



北京大学  
PEKING UNIVERSITY

# 铜基超导理论

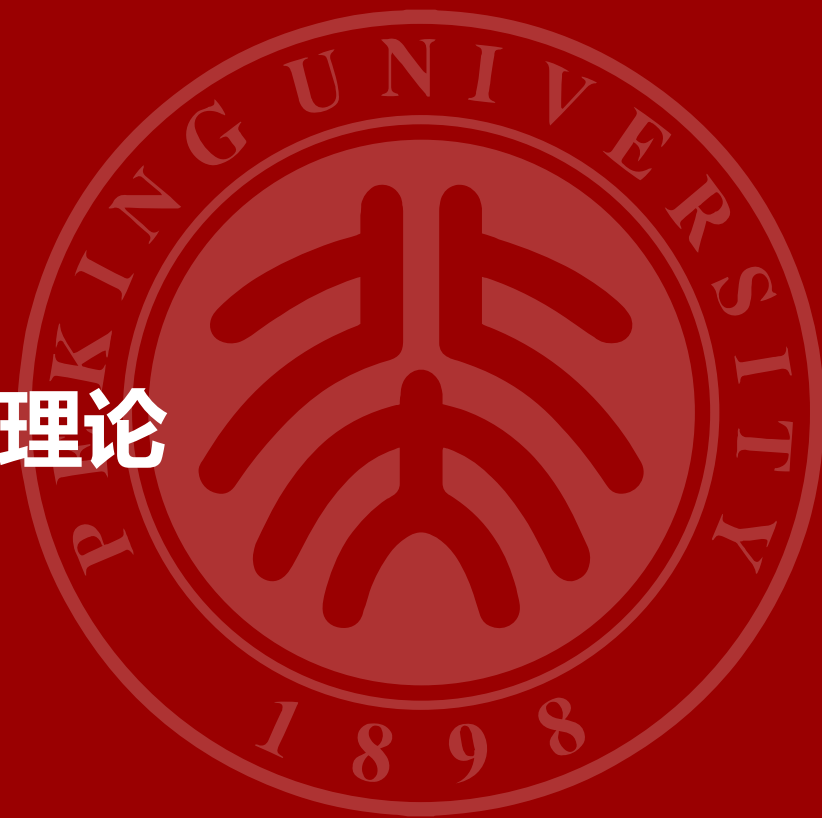
汇报人 Sophus



# 目录

CONTENTS

1. 铜基超导体的物性
2. 铜基超导的平均场理论
3. 超越平均场



# PART 1

---

## 铜基超导体的物性

## 1.1 实验发现

- 1960s Matthias:  $\text{Nb}_3\text{Si}$ ,  $\text{Nb}_3\text{Ge}$  中 18K 和 27K 的  $T_c$ 。
- 进一步提高转变温度?
- 1970s:  $\text{ABO}_3$  超导

超导不来源于BCS的电子-声子相互作用, 而是电子-电子相互作用!

- 1986年, Bednorz和Müller发现了La-Ba-Cu-O化合物中  $T_c = 35\text{K}$
- 1987年, 朱经武和赵忠贤在  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-y}$  中发现了  $T_c \geq 90\text{K}$  (液氮温区)
- 1988年,  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+x}$  和  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  中发现了  $T_c = 110\text{K}, 125\text{K}$
- 以上统称铜基超导体。

# 1.1 实验发现

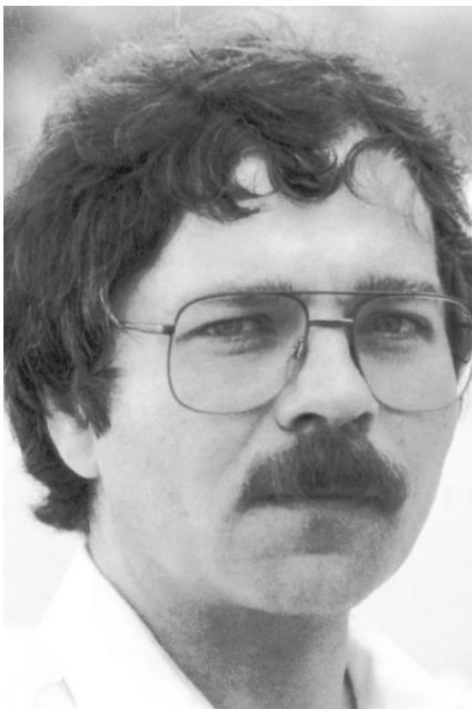


Photo from the Nobel Foundation archive.

**J. Georg Bednorz**

Prize share: 1/2

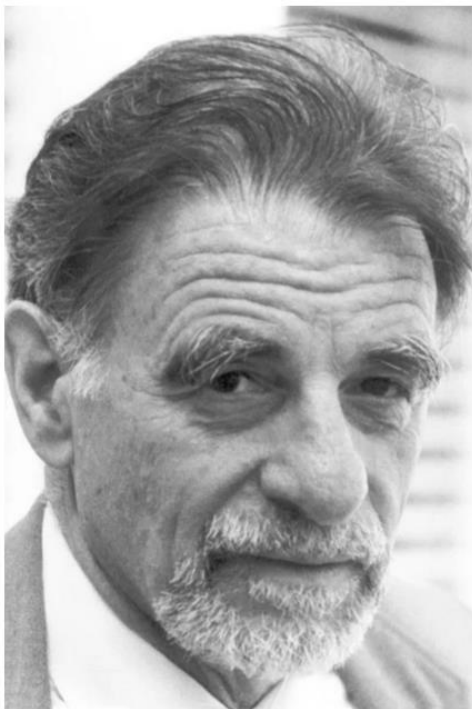
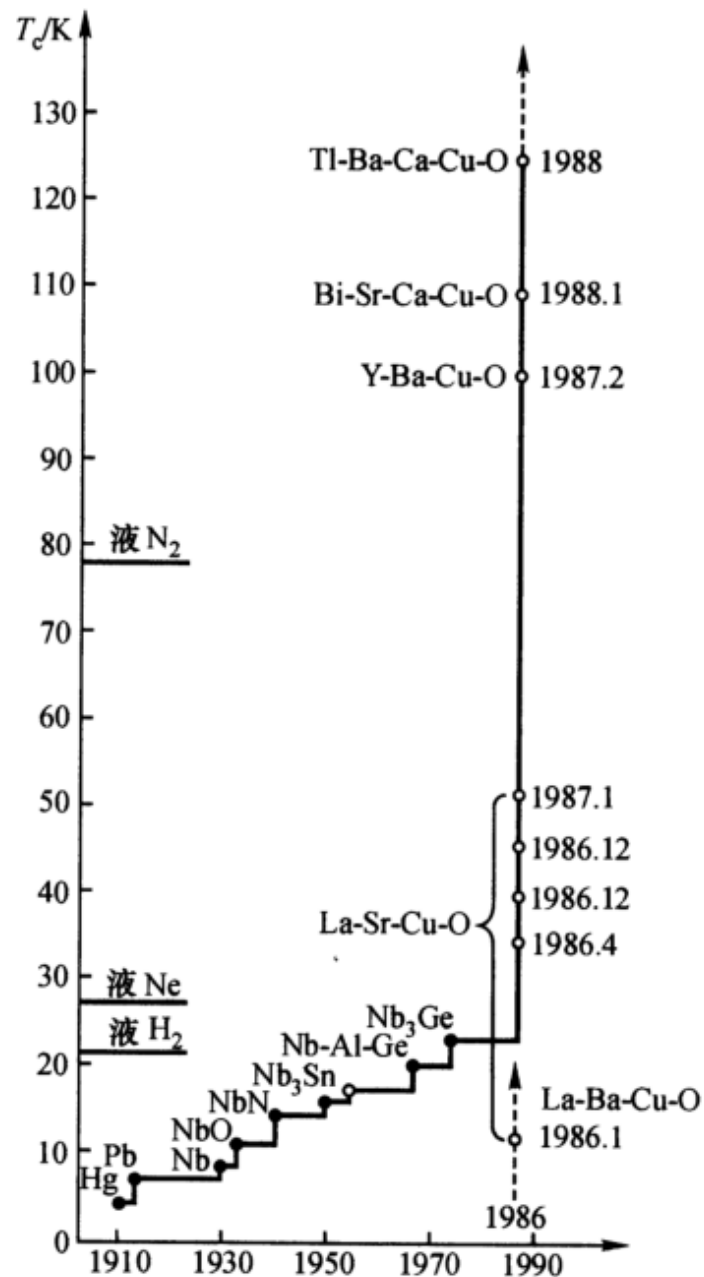


Photo from the Nobel Foundation archive.

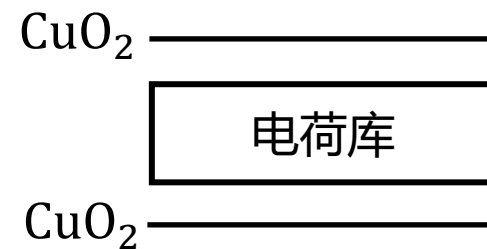
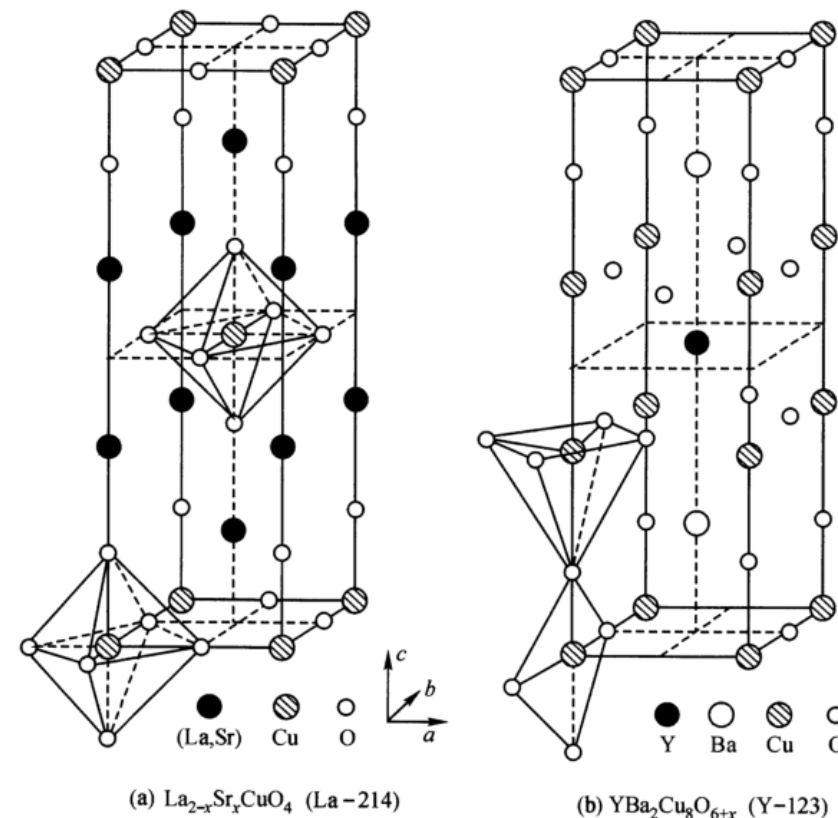
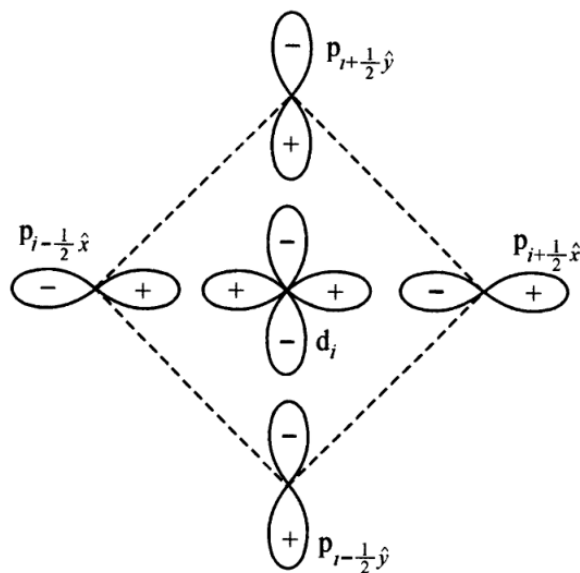
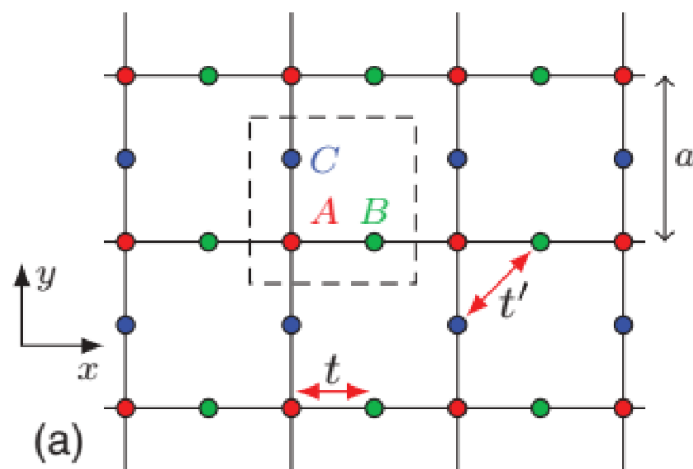
**K. Alexander Müller**

Prize share: 1/2



## 1.2 微观结构和相图

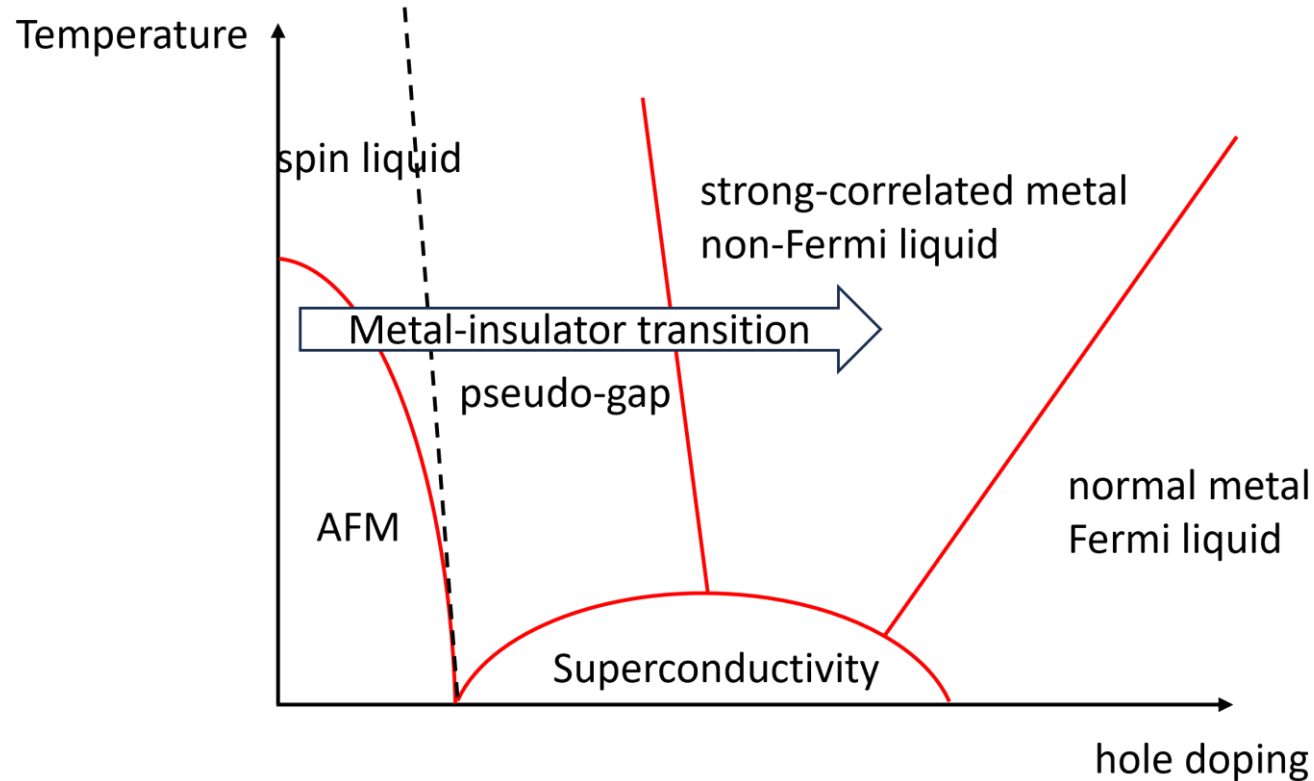
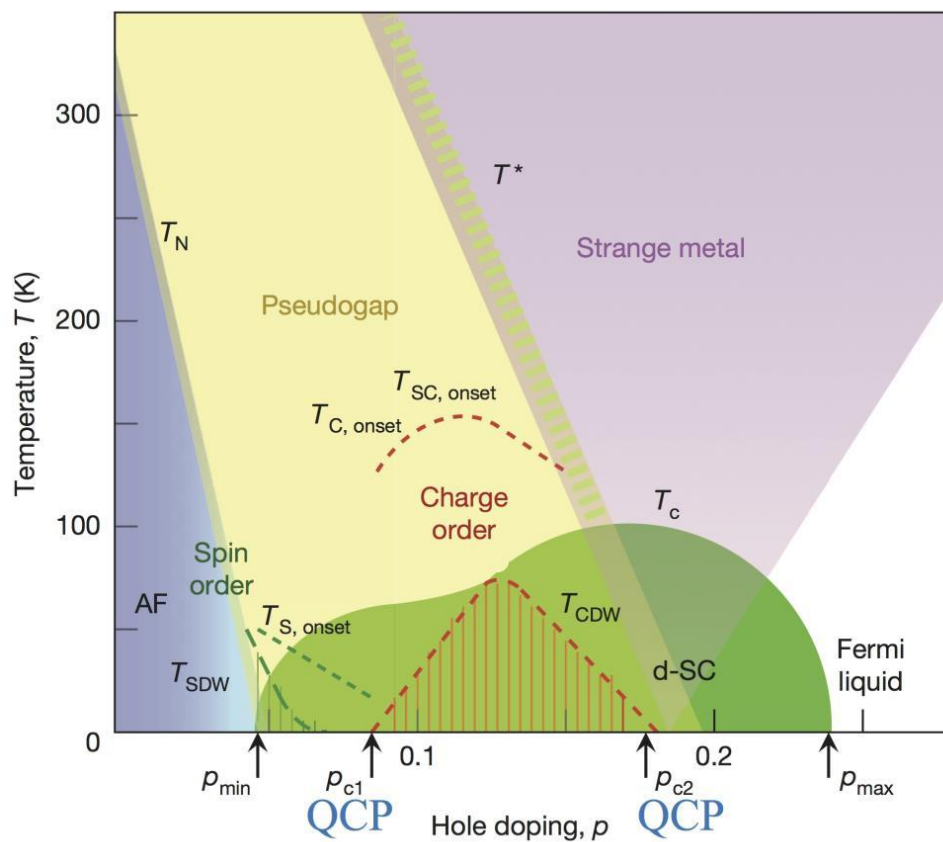
- 统一结构:  $\text{CuO}_2$ 层-电荷库- $\text{CuO}_2$ 层
- $\text{CuO}_2$ 是载流子运动层
  - 二维正方晶格, Cu的d轨道, O的p轨道





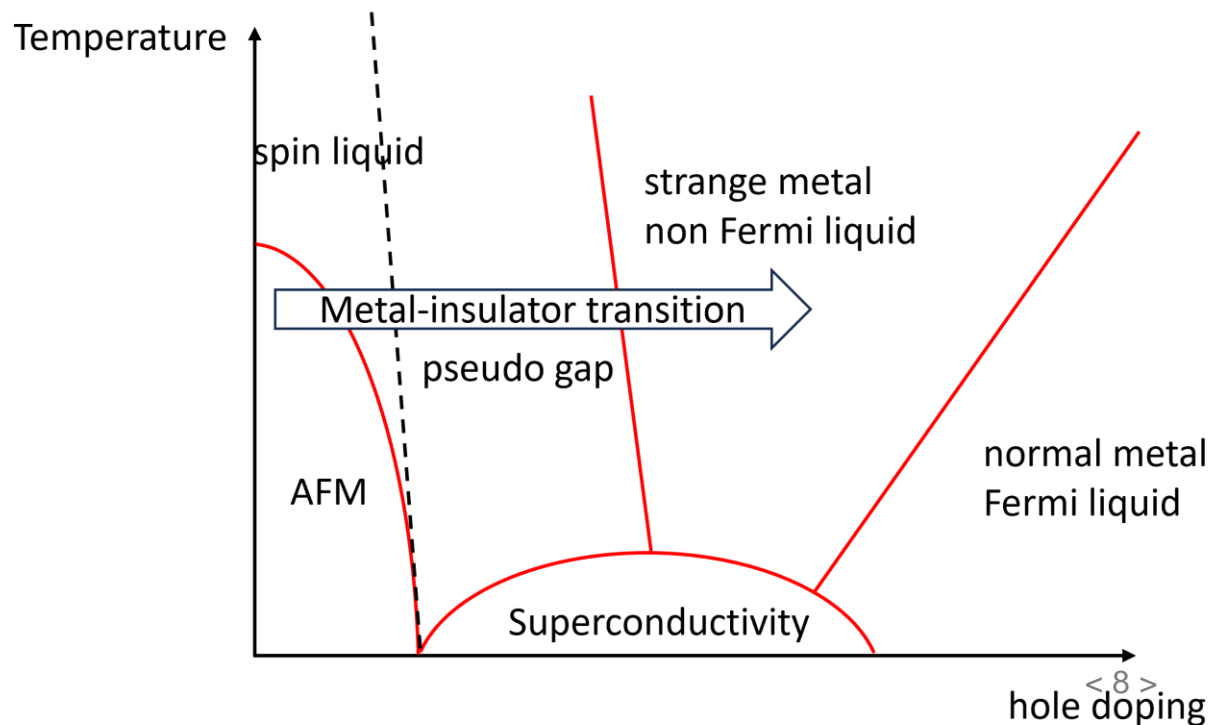
## 1.2 微观结构和相图

- 铜基超导体相图



## 1.2 微观结构和相图

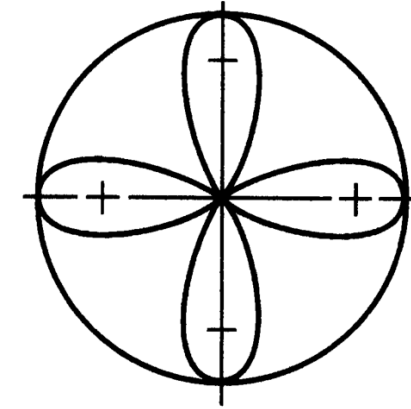
- 母体为反铁磁绝缘体，在微弱掺杂下奈耳温度骤降
- 加大掺杂，出现赝能隙态（弱掺杂区）和奇异金属/非费米液体态（过掺杂区）
- 降温得到超导态
- 继续掺杂，变为费米液体，无超导
- 理论的复杂性





## 1.3 超导态性质

- 超导态仍然为库珀对
- **d波配对**: 能隙函数  $\Delta(k) \propto k_x^2 - k_y^2$ 
  - Cu原子平面内  $d_{x^2-y^2}$  轨道
- d波配对的微观理论: 仍然考虑库珀不稳定性问题, 在相对坐标下



$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) = E \psi(r)$$

$$(2E_k - E) \psi(k) = - \sum_{k'} V(k - k') \psi(k')$$

- 由于  $k, k' \sim k_F$ , 势能可以在角度方向按照勒让德函数展开

$$V(k - k') = \sum_l (2l + 1) V_l P_l(\cos \theta_{kk'}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_l Y_l^{m*}(\theta', \phi') Y_l^m(\theta, \phi)$$

## 1.3 超导态性质

- 对于  $\psi(k) = f(\mathbf{k})Y_l^m(\theta_k, \phi_k)$ , 有

$$(2E_{\mathbf{k}} - E)f(\mathbf{k}) = -V_l \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k}')$$
$$1 = -V_l \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}} - E} = -g(0)V_l \ln \left( \frac{2\hbar\omega_0 - E}{-E} \right)$$

- 如果  $V_l < 0$ , 则形成束缚态

$$E = - \frac{2\hbar\omega_0}{e^{\frac{1}{g(0)|V_l|}} - 1}$$

- $|V_l|$  越大  $E$  越小, 则 **配对角动量=势能分波项主导角动量**
  - 电声耦合, s波主导
  - 其他玻色子, p/d波主导

## 1.3 超导态性质

- d波超导的准BCS理论：在BCS channel中decouple

$$H = \sum_k \epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k}) - (\Delta_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + \Delta_k^* c_{-k} c_k)$$

- 自洽方程：

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V(k, k') \langle c_{-k'} c_{k'} \rangle = - \frac{1}{2} \sum_{k'} V(k, k') \Delta(k', T) \frac{\text{th} \frac{\beta \xi_{k'}}{2}}{\xi_{k'}}$$

- 在分波近似下

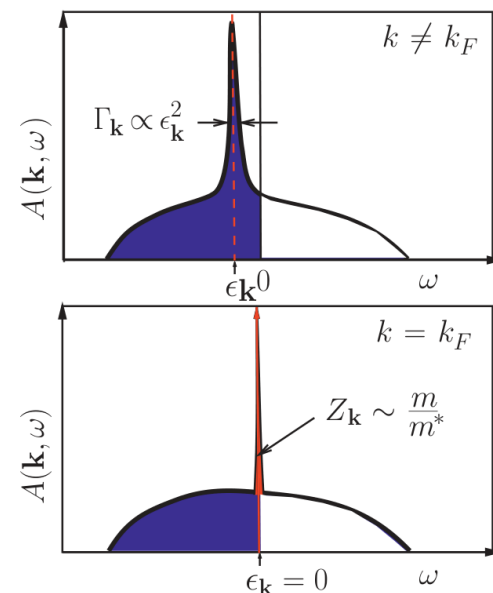
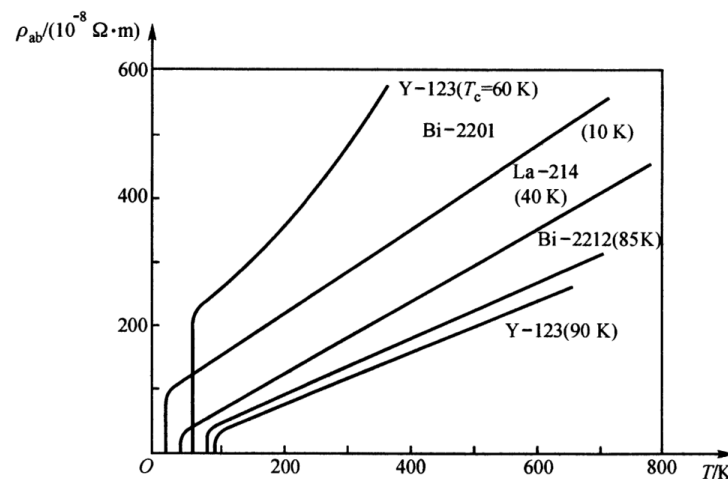
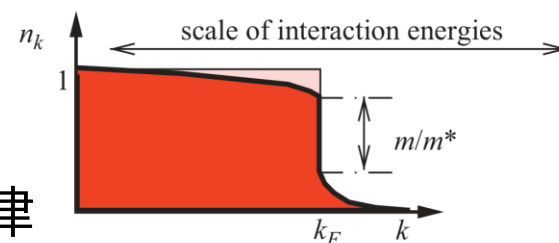
$$1 = \frac{1}{2} |V_l| \sum_{k'} \frac{4\pi |Y_l^m(\hat{k}')|^2 \text{th} \frac{\beta \xi_{k'}}{2}}{\xi_{k'}}, \quad \xi_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + 4\pi \Delta^2(T) |Y_l^m(k)|^2}$$

- 超导转变温度

$$k_B T_c = 1.13 Q \hbar \omega_0 e^{-\frac{1}{g(0)|V_l|}} \quad (Q \sim 1)$$

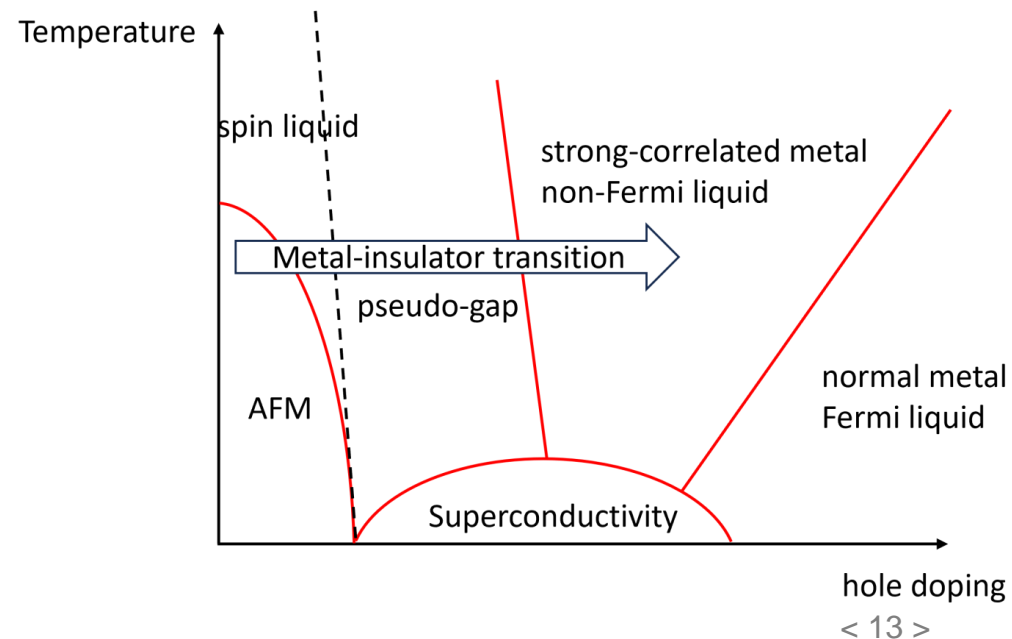
## 1.4 正常态性质

- 费米液体
  - 具有相互作用的系统也可能有费米面，判据为其附近准粒子分布有一个明显的跃变。
  - 具有费米面的系统统称为费米液体 (Landau, 1956)
- 铜基超导在过掺杂的正常区显现出非费米液体行为
  - 电阻率在几乎所有温区均为  $aT + b$ ，而费米液体高温电阻饱和，低温  $T^5$  定律
  - 准粒子寿命  $\text{Im}\Sigma(\omega) \propto \omega$ ，而费米液体  $\text{Im}\Sigma(\omega) \propto \omega^2$
  - 核自旋弛豫  $\tau^{-1} \propto T$ ，而费米液体  $\tau^{-1} \propto T^{-1}$
- 不能用费米液体理解正常态
  - BCS 超导体基于良好定义的费米面



## 1.4 正常态性质

- 弱掺杂区的赝能隙 (pseudo-gap)
- 在温度  $T_p > T_c$  时, 准粒子能谱已经出现了 d 波能隙  $\Delta$ , 但此时电阻率不为 0
  - 在降低温度 (甚至越过  $T_c$ ) 时, 能隙几乎不变化
- 这严重违反了BCS理论。
  - Anderson认为虽然存在库珀对, 但已经不是BCS理论了。



## PART 2

---

# 铜基超导的平均场理论



## 2.1 从Hubbard模型到t-J模型

- Hubbard模型

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow} c_{i\uparrow}$$

- $U \sim 3\text{eV}$ ,  $t \sim 0.4\text{eV}$ , 则  $U \gg t$
- 在  $U \rightarrow \infty$  极限下, 每个格点上能量本征值为0和 $U$ , 对应空占据/单占据和双占据情况。
- 有效理论可以将高能过程的后者投影掉。

- 对于哈密顿量本征值问题  $\begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{10} & H_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ , 可以化简为

$$(H_{00} + H_{01}(E - H_{11})^{-1}H_{10})\psi_1 = E\psi_1$$

- 假设  $H_{01} \ll H_{00}$ , 则可将  $(E - H_{11})^{-1} \rightarrow (E_0 - E_1)^{-1}$ , 那么

$$H'_{00} = H_{00} + \frac{1}{E_0 - E_1} H_{01} H_{10}$$

## 2.1 从Hubbard模型到t-J模型

- 定义  $P = \prod_i (1 - n_{i\uparrow}n_{i\downarrow})$  (Gutzwiller) ,  $Q = 1 - P$  为两个正交投影算符

- 由于Hubbard项处于Q子空间中, 则

$$H_{eff} = PTP - \frac{1}{U}PTQ \cdot QTP$$

$$\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger = (1 - n_{i\bar{\sigma}})c_{i\sigma}^\dagger \quad \tilde{c}_{i\sigma} = c_{i\sigma}(1 - n_{i\bar{\sigma}})$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{ss'} c_{is}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{ss'} c_{is'} \quad J = \frac{4t^2}{U}$$

- 有效哈密顿量为 **t-J Hamiltonian** (Spalek, 1977) :

$$H_{eff} = -t \sum_{ij\sigma} (\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger \tilde{c}_{j\sigma} + h.c.) + J \sum_{ij} \left( \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \frac{1}{4} n_i n_j \right)$$

- Hubbard模型的**强关联极限**

- 半满填充**: 第一项为0  $\rightarrow$  **反铁磁基态**

- Hole doping**: 第一项随着 $\delta$ 增加  $\rightarrow$  **跃迁项和反铁磁项竞争**

## 2.2 t-J模型的平均场理论

- 定义双占据态 $|2\rangle$ , 无占据态 $|0\rangle$ , 则格点产生算符

$$c_{i\sigma}^\dagger = |\sigma\rangle_i \langle 0| + \sigma |2\rangle_i \langle \bar{\sigma}|, \quad c_{i\sigma} = |0\rangle_i \langle \sigma| + \sigma |\sigma\rangle_i \langle 2|$$

- 投影掉 $|2\rangle$ ,  $\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger = |\sigma\rangle_i \langle 0|$ ,  $\tilde{c}_{i\sigma} = |0\rangle_i \langle \sigma|$ ,  $\tilde{c}_{i\sigma}^\dagger \tilde{c}_{i\sigma} = |\sigma\rangle_i \langle \sigma|$ , 不满足费米子反对易关系

- 隶玻色子 (slave boson) 表示 (Piers Coleman, 1983) :

$$|0\rangle = b^\dagger |\Omega\rangle, \quad |\sigma\rangle = f^\dagger |\Omega\rangle$$

$$|0\rangle_i \langle 0| = b_i^\dagger b_i, \quad |\sigma\rangle_i \langle \sigma| = f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}, \quad \tilde{c}_{i\sigma}^\dagger = |\sigma\rangle_i \langle 0| = f_{i\sigma}^\dagger b_i$$

- $b$ 满足玻色子对易关系,  $f$ 满足费米子反对易关系
- 约束关系:  $1 = |0\rangle_i \langle 0| + \sum_\sigma |\sigma\rangle_i \langle \sigma| = b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}$
- 两种元激发:  $b_i$ 为无自旋玻色子 (空穴子, holon),  $f_i$ 为自旋1/2费米子 (自旋子, spinon)
- “自旋-电荷分离” (Tomonaga 1950s, Luttinger 1963, Haldane 1981)

## 2.2 t-J模型的平均场理论

- Slave boson表象下的t-J模型 (Baskaran, Zou and Anderson, 1987)
- $1 - \delta = \langle \sum_{\sigma} f_{i\sigma}^{\dagger} f_{i\sigma} \rangle$ ,  $\delta = \langle b_i^{\dagger} b_i \rangle \ll 1$

$$H_{tJ} = -t \sum_{ij} (b_j^{\dagger} b_i f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\sigma} + h.c.) - J/2 \sum_{ij\sigma} (f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\bar{\sigma}}^{\dagger} f_{j\bar{\sigma}} f_{i\sigma} + f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\bar{\sigma}}^{\dagger} f_{i\bar{\sigma}} f_{j\sigma})$$

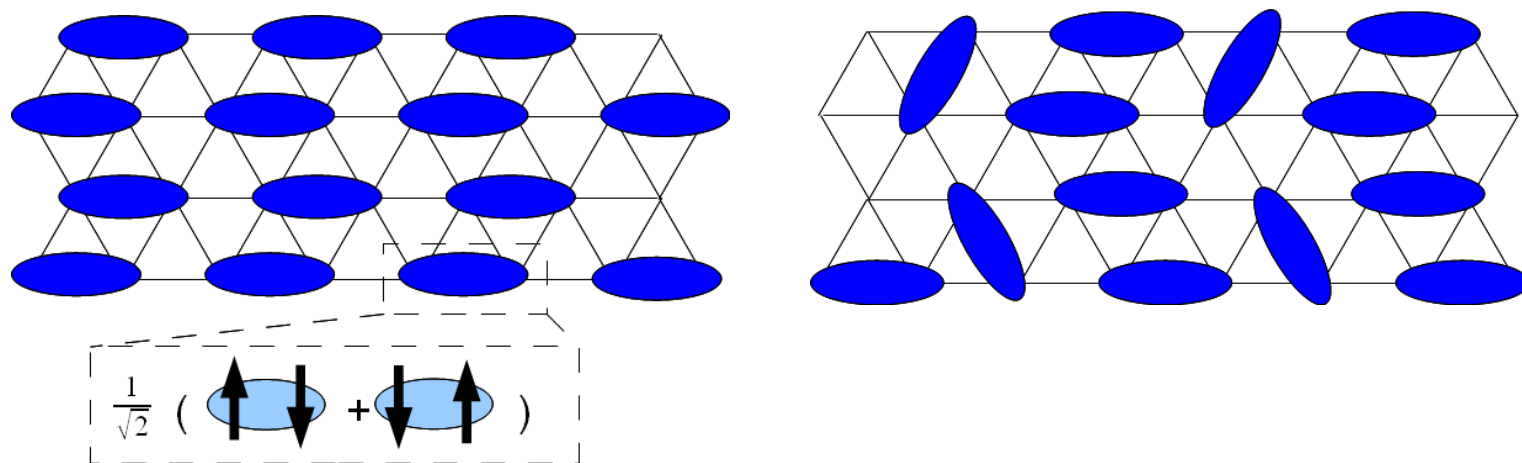
- 总的哈密顿量

$$H = H_{tJ} - \mu \sum_{i\sigma} f_{i\sigma}^{\dagger} f_{i\sigma} + \sum_i \lambda_i \left( b_i^{\dagger} b_i + \sum_{\sigma} f_{i\sigma}^{\dagger} f_{i\sigma} - 1 \right)$$

- 共振价键态 (RVB) : 反铁磁项可以写作  $-J \sum_{ij} F_{ij}^{\dagger} F_{ij}$ , 其中  $F_{ij}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{i\uparrow}^{\dagger} f_{j\downarrow}^{\dagger} - f_{i\downarrow}^{\dagger} f_{j\uparrow}^{\dagger})$
- 由于  $F_{ij}^{\dagger 2} = 0$ , 所以基态为  $|GS\rangle = \prod_{ij} F_{ij}^{\dagger} |0\rangle$ 。
- 这就是RVB state, 每两个最近邻格点上的电子都形成自旋单态。

## 2.2 t-J模型的平均场理论

- RVB state不是反铁磁Neel state，因为只包括最近邻格点的自旋单态，没有长程序。
- RVB是**所有“近邻单态”状态的叠加**，称作自旋液体（spin liquid）（Anderson, 1973）
- 实际材料中RVB状态能量低于Neel state。所以Anderson认为RVB是高温超导问题的出发点。



## 2.2 t-J模型的平均场理论

- 弱掺杂区的平均场理论
- 平均场序参量:  $p = \sum_{\sigma} \langle f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\sigma} \rangle$ ,  $q = \langle b_j^{\dagger} b_i \rangle$ ,  $\Delta_{ij} = \langle F_{ij} \rangle = \begin{cases} \Delta_x, j = i \pm \hat{x} \\ \Delta_y, j = i \pm \hat{y} \end{cases}$
- 平均场哈密顿量 ( $b_j^{\dagger} b_i f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\sigma} \rightarrow q f_{i\sigma}^{\dagger} f_{j\sigma} + p/2 b_j^{\dagger} b_i$ )

$$H = \sum_{k\sigma} (-2tq\gamma_k + \lambda) f_{k\sigma}^{\dagger} f_{k\sigma} + \sum_k (-tp\gamma_k + \lambda) b_k^{\dagger} b_k - \sum_k \Delta_k f_{k\uparrow}^{\dagger} f_{-k\downarrow}^{\dagger} + h.c. + \frac{1}{2} NJ(\Delta_x^2 + \Delta_y^2)$$

- Gap equation的求解:  $G = -kT \ln(\text{Tr} e^{-\beta H})$ ,  $\frac{\partial G}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial p} = 0$

- 自洽方程:

$$\Delta_{\alpha} = 2J \sum_k \Delta_k \cos k_{\alpha} \frac{\tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)}{E_k}$$

$$q = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\gamma_k}{e^{\omega_k/kT} + 1}$$

$$p = \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \left( 1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right) \right)$$

$$\epsilon_k = \lambda - 2tq\gamma_k$$

$$\omega_k = \lambda - tp\gamma_k$$

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

$$\gamma_k = \cos k_x + \cos k_y$$

$$\Delta_k = J(\Delta_x \cos k_x + \Delta_y \cos k_y)$$



## 2.2 t-J模型的平均场理论

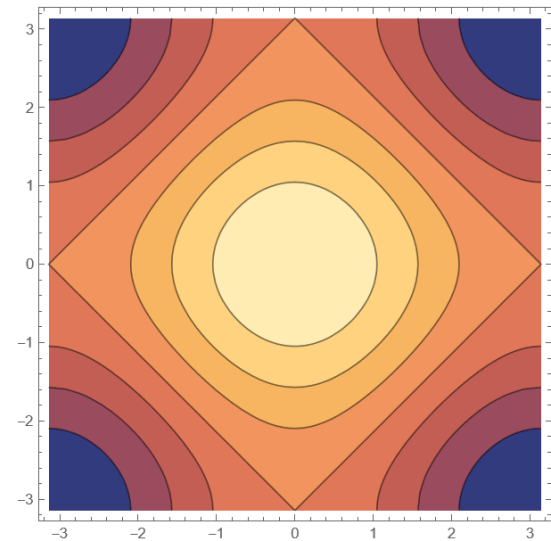
- d波超导的理论解释:

- $T = 0$ 时, 对于 $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_s$ 和 $\Delta_x = -\Delta_y = \Delta_d$ 两种情况, 能隙方程分别为

$$1 = J \sum_k \frac{\gamma_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2 + (\sqrt{2}J\gamma_k\Delta_s)^2}}, \quad 1 = J \sum_k \frac{\eta_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2 + (\sqrt{2}J\eta_k\Delta_d)^2}}$$

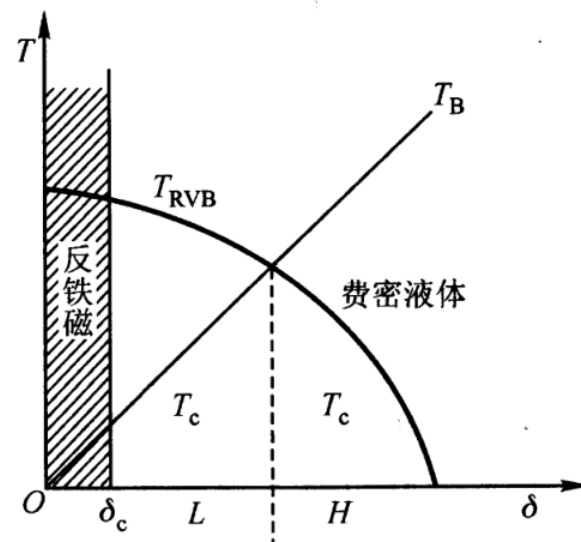
$$\gamma_k = \cos k_x + \cos k_y, \quad \eta_k = \cos k_x - \cos k_y$$

- 对 $k$ 求和主要集中在费米面附近, 对于正方晶格的半满填充, 费米面为 $k_x + k_y = \pm \pi$ , 所以费米面正好为 $\gamma_k = 0$ 位置, 但 $\eta_k \neq 0$ 。
- 所以 $\Delta_s < \Delta_d$ , 这表明d波配对更为稳定。(Kotliar and Liu, 1987)



## 2.2 t-J模型的平均场理论

- 赝能隙的解释**：形成超导态的判据是  $\langle c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}^\dagger - c_{i\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow}^\dagger \rangle = \langle b_i b_j \rangle \langle f_{i\uparrow}^\dagger f_{j\downarrow}^\dagger - f_{i\downarrow}^\dagger f_{j\uparrow}^\dagger \rangle \neq 0$ 
  - 需要两者均不为0才能进入超导态。
  - Kotliar-Fukuyama:  $\langle b_i b_j \rangle \approx \langle b_i \rangle \langle b_j \rangle \neq 0$  来自于**单个空穴子的BEC**
  - $\delta = \langle b_i^\dagger b_i \rangle$ , 则BEC温度由doping决定
- BEC的温度低于形成RVB的温度。**
  - $T_{BEC} < T < T_{RVB}$  时, 电子已形成库珀对, 但**相位非相干**, 所以未进入超导态, 但存在**赝能隙**。
  - 只有在  $T < T_{BEC}$  时, 才能发生空穴子的凝聚, 形成**电阻率为0的相干状态**。
- 预配对理论** (Schrieffer, 1988)



## 2.2 t-J模型的平均场理论

- 平均场理论总结
  - 可以解释：反铁磁基态、d波超导、赭能隙
  - 无法解释：转变温度量级（预测100-1000K之间）、奇异金属态，以及更复杂的物性
- RVB理论确实触及了高温超导机理问题的核心，但是最简单版本的RVB理论不足以自洽地描述铜氧化物的准粒子行为和自旋涨落行为，尤其是无法描述电子这两种行为（巡游-局域）的二元性。

<https://www.zhihu.com/question/53639649/answer/1292890399>

# PART 3

---

## 超越平均场

## 3.1 规范场理论简介

- Xiao-gang Wen, Patrick A. Lee, Naoto Nagaosa, 1990s-2000s
- slave-boson的 $b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma} = 1$ 约束在平均场近似之下变为了 $\langle b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma} \rangle = 1$ , 忽略了平均值附近的涨落行为。
- 通过规范场的引入, 可以去除掉这个约束。从U(1)规范不变性 $f_{i\sigma} \rightarrow e^{i\phi_i} f_{i\sigma}, b_i \rightarrow e^{i\phi_i} b_i$ , 通过诺特定理可以自然导出U(1)守恒荷 $Q_i = b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}$ 。
- 类似QED中光子场, 需要引入规范场,  $a_{ij} \rightarrow a_{ij} + \phi_i - \phi_j, a_{0i} \rightarrow a_{0i} + \frac{\partial \phi_i(\tau)}{\partial \tau}$   

$$L = \sum_{i\sigma} f_{i\sigma}^* (\partial_\tau - \mu_f + i a_{0i}) f_{i\sigma} + \sum_i b_i^* (\partial_\tau - \mu_b + i a_{0i}) b_i - Jp \sum_{ij\sigma} e^{i a_{ij}} f_{i\sigma}^* f_j - 2tq \sum_{ij} e^{i a_{ij}} b_i^* b_j + h.c.$$
- 定量地计入涨落项
- 高能物质场→规范场→低能物质场

## 3.1 规范场理论简介

- 规范场传播子:  $D_{\mu\nu}(q, \omega) = \langle a_\mu(q, \omega) a_\nu(-q, -\omega) \rangle \approx (i\omega\sigma(q) - \chi q^2)^{-1} \approx (i\gamma\omega/q - \chi q^2)^{-1}$
- 规范场对物质场性质的影响:
  - 准粒子寿命: 由于  $\Sigma(k, \omega) \sim \int dq d\Omega \frac{\text{Im } D(q, \Omega)}{\omega - \epsilon_k - \Omega + i\eta}$ ,  $\text{Im } \Sigma(\omega) \propto \omega$
  - 电导率: 散射来自于物质场和规范场的相互作用, 所以不受其他因素影响, 电导率可以在高于

$T_P = \frac{\hbar}{k_B \tau_p}$  的很大一段区间内保持温度线性。

- 不存在准粒子的费米面
- SU(2)规范理论 (文小刚)、规范退禁闭和自旋液体
- 超出平均场理论, 解释了非费米液体行为, 作为唯象理论价值很高, 但和实验对不上。



## 3.2 SO(5)唯象理论

- Shou-Cheng Zhang, Eugene Demler, 1995s-2000s
- 主要切入点：平均场高估了转变温度，所以主导的应该是低能自由度。
- 竞争序：反铁磁、d波超导、RVB。没有明显的能量尺度差别，所以很难使用重整化积分掉高能自由度，但是可以从对称性角度出发研究低能的哈密顿量。
- AFM & SC:  $SO(3) \times U(1)$
- CDW & SC:  $SO(4)$  (杨振宁, 1989)
- 最小对称性为  $SO(5)$
- 序参量：五维spinor
  - $n_{1,5}$  为超导配对序参量,  $n_{2,3,4}$  为AFM序参量
  - $SO(3)$  部分为  $n_{2,3,4}$  子空间内部变换,  $U(1)$  为  $n_{1,5}$  内部变换
  - $SO(5)$  对称性的引入表明AFM和SC可以互相变换

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \Delta^\dagger + \Delta \\
 n_5 &= -i(\Delta^\dagger - \Delta) \\
 n_{2,3,4} &= \sum_p c_{p+Q,i}^\dagger \sigma_{ij}^{x,y,z} c_{pj}, Q = (\pi, \pi) \\
 \Delta &= \frac{1}{2} \sum_p (\cos p_x - \cos p_y) c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}
 \end{aligned}$$

## 3.2 SO(5)唯象理论

- SO(5)的生成元：
  - 3+1=4个SO(3)和U(1):  $S_a = \sum_p c_{pi}^\dagger \sigma_{ij}^a c_{pj}, Q = \sum_{pi} c_{pi}^\dagger c_{pi}$
  - 剩下6个:  $\pi_a^\dagger = \sum_p (\cos p_x - \cos p_y) c_{p+Q,i}^\dagger (\sigma^\alpha \sigma^\gamma)_{ij} c_{-pj}, \pi_a = (\pi_a^\dagger)^\dagger$
  - SO(3)和U(1)是t-J哈密顿量的严格对称性, 但 $\pi$ 不是, 然而 $[H, \pi_a^\dagger] = (J(1-n)/2 - 2\mu)\pi_a^\dagger$ , 所以 $\pi_a^\dagger$ 可视为升降算符 (本征值意义下是对称性)
  - 卡西米尔算符 $C = \sum L_{ab}^2$ 为严格对称性。
- 对d波超导的预测:  $\tilde{\pi}_\alpha^\dagger = \sum_p (\cos p_x + \cos p_y) c_{p+Q,i}^\dagger (\sigma^\alpha \sigma^\gamma)_{ij} c_{-pj}$ 不是对称性, 所以不是s波超导

## 3.2 SO(5)唯象理论

- 有效模型的建立

- 在平均场转变温度之下， $n$ 模长固定

- 随着参数变化，基态可以在AFM和SC之间发生“自旋翻转”

- 在基态附近展开可以得到集体模式：

- 对于AFM基态，存在AFM自旋波和SC“配对密度波”两种激发

- 对于SC基态，存在声子和类似超流旋子（roton）的激发

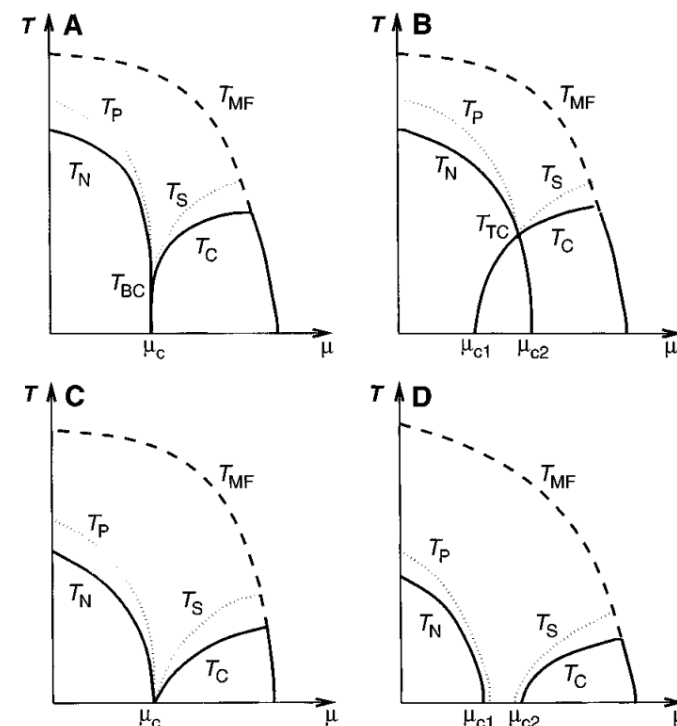
- 还有对应 $\pi$ 自由度的模式（在YBCO中被观测到）

- 相图

$$\begin{aligned}
 H_a = & \sum_{a < b} \frac{1}{2\chi_{ab}} L_{ab}(x)^2 \\
 & + \sum_{a < b} \frac{\rho_{ab}}{2} [v_{ab}^k(x)]^2 + V(n)
 \end{aligned}$$

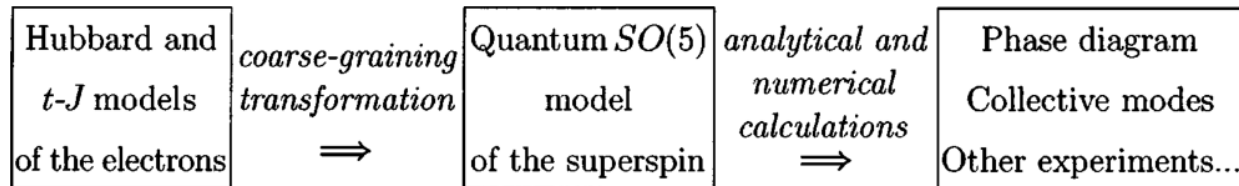
$$\begin{aligned}
 \chi_{\pi} \partial_t^2 n_1 &= \rho_{\pi} \partial_k^2 n_1 \\
 &- [g - (2\mu)^2 \chi_{\pi}] n_1 - 4\mu \chi_{\pi} \partial_t n_5 \\
 \chi_s \partial_t^2 n_{\alpha} &= \rho_s \partial_k^2 n_{\alpha}, \quad \alpha = 3, 4 \\
 \chi_{\pi} \partial_t^2 n_5 &= \rho_{\pi} \partial_k^2 n_5 \\
 &- [g - (2\mu)^2 \chi_{\pi}] n_5 + 4\mu \chi_{\pi} \partial_t n_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_c \partial_t^2 n_5 &= \rho_c \partial_k^2 n_5 \\
 \chi_{\pi} \partial_t^2 n_{\alpha} &= \rho_{\pi} \partial_k^2 n_{\alpha} - [\chi_{\pi} (2\mu)^2 - g] n_{\alpha}
 \end{aligned}$$



## 3.2 SO(5)唯象理论

- 超导机制：高能的自旋单态形成（对应 $n$ 模长固定）和低能的AFM→SC转变（对应 $n$ 翻转）
- 在doping之下，前者温度降低，后者温度升高。

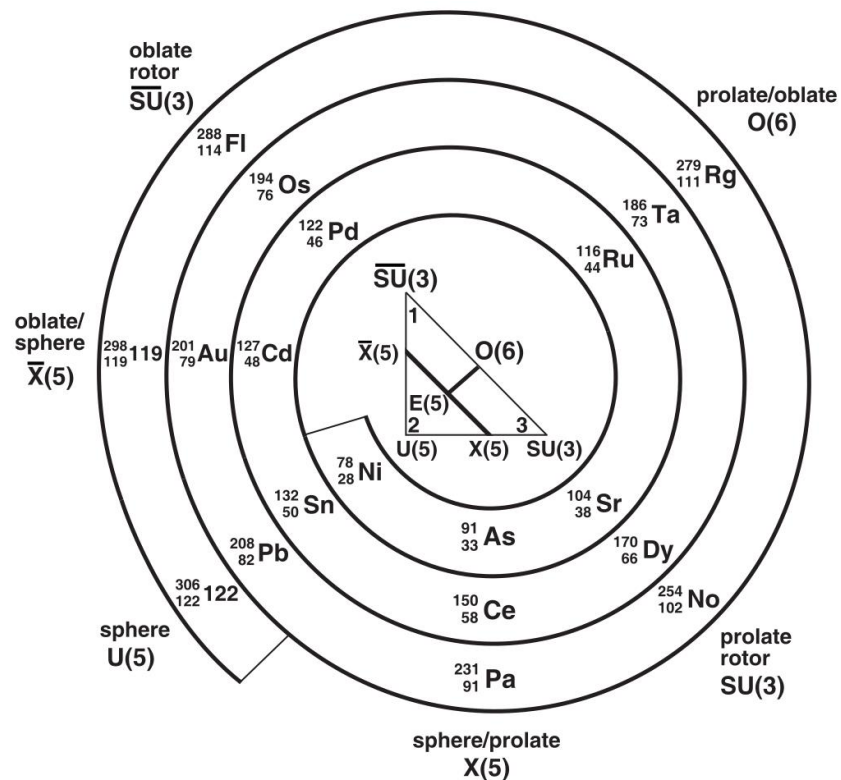


- 有效模型/唯象模型

- 只依赖于模型的对称性
- 对称性得到的低能模式很准确

- 原子核和分子的振动理论

- 小振动由玻色子产生算符描述
- $N$ 个玻色子算符可形成 $U(N)$ 李代数
- 使用李代数的分解可以得到对称性破缺的方式，对应振动状态。
- Arima & Iachello, interacting boson model (1980s)





北京大学  
PEKING UNIVERSITY

# PART 4

---

## 总结

## 4. 总结

- 2000s, 莫特绝缘体的掺杂被认为是高温超导的原理 (Wen Lee Nagaosa)。t-J模型足够解释超导和赭能隙的出现。
- 2016年, Anderson认为RVB已经能给出超导的大部分内容。
  - “材料科学中的问题往往是超定的而非欠定的。我们有太多的数据, 任何不与数据中的显著事实相违背的假设都很可能是正确的。”
  - 最简版本的理论 (指RVB理论) 已经可以给出关于系统能标和核心特征满意的解释.....炒作出的所谓“超导谜团” 似乎不无例外地是理论学家为了利益的故弄玄虚。

<https://www.zhihu.com/question/53639649>



## 4. 总结

- 铜基超导体仍无完整的，可以解释**所有实验物性**的理论。
  - 首先实际材料远比t-J模型复杂（声子/自旋/杂质？）
  - 其次高温超导是**非微扰的现象**
    - 朗道费米液体：只要相互作用的微扰理论收敛，费米系统行为将与无相互作用系统定性一致。微扰发散只来源于对称性的自发破缺，但可以在新的对称破缺的鞍点进行微扰展开，并考虑自发对称破缺引入的新的低能自由度对准粒子的散射。
    - 排除了**微扰发散并不伴随对称性的自发破缺**，而是形成高度关联的非费米液体状态这种可能。目前只有非费米液体的个别特例，而不了解一般的非费米液体是什么样。

<https://www.zhihu.com/question/394731988>

- 即使对于BCS超导体，之前理论认识也不够，2001年发现的BCS超导体MgB<sub>2</sub>转变温度为39K，超越了此前BCS的麦克米兰极限（30K）。近年来的转角石墨烯超导和铜基超导有诸多相似之处，但后来发现主要还是**电声耦合与拓扑**的作用（arxiv 2402.00869）。人们甚至发现量子几何在电声耦合中可能起很大作用（arxiv 2305.02340）。

- 李正中, 固体理论
- Patrick A. Lee, Naoto Nagaosa, Xiao-Gang Wen, Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity, Rev. Mod. Phys, 78(1), 2006
- Shou-Cheng Zhang, A Unified Theory Based on SO(5) Symmetry of Superconductivity and Antiferromagnetism, Science 275, 1089 (1997)
- Eugene Demler, Werner Hanke, Shou-Cheng Zhang, SO(5) theory of anti-ferromagnetism and superconductivity, Rev. Mod. Phys, 76(3), 2004
- Anderson, Last words on the cuprates, arxiv 1612.03919



# 感谢大家的聆听

量子力学讨论班

---

Sophus