \cdot \dots \cdot k$

Matlab / Octave:

```
Nenner = [1 4 3];
Zaehler = [2 0];
System = tf [Zaehler, Nenner]
roots (Nenner)
  -3 , -1
```

$$\Rightarrow h(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich

3 Möglichkeiten:

1). Verwendung der Tabelle, d.h. Rückgriff auf die Arbeit Anderer für Standardfälle → optimal effektiv, trivial

2). Explizite Berechnung des Integrals für die Rücktransformation → viel zu mühsam und zu kompliziert

→ 3). Vereinfachung der Übertragungsfunktion (Produkt-Standardform), anschließend Verwendung der Tabelle

→ Erklärung folgt jetzt:

Zerlegung der Produkt-Standardform in Partialbrüche!

- Ziel: Jeder Summand soll so einfach sein, dass er sich mit der Tabelle rücktransformieren lässt!
- Evtl. Totzeiten werden separat mit dem Verschiebungssatz behandelt: $f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)e^{-sT}$

3 Fälle sind zu unterscheiden

1) Pole (= Nullstellen des Nennerpolynoms) einfach und reell
2) Es gibt auch konjugiert komplexe Pole
3) Reelle Mehrfachpole (selten, wird hier nicht behandelt)

Ausgangslage: $h(s) = \dfrac{Z(s)}{(s-\beta_1)(s-\beta_2)\ldots(s-\beta_n)}$

→ Struktur des Zählers ist hier uninteressant!

Ziel: $h(s) = \underbrace{\dfrac{R_1}{s-\beta_1} + \dfrac{R_2}{s-\beta_2}}_{\text{Einzelpole}} + \ldots + \underbrace{\dfrac{R_{re}+jR_{ie}}{s-(A_e+jB_e)} + \dfrac{R_{re}-jR_{ie}}{s-(A_e-jB_e)}}_{\text{konj.-Komplexe Pole}}$

R_i, $R_{re} \pm jR_{ie}$ .. Residuen der Übertragungsfunktion

§ Vorgehensweise:

1) Faktorisierung

Falls die Übertragungsfunktion nicht in der Produkt-Standardform vorliegt muss zumindest das Nenner=polynom faktorisiert werden.

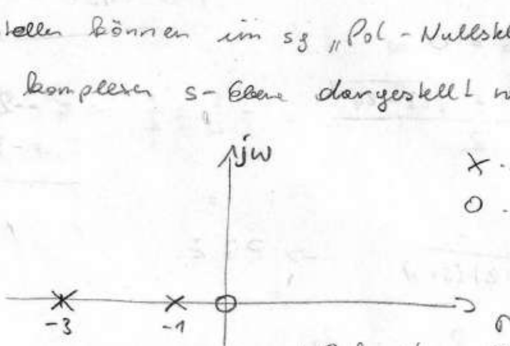
-> Nullstellen des Nennerpolynoms = Polstellen der Übertragungsfunktion!

Siehe Bsp S.15: $h(s) = \frac{2s}{s^2+4s+3}$

$$= \frac{2s}{(s+1)(s+3)}$$

-> $h(s)$ hat zwei einfache reelle Polstellen bei -1 und -3

-> Polstellen können im sg „Pol-Nullstellen-Diagramm" in der komplexen s-Ebene dargestellt werden



Behauptung: Pole bekannt => Verhalten des Systems total bekannt!

2) Partialbruchzerlegung

Erfolgt üblicherweise durch Koeffizientenvergleich.
Für einfache, reele Pole kann der Aufwand durch Anwendung von

$$R_i = \lim_{s \to \beta_i} (s-\beta_i)\, h(s)$$

reduziert werden.

Für obiges Beispiel folgt:

$$h(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{s+3}$$

Residuen?

$$R_1 = \lim_{s \to -1} (s+1)\,h(s) = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow R_1 = -1$$

$$R_2 = \lim_{s \to -3} (s+3)\,h(s) = \frac{-6}{-2} = +3 \Rightarrow R_2 = +3$$

$$\Rightarrow \boxed{h(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}}$$

Bsp: $h(s) = \dfrac{1}{s\underbrace{(s^2+5s+6)}_{(s-s_1)(s-s_2)}}$ ges: $h(t)$

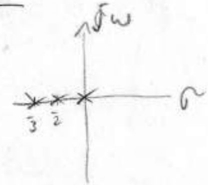
$s_0 = \phi$

Quadratische Gleichung
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\Rightarrow s^2 + 5s + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \rightarrow s_1 = -2, \quad s_2 = -3$$

$$\Rightarrow h(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} \rightarrow \text{PBZ}$$



$$h(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+3}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} s\,h(s) = \frac{1}{6}$$

$$R_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)\,h(s) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{s \to -3} (s+3)\cdot h(s) = +\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow h(s) = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)}$$

$\downarrow$ Tabelle

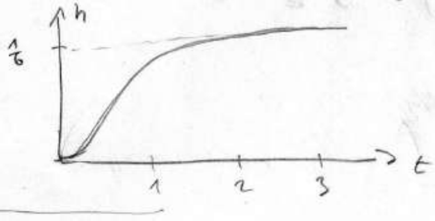
$$\boxed{\frac{1}{6}\varepsilon(t) - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} = h(t)}$$

Anfangswert: $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\cdot h(s)$

$$= \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}(s+2)(s+3)} = \underline{\underline{0}}$$

Endwert: $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot h(s)$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{1}{6}$$



HÜ: $h(s) = \dfrac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ ges: Pol-Nst. Diagramm, h(t) Anfangswert / Endwert

→ Nst: $-2, -1, 0$

Octave: Zaehler = [1 0];
Nenner = [1 3 2 0];
System = tf(Zaehler, Nenner)
roots(Nenner)
→ -2, -1, 0

$h(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

$h(s) = \dfrac{R_1}{s} + \dfrac{R_2}{s+1} + \dfrac{R_3}{s+3}$

$R_1 = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot h(s) = \dfrac{1}{2}$

$R_2 = \lim\limits_{s\to -1} (s+1)\, h(s) = -1$

$R_3 = \lim\limits_{s\to -2} (s+2)\, h(s) = +\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow h(s) = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{s+2}$

$$\underline{\underline{h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}}}$$

Anfangswert: $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\cdot h(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \underline{\underline{0}}$

Endwert $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot h(s) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

Bsp.: $h(s) = \dfrac{1+10s}{s(1+2s)} = \dfrac{1}{s(2s+1)} + \dfrac{10}{(2s+1)}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{s(s+\frac{1}{2})} + \frac{5}{s+1/2}$$

Bronstein 637 $\swarrow$ $\qquad$ $\searrow$ Bronstein 637

$$h(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{1}\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) \qquad 5\cdot e^{-t/2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{h(t) = 1 + 4e^{-t/2}}}$$

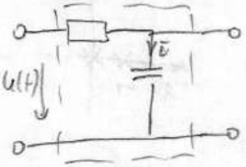
Bsp.: Lösung einer Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = \varepsilon(t) \qquad \rightarrow f(0) = 0$$

$$s^2\cdot X(s) + 5sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2+5s+6)X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+6)}$$

Bsp: RC-Glied (vgl. Erstes Beispiel)



$y(t)$ $\qquad \dot{y}(t) + \frac{1}{T}y = \frac{1}{T}u$

$$sY + \frac{1}{T}Y = \frac{1}{T}U$$

$$\Rightarrow Y\left(s+\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T}U \Rightarrow Y = \frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}U = \frac{1}{1+sT}U$$

Ann: $u(t) = \varepsilon(t)\cdot U_0 \rightarrow U(s) = U_0\,\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{U_0}{s(1+sT)} = \frac{U_0}{T}\,\frac{1}{s(s+\frac{1}{T})}$$

Bronstein 637

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \frac{U_0}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)}}$$

q.e.d.

Anfangswert $y(0)$:

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\cdot\frac{U_0}{T}\frac{1}{\cancel{s}(s+\frac{1}{T})} = \phi$$

Anfangssteigung $\dot{y}(0)$

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{U_0}{T}\frac{s}{s+\frac{1}{T}}$$

$$= \frac{U_0}{T}\underbrace{\frac{s}{Ts+1}}_{\to 1} = \frac{U_0}{T}$$

Endwert: $y(\infty)$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{U_0}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = U_0$$

Mehrfache Pole:

$\to$ Nenner enthält Ausdrücke der Form

$(s-s_i)^n \qquad n>1$

$\Rightarrow$ für jede Potenz von $s-s_i$ ist ein eigener Term bei der PBZ anzusetzen!

Bsp: $$\frac{1}{(s+1)^2(s+5)} = \underbrace{\frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{(s+1)^2}}_{2\text{ Terme}} + \frac{R_3}{s+5}$$

$\to$ Koeffizientenvergleich!

Konjugiert komplexe Polstellen im Laplace-Bereich

$\to$ entsprechen Exponentialfunktionen mit komplexen Exponenten im Zeitbereich, $\triangleq$ sin, cos - Funktionen! (gedämpft)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a+jb}\right\} = e^{-(a+jb)t} = e^{-at}\cdot(\cos(bt)-j\sin(bt))$$

Besitzt eine Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich konjugiert komplexe Polstellen, so ist das zugehörige System schwingfähig!

Rücktransformation:

a) Wenn möglich direkt mit Tabelle

b) Aufspalten in Linearfaktoren und Zusammensetzen der Exponentialfunktionen zu trigonometrischen Funktionen im Zeitbereich (aufwändig aber „straight foreward")

c) Aufspalten in quadratische Faktoren, erweitern auf vollständige Quadrate und direkte Rücktransformation in trigonometrische Funktionen (kürzer, aber Trickreich)

Bsp: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \varepsilon(t)$ $\quad \ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$s^2X + 2sX + 5X = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)}$$

a) → nicht möglich

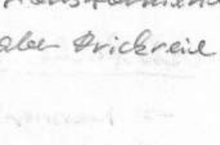
b) → Aufspalten in Linearfaktoren.

Berechnung der Polstellen von $X(s)$ (= 0-Stellen des Nennerpolyn.)

$s_1 = 0$ (trivial)

$s_{2/3}$: $s^2 + 2s + 5 = 0 \quad \xRightarrow{\text{qgl.}} \quad s_1 = -1+2j$

$s_2 = -1-2j$



→ Octave:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1-2j)(s+1+2j)} =$$

Partialbruchzerlegung: $X(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1-2j} + \frac{R_3}{s+1+2j}$

$$1 = R_1(s+1-2j)(s+1+2j) + R_2 \cdot s(s+1+2j) + R_3 s(s+1-2j)$$

$$s_1 = 0 \Rightarrow R_1(1-2j)(1+2j) = 1 \Rightarrow R_1 = 1/5$$

$s_2 = -1+2j$

$$\Rightarrow R_1(\underbrace{\cancel{-1}+\cancel{2j}+\cancel{1}-\cancel{2j}}_{0})(\cancel{-1}+2j+\cancel{1}+2j) + R_2(-1+2j)(\underbrace{\cancel{-1}+2j+\cancel{1}+2j}_{4j}) +$$

$$+ R_3(-1+2j)(\underbrace{\cancel{-1}+\cancel{2j}+\cancel{1}-\cancel{2j}}_{0}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = R_2(-1+2j)4j = -4j-8$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{1}{-8-4j}$$

analog: $s_3 = -1-2j \Rightarrow R_3 = \frac{1}{-8+4j}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{5s} + \frac{1}{-8-4j}\frac{1}{s+1-2j} + \frac{1}{-8+4j}\frac{1}{s+1+2j}$$

$$x(t) = \varepsilon(t)\cdot\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{-8-4j}e^{-(1-2j)t} + \frac{1}{-8+4j}e^{-(1+2j)t}\right)$$

$$= \varepsilon(t)\cdot\left[\frac{1}{5} - e^{-t}\underbrace{\left(\frac{1}{8+4j}e^{2jt} + \frac{1}{8-4j}e^{-2jt}\right)}_{\frac{1}{5}\cos(2t)+\frac{1}{10}\sin(2t)}\right]$$

$\Rightarrow$

$$t \geq 0: \quad x(t) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right] \quad \text{(kmplot)}$$

c) → Aufspalten in quadratische Faktoren:

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

$$\Rightarrow 1 = As^2 + 2As + 5A + Bs^2 + Cs$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} s^2&: 0 = A + B \\ s^1&: 0 = 2A + C \\ s^0&: 1 = 5A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5};\ B = -\frac{1}{5};\ C = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}\right]$$

Erweitern auf vollständiges Quadrat

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s^2+2s+1)+5-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+4}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{(s+1)^2+4}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s} - \underbrace{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}}_{e^{-t}\cos 2t} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{2}{(s+1)^2+4}}_{e^{-t}\sin 2t}\right] =$$

$$x(t) = \frac{1}{5}\varepsilon(t)\left[1 - e^{-t}\left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right] \quad \#$$

HÜ: Haager 0.3.5 f

$$X(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+5}$$

$$= 2\cdot\frac{s+5/2}{(s+2)^2+1} = 2\,\frac{s+2+\frac{1}{2}}{(s+2)^2+1}$$

$$= \underbrace{2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}_{2e^{-2t}\cdot\cos t} + \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2+1}}_{e^{-2t}\cdot\sin t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \underline{\underline{e^{-2t}\left[2\cos t + \sin t\right]}}$$

HÜ (frfr.): Haage 0.3.5 e)

Lösen der Dgl. für verschwindende Anfangsbedingungen

($x(0) = \dot{x}(0) = 0$)

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 1$$

$$s^2 x + 6sx + 10x = \frac{1}{s} \Rightarrow x(s) = \frac{1}{s(s^2+6s+10)}$$

$$\text{PBZ:} \quad \stackrel{!}{=} \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+6s+10}$$

-> Koeffizientenvergleich

$$1 = As^2 + 6As + 10A + Bs^2 + Cs$$

$$\left.\begin{aligned} s^2:&\quad 0 = A+B \\ s^1:&\quad 0 = 6A+C \\ s^0:&\quad 1 = 10A \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{10} \\ C &= -6/10 \\ B &= -1/10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+6}{s^2+6s+10}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+3)+3}{(s+3)^2+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+3)^2+1} - 3\,\frac{1}{(s+3)^2+1}\right] \Rightarrow$$

$$X(t) = \frac{1}{10}\left[1 - e^{-3t}\cos t - 3e^{-3t}\sin t\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{10}\left[1 - e^{-3t}(\cos t - 3\sin t)\right]}}$$

Frequenzgang:

Wird ein LZI-System mit einer sinus- oder kosinus= förmigen Eingangsgröße angeregt, erhält man am Ausgang wieder eine sinus- oder kosinusförmige Größe mit der selben Frequenz, aber mit einer i. A. anderen Amplitude und Phasenlage (harmonische Antwort.).

$$u(t) = \hat{U}\cdot\cos(\omega t) = \hat{U}\cdot Re[e^{j\omega t}] \longrightarrow \boxed{G(j\omega)} \longrightarrow y(t) = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{y}\cdot Re[e^{j(\omega t+\varphi)}]$$

$G(j\omega)$ ..... Frequenzgang

Wie erhält man nun $G(j\omega)$?

→ Formal: Aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ durch Ersetzen von s durch $j\omega$ (ohne Beweis)

Es gilt weiter:

$$\left.\begin{aligned} Y(j\omega) &= \hat{y}\cdot e^{j(\omega t+\varphi)} \\ U(j\omega) &= \hat{U}\cdot e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \boxed{G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}} = \underline{\underline{\frac{\hat{y}}{\hat{u}}\cdot e^{j\varphi}}}$$

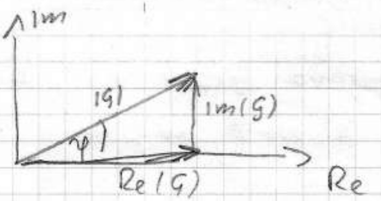
Die mathematische Beschreibung mit sinusförmig eingeschwungenen Zuständen – in den komplexen Zahlenbereich erweitert – wird Darstellung im Frequenzbereich genannt.

Alle physikalischen Größen sind hier nicht von der Zeit sondern von der Kreisfrequenz ω abhängig.

ω tritt immer gemeinsam mit der imaginären Einheit j auf, daher wird „$j\omega$" als unabhängige Variable angesehen.

Betrag des Frequenzgangs $|G(j\omega)|$:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\cdot e^{j\arg(G(j\omega))} = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}\cdot e^{j\varphi}$$
$$= Re[G(j\omega)] + j\,Im[G(j\omega)]$$



$$G(j\omega) =: G = |G| e^{j\varphi} = |G| \cdot [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$

$$= \underbrace{|G| \cdot \cos(\varphi)}_{Re[G]} + j \underbrace{|G| \sin(\varphi)}_{Im[G]}$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} |G| &= \sqrt{(Re[G])^2 + (Im[G])^2} \\ \varphi &= \arctan(Im[G]/Re[G]) \\ Re[G] &= |G| \cdot \cos(\varphi) \\ Im[G] &= |G| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}}$$

Beispiel: Ohm'sches Gesetz:

Elektrotechnik: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ Schreibweise in der ET

Regelungstechnik: $U(j\omega) = Z(j\omega) \cdot I(j\omega)$ — " — " " RT

ET: ω i.A. konst, es interessiert i.A. die Abhängigkeit von $U(\hat{U}, \varphi)$ von $L, R, \ldots$

RT: Frequenzverhalten des Systems ist von Interesse (= Reaktion des Systems auf eine Eingangsgröße in Abhängigkeit von ω)

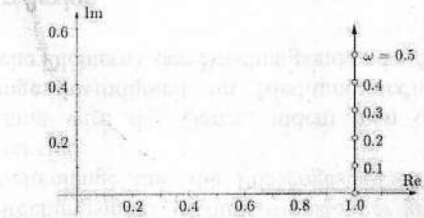
Ortskurven

$G(j\omega)$ liefert für jedes ω einen komplexen Zahlenwert. Menge aller Zahlenwerte für $0 \le \omega < \infty$ beschreibt in der komplexen Zahlenebene eine s.g. Ortskurve

Ortskurve := Darstellung von $G(j\omega)$ in der komplexen Zahlenebene. Sie beginnt bei $\omega = 0$ und endet bei $\omega = \infty$

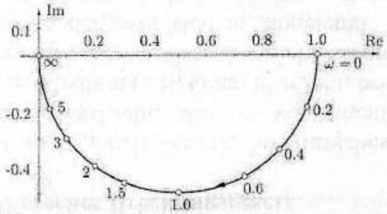
Beispiel:

$$G(s) = 1 + s\,, \quad G(j\omega) = 1 + j\omega \implies \begin{array}{l} \operatorname{Re} G(j\omega) = 1 = const. \\ \operatorname{Im} G(j\omega) = \omega \end{array}$$



Beispiel:

$$G(s) = \frac{1}{1+s}\,, \quad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \implies \begin{array}{l} \operatorname{Re} G(j\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2} \\ \operatorname{Im} G(j\omega) = \dfrac{-\omega}{1+\omega^2} \end{array}$$



ω	$\operatorname{Re} G(j\omega)$	$\operatorname{Im} G(j\omega)$
0.0	1.000	0.000
0.2	0.962	−0.192
0.4	0.862	−0.344
0.6	0.735	−0.442
1.0	0.500	−0.500
1.5	0.308	−0.462
2.0	0.200	−0.400
3.0	0.100	−0.300
5.0	0.038	−0.192
∞	0	0

Es gilt allgemein (ohne Beweis):

Ist die Ortskurve $G(j\omega)$ in der komplexen Zahlenebene eine (Halb-) Gerade, so ist die Ortskurve von $1/G(j\omega)$ ein (Halb-) Kreis und umgekehrt.

Die Inversion einer Gerade in der komplexen Zahlenebene ergibt einen Kreis

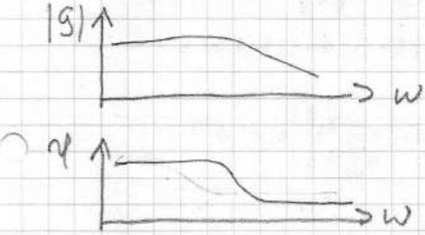
Bode Diagramme

Getrennte Darstellung von $|G(j\omega)|$ und $\varphi(=\arg(G))$

Besondere Bedeutung in der Regelungstechnik!

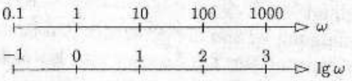
→ viele Eigenschaften eines Regelkreises lassen sich am Bode-Diagramm der offenen Regelschleife ablesen!

→ Wichtiges Werkzeug im klassischen Reglerentwurf!

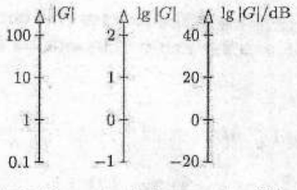


Skalierung für $|G|$, ω erfolgt im logarithmischen Maßstab!

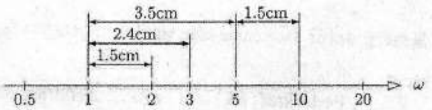
Skalierung für ω:



Skalierung für $|G|$:



Für die Zeichnung ist in den meisten Fällen ein Maßstab von **5 cm/Dekade** günstig, damit ergibt sich folgende, leicht zu merkende Skalierungshilfe:



Achtung: Im logarithmischen Maßstab entspricht ein bestimmter Abstand nicht einer Differenz sondern einem Verhältnis!

Achtung: Im logarithmischen Maßstab entspricht ein bestimmter Abstand nicht einer Differenz, sondern einem Verhältnis!

Auffinden von Punkten einer logarithmischen Skala (bei m cm/Dekade):

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x_{\text{Bode}} &\hat{=} m \cdot \lg x_{\text{absolut}} \\ x_{\text{absolut}} &\hat{=} 10^{\Delta x_{\text{Bode}}/m} \end{aligned}} \tag{0.41}$$

Δx_{Bode}	...	Abstand im Bodediagramm in cm
x_{absolut}	...	Verhältnis zweier Größen
m	...	Maßstab in cm/Dekade

Beispiel:

$$\frac{x}{1} \hat{=} 8.2\,\text{cm} \quad \dots \quad x = 43.65$$

$$\frac{x}{10} \hat{=} 3.2\,\text{cm} \quad \dots \quad \frac{x}{10} = 4.365 \quad \Rightarrow \quad x = 43.65$$

Bodediagramm eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (PT_1):

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT_1}\,, \qquad k = 10\,, \quad T_1 = 2$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T_1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} = \frac{|Z|}{|N|} = \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \arg Z - \arg N = 0 - \arctan \frac{\omega T_1}{1} = -\arctan 2\omega$$

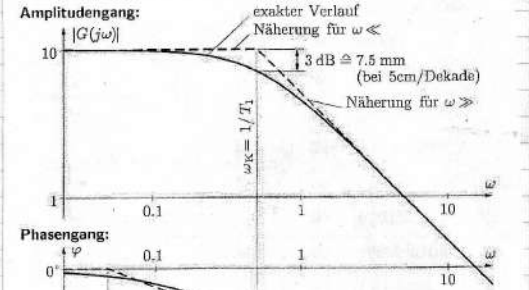
Näherung für kleine Kreisfrequenzen ($\omega \ll$):

$$|G| \approx k = 10$$
$$\arg G \approx 0$$

Näherung für große Kreisfrequenzen ($\omega \gg$):

$$|G| \approx \frac{k}{\omega T_1} = \frac{5}{\omega}$$
$$\arg G \approx -90°$$

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\arg G(j\omega)$
0	10	0
0.1	9.8	−11.3°
0.5	7.07	−45.0°
0.7	5.81	−54.5°
1.0	4.47	−63.4°
2	2.43	−76°
∞	0	−90°



$$k = \frac{k}{\omega T_1}\bigg|_{\omega=\omega_K}$$

Asymptoten des Amplitudenganges (Betragsverlauf in weiten Bereichen der Kreisfrequenz eine gute Näherung.

In der Umgebung der Knick=frequenz ω_K ergeben sich aber nennenswerte Abweichungen!

$$\Rightarrow \omega_K = 1/T_1$$

Asymptoten des Phasenganges (0° für w klein, -90° für w groß) bilden in der Nähe von w_K keine brauchbare Näherung.

Brauchbare Näherung: Linearer Übergang in einem Bereich $0{,}1\, w_K \ldots 10 w_K$ und die Asymptoten selbst außerhalb dieses Bereichs.

Maximaler Fehler der Amplitudennäherung F_A:

$F_{A\,max}$ bei $w = w_K = 1/T_1$

$$|G_{exakt}| = \left.\frac{k}{\sqrt{1+w^2T_1^2}}\right|_{w=1/T_1} = \frac{k}{\sqrt{1+T_1^2/T_1^2}} = \underline{\underline{\frac{k}{\sqrt{2}}}}$$

$$|G_{genähert}| = k$$

$$\Rightarrow \frac{|G_{genähert}|}{|G_{exakt}|} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 = \underline{3\,dB}$$

Steigung des Amplitudengangs:

$x^n \rightarrow \lg x^n = n \cdot \lg x$

lg Exponentielfunktion → Gerade im Diagramm!

gilt auch für negative Potenzen!

In obigem Beispiel: Asymptote für große $w_K \sim \frac{1}{w} = w^{-1}$

$\Rightarrow$ Steigung $= -1 = 20\,dB$ / Dekade!

Bode-Diagramm zusammengesetzter Frequenzgänge:

$$G(jw) = G_1(jw) \cdot G_2(jw) \ldots G_n(jw)$$

$$|G(jw)| = |G_1(jw)| \cdot |G_2(jw)| \ldots |G_n(jw)|$$

$$\Rightarrow \lg |G(jw)| = \lg |G_1(jw)| + \lg |G_2(jw)| + \ldots + \lg |G_n(jw)|$$

→ Betragskennlinie kann durch Addition der Verläufe (→ logarithmisch!) $G_1, G_2, \dots, G_n$ zusammengesetzt werden.

Phasenverlauf:

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(G_1(j\omega)) + \arg(G_2(j\omega)) + \dots + \arg(G_n(j\omega))$$

→ Phasen können ebenfalls durch Addition der einzelnen Verläufe (linear!) zusammengesetzt werden!

⇒ Bodediagramme komplizierter Frequenzgänge können (graphisch) einfach zusammengesetzt werden!

Bsp.:

$$G(s) = \frac{1+sT_1}{1+sT_2}, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 0.2$$

$$G(j\omega) = \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2} = \underbrace{\left(1+j\omega T_1\right)}_{G_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+j\omega T_2}}_{G_2}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2 T_1^2}{1+\omega^2 T_2^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \arctan(\omega T_1) - \arctan(\omega T_2)$$

Näherung für sehr kleine ω:

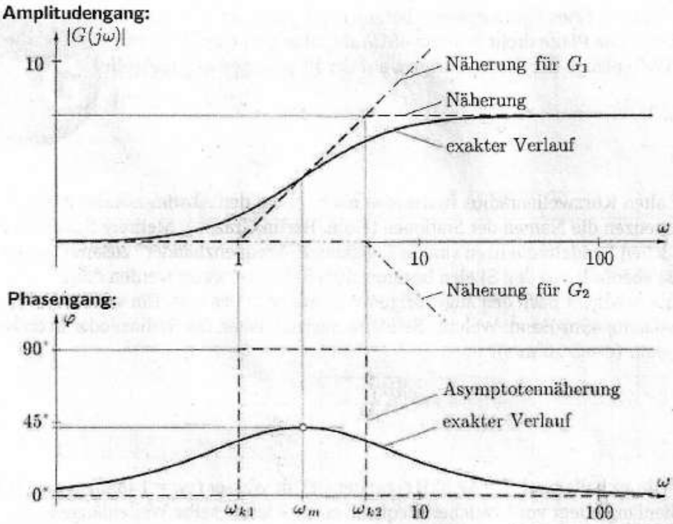
$$\left.\begin{array}{l} |G_1| \sim 1 \; ; \; \arg(G_1) \sim 0 \\ |G_2| \sim 1 \; ; \; \arg(G_2) \sim 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |G| \cong 1 \quad \arg(G) \simeq 0$$

Näherung für große ω:

$$\left.\begin{array}{l} |G_1| \approx \omega \cdot T_1 \approx \omega \; ; \; \arg G_1 \sim 90^\circ \\ |G_2| \approx \frac{1}{\omega T_2} = \frac{5}{\omega} \; ; \; \arg G_2 \sim -90^\circ \end{array}\right\} \; \begin{array}{l} |G| \sim 5 \; ; \\ \arg(G) \sim 0 \end{array}$$

Knickfrequenzen ω_{K1}, ω_{K2}:

$$\omega_{K1} = \frac{1}{T_1} = 1 \quad ; \quad \omega_{K2} = \frac{1}{T_2} = 5$$



$\rightarrow$ $\boxed{\text{Phasenanhebendes System}}$

Exakte Berechnung der maximalen Phasenanhebung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\arg G(j\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{T_1}{1+w^2T_1^2} - \frac{T_2}{1+w^2T_2^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T_1(1+w^2T_2^2) = T_2(1+w^2T_1^2)$$

$$T_1 + w^2T_1T_2^2 = T_2 + w^2T_1^2T_2$$

$$w^2T_1T_2\cancel{(T_2-T_1)} = \cancel{T_2-T_1}$$

$$\underline{\underline{w_m}} = w = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}}}$$

$\rightarrow$ maximale Phasenanhebung beim <u>geometrischen Mittel</u> der beiden Knickfrequenzen

$$\Rightarrow \max\left[\arg(G(jw))\right] = \arg(G(jw))\Big|_{w=w_m}$$

$$= \arctan(w_mT_1) - \arctan(w_mT_2)$$

$$= \arctan\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - \arctan\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \arctan(\sqrt{5}) - \arctan\sqrt{\tfrac{1}{5}})$$

$$= \underline{\underline{41{,}8^\circ}}$$

Phasenminimumsysteme (reguläre Systeme, Minimalphasensysteme)

Sind Systeme ohne Totzeit, bei denen die Übertragungsfunktion $G(s)$ nur Pole und Nullstellen in der linken (imaginären) s-Halbebene hat.

Für einen gegebenen Amplitudengang hat ein Minimalphasen-System eine minimale Phasenverschiebung.

Dabei zeigt sich, dass bei diesen Systemen einer bestimmten Steigung (logarithmisch) der Asymptote der Betragskennlinie einem bestimmten Wert der Asymptote des Phasengangs zugeordnet werden kann:

Steigung von $\lg|G(j\omega)|$

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \varphi = 0 \\ 1 &\rightarrow \varphi = 90^\circ \\ 2 &\rightarrow \varphi = 180^\circ \\ -1 &\rightarrow \varphi = -90^\circ \\ -2 &\rightarrow \varphi = -180^\circ \end{aligned}$$

Minimalphasensysteme spielen bei der Stabilitätsbetrachtung von Regelkreisen eine wichtige Rolle, da sie sog. „interne" Stabilität aufweisen.

Deswegen genügt bei Minimalphasensystemen die Kenntnis des Amplitudengangs, um auf die Übertragungsfunktion schließen zu können!