
Numerical implementation of the undulator radiation at resonance and off-resonance

Internship perform at European Synchrotron Radiation Facility - Grenoble

Sophie Thery

August 29, 2016

Contents

1	Introduction	1
1.1	l'ESRF et le rayonnement synchrotron	1
1.2	L'objectif du stage	1
2	Devices that emit synchrotron radiation	3
2.1	Storage ring	3
2.2	Bending magnets	4
2.3	Undulator	5
2.3.1	Undulator's parameters	5
2.3.2	The magnetic field	7
3	Equations of motions of an electron	9
3.1	Equations of motion of a charged particule	9
3.1.1	The equation	9
3.1.2	Unicity and existence of the solution	10
3.2	Analytical solutions	10
3.2.1	Analytical solution for the bending magnet	10
3.2.2	Analytical solution for the undulator	11
3.3	Numerical method	13
3.3.1	Solution from a classical integration	13
3.3.2	Solution from ODE : ODEINT package	13
4	Energy radiated by an accelerated electron	14
4.1	Energy radiated for an electron moving in an arbitrary trajectory	14
4.1.1	Generic formula	14
4.1.2	First far field approximation	15
4.1.3	Second approximation	15
4.1.4	A simpler formula	16
4.2	Numerical implementation :	17
5	First results	18
5.1	Undulator test	18
5.2	ESRF's undulator: ESRF18	20
5.3	ESRF's bending magnet	22
6	Comparaison et critique sur les différentes méthodes	23
6.1	Erreurs des différentes trajectoires	23
6.1.1	L'erreur relative pour chaque méthodes	23
6.1.2	Une différence entre les deux méthodes de calcul de la trajectoire.	24
6.2	Conditions pour les différentes formules du rayonnement	25
6.2.1	La limite entre 'near field' et 'far field'	25
6.2.2	Erreur en fonctions du nombre de points sur la trajectoire	27
6.3	Quelles méthodes pour quelles conditions	28
7	Le code : pySRU	29
7.1	La structure du code	29
7.2	La fonction <code>create_simulation</code>	31
8	conclusion	34

9	Remerciements	34
A	Annexes	35
A.1	Calcul des erreurs entre les différentes formules pour le calcul du rayonnement	35
A.1.1	La limite 'near field' et 'far field'	35
A.1.2	Erreur par rapport au nombre de points dans l'intégration	37

1 Introduction

1.1 l'ESRF et le rayonnement synchrotron

Les expériences utilisant les rayons X sont des outils essentiels pour les sciences expérimentales notamment pour leurs capacités non destructives. Elles sont du coup très intéressante pour les expériences dans le domaine de la physique des matériaux, la chimie, la biologie, la santé ou encore l'archéologie. Pour obtenir un tel rayon on peut accélérer des particules chargées. C'est ce qu'on appelle le rayonnement synchrotron.

L'ESRF - European Synchrotron Radiation Facility - est une des sources de rayon X de 3eme génération la plus intense au monde. C'est une entreprise Européenne semi-publique, financée par 21 Pays (dont la France) en 1988 situé à Grenoble. Ce synchrotron fonctionne 24 heures sur 24 et 7 jours sur 7, on y compte environ 6500 visites scientifiques par an et 2000 publications par an. L'ESRF est ouvert à l'ensemble de la communauté scientifique et offre un outil pour des expériences dans différents domaines scientifique. Ces expériences sont faites dans ce qu'on appelle des lignes de lumière. Des électrons sont dans un premier temps accélérés dans un accélérateur linéaire puis circulaire jusqu'à une énergie de 6 gigaélectronvolts. Ils circulent ensuite pendant des heures dans un anneau de stockage, qui mesure environ 844 mètres de circonférence, d'où partent les lignes de lumière.

Dans ce grand anneau de stockage, les électrons vont passer par des dispositifs qui vont l'accélérer et lui faire émettre des rayonnements. Parmi ces dispositifs il y a ce qu'on appelle les onduleurs qui vont produire les rayonnements le plus intense. C'est ce dispositif qui va faire l'objet de ce rapport.

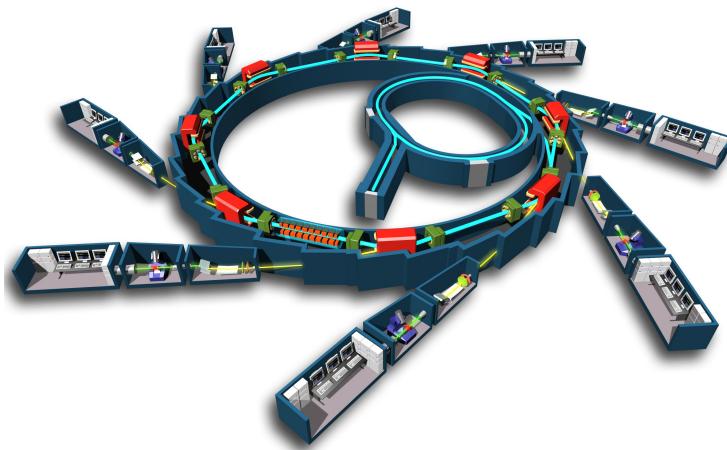


Figure 1: Schema d'un Syncrotron

1.2 L'objectif du stage

Mon maître de stage Manuel Sanchez del Rio travail sur l'élaboration de logiciels de simulation de lignes de lumière. Le but premier de mon stage est d'implémenter un programme qui calcule le rayonnement émit par un électron dans un ondulateur. Il existe des résultats théoriques mais ceux-ci sont approximatifs ou s'applique à des trajectoires expérimentales. Notre souhait étant de pouvoir aussi calculer ce rayonnement à partir de trajectoire plus arbitraire.

En fait il existe déjà des codes permettant ce genre de simulation mais ceci sont vieux, complexe, et peuvent difficilement s'intégrer dans les environnements souhaités. Le but est donc de refaire ses codes, en langage python avec les bibliothèques numpy et spicy.

L'autre objectif important du stage est de faire une explication et un inventaire des formules et techniques utilisées. C'est ce dernier point qui nous a amené à, dans un premier temps, ne

pas recopier les codes déjà existant et rechercher dans la littérature des formules et techniques disponible pour ce problème et pouvoir ensuite les implémenter dans le logiciel.

La première moitié du stage a tourné principalement autour de ce sujet. Un premier programme a été implanté. La seconde moitié du stage s'est porté sur l'extension du programme à un autre dispositif, les aimants de courbure, ainsi qu'une critique et comparaison des différentes formules et méthodes mises à jours pendant la première moitié du stage. C'est aussi dans cette partie qu'on a redessiné notre code en suivant des méthodes de programmations orientés objet. Aussi ce code est proposé pour une distribution et une installation internet bien qu'il soit encore en cours d'élaboration.

Le rapport qui suit se décompose ainsi :

- Section 2: Description générale des objets étudiés et utilisés dans le code, ainsi que leurs principaux paramètres.
- Section 3 : Les équations du mouvements pris en référence, et leurs résolutions analytique ou numérique.
- Section 4 : Les différentes formules permettant de calculer le rayonnement émis et leur différentes approximations.
- Section 5: Des exemples en images des principaux résultats obtenus.
- Section 6 : Une comparaison et estimation des erreurs sur les différentes méthodes de calcul pour la trajectoire ou le rayonnement émis.
- Section 7 : Un descriptif du code, de son fonctionnement et ses possibilités.
- En annexe : Les calculs qui ont servi de base pour justifier les comparaisons entre les différentes méthodes (section 6).

L'un des buts premiers du stage étant la communication des résultats trouvés, les sections relatives au résultats généraux sont en anglais (sections 2 à 5). Le code n'étant pas destiné à être un produit fini mais surtout une base sur laquelle Mr Sanchez del Rio et son équipe vont pouvoir travailler. Les sections comparaisons des résultats et explications du code sont donc en français (sections 6 et 7).

2 Devices that emit synchrotron radiation

2.1 Storage ring

Before getting into the storage ring, the electrons are accelerated in order to increase their velocity close to the speed of light. These relativistic electrons have the advantage of emitting radiation in a concentrated cone with a narrow angle.

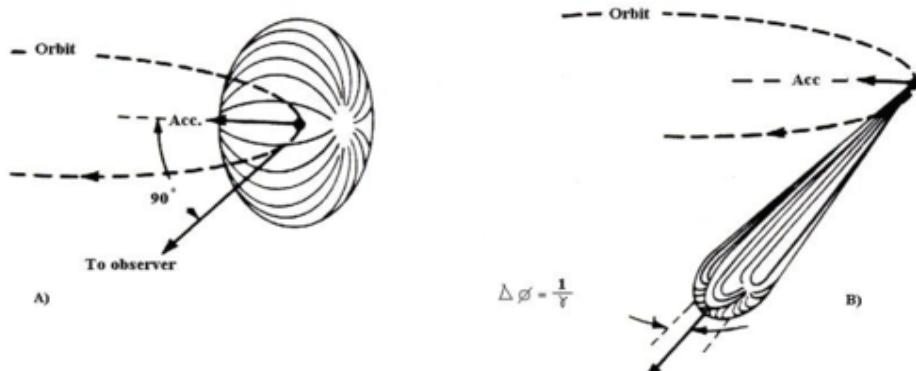


Figure 2: A) Radiation emitted by non relativistic electron (for example antennas), B) Radiation emitted by relativistic electron

The two devices, in which we are interested here, are used inside the storage ring and have an effect on the electron in the beam. Then the beam line is positioned so as to receive the emitted radiation.

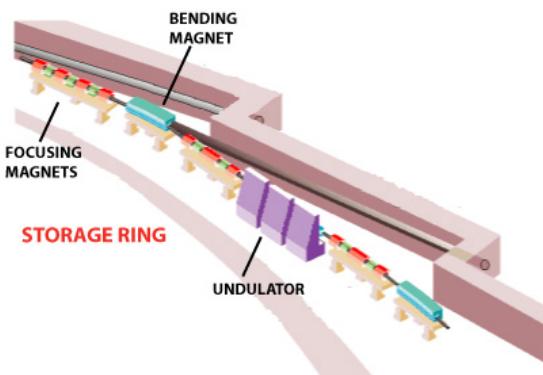


Figure 3: Storage ring plan

In our case, we consider only one electron is in the beam or, if many, all will have identical parameters (energies, positions and directions) . Properties of this electron can be described by two parameters :

- The energy of the electron : E (GeV)
The order of magnitude between 1 and 8 GeV for different synchrotron. $E = 6\text{GeV}$ for ESRF
- The electron current: I (A)
order of magnitude between 0.1 and 1 A, It is 0.2 A for ESRF.

From these parameters we can deduce :

- the Lorentz factor : $\gamma = \frac{E}{mc^2}$
order of magnitude : $\gamma \approx \frac{E[\text{GeV}]}{0.511} 10^3$. It is ≈ 12000 for ESRF
- the electron speed : $c\beta$ where $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$
order of magnitude : $\beta \approx \frac{1}{2\gamma^2}$

2.2 Bending magnets

Bending magnets create a constant magnetic field in order to curve the electron trajectory. They are necessary to make electrons perform closed trajectories in the storage ring.

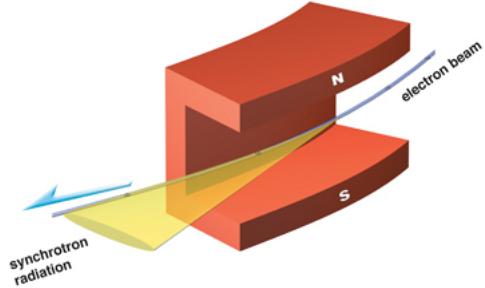
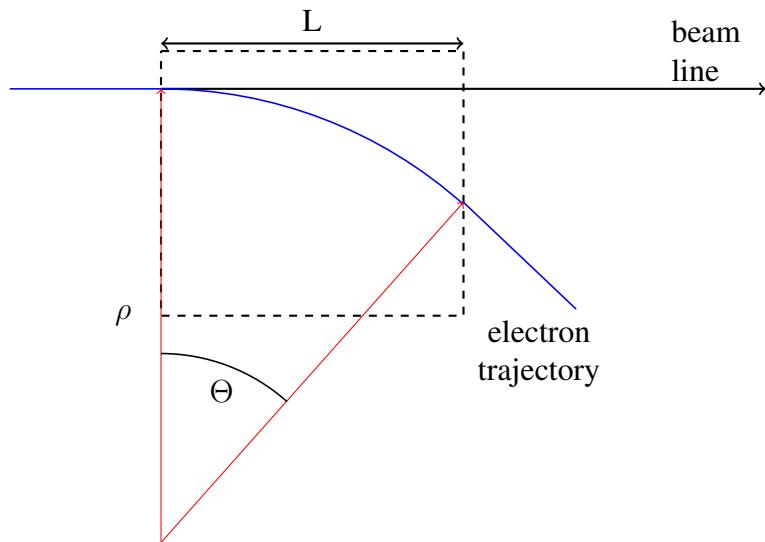


Figure 4: Bending magnet drawing

Bending magnets are part of the storage ring because it is used in order to deviate the electron trajectory between each linear part of the beam line.

Bending magnet parameters



A bending magnet can be described by different parameters, some of them depend on the electron energy:

- The physical parameters :
 - magnetic field strength B_0
order of magnitude ≈ 1 (T)
 - la longueur physique L (m)
order of magnitude ≈ 1 (m)

- curvature radius : $\rho = \frac{mv_e}{eB_0}$
order of magnitude $\approx 10^2$ (m)
 - horizontal divergence $\Theta = \arcsin\left(\frac{L}{\rho}\right)$
order of magnitude $\approx 10^{-3}$ rad
 - arc length $L_{arc} = \Theta \cdot \rho$ order of magnitude $L_{arc} \approx L$

In practice, the main parameter is Θ , identical to the horizontal divergence of the radiation. An other important value for characterising the radiation emitted is the critical frequency $\omega_c = \frac{3\gamma^3 c}{2\rho}$. It corresponds to the photon energy that divides the emission spectrum in two parts of equal power. It's about 19KeV for ESRF

These values are well known and can be found in all books and paper given in the bibliography.[11],[5],[12]

2.3 Undulator

The undulator was created with the aim of giving a wavy trajectory to the electron. For this purpose, a series of magnets are disposed in alternate direction. Undulators are build to create a small amplitude oscillations and a small deviation angle. At a particular frequency of radiation that is called first harmonic frequency, the radiation on a perpendicular grid to electron beam must look like Figure 6 :

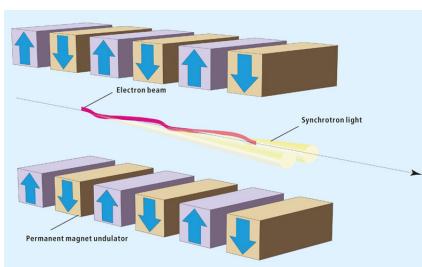


Figure 5: Undulator drawing

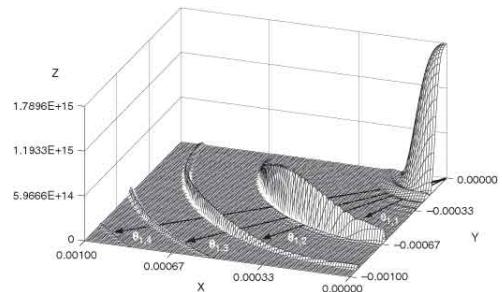
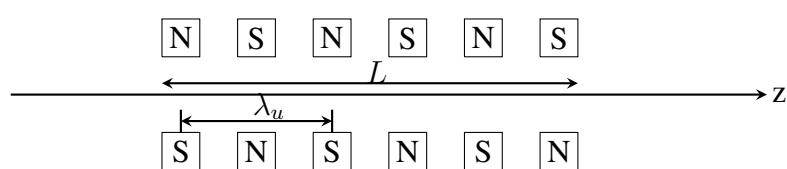


Figure 6: Theoretical radiation from undulator

2.3.1 Undulator's parameters

A list of the more important value for describe an undulator :

- physical parameters :
 - The length , noted L (m).
Order of magnitude is $\approx 1(m)$
 - The undulator's spacial period : λ_u (m)
Order of magnitude is $\approx 10^{-2}(m)$
 - The number of periods : $N \approx \frac{L}{\lambda_u}$
Order of magnitude is $\approx 10^2$



- magnet parameters :

- The maximum value of the magnetic field : B_0 (Tesla)
Order of magnitude is $\approx 1(T)$
- Deflection parameter K:

$$K = \frac{e}{2\pi mc} \lambda_u B_0 \approx 0.934 \lambda_u [m] B_0 [T]$$

Some authors define an undulator if it has $K < 1$. Actually for a parameter $K \approx 1$ we can also consider it as an undulator. In our example, the two undulator considered in our test have both a deflection parameter $K \approx 1$. If $K \gg 1$, the device is called a wiggler. The radiation is similar to a bending magnet and it is not considerate in this paper.

We see that three parameters are sufficient to describe a undulator. In the rest of this paper and in the program, the chosen parameter to describe an undulator are : λ_u , L , K The two others are deduce.

Important values :

Some other import value for the calculation and the description of the result are :

- The maximum angular deviation of the particle $\approx \frac{K}{\gamma}$.
Order of magnitude is $\approx 10^{-4}$ rad
- The angle for the central cone radiation at the first harmonic frequency on the z axis is approximately $\frac{\sqrt{1+K^2/2}}{\gamma\sqrt{N}}$

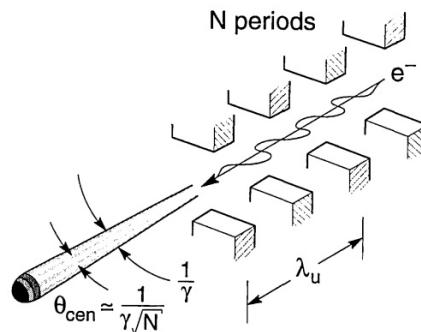


Figure 7: angular deflection

- The photon wavelength corresponding to the first harmonic is photon energy. $\lambda_1 = \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}$
corresponding first harmonic frequency : $\omega_1 = \frac{2\gamma^2}{1+K^2/2} \frac{2\pi}{\lambda_u} c$
- The angle of the l^{th} wave of the n^{th} harmonic : $\theta_{n,l} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{l}{m}(1 + K^2/2)}$ (see Figure 6)

These values are well known and can be found in all books and paper given in the bibliography.[11],[5],[12]

2.3.2 The magnetic field

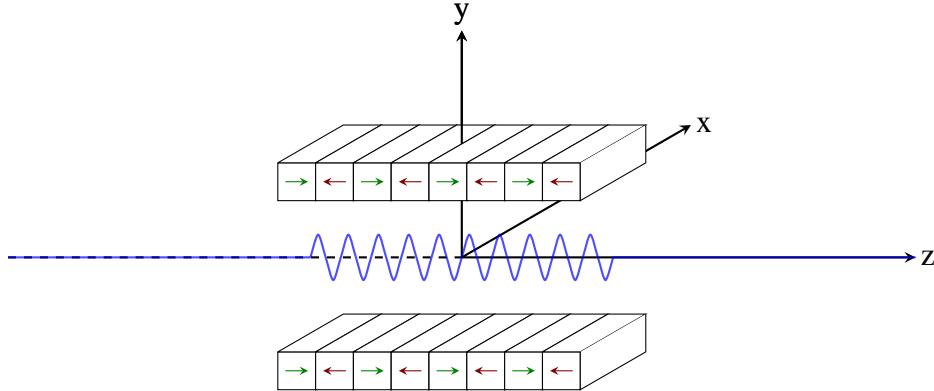


Figure 8: Magnetic field in a undulator, y component on plane $y=0$

The undulator is made in order to create a magnetic field like :

$$B(x, 0, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

This magnetic field is approximated and does not verify the Maxwell's equations. It is useful to obtain a general equation of a magnetic field verifying the Maxwell's equations:

- $\nabla \cdot B = 0$
- $\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = 0$

The terms $\frac{dE}{dt}$ and J are null because there is no current or external electric field in the undulator(see description 2.3.1)

To obtain an magnetic field that verify these two conditions we suppose, first that the undulator magnets are long enough in x direction to create a constant magnet field in x direction. Secondly, the thickness in y direction are large enough in order to suppose that the magnetic field is continued on the y axis.

As propose and explain by Wiedemann [14] we can write the magnetic field as:

$$B_y(y, z) = B_0 b_1(y) \cos(k_u z)$$

Inserted in the Maxwell equations:

$$\begin{aligned} (\nabla \times B = 0) \Rightarrow & \left(\frac{dB_z}{dy} = \frac{dB_y}{dz} = -B_0 b_1(y) k_u \sin(k_u z) \right) \\ (\nabla \cdot B = 0) \Rightarrow & \left(\frac{dB_z}{dz} = -\frac{dB_y}{dy} = -B_0 \frac{b_1(y)}{dy} \cos(k_u z) \right) \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_z}{dy dz} &= -B_0 b_1(y) k_u^2 \cos(k_u z) = -B_0 \frac{d^2 b_1(y)}{d^2} \cos(k_u z) \\ \frac{d^2 b_1(y)}{d^2} &= k_u^2 b_1(y) \end{aligned}$$

A global solution for this equation that is : $b_1(y) = \cosh(k_u y) + b \sinh(k_u y)$ and with the two conditions :

- The magnetic field is symmetric with respect to the plane $y = 0$
- $b_1(0) = 0$ (see below)

Therefore the general solution of the magnetic field that verify the Maxwell equation for a perfect plane undulator is :

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cosh(k_u y) \cos(k_u z) \\ B_0 \sinh(k_u y) \sin(k_u z) \end{pmatrix}$$

A magnetic field windowing :

The problem is now to understand how to construct the magnetic field on the edge of the undulator. This magnetic field must verify the Marwell equations first. Then the global undulator effect must not affect the trajectory of the electron.([6])

That means the electron must enter and exit on the same x coordinate and at the same angle. In the next section the equation of motion is given and we can anticipate that the angular deviation is proportional to the integral of the magnetic field and the spatial deviation is proportional to the double integrate:

$$\frac{dx}{dz} = C' \int B_y(z) dz$$

$$x = \int C \int B_y(z) dz dz$$

Therefore, to guarantee that the electron enter and exits with the same position and with at the same angle, both integral must be zero :

$$\int \int B_y(z) dz dz = 0 = \int B_y(z) dz$$

The SRW's solution :

The edge of the magnetic field is related to the construction of the insertion devices and must guarantee zero integrals of the full magnetic field. We implemented the edge field variation used in SRW¹ based on the équation:

$$B_y(z) = B k_u (z - Z_0) \left[1 - \frac{k_u^2 (z - Z_0)^2}{9} \right] e^{-\frac{k_u^2}{2 \cdot 3} (z - Z_0)^2}$$

where and $B = B_0 \cosh(y)$, $Z_0 = L/2 + \lambda_u/4$ and z outside of the undulator ($z > L/2$ or $z < -L/2$).The complete algorithm can be found here in our code.

No paper to explain this algorithm has been found, but we verify numerically that all the conditions explained in this section are satisfied. An example of the y component of the magnetic field in the plane $y = 0$ is in Figure 9

¹<http://www.esrf.eu/Accelerators/Groups/InsertionDevices/Software/SRW>

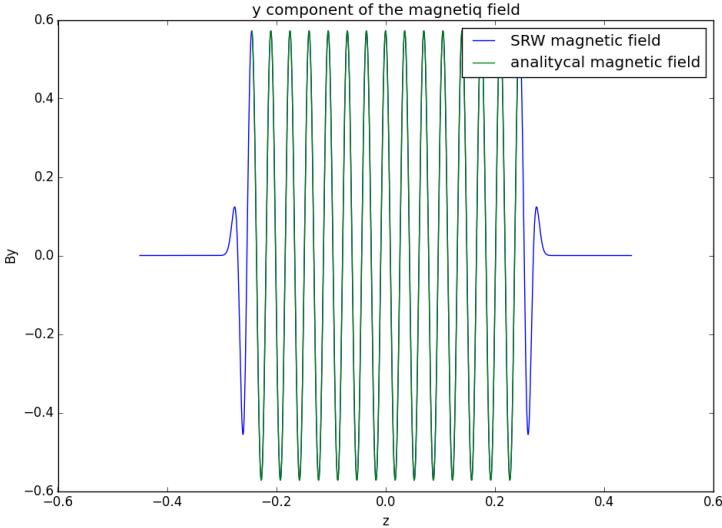


Figure 9: The magnetic field in the undulator and out of the undulator

3 Equations of motions of an electron

Many of the next equations are taken from Jackson's book [4], which is the basic reference also cited in most papers.

3.1 Equations of motion of a charged particule

3.1.1 The equation

The trajectory of charged particle is only influenced by electric and magnetic field. This force is called Lorentz force :

$$F_L = qE + q(v \times B)$$

E and B are the external electromagnetic and magnetic field, q the electric charge, v the particle velocity for the observer's time t . So the equations of motion for a particle of charge q in a static magnetic field is given by :

$$\frac{dp}{dt} = q(v \times B)$$

Where $p = \gamma mv$. Justification can be found with more details in [4], [6] , [14].

In our context, we suppose two hypothesis :

- The electron velocity is constant : $\|v\| = \beta c$ with $\beta < 1$. This imply $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}$ is constant too.
- E is null. (There is not external electric field in the undulator)
- Magnets are wide enough to considerate that the magnetic field does not depend of the x coordinate and the space between them thin enough to considerate that magnetic field is continuous (see [6], or [14]).

Finally, the equation for all this section are :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{e}{\gamma m_e} v(t) \times B(z(t)) = \begin{pmatrix} \dot{y}B_z - \dot{z}B_y \\ \dot{z}B_x - \dot{x}B_z \\ \dot{x}B_y - \dot{y}B_x \end{pmatrix} \quad (1)$$

3.1.2 Unicity and existence of the solution

We can easily translate this equation in a first order equation : $u' = f(t, u)$ where $u = (x'(t), y'(t), z'(t), x(t), y(t), z(t))$ and $f : I \times R^6 \rightarrow R^6$ define as

$$f : \begin{pmatrix} t, \\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{e}{\gamma m_e}(yB_z(x, y, z) - zB_y(x, y, z)) \\ -\frac{e}{\gamma m_e}(zB_x(x, y, z) - xB_z(x, y, z)) \\ -\frac{e}{\gamma m_e}(xB_y(x, y, z) - yB_x(x, y, z)) \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

This equation will be used later in order to find a solution from ordinary differential equations method. A Cauchy Lipschitz theorem gives that a unique solution exists for particular initial conditions if f is lipschitzian on R^6 for each t (see [1]). In this case, because the magnetic field is null outside of the undulator, it exists a unique solution if the partial derivative $\frac{\partial f_i}{\partial u_i}$ exists and is continuous.

It is easy to see that the magnetic field verifies these conditions inside the undulator and on the edges. The difficulties can appear on the junction between these two magnetic fields. In our case, it is easy to find that the SRW's solution verify this condition in a junction too. For the same reason, a Gaussian windowing can be applied at the edges of the bending magnet in order to use it for solving the equation of motion.

3.2 Analytical solutions

3.2.1 Analytical solution for the bending magnet

We suppose now to be in a perfect bending magnet. That means :

- $B_x = B_z = 0$ and $B_y = B$
- We are neglecting the edges effects, so we are interested in the motion inside the magnet.

In this case, the equations of motion become :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{e}{\gamma m_e} B \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

A usual solution of differential equation gives the solution :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega_b \begin{pmatrix} \cos(\omega_b(t - t_0)) & 0 & \sin(\omega_b(t - t_0)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega_b(t - t_0)) & 0 & \cos(\omega_b(t - t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix}$$

With $\omega_b = \frac{eB}{\gamma m_e}$.

In the most usual case the initial conditions are

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta c \end{pmatrix}$$

Therefore :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta c \sin(\omega_b(t - t_0)) \\ 0 \\ \beta c \cos(\omega_b(t - t_0)) \end{pmatrix}$$

Then it is easy to find the other equation with arbitrary initial condition :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta c}{\omega_b} \cos(\omega_b(t - t_0)) + x(t_0) \\ \beta c \sin(\omega_b(t - t_0)) \\ \beta c \omega_b \cos(\omega_b(t - t_0)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta c}{\omega_b} (\sin(\omega_b(t - t_0)) + z(t_0)) \\ \beta c \cos(\omega_b(t - t_0)) \\ -\beta c \omega_b \sin(\omega_b(t - t_0)) \end{pmatrix}$$

Remark : $\rho = \frac{\gamma m v_e}{eB} = \frac{\gamma m \beta c}{eB}$. so the equation of x and z can be write :

- $x(t) = \rho \cos(\omega_b(t - t_0)) + x(t_0)$
- $z(t) = \rho \sin(\omega_b(t - t_0)) + z(t_0)$

These are the equations of an arc of a circular trajectory. This is the well known case that a charge in a constant magnetic field describes a circular trajectory.

3.2.2 Analytical solution for the undulator

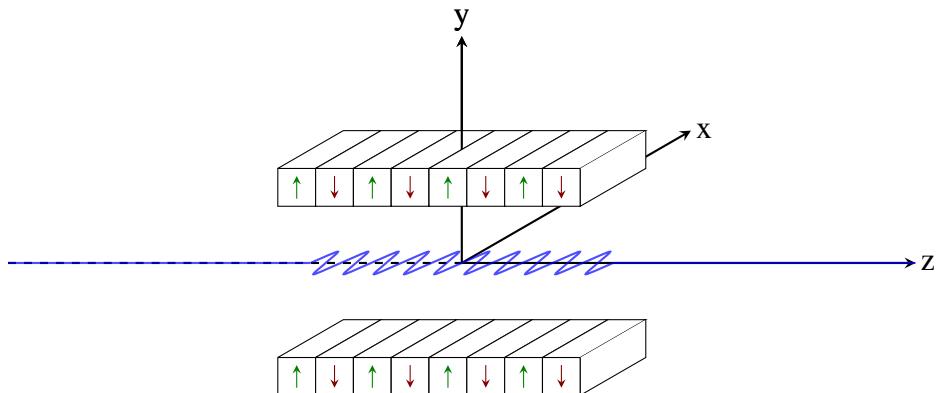


Figure 10: Electron's motion in an undulator

There is no exact known solution for the differential equation with the undulator magnetic field $B_y(z) = \cos(k_u z)$, but we can find an approximated one. First we suppose to be close to the plane $y = 0$ to consider that $B_x = B_z = 0$. For this analytical solution, we are interested only in what happens in the undulator length. So the differential equation becomes:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{e}{\gamma m_e} B(z) \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (3)$$

With the ideal bounders conditions :

$$\begin{cases} x(t_0) = y(t_0) = 0.0 \\ z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0.0 \\ \dot{z}(t_0) = \beta c \end{cases}$$

The angular deflection:

We consider a spatial variable: $s = ct$. The equation (3) becomes :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{e}{\gamma mc} \frac{dz}{ds} B(z) \\ \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{e}{\gamma mc} \frac{dx}{ds} B(z) \end{cases} \quad (4)$$

With the approximation $z \approx s$ we find :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{e}{\gamma mc} z B(z)$$

As written in section 1, in a perfect plane undulator the magnetic field can be approximated by: $B(z) = B_0 \cos(k_u z) e_y$, where $k_u = 2\pi/\lambda_u$. From equation (4) the deflecting angle $\nu_x(z) = \frac{dx}{dz}$ can be calculated

$$\begin{aligned} \nu_x &= \frac{dx}{dz} = \int \frac{e}{\gamma mc} B_0 \cos(k_u z) dz \\ &= \frac{e}{\gamma k_u mc} B_0 \sin(k_u z) dz = \frac{K}{\gamma} \sin(k_u z) \end{aligned}$$

We find the result given in section I that ν_{max} (the maximum angle deflection) is approximately $\frac{K}{\gamma}$. This is why it is called 'deflection parameter'

With the same idea we can write :

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{e}{\gamma mc} B_0 \cos(k_u z) \frac{dx}{dt} = -\frac{K k_u}{\gamma} \cos(k_u z) \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= -\frac{K k_u}{\gamma} \frac{K}{\gamma} \cos(k_u z) \sin(k_u z) \frac{dz}{dt} = -\frac{K^2}{2\gamma^2} \frac{d(\sin(2k_u z))}{dt} \end{aligned}$$

Therefore:

$$\frac{dz}{dt} = C_{te} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin(2k_u z) = \bar{z} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin(2k_u z) \quad (5)$$

This differential equation is not easy to solve, but it gives us a good idea of the behaviour of $\dot{z}(t)$.

Motion as a function of the observer's time

All this paragraph is based on ref [spg].

With the approximation $z \approx \beta c t$. Then the equation of motion becomes :

$$\begin{cases} \ddot{x} \approx \frac{eB_0}{\gamma m_e} \cos(\omega_u t) \beta c \\ \dot{x} \approx \frac{eB_0}{\gamma m_e k_u} \sin(\omega_u t) \end{cases}$$

Where $\omega_u \approx k_u \beta c$: With the hypothesis that $\|v\|$ is constant. We can calculate $v_z = \sqrt{v^2 - \dot{x}^2}$ and within a first order approximation :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= c \sqrt{1 - \gamma^{-2} - \dot{x}^2/c^2} \dot{z} \approx c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{eB_0}{c\gamma m_e} \right)^2 (1 - \cos(\omega_u t)^2) \right) \\ \dot{z} &\approx c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \left(\frac{K}{2\gamma} \right)^2 + \left(\frac{K}{2\gamma} \right)^2 (\cos(2\omega_u t)) \right) \end{aligned}$$

$$\bar{z} = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \left(\frac{K}{2\gamma} \right)^2 \right) = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \right)$$

We call now β^* as $\bar{z} = \beta^*c$. It's easy to see $\dot{z} \approx \beta^*c$ compare to the x order of magnitude. So a better approximation for ω_u is $\omega_u = k_u \beta^*c$. Then the equation of motion becomes :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB_0}{\gamma m_e} \cos(\omega_u t) \beta^* c = (\omega_u)^2 \frac{K}{\beta^* \gamma k_u} \cos(\omega_u t) \\ \dot{x} = \omega_u \frac{K}{\beta^* \gamma k_u} \sin(\omega_u t) \\ x = -\frac{K}{\beta^* \gamma k_u} \cos(\omega_u t) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -\omega_u \frac{cK^2}{2\gamma^2} \sin(2\omega_u t) \\ \dot{z}(t) = \beta^* c + \frac{cK^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_u t) \\ z(t) = \beta^* ct + \frac{K^2}{8\gamma^2 \beta^* k_u} \sin(2\omega_u t) \end{cases} \quad (7)$$

The equations (6) and (7) are approximated and do not consider the undulator boundary. That is why the result does not verify the boundary conditions. But this approximation is adequate for the tests in the next section.

3.3 Numerical method

3.3.1 Solution from a classical integration

If the magnetic field that we obtain is in the form of a numerical array, it is possible to resolve the equation (2) in the same way that the precedent paragraph. We solve the equation $\ddot{x} = \frac{e}{\gamma m_e} B(z) \dot{z}$ with the approximation $z \approx \beta^* ct$. Then, \dot{x} and x can be found with a simple integration on array that describe the time made from the same approximation $t \approx \frac{z}{\beta^* c}$

Now, with the hypothesis that $\|v\|$ is constant, it is easy to find \dot{z} and \ddot{z} with :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sqrt{(\beta c)^2 - \dot{x}^2(t)} \\ \ddot{z}(t) = -\frac{\ddot{x}(t)\dot{x}(t)}{\dot{z}(t)} \end{cases}$$

In this case $\dot{x} \ll c$ and $\dot{z} \approx c$ so there is no risk that $\dot{z} = 0$. Then z and x respectively, can be calculate with a integration of \dot{z} and \dot{x} respectively on the time.

This solution is an approximation of the analytical solution, because the same approximation is made at the beginning (i.e $z \approx \beta c t$ for x perspective). The advantage of this method compared with the analytical solution, is that it can be adapted to any magnetic field (array or function) and any initial condition. Nevertheless this solution is not really adaptable to other device.

3.3.2 Solution from ODE : ODEINT package

With the aim of calculating a solution without a first approximation, we can resolve the general equation (2) with a ordinary differential equation algorithm. Different algorithm are possible, we choose for this problem the method `integrate.ODEINT` of the `scipy` library.

This method use the LSODA algorithm. That enable to solve stiff or non stiff problem. This algorithm choose for each step if the Adam's method will be used (for non stiff problem) or the BDF method (for stiff problem). The LSODA algorithm is based on a LSODE algorithm. More details can be find in reference [8] and [3]. In our case, the equation is considered as a no stiff problem and ODEINT use the Adam's method to solve it. This method consist in approximating the unknown solution by a polynomial at degrees k for the k^{th} step in function of the k steps before. An other particularity of the ODEINT method is the control of the absolute and relative error. This error control is insure by a predictor-corrector algorithm. Explication with more details can be found in reference [2] or [1].

4 Energy radiated by an accelerated electron

4.1 Energy radiated for an electron moving in an arbitrary trajectory

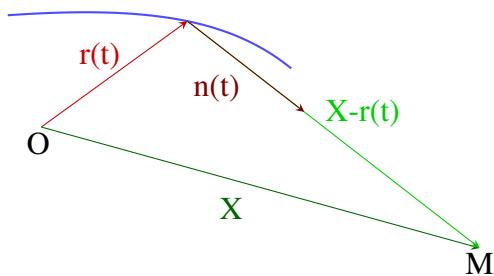


Figure 11: Reference vector system

4.1.1 Generic formula

From reference [4] the formula for the electric field created by a moving charge in an arbitrary spacial point M is :

$$E(X, t) = \left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{R(1 - \beta \cdot n)^3} + \frac{c}{\gamma^2 R^2} \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)^3} \right]_{t'}$$

with the same notation that Figure 11. Where e is the elementary charge, c the light speed, and $R = \|X - r\|$. The time t' is the delayed time that verify $t = t' + R(t')$, r is the trajectory, β and $\dot{\beta}$ are the first and second derivative of the electron trajectory divide by c . From this, the potential $A(\omega)$ is define from the Fourier transform of E ([4])

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R \cdot E(X, t(t')) e^{i\omega t(t')} dt$$

A change of variable with $t = t' + R(t')$ and $\frac{dt}{dt'} = 1 - \beta \cdot n$ give:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2} + \frac{c}{\gamma^2 R} \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)^2} \right] e^{i\omega(t' + R(t')/c)} dt'$$

And the energy radiated per unit angle in SI ($J.s^{-1}$):

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{eI}{(4\pi\epsilon_0)4\pi^2 c} |A(\omega)|^2$$

In practical unit : $\text{photon} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{mrad}^{-2} \cdot 0.1\% \text{bandwidth}$ we have :

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2} + \frac{c}{\gamma^2 R} \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)^2} \right] e^{i\omega(t' + R(t')/c)} dt' \right|^2 \quad (8)$$

In the rest of the section we always considered the delayed time. So the delayed time now note t and t' is not used any more.

The formula (8) is the fundamental equation we have to solve. This is the equation implemented in the method named `energy_radiated_near_field2`

4.1.2 First far field approximation

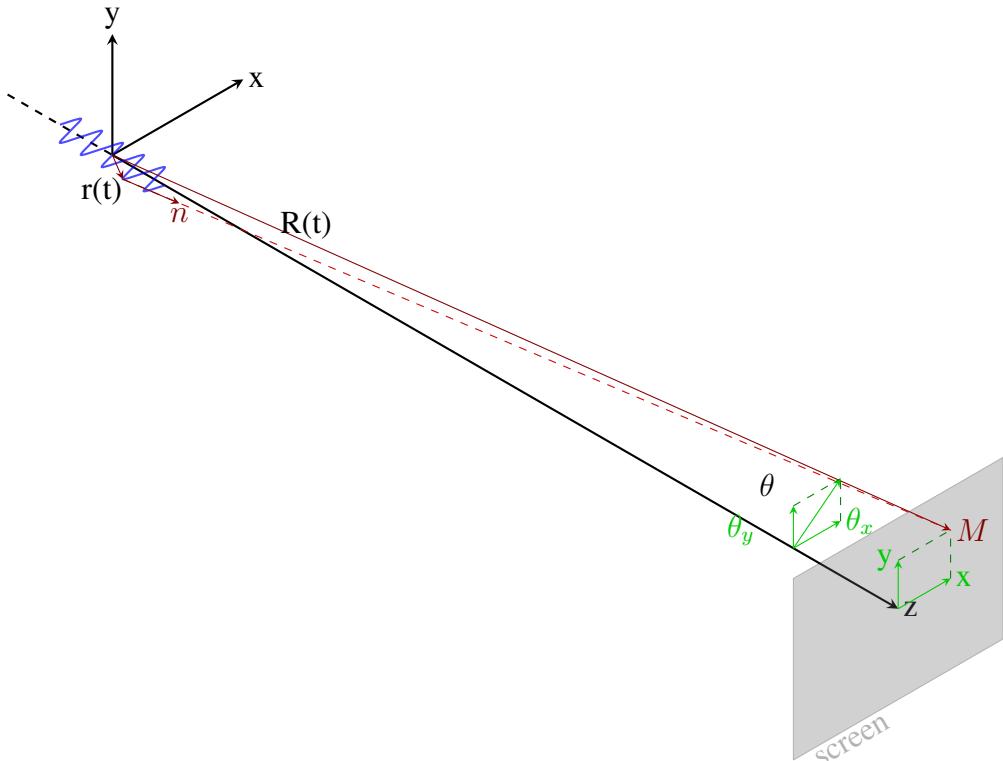
We would like to simplify this equation (8). In many practical cases, the term R is close to the distance between the observer point and the device. For a big enough distance we can consider that the term $\frac{c}{\gamma^2 R}$ become small enough to be neglected. A more precise discussion about the conditions of this approximation is given in section VI. From author [4] for a big enough distance the second term can be neglected.

$$\left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2} + \frac{c}{\gamma^2 R} \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)^2} \right] \approx \frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2}$$

A new formula used to calculate radiation is implemented in the function `energy_radiated_approx2`:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2} \right] e^{i\omega(t + R(t)/c)} dt \right|^2 \quad (9)$$

4.1.3 Second approximation



From reference [4] too, in a far field condition the vector n can be considered constant. We call \hat{n} the far field approximation of n , which is the unit vector of the the vector (X, Y, D) of the observer's point. Then the calculation of the energy is :

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^2} e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r(t)/c)} dt \quad (10)$$

From the remark that $R = X \cdot n - r \cdot n$ by definition of n . The new formula implemented in function `energy_radiated_approx_farfield2` is :

$$\frac{d^2I}{d\Omega d\omega} = \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^2} e^{i\omega(tX \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r(t)/c)} dt \right|^2 \quad (11)$$

Remark : In most of the references, like [4], or [14], the term $X \cdot \hat{n}$ in the exponential disappear. Actually, in this condition, this term is constant and does not have influence on the norm.

4.1.4 A simpler formula

We remark that, in far field conditions, in the formula (11):

- $(t + R(t)/c)' = 1 - \beta \cdot n$
- $(t + X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r(t)/c)' = 1 - \beta \cdot \hat{n}$
- $\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{n})} \right] \hat{n}$ (with \hat{n} constant)²

So we can do an integration by part as is proposed by Jackson ([4]):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \hat{n})^2} e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} dt \\ &= \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{n})} e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} \right]_{t_0}^{t_1} - i\omega \int_{t_0}^{t_1} \hat{n} \times (\hat{n} \times \beta) e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} dt \end{aligned} \quad (12)$$

We can remark that :

$$n \times (n \times \beta) = (n \cdot \beta)n - \beta = \beta_{\perp}$$

With β_{\perp} is perpendicular part of β to the vector n (and respectively $\hat{\beta}_{\perp}$ is perpendicular par of β to the vector \hat{n}) So a simpler formula for the far field equation (9) implemented in `energy_radiated_approx2`:

$$\begin{aligned} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} &= \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \omega \int_{t_1}^{t_0} \hat{n} \times (\hat{n} \times \beta) e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} dt + \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{n})} e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} \right]_{t_1}^{t_0} \right|^2 \\ &= \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \omega \int_{t_1}^{t_0} \beta_{\perp} e^{i\omega(t+X \cdot \hat{n} - \hat{n} \cdot r/c)} dt + C_{te} \right|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

This formula is cited in in paper or books : [13], [4] or [5]

²this can be find with $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$

If we do not consider that n is constant, we remark that :

- $\frac{dn}{dt} = \frac{c}{R} n \times (n \times \beta) = \frac{c}{R} \beta_{\perp}$
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{n \times (n \times \beta)}{1 - n \cdot \beta} \right) = \frac{n \times ((n - \beta) \times \dot{\beta})}{(1 - n \cdot \beta)^2} + \frac{\dot{n} \times (n \times \beta) + n \times (\dot{n} \times \beta)}{(1 - n \cdot \beta)}$ Because of the first point, n and \dot{n} are perpendicular, so :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{n \times (n \times \beta)}{1 - n \cdot \beta} \right) = \frac{n \times ((n - \beta) \times \dot{\beta})}{(1 - n \cdot \beta)^2} + \frac{c}{R} \frac{\beta \times (n \times \beta_{\perp})}{(1 - n \cdot \beta)}$$

The second term cannot be neglected directly on the electric field, but disappear in the integration. A discussion about this is given in section VI. In the code, the method `energy_radiated_approx` implement the formula :

$$= \frac{eI}{8\pi^2 c \epsilon_0 h} 10^{-9} \left| \omega \int_{t_1}^{t_0} n \times (n \times \beta) e^{i\omega(t+X \cdot n - n \cdot r/c)} dt + C_{te} \right|^2$$

This formula work for some particular case but it is not advise to use it.

In our code, formulas (4.1),(9),(12) are implemented.

4.2 Numerical implementation :

Reference coordinate system of the method in the code :

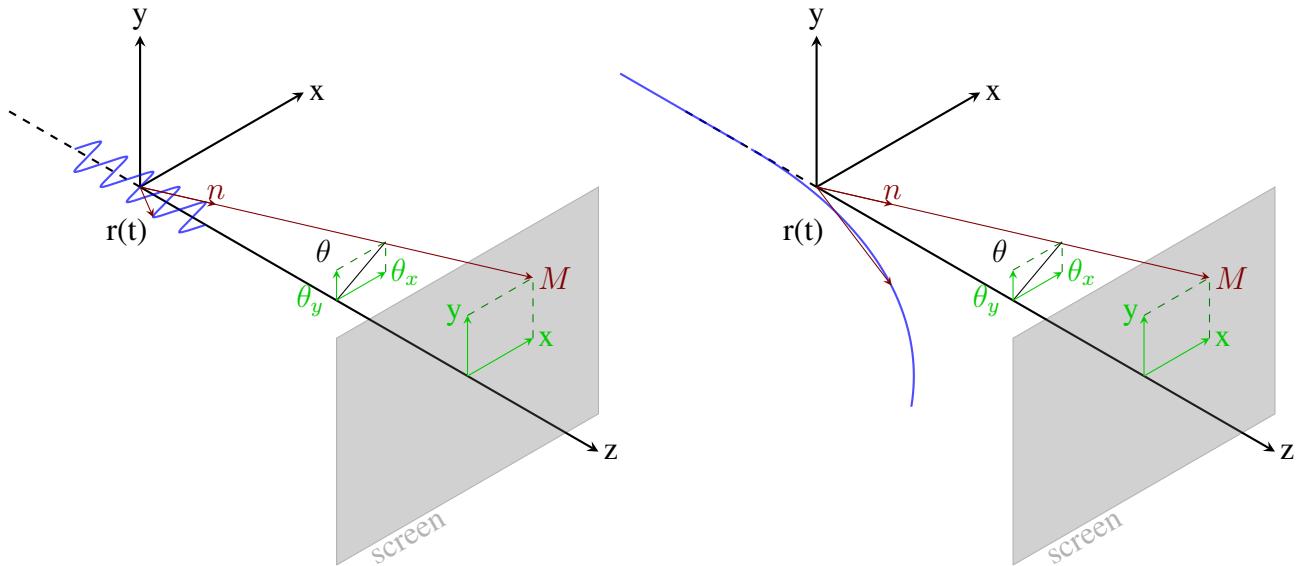


Figure 12: reference coordinate system for undulators
Figure 13: reference coordinate system for bending magnets

Our goal is to calculate numerically the intensity (4.1) or the approximations (9) and (11) for an arbitrary trajectory. That why this integral was calculated with a classical trapezoid method which is a safety and well known method.

A method which use a fast Fourier transform with a real observer time could also be implemented. This was not done here because of lack of time but could be easily added to the actual code (see section VII)

Theoretical Results :

Some theoretical result can be found for the far field conditions with several approximations. Calculations are detailed in [6], [7], [9],[5]. However, it is interesting to implement the main results to compare with our more generic numerical results. We are here interested in one particular that give radiation on z axis at the n^{th} harmonic. This theoretical equation is viable only inside the undulator,(edges are not considered), in the far field conditions and for a integer number of periods.

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \Big|_0 = \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} N^2 \gamma^2 F_n(K) \quad (14)$$

If n is odd:

$$F_n(K) = \frac{K^2 n^2}{(1 + K^2/2)^2} \left(J_{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{nK^2}{4(1 + K^2/2)} \right] - J_{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{nK^2}{4(1 + K^2/2)} \right] \right)$$

If n is even: $F_n = 0$ The term $J_{\frac{n-1}{2}}$ is the first order Bessel function and α is the fine-structure constant : $\alpha = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{hc}$

In practical unit $\text{photons.s}^{-1}.mrad^{-1}.(0.1\%bandwith)^{-1}$.

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \Big|_0 = 1.744 e^{14} N^2 E^2 I F_n(K)$$

In [11] [5] The function $F_n(K)$ is plot for different value of K and n. We can see that for $K \approx 2$, $F_n(K) \in [0.2, 0.4]$

This give us the order of magnitude of the maximal norm of the potential vector.

$$|A(\omega)|_\infty^2 \approx 4\pi^2 N^2 \gamma^2 F_1(K) \quad (15)$$

5 First results

This section is a overview of the main result of the calculated equation given in section III and IV. We use three principal test cases for our program.

5.1 Undulator test

This undulator is a fictive undulator whose parameters come from [11] and [10]. It is not composed by with many periods that enable to discern every period and see the behaviour of the trajectory.

- Electron beam :
 - Electron energy : 1.36 GeV
 - intensity current : 1.0 A
- Magnetic structure : Undulator :
 - K= 1.87
 - period length : 0.035 m
 - length : 0.49 m (14 periods)

Trajectory of the electron

The electron trajectory for the two trajectory method.

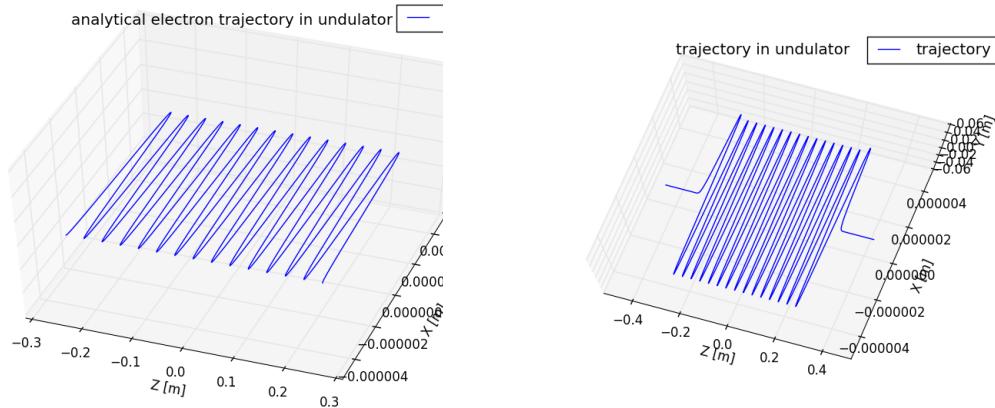


Figure 14: Analytical trajectory of an electron in a undulator

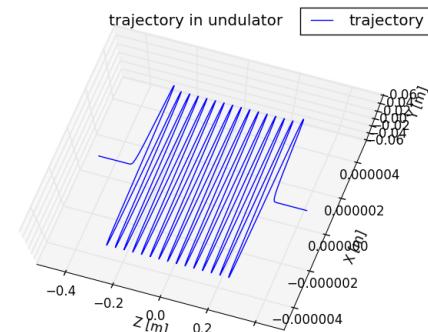


Figure 15: Solution ODE method

Brightness

The result of the calculation of the formula explain in section IV on a grid at a given distance. An example of the radiation emitted by an electron that is moving along the analytical trajectory at a 100 meter distance.

- On the first harmonic frequency :

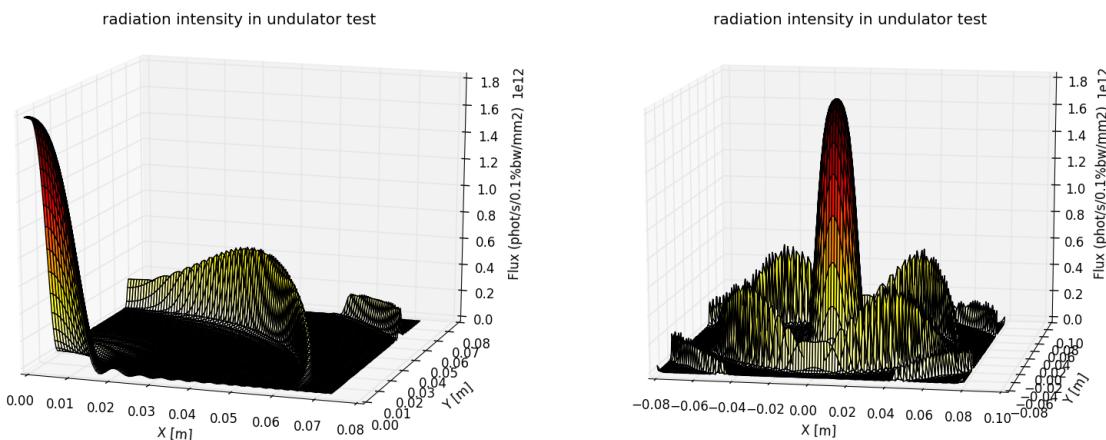


Figure 16: Radiation intensity from an analytical trajectory

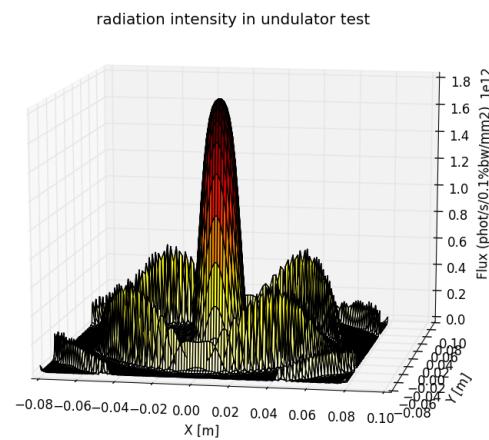


Figure 17: Radiation intensity from an analytical trajectory

- For an arbitrary frequency :

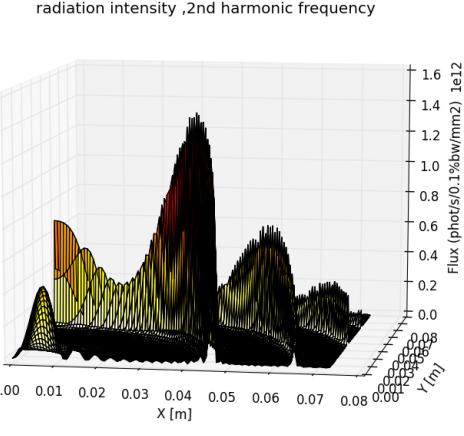


Figure 18: Radiation emit on the 2nd harmonic photon frequency

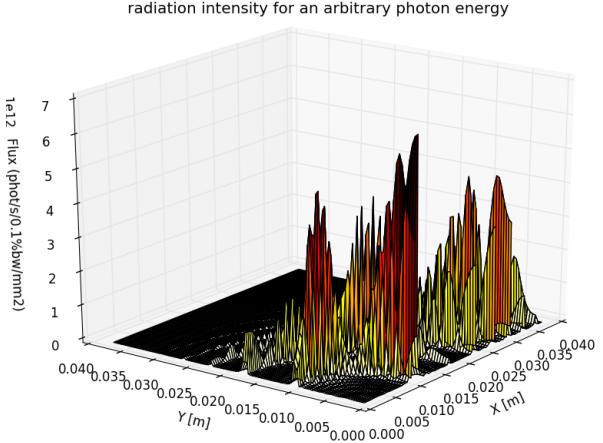


Figure 19: Radiation emitted by an arbitrary photon energy : 917 eV

Spectrum

The integration of the energy radiated on a given grid. An example on the axis z only and on a grid where is the central cone for the first harmonic.

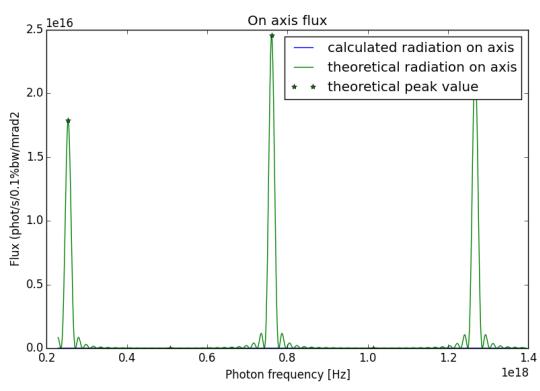


Figure 20: Spectrum on axis

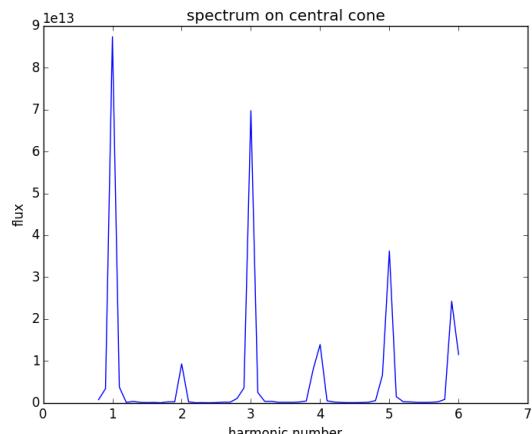


Figure 21: Spectrum on central cone

5.2 ESRF's undulator: ESRF18

This undulator is used in the ESRF's structure. It is longer than the 'undulator test' and the electron energy is higher.

- Electron beam :
 - Electron energy : 6. GeV
 - intensity current : 0.2 A
- Magnetique structure : Undulator :
 - $K = 1.68$
 - period length : 0.018 m
 - length : 2. m (≈ 111 periods)

Trajectory of the electron

The electron trajectory for the two trajectory method.

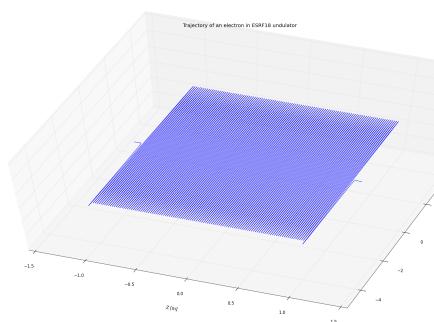


Figure 22: Trajectory solution from ODE method

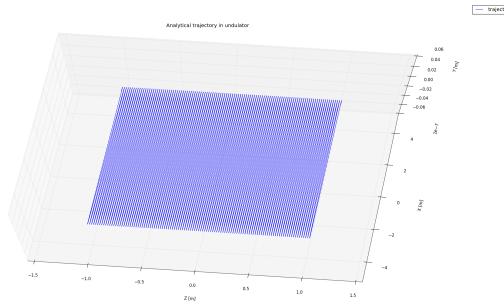


Figure 23: Analytical trajectory

Brightness

An example of the radiation emitted by an electron that is moving along the trajectory solution of the ODE method. at a 100 meter distance.

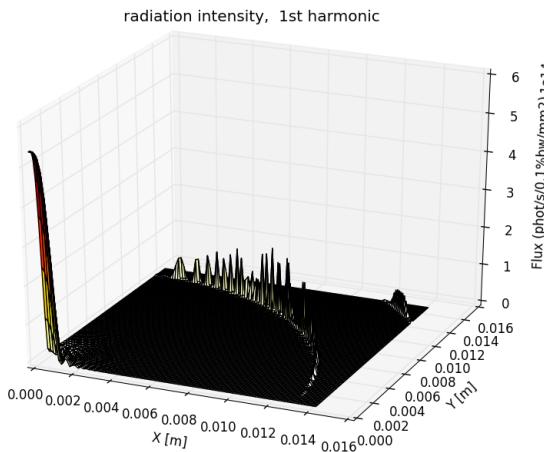


Figure 24: Radiation intensity at the 1st harmonic

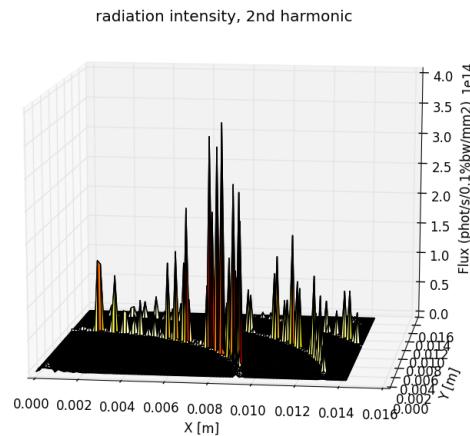


Figure 25: Radiation intensity at the 2nd harmonic

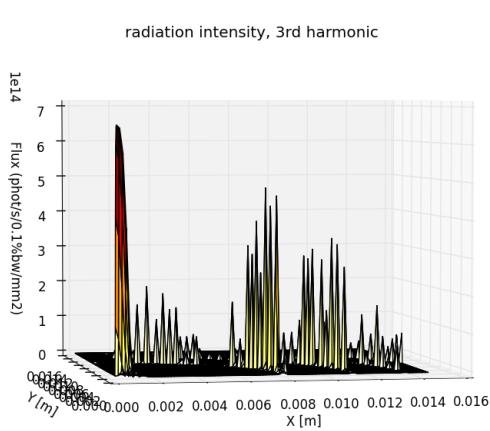


Figure 26: Radiation intensity at the 3rd harmonic

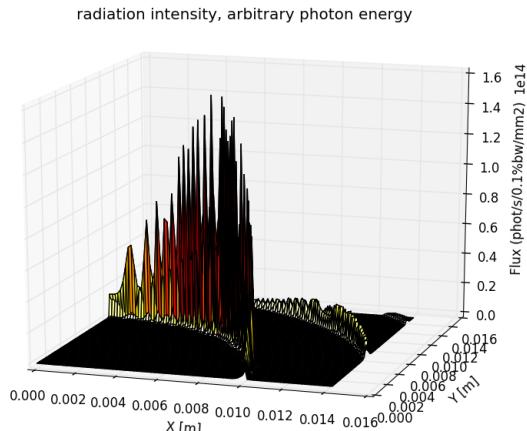


Figure 27: Radiation intensity at the 10000 eV harmonic

Spectrum

The integration of the energy radiated on a given grid. An example on the axis z only and on a grid where is the central cone for the first harmonic.

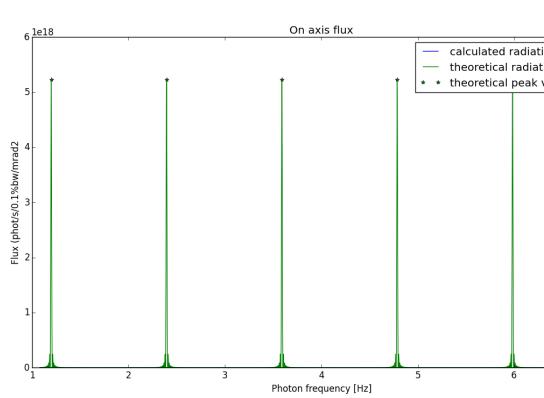


Figure 28: Spectrum on axis

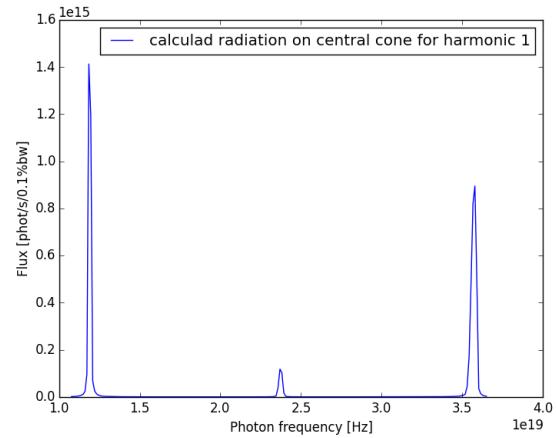


Figure 29: Spectrum on central cone

5.3 ESRF's bending magnet

This bending magnet is used in ESRF's struture.

- Electron beam :
 - Electron energy : 6. GeV
 - intensity current : 0.2 A
- Magnetic structure : Bending Magnet :
 - value of the magnetic field : 0.8 T
 - horizontal divergence : 0.05 rad

Trajectory of the electron

The electron trajectory for the two trajectory method.

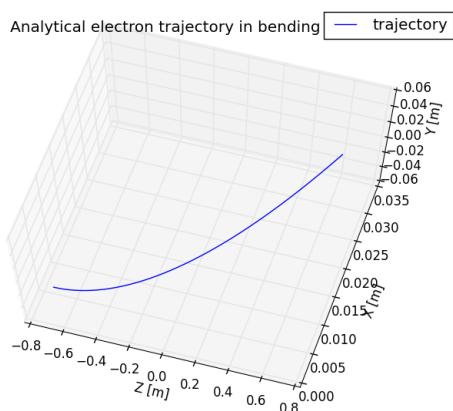


Figure 30: Trajectory solution from ODE method

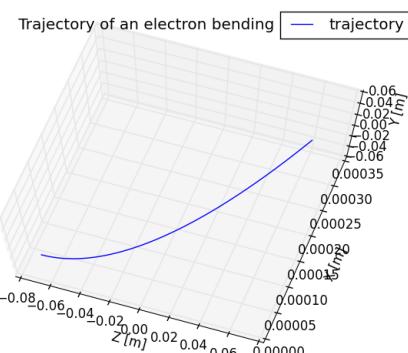


Figure 31: Analytic trajectory

Brightness

An example of the radiation emitted by an electron that is moving along the analytical trajectory. at a 100 meter distance.

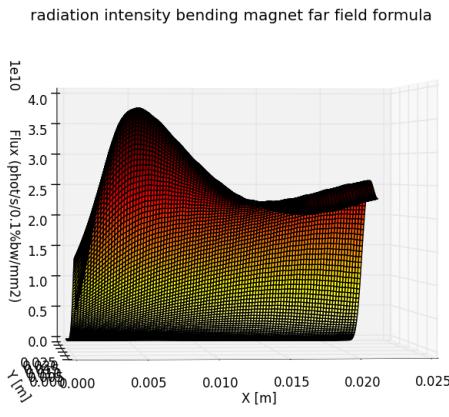


Figure 32: Radiation intensity at the critical frequency

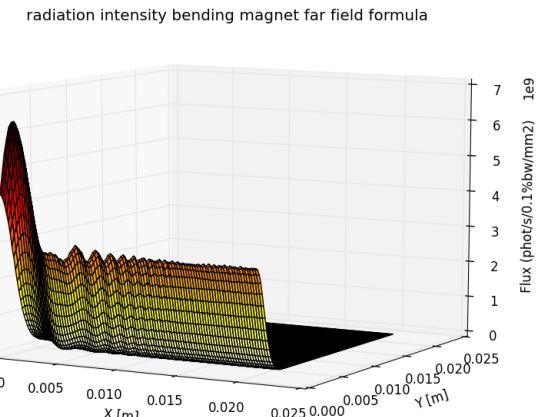


Figure 33: Radiation intensity for an arbitrary trajectory

6 Comparaison et critique sur les différentes méthodes

6.1 Erreurs des différentes trajectoires

Les rayonnements émis par l'électron dépendent entièrement de sa trajectoire. Il est possible de résoudre les équations du mouvement pour l'aimant de courbure mais pas pour l'onduleur. Les deux méthodes utilisées pour estimer la trajectoire de l'électron dans l'onduleur sont des approximations. On fait le point ici sur les éventuels erreurs commises par ces méthodes.

6.1.1 L'erreur relative pour chaque méthodes

L'erreur sur la trajectoire analytique :

Toute la construction de la trajectoire analytique se base sur l'approximation : $z \approx \beta^* c$ avec β^* la vitesse moyenne en z . Au vue des équations du mouvement donnés en section II, cette approximation à du sens. Mais l'erreur commise est difficilement prédictable ce qui rend difficile l'estimation de la précision du résultat trouvé en z . En utilisant l'hypothèse que l'estimation de la valeur de β^* comme étant $1 - \frac{1+K^2}{2\gamma^2}$ soit suffisamment bonne (une erreur de moins de N^{-2}), des calculs simples permettent de majorer les erreurs commises sur l'accélération, la vitesse, et la coordonnée x de la trajectoire. Ces erreurs peuvent facilement être estimés comme relativement faibles. Il reste difficile d'en supposer plus sur la coordonnée en z . de plus le réel impact de ces erreurs sur le calcul de l'intensité de rayonnement est difficile à estimer sans faire plus de suppositions.

La méthode utilisant la fonction ODEINT de la bibliothèque spicy :

La question des erreurs des méthodes d'intégration due aux erreurs machine est un peu développé par Demainly dans [1]. On y fait mention que pour les algorithmes utilisées par la méthodes ODEINT l'erreur sur chaque pas peut dépendre de manière significative de l'erreur machine

Pour l'onduleur, les oscillations observées sur la coordonnée en z exigent des précisions relatives très faibles aussi. Par exemple en se référant aux équations trouvées pour la trajectoire analytique. Les oscillations en z sont de l'ordre de $\frac{1}{\gamma^2}$ par rapport à la moyenne β^* . Pour

l'onduleur test cela correspond à une valeur de l'ordre de 10^{-7} et pour l'onduleur ESRF18 a un ordre de grandeur de 10^{-9} . Pour la trajectoire en z les oscillations sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\gamma^2 N}$ par rapport à la valeur maximale de z . Pour l'undulateur test cela correspond à un ordre de grandeur de 10^{-8} , et 10^{-11} pour ESRF18.

Il est donc nécessaire que l'erreur machine soit bien inférieure à ces ordres de grandeurs pour pouvoir garantir une bonne précision. Dans notre cas, la librairie numpy utilise des 'float' en 64bits soit 8 octets. On peut donc supposer une précision d'environ 16 chiffres significatifs. Comme il est dit en section IV, on peut préciser nous-même l'erreur relative et absolue en chaque points calculés de la solution. Les valeurs précédentes peuvent donc servir de référence. Les simulations montrent qu'il est possible d'atteindre des erreurs relatives de l'ordre de 10^{-11} .

6.1.2 Une différence entre les deux méthodes de calcul de la trajectoire.

Les deux méthodes permettant de donner une trajectoire ne donne pas tout à fait le même résultat. Ceci pour deux causes principales :

- Le rajout en bordure de l'onduleur d'environ 3 périodes fait qu'on observe une différence en amplitude entre les deux rayonnement obtenue par les deux différentes trajectoires. Il est clair que moins l'onduleur a de périodes, plus cette différence se fait remarquer. Un exemple avec l'onduleur test où la différence en amplitude est proche de 25% de sa valeur maximale. Cette différence est de l'ordre de 2% pour ESRF18

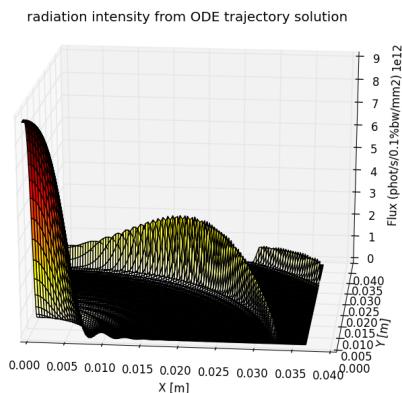
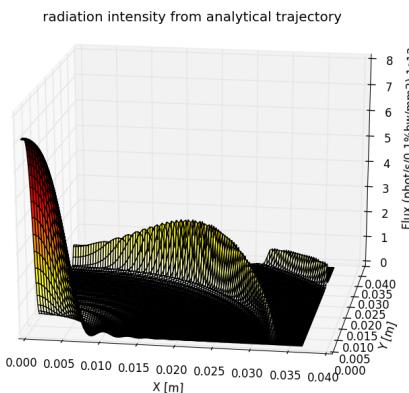


Figure 34: Rayonnement émis par la trajectoire analytique
Figure 35: Rayonnement émis par la trajectoire solution de la résolution par ODEINT

relative difference between radiation from ODE and analytical trajectory

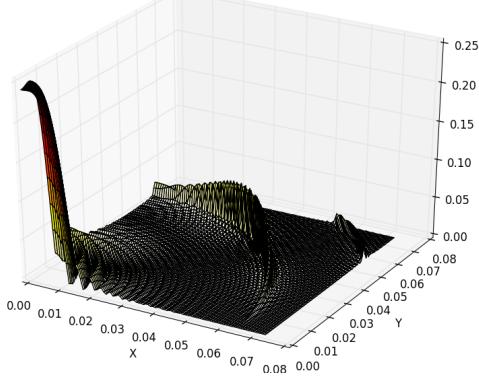


Figure 36: Différence entre les deux radiations pour l'onduleur test'

relative difference between radiation from ODE and analytical trajectory

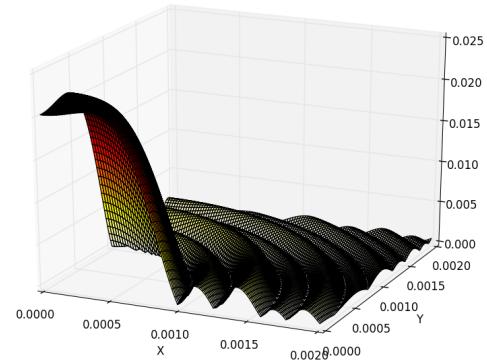


Figure 37: Différence entre les deux radiations pour l'onduleur ESRF18

- On observe aussi une différence sur la trajectoire elle-même. En effet il existe un déphasage en x et en z très faible pour ne pas être perceptible au premier abord, mais plus grand que l'amplitude de l'oscillation en z . Ci-dessous les deux trajectoires observées sur les mêmes valeurs de temps.

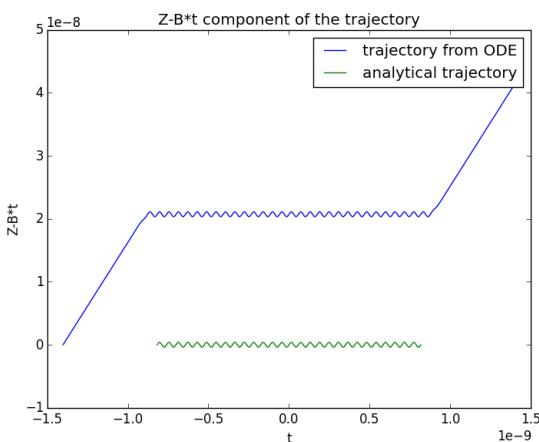


Figure 38: Déphase entre les deux trajectoires

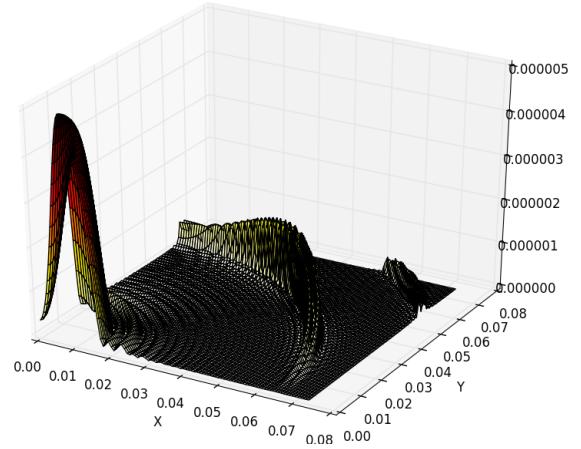


Figure 39: Différence relative entre les deux rayonnement émit à l'intérieur de l'onduleur

Cependant la différence relative observée sur le rayonnement émit seulement sur la partie à l'intérieur de l'onduleur est très faible aussi bien pour l'onduleur test (Figure 39) que pour ESRF18.

6.2 Conditions pour les différentes formules du rayonnement

6.2.1 La limite entre 'near field' et 'far field'

La première approximation :

Les affirmations données dans les prochains paragraphes sont appuyés par des calculs donnés en annexe.

La suppression du second terme :

Le second terme de l'équation générique du champ électrique (4.1) peut se faire à partir de quelques mètres. Un exemple de la différence entre les deux formules en fonction de la distance.

Pour donner un ordre de grandeur les graphes représentent cette différence divisée par la valeur maximale d'intensité attendue.

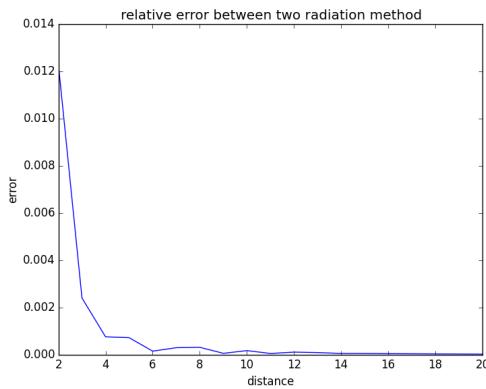


Figure 40: Différence relative entre les formule (4.1) et (9) pour l'onduleur test

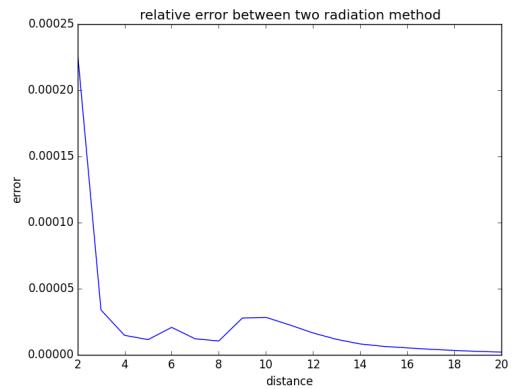


Figure 41: Différence relative entre les formule (4.1) et (9) pour ESRF18

Il en est de même à plus haute énergie et pour le bending magnet :

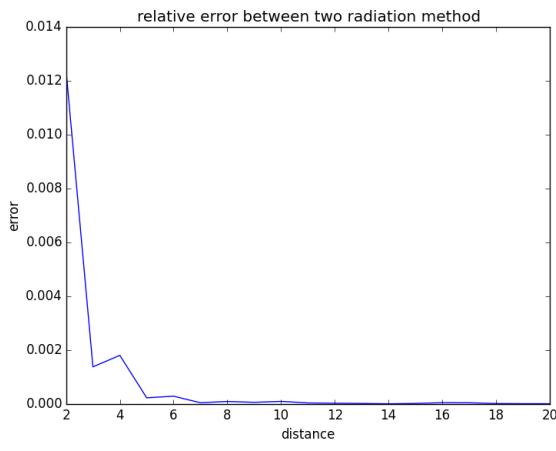


Figure 42: Différence relative entre les formule (4.1) et (9) pour l'onduleur test à une fréquence d'environ 5.5 harmonique

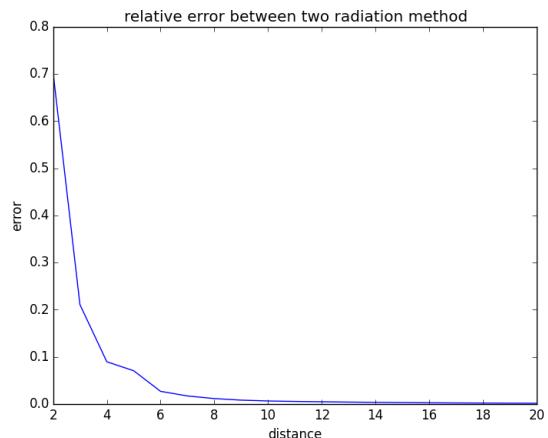


Figure 43: Différence relative entre les formule (4.1) et (9) pour l'onduleur l'aimant

La deuxième approximation :

La deuxième approximation consiste à considérer que le vecteur n devient constant.

Les calculs fait en annexe montrent que cela revient à faire une erreur d'un vecteur proche de $\frac{r}{R}$. Ceux-ci montrent aussi qu'il est difficile d'estimer réellement la distance nécessaire pour que cette erreur n'influence pas le calcul de la radiation car cela dépend aussi de l'angle du point d'observation : plus on s'éloigne de l'axe, plus l'erreur risque d'être importante. Un exemple avec l'onduleur ESRF18 à une distance de 20 mètres pour la première harmonique:

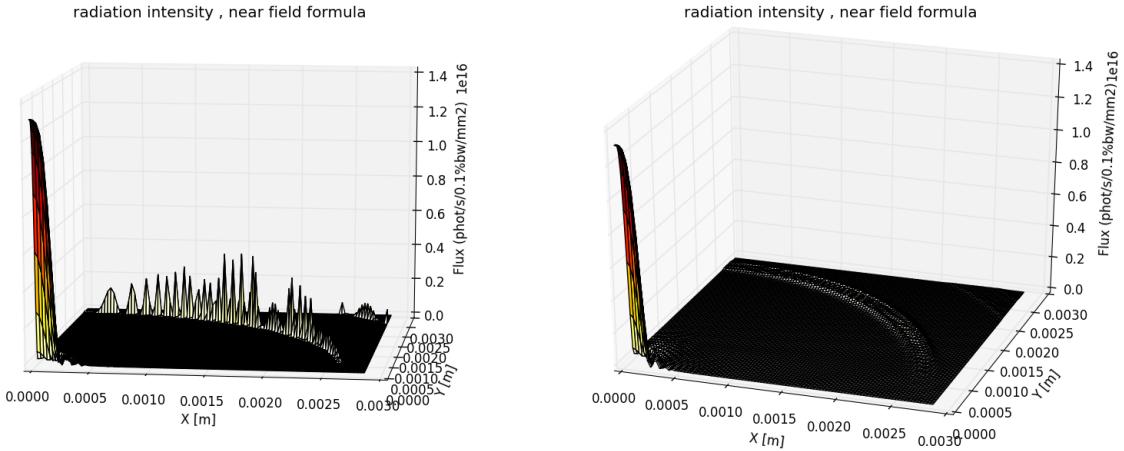


Figure 44: Résultat pour la formule (4.1) dite "near field"
Figure 45: Résultat pour la formule (12) dite "far field"

Des exemples ici avec l'onduleur test, on mesure la différence entre la formule dite 'near field' (4.1) et la formule dite 'far field'. Pour se donner un ordre de grandeur on divise par la radiation maximale attendue.

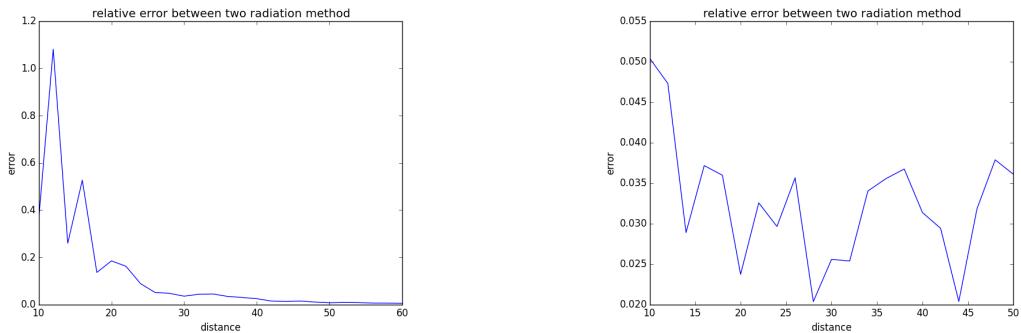


Figure 46: Différence entre les formule (4.1) et (12) sur une grille entière
Figure 47: Différence entre les formule (4.1) et (12) sur le cône central

6.2.2 Erreur en fonctions du nombre de points sur la trajectoire

L'erreur commise lors de l'intégration par la méthodes des trapèze peut facilement être majorée. Les calculs en annexe sont fait sur les formules dite 'far field' considérant que n est constant. Il en ressort que le nombre de points à utiliser pour cette formule dépend du nombre de périodes mais aussi de l'énergie du rayonnement pris en compte. Cependant les simulations nous amènent à penser que cette dépendance à l'énergie du rayonnement est beaucoup plus faible pour la formule dite "near field", c'est à dire considérant n non constant.

- Par exemple pour la première harmonique, on s'intéresse au nombre de points nécessaire pour que l'erreur commise soit faible devant l'intensité calculé sur l'axe. Pour l'onduleur 'onduleur test', ce nombre de points est autour de 300 pour la première harmonique et autour de 2000 points pour 'ESRF18'.

Il en est de même pour le formule 'near field' et si on s'intéresse à toute la grille.

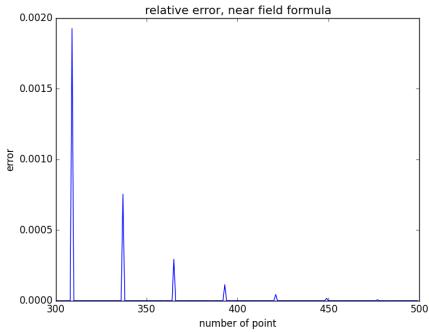


Figure 48: Erreur en fonction du nombre de points de la trajectoire sur l'axe pour l'onduleur test.

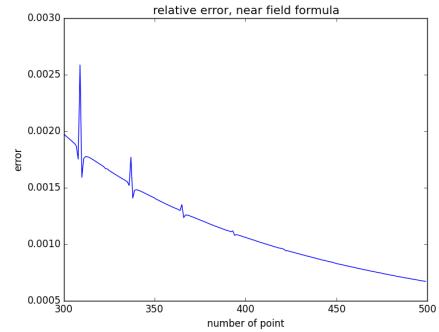


Figure 49: Erreur en fonction du nombre de points de la trajectoire sur la grille pour l'onduleur test

- Pour la formule 'far field', ce nombre dépend aussi de l'énergie du photon. Un exemple ici, on calcul l'intégrale de l'intensité du rayonnement sur chaque grille à différentes énergies. On remarque que pour une énergie trop haute, la formule 'far field' s'éloigne du résultat escompté.

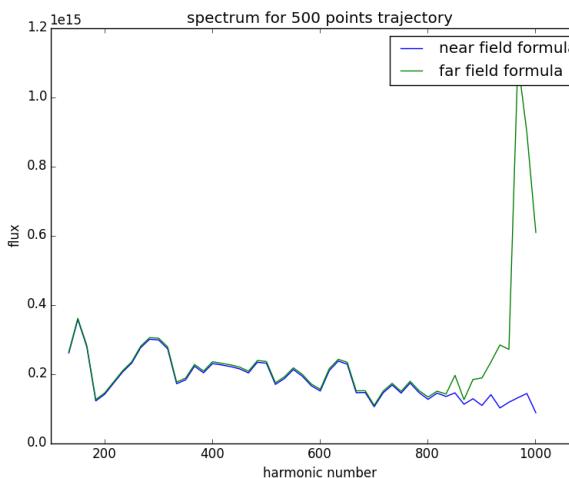


Figure 50: Spectre pour les deux formules (4.1) et (12) apartir d'une trajectoire analytique de 500 points

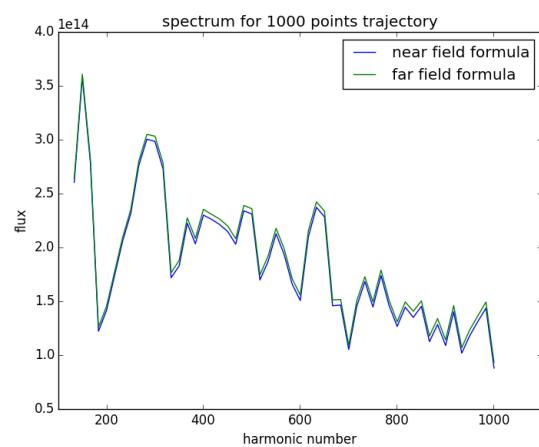


Figure 51: Spectre pour les deux formules (4.1) et (12) apartir d'une trajectoire analytique de 1000 points

Dans la pratique la valeur de point minimum pour assurer une convergence entre les deux formules est plutôt faible. Il est conseillé de prendre un plus grand nombre de points que ceux donné comme optimum.

6.3 Quelles méthodes pour quelles conditions

- La trajectoire analytique est conseillée pour les expériences rapides ou théoriques. Elle permet de donner un ordre de grandeur rapide et sûre des résultats. La méthode utilisant la résolution par ODEINT s'adapte des modèles particuliers avec des conditions initiales ou un champ magnétique différent de ceux imposés.
- Pour le rayonnement, les erreurs entre chaque formule dépendent de la distance, du nombre de points utilisé mais aussi de l'énergie du rayonnement. Pour une simulation simple

et assez loin la formule 'far field' est suffisante et la formule simple permet d'étudier et simplifier aisément l'expression de l'intensité du rayonnement. Pour des calculs plus précis ou des calculs sur un spectre la formule 'near field' est bien plus précise bien que c'est la formule far field qui est principalement trouvé dans les autres références. Ceci dit la seule méthode utilisée pour calculer la formule du rayonnement est une intégration par la méthode des trapèze. Celle-ci est suffisamment sûre mais reste assez lente. Il serait intéressant de chercher d'autres moyens d'intégration pour calculer ces résultats.

7 Le code : pySRU

Le code est présenté dans sa forme actuelle mais il est amené à évoluer ou être complété. Celui-ci a été développé selon une orientation développement objet avec des classes qui n'ont cessé d'évoluer. Toute l'évolution du code a été partagé et géré sur git hub et peut être publiquement consulté.³. Un programme setup est donné sur ce site pour pouvoir installer le programme pySRU.

7.1 La structure du code

Le code est composé de trois grands types de classes :

- Les classes "conteneur": Leurs rôles sont de contenir des objets ou valeurs qui nous intéressent
- Les "créateurs": leurs seuls rôles sont de créer les classes "conteneur", suivant différents paramètres de construction.
- Les "managers": ces classes contiennent d'autres classes et ont pour but de les gérer ensemble afin d'en extraire des informations ou objets.

³https://github.com/SophieTh/und_Sophie_2016, branche master

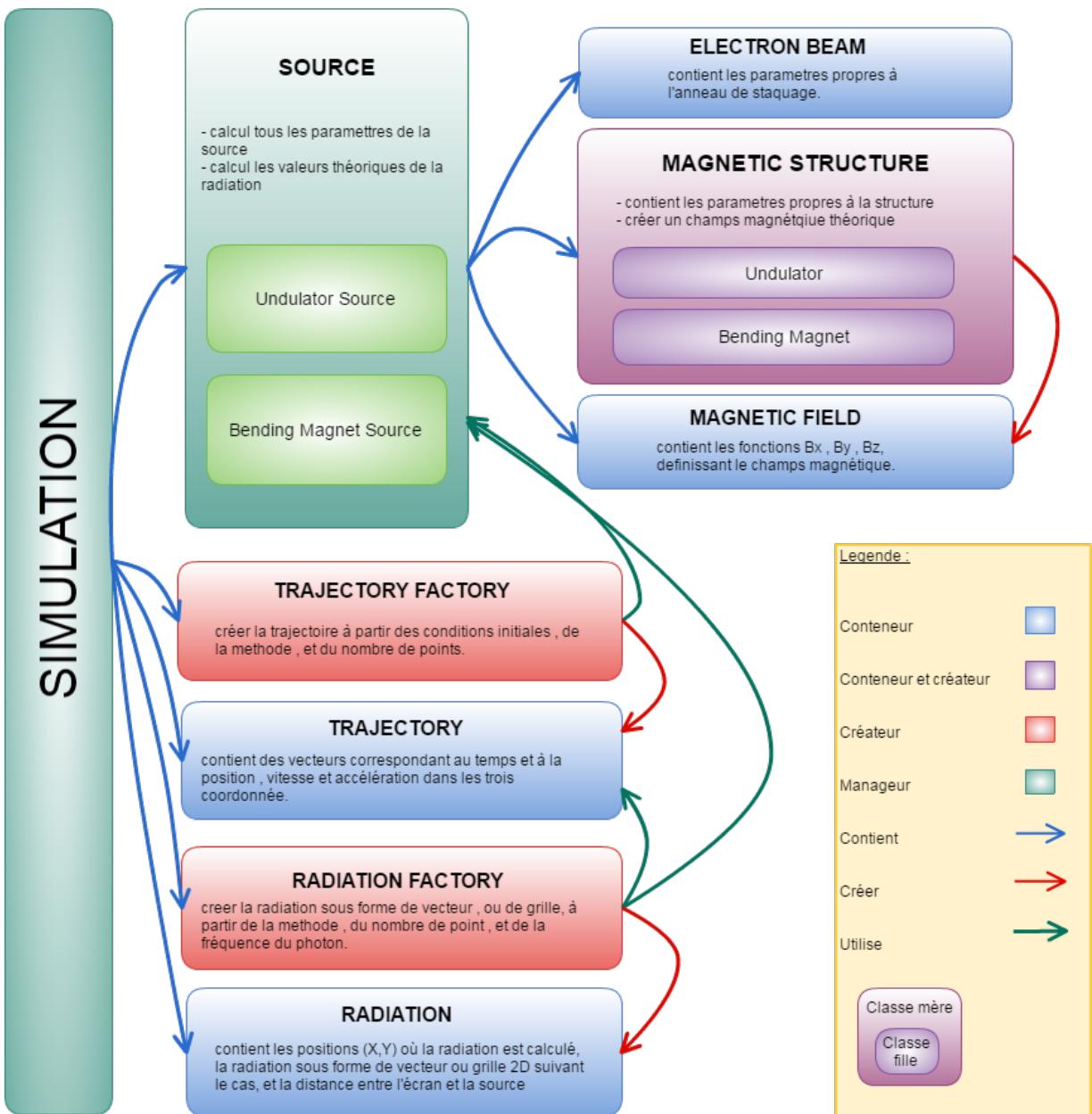


Figure 52: stucture des classes

Les classes sources :

On voit dans le graphique précédent que la classe 'magnetic structure' à un statut particulier. Bien que son rôle premier est de stocker les paramètres dû à la structure magnétique, elle nous sert aussi pour créer les fonctions du champ magnétique idéale.

La classe 'source' a aussi un statut particulier, elle gère les classes relative à l'anneau et à la structure magnétique. Elles regroupe les informations venant du dispositif lui-même. C'est une classe qui pourrait être indépendantes dans le sens où elle peut sans l'aide d'autre classe calculer les résultats théorique.

La classe simulation :

C'est le gérant de toutes ces classes. Elle permet de mettre en lien entre toutes les classes, et regrouper ainsi tous les paramètres d'une même simulation.

Les tests :

Pour chaque classe, une classe test parallèle a été faite où les principales méthodes sont testées.

Il est conseillé de les utiliser pour chaque modification du code et de les compléter si nécessaire. Des tests avec les autres programmes de simulation déjà existants (dont SRW) ont été faits. Des résultats sont sur la page web github déjà mentionné⁴.

7.2 La fonction `create_simulation`

Cette fonction n'appartient à aucune classe. C'est cette fonction qui créer la classe simulation, elle fait le lien entre les données fournis par l'utilisateur et la création et calcul de toutes les autres classes

L'utilisateur doit entrer en paramètre les données physiques indispensables pour décrire l'expérience. Ici c'est les paramètres correspondant aux paramètres de la classe `electron_beam` et `magnetique_structure`. C'est seuls données suffisent au programme pour générer une simulation, les autres paramètres nécessaires étant calculés automatiquement dans les classes sources et à partir des différents résultats donnés précédemment dans ce rapport.

Il est possible donner les paramètres facultatifs, comme le nombre de points, la méthode, des conditions initiales, etc, la fonction s'adaptera autour de ceux là.

L'object simulation ainsi créé, permet :

- de changer un paramètre et de mettre à jour toutes les autres classes. (par exemple changer juste la valeur de la fréquence de radiation ne va faire recalculer que la radiation. Un changement du nombre de points sur la trajectoire va remettre à jour la trajectoire et la radiation qui en dépend, etc...)
- de calculer différents résultats importants comme les spectres. (Notamment grâce aux possibilités évoquées ci-dessus.)
- Comparer les résultats calculés avec les résultats théoriques de la classe sources. C'est ce qui a été fait pour les spectres de la section V.
- observer l'erreur entre deux méthodes et le comportement des résultats face à la variation d'un paramètre.

Exemple d'utilisation et possibilités Dans la classe simulation, différentes méthodes sont à disposition pour :

- Créer la radiation et la trajectoire pour des conditions initiales quelconques .

⁴https://github.com/SophieTh/und_Sophie_2016, branche master

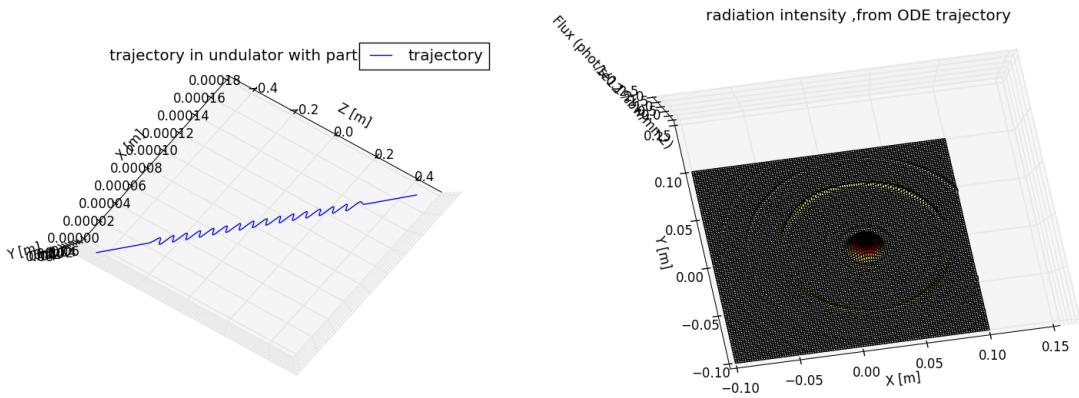


Figure 53: Trajectoire d'un électron avec une vitesse initiale en x non nulle

Figure 54: Le rayonnement émit par un électron ayant la trajectoire de la Figure 53

- Calculer les radiations en considérant X et Y comme des angles d'observation et non des points de l'écran.(en cours de changement). Où bien à partir d'une coordonnée X maximal ou Y maximal.
- Calculer et afficher la radiation sur une courbe paramétrée de points de l'écran :

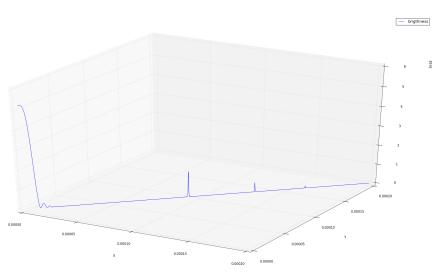


Figure 55: Calcul de l'intensité du rayonnement suivant une courbe paramétrée

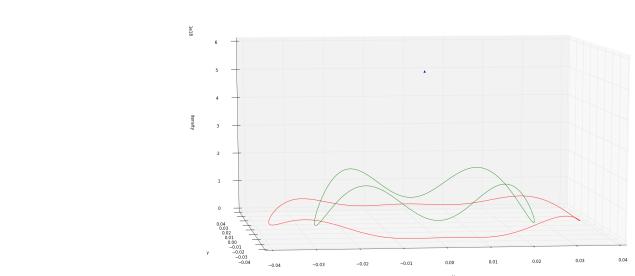


Figure 56: Calcul de l'intensité du rayonnement sur les 'vagues' de la première harmonique

- Plus particulièrement on peut calculer la radiation sur un angle d'observation précis:
 - Grilles ou sous forme de liste :

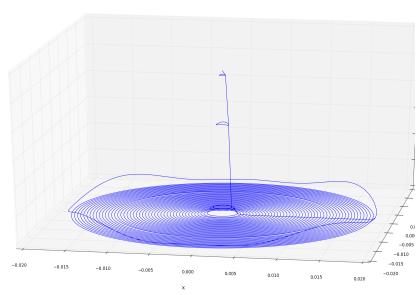


Figure 57: Calcul de l'intensité du rayonnement jusqu'à l'angle décrivant la première vague

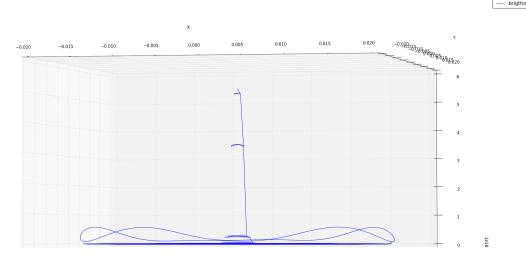


Figure 58: Calcul de l'intensité du rayonnement jusqu'à l'angle décrivant la première vague

- Pour l'onduleur calculer et afficher que les 'vagues' de la radiation qui nous intéressent: (Figure)

8 conclusion

Avoir pu faire mon stage de fin de première année de master à l'ESRF a été une expérience incroyable. Travailler entouré de professionnels venant de toute l'Europe et dans un lieu de recherche avancée est vraiment enrichissant, autant sur le point professionnel que personnel.

Les synchrotrons sont des lieux de recherche rare en France et dans le monde. C'est pour moi une vrai opportunité d'avoir pu y travailler. J'ai pu tout au long de mon stage rencontrer des collègues venant des quatres coins de l'europe et participer à de riches échanges culturels.

Ce fut ma première expérience professionnelle dans le monde des mathématiques informatiques. Mon sujet étant étroitement lié à la physique il fut parfois difficile de m'adapter et comprendre les subtilités de ce domaine que je connais peu. J'ai pris beaucoup de temps à bien comprendre les théories autour des sujets que j'étudiais à l'encontre parfois d'avancer plus efficacement le code. Celui ci est donc une première version qui fonctionne correctement et qui peut être amélioré en le complétant par d'autres méthodes ou en développant sa structure.

Les objectifs principaux du stage sont atteints, et j'ai, durant ces quatre mois, développer de nombreuses compétences professionnels. Mon travail m'a permis de prendre contact sur les méthodes de simulation numérique qui me seront bénéfiques dans mon cursus universitaire et professionnel. J'ai aussi beaucoup progressé en programmation en développant un programme complet en python et en utilisant plusieurs outils de développement comme l'environnement pycharm, ou la distribution et contrôle des versions avec github. J'ai particulièrement apprécié de pouvoir travailler en autonomie sur l'organisation de mon programme. J'y ai appris à prendre confiance en mes capacités et mon travail.

J'espère surtout que le résultat de ce stage sera utile et puisse aider à la simulation des expériences dans les lignes de lumière. Ce rapport pourra aussi servir de base pour un article scientifique visant à faire connaitre pySRU.

9 Remerciements

Je remercie l'entreprise de l'ESRF et sa direction pour ce stage qui a aidé à mon développement professionnel. Plus particulièrement je remercie le groupe ISDD de m'avoir accueillit au sein de l'équipe et permis de travailler dans de bonnes conditions.

J'aimerais surtout remercier Manuel Sanchez del Rio qui m'a permis de faire cette expérience . Je le remercie pour sa confiance et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ces quatre mois.

Je remercie également mon collègue Mark Glass avec qui j'ai beaucoup partagé. Il a été, pour moi, un soutien quotidient et bienveillant.

A Annexes

A.1 Calcul des erreurs entre les différentes formules pour le calcul du rayonnement

A.1.1 La limite 'near field' et 'far field'

On tente de calculer dans cette section, la distance pour laquelle les différentes hypothèses faites en section IV peuvent être considérées.

La suppression du second terme dans l'expression champs électrique :

La première approximation consiste à simplifier l'expression en négligeant le second terme du champs électrique. On remarque que :

$$\left[\frac{n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot n)^2} + \frac{c}{\gamma^2 R} \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)^2} \right] = \frac{1}{(1 - \beta \cdot n)} \left[\left(n \cdot \dot{\beta} + \frac{c}{\gamma^2 R} \right) \frac{(n - \beta)}{(1 - \beta \cdot n)} - \dot{\beta} \right]$$

On cherche à savoir quelle est la valeur minimum pour la distance D avec $D \approx R$ pour que le terme $\frac{c}{\gamma^2 R}(n - \beta)$ soit négligeable devant $\frac{c}{\gamma^2 R}$ devant $\dot{\beta}$.

On rappelle que $\|\dot{\beta}\| = \frac{e}{\gamma m} B_0$, que β et $\dot{\beta}$ sont orthogonaux, et que n est β sont dans la même direction et variant d'un angle très faible. Dans ce cas la norme maximale de $n \cdot \dot{\beta}$ est $\frac{eB_0}{\gamma m} \|\beta\| \sin \Theta$ avec θ l'angle maximale entre β et n . Donc le deuxième terme est donc négligeable si :

$$R >> \frac{cm}{eB_0} \frac{1}{\gamma \Theta}$$

- Pour l'onduleur on a : $\frac{eB_0}{\gamma m} \|\beta\| = \frac{Kck_u}{\gamma} \|\beta\|$ et $\eta = \frac{2K}{\gamma}$ donc le deuxième terme est négligeable si $R >> \frac{1}{K^2 k_u} = \frac{\lambda_u}{2K^2 \pi}$. En pratique $K \approx 1$ et λ_u de l'ordre du centimètre. Comme $R = D - L/2$ La condition est toujours vérifiée dès que la distance D dépasse de 1 mètre le bord de l'onduleur
- Pour l'aimant : $\rho \approx \frac{\gamma m c}{eB_0}$. Si on observe que autour du rayonnement, l'angle maximal est de $\Theta \approx \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\theta} \approx \frac{1}{\theta}$ avec θ la divergence horizontale de l'aimant. Ainsi le deuxième terme est négligeable si $R >> \frac{\rho}{\Theta \gamma^2} \approx \frac{L}{\Theta^2 \gamma^2}$ ce qui, en pratique est de l'ordre de 10^{-2} . On retrouve les mêmes conclusions que pour l'onduleur.

Finalement, pour ces deux dispositifs, le deuxième terme dans l'expression du champ électrique peut être simplifié pour des distances faibles (par exemple à partir de 1 mètre).

Suppression du deuxième terme de la formule simplifiée

On cherche à savoir pour quelle distance on peut faire l'approximation :

$$= \omega(n \times (n \times \beta)) + \frac{c}{R} \frac{\beta \times (n \times \beta_{\perp})}{1 - n \cdot \beta} \approx \omega(n \times (n \times \beta)) = \omega \beta_{\perp}$$

Sur les mêmes remarques que précédemment, on obtient $\|\beta \times (n \times \beta_{\perp})\|_{max} \approx \|\beta_{\perp}\|$. Finalement le deuxième terme est négligeable si :

$$R >> \frac{2c\gamma^2}{\omega}$$

- Si l'angle d'observation est assez faible, alors on peut simplifier $1 - \beta \cdot n = n \frac{1}{2\gamma^2}$. Pour l'onduleur la fréquence de rayonnement ω est proche de la fréquence de résonnance et donc en notant $\omega = j \frac{2k_u c \gamma^2}{1+K^2/2}$ cette approximation peut se faire dès que $R >> \frac{\lambda_u}{2\pi} \frac{1+K^2/2}{j}$. En pratique pour la première harmonique c'est une valeur proche de 10^{-2} . On retrouve donc les mêmes conclusions que précédemment.
- Pour une fréquence proche de la fréquence critique $\omega = j \frac{3\gamma^3 c}{2\rho}$, alors le deuxième terme est négligé si $R >> \frac{4\rho}{3\gamma}$ ce qui en pratique est plus petit que 1.

Le vecteur n devient constant La vraie approximation faite pour les formules dite 'far field' est de changer le vecteur n définit comme $n = \frac{X-r}{\|X-r\|}$ en vecteur constant $\hat{n} = \frac{X}{\|X\|}$. On se demande ici pour quelle distance cette approximation peut être négligeable.

$$\begin{aligned} n - \hat{n} &= \frac{X-r}{\|X-r\|} - \frac{X-r+r}{\|X-r+r\|} \\ &= \frac{X-r}{\|X-r\|} - \frac{X-r+r}{\|X-r\| \sqrt{1 + \frac{2\langle r, (X-r) \rangle}{\|X-r\|^2} + \frac{\|r\|^2}{\|X-r\|^2}}} \\ &= n - \left(n + \frac{r}{\|X-r\|} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|r\| \cos(r, X-r)}{\|X-r\|} + \frac{\|r\|^2}{\|X-r\|^2}}} \end{aligned}$$

Pour simplifier l'expression, on considère maintenant que $\alpha \frac{L}{2} = D$ avec $\alpha > 0$

En remarquant que $\|r\| \leq \frac{L}{2}$ et $D \leq \frac{\|R\|}{\alpha}$ on a donc $\|r\| \leq \|R\|$ et même $\frac{\|r\|}{\|R\|} = O(\alpha^{-1})$. Donc pour α assez grand, par exemple de l'ordre de 100, on peut faire le développement limité de l'expression précédante :

$$\begin{aligned} n - \hat{n} &= n - \left(n + \frac{r}{\|X-r\|} \right) \left(1 - \frac{\|r\| \cos(r, X-r)}{\|X-r\|} - \frac{\|r\|^2}{2\|X-r\|^2} + O\left(\frac{\|r\|^2}{\|X-r\|^2}\right) \right) \\ &= -nO(\alpha^{-1}) - \frac{r}{\|X-r\|} (1 + O(\alpha^{-1})) \end{aligned}$$

Finalement si α est assez grand cela devrait induire une faible erreur en direction. Et le résultat de l'intensité après intégration devrait être assez faible. Pourtant cette formule donne des résultats parfois faux pour l'aimant.

On peut essayer de calculer l'erreur commise sur E. On écrit $n = \hat{n} - \delta$ avec $\delta \approx \frac{r}{\|X-r\|}$ et $\|\delta\| = O(\alpha^{-1})$. On rappel que : $X-r = \|R\|n$ donc $X \cdot n - r \cdot n = \|R\|$. Ainsi

$$E - \hat{E} = E(1 - e^{-i\frac{\omega}{c}((X-r) \cdot \delta)}) - [\delta \times (n \times \beta) + n \times (\delta \times \beta) + \delta \times (\delta \times \beta)] e^{i\omega(t+R/c)} e^{-i\frac{\omega}{c}((X-r) \cdot \delta)}$$

Pour une distance suffisamment grande, le deuxième terme peut se simplifier grâce à la faible variation δ . Le terme dans l'exponentielle se simplifie si $(r \cdot \delta) \ll \frac{c}{\omega}$. En pratique $\|n \cdot \delta\|_{max} \approx \|\frac{L}{D}\|$. On aimera donc pouvoir simplifier si $D >> \frac{\omega L}{c}$. Cette dernière valeur est très grande, et ne correspond pas à celle observé sur les simulations.

Pour comprendre ce qu'il se passe on se place dans le cas où le point d'observation est proche de l'axe. Pour l'onduleur, le terme β_\perp se comporte comme une sinusoïde et est symétrique. En revanche le terme $n \cdot r$ est antisymétrique. (On peut aussi voir ce résultat avec des approximations sur les équations analytiques donner en section III). De ce point, les termes dans l'intégration vont se compenser. Ainsi rendre le vecteur n constant comme étant $\frac{X}{\|X\|}$ revient à prendre la moyenne des vecteurs n sur toute la trajectoire. Cette symétrie ne se retrouve pas dans le modèle qu'on a choisi pour l'aimant.

Ainsi :

- pour l'onduleur, plus le point de l'observation est proche de l'axe, plus cette distance minimale pour utiliser la formule 'far field' est faible.
- pour l'aimant, dans le repère et les conditions données en section IV cette formule n'est pas bien adaptée. Il faudrait modifier le repère pour rendre la trajectoire symétrique.

Finalement, le choix du repère pour l'utilisation des formules dite 'far field' est primordiale. Il doit être choisie de manière à rendre symétrique la trajectoire. Le cas échéant, les formules utilisant les approximations simples comme 'équation (9) sont suffisante.

A.1.2 Erreur par rapport au nombre de points dans l'intégration

La méthode d'intégration du trapèze :

D'après la référence [1] l'erreur commise par une méthode de quadrature élémentaire composé d'ordre N sur $(b - a)$ peut se calculé à chaque pas. On note le point où l'on calcul l'erreur x comme étant $x = kh$ avec $k < n$ un entier. Alors il existe un ξ dans $[a, b]$ tel que:

$$E_{comps}(f) = \frac{C_N}{N!2^{N+1}} h^{N+1} f^{(N+1)}(\xi)(x - a) \quad (16)$$

Où C est une constante dépendant de la méthode et N son ordre.

La méthode du trapèze est une méthode d'ordre 1. Elle consiste à approximer l'intégrale par l'aire des trapèzes formé de $f(x_1) f(x_2) x_2 x_1$ à chaque pas. Cette méthode est convergente, c'est à dire que l'approximation donnée par la méthode converge uniformément vers la solution exacte lorsque le pas de temps tend vers zéro.

On cherche à quantifier l'erreur définit plus haut. Dans notre cas quel que soit le nombre de points $n + 1$ on a un pas $h = \frac{b-a}{n} \approx \frac{L}{nc}$. Ainsi l'erreur sur l'intégrale entre a et b un entier plus petit que n vaut :

$$E_{trapz}(f) = Ckh^3 f^{(2)}(\xi)$$

Avec $C = -\frac{1}{12}$ pour cette méthode du trapèze. On cherche ici à majorer la dérivé seconde de manière à majorer estimer le nombre de points minimum pour assurer la convergence du calcul.

Application au vecteur potentiel pour le calcul de l'intensité du rayonnement

On s'intéressent ici à la formule simplifié et dans le cas de l'onduleur:

$$f = \beta_\perp e^{i\omega(t+R/c)}$$

Où β_\perp est $n \times (n \times \beta)$, et dans les conditions dite 'far field' où le vecteur n est constant. On a :

$$f'' = e^{i\omega(t+R/c)} \left[\ddot{\beta}_\perp + 2i\omega \dot{\beta}_\perp (1 - \beta \cdot n) - \beta_\perp (i\omega (\dot{\beta} \cdot n) + \omega^2 (1 - \beta \cdot n)) \right]$$

Les équations du mouvement nous donnent: $\|\ddot{\beta}_\perp\| = \|\dot{\beta}\| = \frac{eB_0}{\gamma m} \|\beta\|$ Pour une fréquence proche de la première harmonique et un angle d'observation faible on a donc $\omega = j \cdot k_u c \frac{2\gamma^2}{1+K^2/2}$

avec par exemple j entre 0.5 et 10, et $(1 - \beta \cdot n) \approx \frac{1}{2\gamma^2}$ donc $\omega(1 - \beta \cdot n) \approx j k_u c$, on considère que $\dot{\beta}$ est purement sinusoïdale en référence aux équations analytiques trouvées. Ainsi :

- $\|\ddot{\beta}\| \leq 2\omega_u \|\dot{\beta}\| = 2\omega_u \frac{Kck_u}{\gamma} \|\beta\| \approx 2 \frac{Kc^2 k_u^2}{\gamma}$.
- $\|2i\omega \dot{\beta}_\perp (1 - \beta \cdot n)\| \leq j k_u c \frac{eB_o}{\gamma m} = \frac{Kc^2 k_u^2}{\gamma} \|\beta\|$
- $\beta_\perp (i\omega(\dot{\beta} \cdot n) + \omega^2(1 - \beta \cdot n)^2) \leq \|\beta\|^2 (\omega \frac{Kck_u}{\gamma} + c^2 k_u^2) \approx c^2 k_u^2 \gamma K + c^2 k_u^2 =$

Le terme dominant est donc $\|\beta\|^2 \omega \frac{Kck_u}{\gamma}$ et l'erreur est majoré par:

$$|E_{comp}(f)| \leq Cnh^3 \omega \frac{Kck_u}{\gamma} = C\omega \frac{L^3}{c^3 n^2} \frac{Kck_u}{\gamma} = C\omega \frac{L^2}{c^2 n^2} \frac{K2\pi N \gamma}{\gamma^2}$$

En section IV l'équation donné à partir des formules théoriques nous informe sur la valeur approximative du flux maximal pour la première harmonique : $\sqrt{\omega_1} \|\int f\|_\infty \approx 4\pi N \gamma \sqrt{F_1(K)}$. Cette valeur représente la valeur maximale quel que soit la fréquence du rayonnement. On a donc $\|\int f\|_\infty \approx 2\pi N \gamma \frac{\sqrt{F_n(K)}}{\sqrt{\omega_1}}$. De plus avec $C = \frac{1}{12}$ pour la méthode du trapèze, on a :

$$\frac{|E(\int f)|}{\|\int f\|_\infty} \leq \frac{j}{12} \omega_1^{3/2} \frac{L^2}{c^2 n^2} \frac{K}{\gamma^2}$$

Pour se donner un ordre de grandeur, pour obtenir une erreur relative de α il faut :

$$j \frac{2\pi N \gamma}{(1 + K^2/2)} \sqrt{\frac{K}{6\sqrt{\omega_1 F_1(K)}}} \frac{1}{\alpha} \leq n$$

En pratique, $\sqrt{\sqrt{\omega_1}}$ et γ se compensent et ce nombre de points dépend surtout du nombre de périodes. On remarque aussi que plus on est dans les hautes énergies, plus le nombre de points doit être important pour assurer une erreur faible.

References

- [1] J.P Demailly. *Analyse numerique et equation differentielles*. EDP Sciences, 2006.
- [2] E.Hairer. *Solving Ordinary Differential Equations I and II*. Springer, 1996.
- [3] Hindmarsh. “ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers”. In: *Scientific Computing, R. S. Stepleman et al. (eds.)* vol. 1 of IMACS Transactions on Scientific Computation (1983), pp. 55–64.
- [4] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975. ISBN: 9780471431329.
- [5] K-J Kim. *Characteristic of synchrotron radiation*.
- [6] P. Luchini and H. Motz. *Undulators and free-electron lasers*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1990. ISBN: 9780198520191.
- [7] H. Onuki and P. Elleaume. *Undulators, Wigglers and Their Applications*. Taylor & Francis, 2002. ISBN: 9780415280402.
- [8] K. Radhakrishnan and A. C. Hindmarsh. *Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*. LLNL report UCRL-ID-113855, December 1993.
- [9] R. Talman. *Accelerator X-Ray Sources*. Wiley, 2007. ISBN: 9783527610297.
- [10] Roman Tatchyn and Anthony D.Cox. “Undulator Spectre : Computer Simulations and Modeling”. In: *SPIE 582* (1985), pp. 47–66.
- [11] A.C. Thompson et al. *X-ray Data Booklet*. Lawrence Berkeley Laboratory, 2001.
- [12] R.P. Walker. “Interference effects in undulator and wiggler radiation sources”. In: *Nuclear Instruments and Method in physics Research* 335 (1993), pp. 328–337.
- [13] R.P. Walker and B.Diviacco. “URGENT - A computer program for calculatig undulator radiation spectral,angular,polarization, and power density properties”. In: *Rev. Sci. Instrum.* 63 (1992).
- [14] Helmut Wiedemann. *Particle accelerator physics; 3rd ed.* Berlin: Springer, 2007.