it P_x bzw. U_x die Meßgröße und erhalten den *eistungspegel* L_p (oder auch L) und den *Span-ungspegel* L_u:

$$=L_p = 10\lg\frac{P_x}{P_0}\,\text{dB} = 20\lg\frac{U_x}{U_0}\,\text{dB} - 10\lg\frac{Z_x}{Z_0}\,\text{dB} \qquad (1.2\text{-}2\text{a})$$

$$L_u = \quad \ln\frac{U_x}{U_0}\,\text{Np} = \tfrac{1}{2}\ln\frac{P_x}{P_0}\,\text{Np} + \tfrac{1}{2}\ln\frac{Z_x}{Z_0}\,\text{Np} \qquad (1.2\text{-}2\text{b})$$

Vir können einen bestimmten Pegel außerdem owohl in Np als auch in dB angeben, denn es ilt nach Gl. (1.2-2a) und Gl. (1.2-2b):

$$\text{Np} = \left(\frac{2}{\ln 10}\right)\text{B} = \left(\frac{20}{\ln 10}\right)\text{dB}$$

$$\text{Np} = 8{,}686\,\text{dB} \qquad (1.2\text{-}3)$$

$$\text{dB} = 0{,}115\,\text{Np}$$

ienauso wichtig wie der Begriff Pegel ist der egriff *Dämpfung*. Wir betrachten eine reflexions-ei abgeschlossene Leitung (vgl. 2.2.5) und ver-leichen die Leistungspegel L_{p1} und L_{p2} an zwei tellen 1 und 2 im Übertragungsweg. Das garithmische Verhältnis der Leistungen P_1 und 2 an den besagten Stellen bezeichnet man als

$$\text{Dämpfungsmaß} \quad a = 10\lg\frac{P_1}{P_2}\,\text{dB} \qquad (1.2\text{-}4)$$

Mit Gl. (1.2-2) wird

$$L_{p1} - L_{p2} = 10\lg\frac{P_1}{P_0}\,\text{dB} - 10\lg\frac{P_2}{P_0}\,\text{dB} =$$

$$= 10\lg\frac{P_1}{P_2}\,\text{dB}$$

lso

$$a = L_{p1} - L_{p2} \qquad (1.2\text{-}5)$$

Im Normalfall ist $a>0$, es liegt also tatsächlich eine Dämpfung vor; bei $a<0$ handelt es sich um eine Verstärkung. Wir sehen, daß auch bei Ein-satz von Übertragern im Zug der Übertragungs-strecke, d.h. bei unterschiedlichem Wellenwider-stand (vgl. 2.2) an den Punkten 1 und 2, Gl. (1.2-5) gültig bleibt; Voraussetzung ist die o.g. Re-flexionsfreiheit. Für die Übertragungstechnik sind zwei Darstellungsarten wichtig:

- Als Bezugswert P_0 bzw. U_0 (oder I_0), siehe Gl. (1.2-2), wird der Wert an einer bestimmten Stelle des Übertragungsweges genommen („*Relativer Pegel*"). In der Regel bezieht man sich auf den Eingang; bei Fernsprechsystemen auf den Punkt nach dem I. Gruppenwähler.
- Als Bezugswert dient ein festgelegter Normal-wert („*Absoluter Pegel*"). Der Normalwert ist bei der Leistung $P_0 = 1$ mW, bei der Spannung $U_0 = 0{,}775$ V (ein Effektivwert der Spannung von 0,775 V entspricht an einem Widerstand $Z_0 = 600\,\Omega$ – übliche Anpassung bei Fern-sprechleitungen – der Leistung 1 mW). Häu-fig wird der absolute Pegel in dBm oder Npm angegeben; der Zusatz m weist auf den Be-zugswert 1 mW hin. Z.B.: 1 pW ≙ −90 dBm.

Beispiel: In einem Widerstand (Fall a): 600 Ω, Fall b): 150 Ω) wird eine Leistung $P = 150\,\mu$W um-gesetzt. Wie groß ist der absolute Pegel?
a) Hier werden Leistungspegel L und Spannungs-pegel L_u gleich, da $Z_0 = 600\,\Omega$ ist. Nach Gl. (1.2-2a):

$$L = L_u = 10\lg\frac{150\,\mu\text{W}}{1\,\text{mW}}\,\text{dB} = -8{,}24\,\text{dBm}$$

b) Da die Leistung gleich bleibt, ändert sich am Leistungspegel nichts. Spannungspegel nach Gl. (1.2-2a):

$$L_u = L + 10\lg\frac{Z_x}{Z_0}\,\text{dB} = -8{,}24\,\text{dB} - 6{,}02\,\text{dB}$$

$$L_u = -14{,}26\,\text{dB}$$

In fast jedem Buch über Nachrichtentechnik findet man Tabellen oder Nomogramme, um Leistungs- oder Spannungsverhältnisse sowohl in dB als auch in Np ausdrücken zu können. Für die praktische Arbeit ist es aber fast hin-reichend, wenn wir die in Gl. (1.2-2) und Gl. (1.2-3) niedergelegten Zusammenhänge verstan-den und uns zwei Werte gemerkt haben:

- Leistungsverhältnis 2 entspricht 3 dB (0,3 B = = lg 2)
- Leistungsverhältnis 10 entspricht 10 dB (1 B = = lg 10), damit: Leistungsverhältnis 10 · 10 = = 100 entspricht (10 + 10) dB = 20 dB, usw.

Daraus können wir die meisten Werte im Kopf ermitteln.

Beispiel: Ein Sender gibt 1 W ab. Die Strecke hat eine Dämpfung von 118,5 dB. Wie groß ist die Leistung am Ende der Strecke?
Wie kennen einen der fraglichen Dämpfung nahe-liegenden Wert: 120 dB sind 12 Größenordnungen der Leistung, d.h. 1 W würde durch 120 dB auf 1 pW gedämpft. Da 3 dB ≙ Faktor 2 bei der Leistung, ent-sprechen 1,5 dB dem Faktor $\sqrt{2} = 1{,}41$. Ergebnis also 1,41 pW.

Näheres zur Pegelrechnung findet man u.a. in [1–52], [1–127], [1–51].

1.2.1.3. Komplexe Kreisfrequenz und Eigenschwingungen

Bei der Untersuchung von Netzwerken ergibt sich eine nützliche Erweiterung der gewohnten Beschreibung stationärer Sinusschwingungen: Die Einführung der „*Komplexen Kreisfrequenz*" (oft auch einfach *komplexe Frequenz* genannt)

$$p = \sigma + \mathrm{j}\omega \qquad (1.2\text{-}6)$$

Wir wollen diesen Punkt etwas genauer be-sprechen. Dabei werden wir immer wieder das-selbe exemplarische Beispiel heranziehen (Rei-henschwingkreis).
Wir beginnen mit bekannten Begriffen der kom-plexen Rechnung. Die folgenden Sinusgrößen sind in DIN 5475 Blatt 1, DIN 5483 und DIN 40110 festgelegt; wir nehmen die Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi)$ als Beispiel:

Augenblickswert	u
Amplitude	$\hat{u}$
Effektivwert	$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}$
Komplexe Amplitude	$\hat{\underline{u}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$
Komplexer Effektivwert	$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\underline{u}}$

$$(1.2\text{-}7)$$

Der *komplexe Augenblickswert* der zeitlich sinus-förmig verlaufenden Spannung ist

$$\underline{u}(t) = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \hat{\underline{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (1.2\text{-}8)$$

Der physikalische Augenblickswert ist der Real-teil des komplexen Augenblickswertes

$$u(t) = \mathrm{Re}\,\underline{u}(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.2\text{-}9)$$

Wir erhalten bei der Darstellung in der kom-plexen Ebene den physikalischen Augenblicks-wert, indem wir den komplexen Augenblicks-wert auf die reelle Achse projizieren.

Einführung der komplexen Kreisfrequenz p

Nun soll die Beschreibung der stationären Sinus-schwingung Gl. (1.2-9) auf zeitlich an- oder ab-klingende Schwingungen erweitert werden; zu diesem Zwecke wird in Gl. (1.2-9) der Faktor $\mathrm{e}^{\sigma t}$ eingeführt:

$$u(t) = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.2\text{-}10)$$

Bild 1.2-1 zeigt Beispiele für verschiedene σ. Wir vergleichen nun Gl. (1.2-9) und Gl. (1.2-10):

(1.2-9):

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \mathrm{Re}\{\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\} = \mathrm{Re}\{\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

(1.2-10):

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\hat{u}\,\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\} = \mathrm{Re}\{\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{(\sigma + \mathrm{j}\omega)t}\}$$

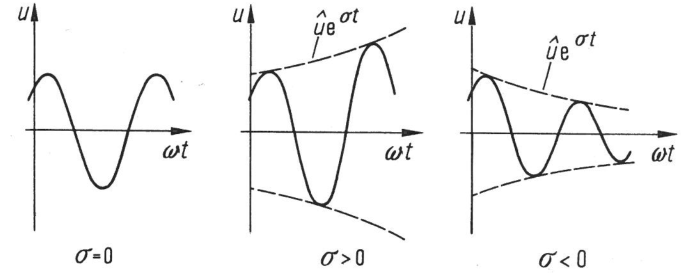

Bild 1.2-1. An- und abklingende Sinusschwingungen

Durch Einführung der komplexen Kreisfrequenz p nach Gl. (1.2-6) erhalten wir eine einheitliche Darstellung sowohl für stationäre als auch für an- bzw. abklingende Sinusschwingungen. Es wird mit der komplexen Amplitude $\underline{\hat{u}}=\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ nach Gl. (1.2-7):

Komplexer Augenblickswert

$$\underline{u}(t)=\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{pt}=\underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{pt} \tag{1.2-11}$$

Physikalischer Augenblickswert

$$u(t)=\mathrm{Re}\,\underline{u}(t)=\hat{u}\,\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t \tag{1.2-12}$$

Wir können den Zahlenwert der komplexen Kreisfrequenz p in der Gaußschen Zahlenebene darstellen, wie dies bei komplexen Zahlen üblich ist. Wir sprechen dann von der *Ebene der komplexen Kreisfrequenz* oder *p-Ebene*. Bild 1.2-2 zeigt, welche Oszillogramme bestimmten Punkten der p-Ebene zukommen. Punkte auf der imaginären Achse (jω-Achse) kennzeichnen reine Sinusschwingungen. Für jeden Punkt der Ebene ergibt die Ordinate den Wert der physikalischen Kreisfrequenz (deshalb nur obere p-Halbebene vorhanden) und die Abszisse die Schnelligkeit des An- oder Abklingens.

Operatorenrechnung

Bei der Einführung der komplexen Rechnung bei Wechselstromgrößen ergab sich z.B. für den Spannungsabfall, den ein sinusförmiger Strom $\underline{i}(t)$ an einer Induktivität hervorruft:

$$\underline{u}_\mathrm{L}(t)=L\frac{\mathrm{d}\underline{i}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Mit Gl. (1.2-8)

$$\underline{\hat{u}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=L\frac{\mathrm{d}\underline{\hat{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{\hat{u}}=\mathrm{j}\omega L\underline{\hat{i}} \tag{1.2-13}$$

Oder mit Effektivwerten

$$\underline{U}=\mathrm{j}\omega L\underline{I} \tag{1.2-14}$$

Alle Ströme und Spannungen im linearen Netzwerk mit sinusförmiger Erregung (Frequenz ω) sind selbst wieder sinusförmig (Frequenz ω); sie enthalten in ihren komplexen Augenblickswerten sämtlich den Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, den man manchmal als „Dreher" bezeichnet. Man kann deshalb mit diesem Faktor kürzen und kommt zur gewohnten Darstellung Gl. (1.2-13) bzw.

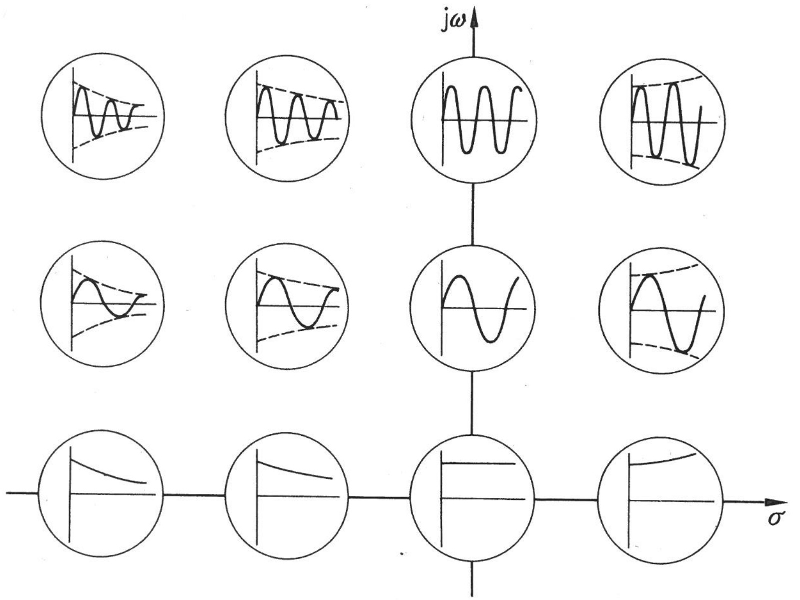

Bild 1.2-2. Ebene der Komplexen Kreisfrequenz (p-Ebene) mit erläuternden Oszillogrammen

Gl. (1.2-14). Bei der Einführung der komplexen Frequenz trat an die Stelle des „Drehers" $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ der „Drehstrecker" e^{pt}. Wir können in linearen Netzen Ströme und Spannungen stets durch Drehstrecker darstellen. Dies führt uns auf die von Heaviside und K.W. Wagner begründete *Operatorenrechnung* [1-21]; sie ist im Prinzip eine erweiterte komplexe Behandlung der Wechselstromprobleme. Wie sich vorher für den induktiven Widerstand in Gl. (1.2-14) der Wert jωL ergab, so ergibt sich nach der „analytischen Erweiterung"

$$\mathrm{j}\omega\rightarrow p=\sigma+\mathrm{j}\omega$$

der „Operator" pL. Praktisch stellen wir für ein gegebenes Netzwerk wie gewohnt mit komplexer Rechnung die Gleichungen auf und ersetzen dann jω durch p. Zusammenstellung:

Gesetz	Operator	
$u_\mathrm{R}(t)=R\,i_\mathrm{R}(t)$	R	
$u_\mathrm{L}(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t}$	pL	
$u_\mathrm{C}(t)=\dfrac{1}{C}\int i_\mathrm{C}(t)\,\mathrm{d}t$	$\dfrac{1}{pC}$	(1.2-15)

Die Differentiation führt also auf die Multiplikation mit p, die Integration auf die Multiplikation mit $\frac{1}{p}$.

Darstellung von Netzwerkeigenschaften in der komplexen p-Ebene

Aus der Mathematik ist die Beschreibung einer Funktion durch ihre Pole und Nullstellen bekannt. Eine anschauliche und wichtige Darstellung von Netzwerkeigenschaften ergibt sich, wenn man die *Pole* $p_{\mathrm{x}\mu}$ (Singularitäten, Unendlichkeitsstellen) und die *Nullstellen* $p_{0\nu}$ (Wurzeln) einer das Netzwerk kennzeichnenden Funktion (Übertragungsfunktion; Scheinwiderstand bei Zweipolen) in der p-Ebene darstellt. Aus einer derartigen Darstellung können wir z.B. sofort Angaben über die Stabilität machen (siehe 1.3.2.3).

Wir ermitteln Nullstellen und Pole durch eine Faktorenzerlegung des zu untersuchenden komplexen Ausdrucks. Ein bekanntes E [1-21], [1-24] ist der Scheinwiderst einfachen Zweipols, nämlich des Reihe kreises. Wir stellen den Scheinwiderst rationale Funktion (d.h. als Verhält Polynome in p) dar und ermitteln d torenzerlegung die Wurzeln des Zähler (Nullstellen von $\underline{Z}$) und des Nenner (Pole von $\underline{Z}$).

Es ergibt sich

$$\underline{Z}(p)=R+pL+\frac{1}{pC}=\frac{p^2L+pR+\frac{1}{C}}{p}$$

$$=L\frac{(p-p_{01})(p-p_{02})}{(p-p_{\mathrm{x}1})}$$

Durch die Angabe der Pole und Nul also $\underline{Z}$ bis auf eine Konstante (L) ein stimmt.

Aus dem Zählerpolynom erhalten wir stellen

$$p_{01},p_{02}=-\frac{R}{2L}\pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma=-\frac{R}{2L};\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad \omega_0'=\sqrt{\omega_0^2}$$

Der Nenner verschwindet für $p=p_{\mathrm{x}1}=$ dem ergibt sich wegen des Übergewich im Zähler von Gl. (1.2-16) als zw $p_{\mathrm{x}2}=\infty$.

Durch Eintragen der Nullstellen a Kreise und der Pole als Kreuze erhalte

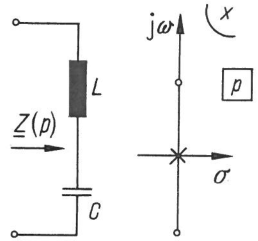

Bild 1.2-3. Idealer Reihenschwingkreis und Diagramm