

Kondo 模型和重整化群

平衡态统计物理讨论班

林沛晗

北京大学物理学院

2025 年 3 月 24 日

- ① Kondo 模型介绍和微扰论计算
- ② Kondo 模型的重整化群计算
- ③ 数值重整化群
- ④ 总结和参考文献

① Kondo 模型介绍和微扰论计算

② Kondo 模型的重整化群计算

③ 数值重整化群

④ 总结和参考文献

实验发现



Progress of Theoretical Physics, Vol. 32, No. 1, July 1964

Resistance Minimum in Dilute Magnetic Alloys

Jun KONDO

*Electro-technical Laboratory
Nagatacho, Chiyodaku, Tokyo*

(Received March 19, 1964)

图 1: 近藤淳 (Jun Kondo, 1930-2022), 其主要工作集中在磁性金属和合金的物性领域。

实验发现

Kondo 效应：掺有磁性杂质 (Fe, Mn) 的金属低温电阻率反常

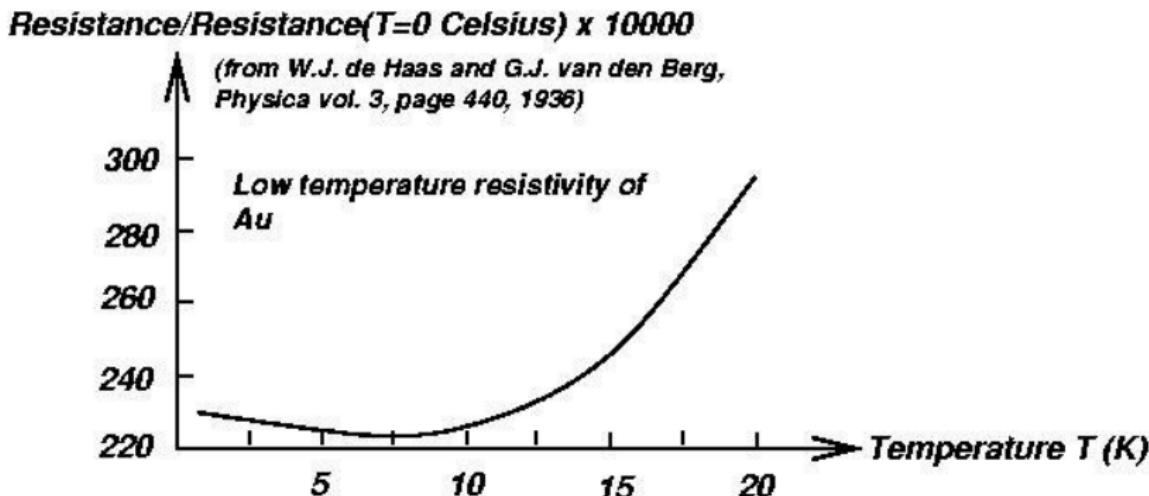


图 2: Au 中的电阻率极小 (de Haas, 1936)

实验发现

- 声子电阻 T^5 , 要想有电阻率极小, 杂质的电阻贡献应随着温度降低而升高, 但杂质的弛豫时间和温度无关。
 - 实验测量发现如果有电阻率极小, 必有局域磁矩。这说明磁矩可能对电阻率有贡献。
 - 1964 年, Kondo 计算了磁矩对电阻率的影响, 发现存在随温度降低而增大的电阻率项。

Kondo 模型

Kondo 模型：单个磁矩在自由电子气之中，和电子自旋磁矩耦合

$$H = \sum_{k,s} \epsilon_k c_{ks}^\dagger c_{ks} + J \vec{S} \cdot \vec{s}(0)$$

其中

$$\vec{s}(x) = \frac{1}{2} \sum_{kk', ss'} e^{-i(k-k')x} c_{ks}^\dagger(\vec{\sigma})_{ss'} c_{k's'}$$

则 $\vec{s}(0) = \frac{1}{2} \sum_{kk',ss'} c_{ks}^\dagger(\vec{\sigma})_{ss'} c_{k's'} \circ$ 所以

$$H = \sum_{k,s} \epsilon_k c_{ks}^\dagger c_{ks} + \frac{J}{2} \sum_{kk'} [S_z(c_{k\uparrow}^\dagger c_{k'\uparrow} - c_{k\downarrow}^\dagger c_{k'\downarrow}) + S_+ c_{k\downarrow}^\dagger c_{k'\uparrow} + S_- c_{k\uparrow}^\dagger c_{k'\downarrow}]$$

Kondo 模型

根据玻尔兹曼方程，弛豫时间为

$$\frac{1}{\tau(k)} = 2\pi n_i \cdot \frac{1}{4} \sum_{ss'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} |\langle k' s' | T | ks \rangle|^2 (1 - \cos \theta_{kk'})$$

其中 $\langle k' s' | T | ks \rangle$ 为 $ks \rightarrow k' s'$ 的散射振幅，由 Born 级数给出：

$$\langle k' s' | V + V(\epsilon_k - H_0)^{-1} V + V(\epsilon_k - H_0)^{-1} V(\epsilon_k - H_0)^{-1} V + \dots | ks \rangle$$

一阶散射振幅：

$$\begin{aligned}\langle k' \pm | V | k \pm \rangle &= \pm J S_z \\ \langle k' \mp | V | k \pm \rangle &= J S_{\mp}\end{aligned}$$

Kondo 模型

二阶散射振幅：

$$\langle k' \pm | T^{(2)} | k \pm \rangle = J^2 \sum_{k''} \left[\frac{S_z^2 + S_{\mp} S_{\pm}}{\epsilon_k - \epsilon_{k''}} (1 - f_F(k'')) + \frac{S_z^2 + S_{\pm} S_{\mp}}{\epsilon_k - \epsilon_{k''}} f_F(k'') \right]$$
$$\langle k' \mp | T^{(2)} | k \pm \rangle = \pm J^2 \sum_{k''} \left[\frac{S_{\pm} S_z + S_z S_{\pm}}{\epsilon_k - \epsilon_{k''}} \right]$$

那么

$$\frac{1}{\tau(k)} = \frac{3n_i J^2 S(S+1)}{2e^2 \epsilon_F} (1 - 4Jg(\epsilon_k))$$

$$g(\epsilon) = \mathcal{P} \int \frac{f_F(\epsilon'_k)}{\epsilon'_k - \epsilon} \frac{dk'}{(2\pi)^3} = \mathcal{P} \int_{-D}^D \frac{\rho(\epsilon') f_F(\epsilon')}{\epsilon' - \epsilon} d\epsilon'$$

Kondo 模型

电导率和弛豫时间的关系为

$$\sigma = -\frac{4e^3}{3m} \int_{-D}^D \rho(\epsilon) \tau(\epsilon) \frac{\partial f_F(\epsilon)}{\partial \epsilon} d\epsilon$$

代入 $\tau(\epsilon)$ 的表达式，并且在 $kT \ll D$ 时展开。我们发现

$$\sigma(T) = \sigma_0 \left(1 - 4J\rho(\epsilon_F) \ln \frac{kT}{D} \right)$$

第二项是随着 T 的降低而增大的，这解释了低温电导率反常。

低温行为：Kondo 问题

- Kondo 的计算解释了低温金属电阻极小的行为。
- 但出现的 $\ln T$ 项在 $T \rightarrow 0$ 时是发散的。这就是 Kondo 问题： **$T \rightarrow 0$ 时 Kondo 模型的行为是什么？**
- 可以通过费曼图展开，计算更高阶的散射振幅修正。1965 年，Abrikosov 计算了高阶费曼图。例如，他得到的磁化率结果为：

$$\chi(T) = \frac{\mu^2 S(S+1)}{3kT} \left(1 - \frac{2J\rho_0}{1 + 2J\rho_0 \ln kT/D} + O(J^2) \right)$$

低温行为：Kondo 问题

这个结果在 $kT = De^{-1/2J\rho_0}$ 时是发散的。事实上，他计算得出的其他物理量也如此。比如热容为

$$C(T) = \frac{\pi^2 kS(S+1)(2J\rho_0)^4}{(1 + 2J\rho_0 \ln kT/D)^4} + \dots$$

这表明 Kondo 模型存在一个特征能量尺度（**Kondo 温度**）：

$$kT_K = De^{-1/2J\rho_0}$$

在这个能量尺度时，微扰论计算（级数求和）得出的物理量是发散的。所以**Kondo 问题的本质是非微扰效应**。

① Kondo 模型介绍和微扰论计算

② Kondo 模型的重整化群计算

③ 数值重整化群

④ 总结和参考文献

Anderson 的解析重整化群

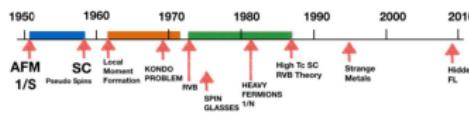


图 3: Philips Warren Anderson(1923-2020), 凝聚态物理的奠基人之一, 1977 年诺贝尔物理学奖得主。

重整化群简介

- 量子场论中的重整化群理论: Feynman, Schwinger, Tomonaga, 1948-1950, 为处理 QED 的紫外发散问题。
- 直接计算可观测量是发散的, 若引入截断能标 Λ , 则结果会依赖于人为的截断选取, 但真正的物理量应与之无关。
- 解决方案: 让裸参量随 Λ 跑动, 使可观测量与 Λ 无关。
- 此时重整化群研究的是裸参量随着截断能标的变化。
- 凝聚态物理中的重整化群理论: Kadanoff 1966 (实空间粗粒化), Anderson 1970, Wilson 1971 (动量空间粗粒化)
- 我们考虑的是低能量的激发, 所以需要积分掉高能量的自由度。此时低能耦合参数因为微扰论发生演化, 这一过程依赖于截断能标。
- 此时重整化群研究的是低能耦合参数随着截断能标的变化。

Anderson 的解析重整化群

- 温度的下降可以视为能标的减少，所以 Kondo 问题的关键在于能标减少时系统耦合参数的变化。
- 这种思路受到了超导理论中“赝势”的研究 (Morel and Anderson 1962, Schrieffer 1964)。
- 所以通过追踪低能哈密顿量在移除高能自由度时的演化，可以得出 Kondo 模型在低温下的行为。

Anderson 的解析重整化群

我们假设电子能量是对称的， $|E| \leq D$ 。我们每次积分掉 δD 能量内的高能自由度，即 $D - \delta D \leq |E| \leq D$ 的部分。
 重整化对哈密顿量的最低阶贡献由二阶微扰论给出：

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_{\epsilon_q \in [D-\delta D, D]} \frac{J s_a S_a \cdot J s_b S_b}{\epsilon_k - \epsilon_q} - \sum_{\epsilon_q \in [-D, -D+\delta D]} \frac{J s_b S_a \cdot J s_a S_b}{\epsilon_k - (-\epsilon_q)} \\ &\approx -\frac{J^2 \rho_0 \delta D}{D} s_a S_a s_b S_b + \frac{J^2 \rho_0 \delta D}{D} s_b S_a s_a S_b \\ &= \frac{2 J^2 \rho_0 \delta D}{D} \vec{s} \cdot \vec{S}\end{aligned}$$

其中假设电子和磁矩的自旋均为 $\frac{1}{2}$ 。从而重整化只会改变耦合系数 J 。

Anderson 的解析重整化群

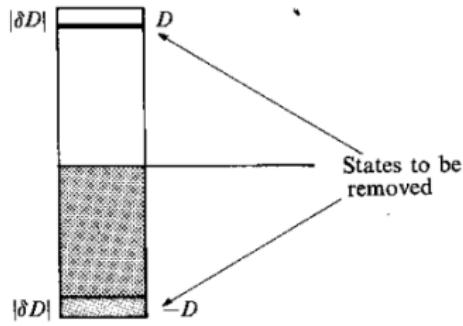


图 4: 移除高能自由度

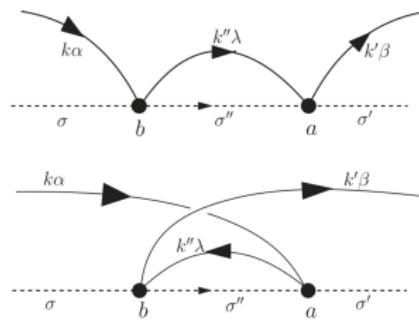


图 5: 重整化的两项

Anderson 的解析重整化群

那么随着能量尺度的变化， J 的变化为

$$\begin{aligned} J(D - \delta D) &= J(D) + \frac{2J^2\rho_0\delta D}{D} \\ \frac{\partial(J\rho)}{\partial \ln D} &= -2(J\rho)^2 \end{aligned}$$

解为（定义无量纲的耦合 $g = J\rho$ ）：

$$g(D) = \frac{g_0}{1 - 2g_0 \ln(D_0/D)}$$

对于铁磁耦合， $g_0 < 0$ ，随着 D 从 D_0 演化到 0， g 逐渐地变为 0。然而对于反铁磁耦合， $D = D_0 e^{-1/2g_0}$ 时 g 发散。事实上这正好是之前定义的 Kondo 温度。

Anderson 的解析重整化群

- 由于以上进行的是微扰型重整化，所以 RG 的发散严格对应了微扰论物理规律的失效。Anderson 的计算说明了，对于反铁磁耦合，微扰论只在 $D > T_K$ 时有效。在低温下 ($D \leq T_K$) 不适用，必须转向非微扰方法。
- 这和 QED 中的 Landau 极点类似。

Anderson 的解析重整化群

- Anderson 假设，如果在 $D < T_K$ 时进行非微扰型重整化，那么 $D \rightarrow 0$ 时耦合系数会发散。
- 所以如果在全能标范围内进行非微扰型重整化，那么存在两个 RG 不动点，分别是 $D = \infty, J = 0$ 和 $D = 0, J = \infty$ 。
- 注意 $D = T_K$ 不是不动点，它对应微扰到非微扰的 crossover。
- 对于 $J = 0$ ，磁矩和巡游电子完全解耦。
- 对于 $J = \infty$ ，磁矩和巡游电子形成自旋单态（Kondo 单态）以最小化能量，局域磁矩被完全屏蔽（Kondo 屏蔽）。这一结果很早就由 Yamada 和 Yoshida 的变分波函数揭示。

① Kondo 模型介绍和微扰论计算

② Kondo 模型的重整化群计算

③ 数值重整化群

④ 总结和参考文献

Wilson 的数值重整化群



The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*†

Kenneth G. Wilson

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14850

This review covers several topics involving renormalization group ideas. The solution of the s -wave Kondo Hamiltonian, describing a single magnetic impurity in a nonmagnetic metal, is explained in detail. See Secs. VII-IX. “Block spin” methods, applied to the two dimensional Ising model, are explained in Sec. VI. The first three sections give a relatively short review of basic renormalization group ideas, mainly in the context of critical phenomena. The relationship of the modern renormalization group to the older problems of divergences in statistical mechanics and field theory and field theoretic renormalization is discussed in Sec. IV. In Sec. V the special case of “marginal variables” is discussed in detail, along with the relationship of the modern renormalization group to its original formulation by Gell-Mann and Low and others.

图 6: Kenneth Geddes Wilson(1936-2013), 对重整化群的现代理论、格点量子色动力学和夸克禁闭理论做出了重要贡献, 1982 年诺贝尔物理学奖得主。

Wilson 的数值重整化群

考慮 Anderson 模型：

$$H = \sum_s \epsilon_d d_s^\dagger d_s + Un_{d\uparrow}n_{d\downarrow} + \sum_{k,s} \epsilon_k c_{ks}^\dagger c_{ks} + \sum_{k,s} V(d_s^\dagger c_{ks} + c_{ks}^\dagger d_s)$$

d 为杂质原子轨道的算符。

- 这一哈密顿量在 $U \gg \epsilon_d$ 极限下的有效理论为 Kondo 模型，其反铁磁耦合系数为 $J = \frac{V^2}{U}$ 。
 - 其微扰型重整化群和 Kondo 模型相同。
 - 杂化态密度定义为 $\Delta(\epsilon) = \pi V^2 \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k)$ 。

Wilson 的数值重整化群

- Wilson 注意到, 由于 $\ln D$ 系数, 对于不同 n ,
 $\Lambda^{-n} < |E| < \Lambda^{-n+1}$ 能量段内的电子态对重整化流的贡献近似相等。
- 所以可以对巡游电子进行对数网格的划分:

$$I_n^+ = (\Lambda^{-n}, \Lambda^{-n+1}), \quad I_n^- = (-\Lambda^{-n+1}, -\Lambda^{-n})$$

- 我们近似认为, I_n^\pm 区间内的电子态能够用单个状态 $|\pm n\rangle$ 代表, 其能量为 ξ_n^\pm , 和杂质的耦合为 γ_n^\pm 。
- 最简单的取法为

$$(\gamma_n^\pm)^2 = \int_{I_n^\pm} \Delta(\epsilon) d\epsilon \quad \xi_n^\pm = \frac{1}{(\gamma_n^\pm)^2} \int_{I_n^\pm} \epsilon \Delta(\epsilon) d\epsilon$$

NRG：基本理论

若将 $\Delta(\epsilon)$ 取作定值，那么

$$\xi_n^\pm = \pm \frac{1}{2} \Lambda^{-n} (1 + \Lambda^{-1}) \quad (\gamma_n^\pm)^2 = \Lambda^{-n} (1 - \Lambda^{-1})$$

则系统的哈密顿量可以写成离散形式：

$$\begin{aligned} H = & H_{\text{loc}}(d_s, d_s^\dagger) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_s (\xi_n^+ c_{n,s}^{+\dagger} c_{n,s}^+ + \xi_n^- c_{n,s}^{-\dagger} c_{n,s}^-) \\ & + \sum_s \left[d_s^\dagger \left(\sum_{\pm n} \gamma_n^\pm c_{n,s}^\pm \right) + \left(\sum_{\pm n} \gamma_n^\pm c_{n,s}^{\pm\dagger} \right) d_s \right] \end{aligned}$$

NRG：基本理论

我们可以通过 **Lanczos 算法** 将其映射到链状的哈密顿量。

Lanczos 算法：对于厄米矩阵 M 和初始归一化状态 v_1 ，令

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 - \sum_{i=1}^n v_i v_i^\dagger\right) M v_n, \quad v_{n+1} = \frac{u_n}{|u_n|} \\ \alpha_n &= v_n^\dagger M v_n, \quad \beta_n = |u_n| \end{aligned}$$

则 v_n 满足方程

$$\begin{aligned} Mv_1 &= \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 \\ Mv_n &= \beta_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n + \beta_n v_{n+1} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

NRG: 基本理论

所以哈密顿量可以写成“三对角矩阵”的形式。

$H_{hyb} + H_{band}$ (ignoring spin index)

$$= \begin{pmatrix} \hat{d} & \hat{a}_{+1} & \dots & \hat{a}_{+N_2} & \hat{a}_{-1} & \dots & \hat{a}_{-N_2} \\ \hat{a}_{-1}^{\dagger} & 0 & (\gamma_{+1} & \dots & \gamma_{+N_2} & \gamma_{-1} & \dots & \gamma_{-N_2}) \\ \vdots & -1 & - & - & - & - & - & - \\ \hat{a}_{+1}^{\dagger} & \gamma_{+1} & \gamma_{+1} & \ddots & & & & \\ \vdots & 1 & & & \ddots & & & \\ \hat{a}_{+N_2}^{\dagger} & \gamma_{+N_2} & & \gamma_{+N_2} & \ddots & & & \\ \hat{a}_{-1}^{\dagger} & \gamma_{-1} & & & \gamma_{-1} & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ \hat{a}_{-N_2}^{\dagger} & \gamma_{-N_2} & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{tridiagonalize} \quad (\text{via Lanczos!})$$

$$= \begin{pmatrix} d & \hat{f}_0 & \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & \dots & f_N \\ \hat{f}_0^{\dagger} & \varepsilon_d & t_{imp} & & & \\ \hat{f}_1^{\dagger} & t_{imp} & \varepsilon_0 & t_0 & & \\ \hat{f}_2^{\dagger} & & t_0 & \varepsilon_1 & t_1 & \\ \vdots & & & t_1 & \varepsilon_2 & \\ \hat{f}_N^{\dagger} & & & & & \varepsilon_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \sum_s t_{imp} (\hat{d}_s \hat{f}_s^{\dagger} + h.c.) + \sum_{\ell=0}^N \sum_s [t_{\ell} (\hat{f}_{\ell s}^{\dagger} \hat{f}_{\ell+1 s} + h.c.) + \varepsilon_{\ell} \hat{f}_{\ell s}^{\dagger} \hat{f}_{\ell s}] \equiv H_{chain} \quad (2)$$

图 7: 使用 Lanczos 算法近似对角化

NRG：基本理论

这一哈密顿量正好对应于链状结构的紧束缚哈密顿量。跃迁和 on-site 能量分别为 t_l 和 ϵ_l , 第一个 site 和杂质以 t_{imp} 耦合。对于我们选取的 ξ_n^\pm 和 γ_n^\pm , Lanczos 算法的结果可以解析计算:

$$\epsilon_l = 0$$

$$t_l = \Lambda^{-l/2} \frac{(1 + \Lambda^{-1})(1 - \Lambda^{-l-1})}{2\sqrt{(1 - \Lambda^{-2l-1})(1 - \Lambda^{-2l-3})}}$$

这说明跃迁能量是指数衰减的，所以随着链长的增加，加入的 site 影响越来越小。这是 NRG 能成立的决定性因素之一。

NRG: 基本理论

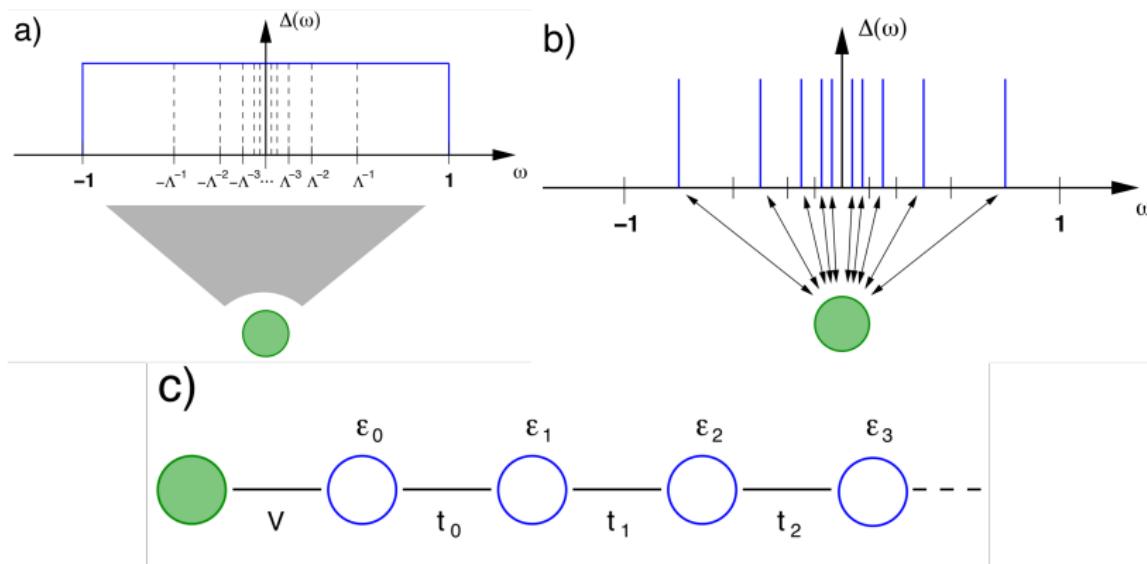


图 8: NRG 的思路: 连续导带 \rightarrow 离散能级 \rightarrow 链状结构

NRG：具体算法

- 求解本征值可以使用迭代法。在前 L 个 site 对角化结果的基础上，加入第 $L+1$ 个 site 作为基，重新对角化。
- 由于跃迁能量指数衰减，最终结果几乎不受截断长度的影响。但是随着 L 的增加，希尔伯特空间维度会按 2^L 指数增长，使对角化困难。
- Wilson 认为，每次增加一个 site 并且对角化之后，**我们都可以只取最低的 N_C 个能量本征值**，而去除掉其他所有高能量状态。这样矩阵维度不会发散。
- 高能量状态对最低几个能量状态影响按照 $\frac{1}{E - E_0}$ 的方式衰减，所以这样的截断是合理的。

NRG：具体算法

对于链长为 L , 最小的能级劈裂 $\sim \Lambda^{-(L-1)/2}$ 。为保持其量级不变, 每加入一个态, 都要对原始的哈密顿量作 scaling, 同时将基态能量固定为 0:

$$\tilde{H}_L = \Lambda^{(L-1)/2} (H_L - E_L^{(0)})$$

那么

$$\tilde{H}_{L+1} = \Lambda^{1/2} \tilde{H}_L + \sum_s (\Lambda^{L/2} t_L) (f_{Ls}^\dagger f_{L+1,s} + \text{h.c.}) - \delta E_L^{(0)}$$

这相当于对哈密顿量的重整化, 我们要研究的是其不动点。
能标 D 的不动点对应 $\Lambda^{-L/2} \approx D$, 也即 $L \approx -2 \ln D$ 的哈密顿量。所以能标为 0 的不动点对应 $L = \infty$ 的哈密顿量。

NRG：具体算法

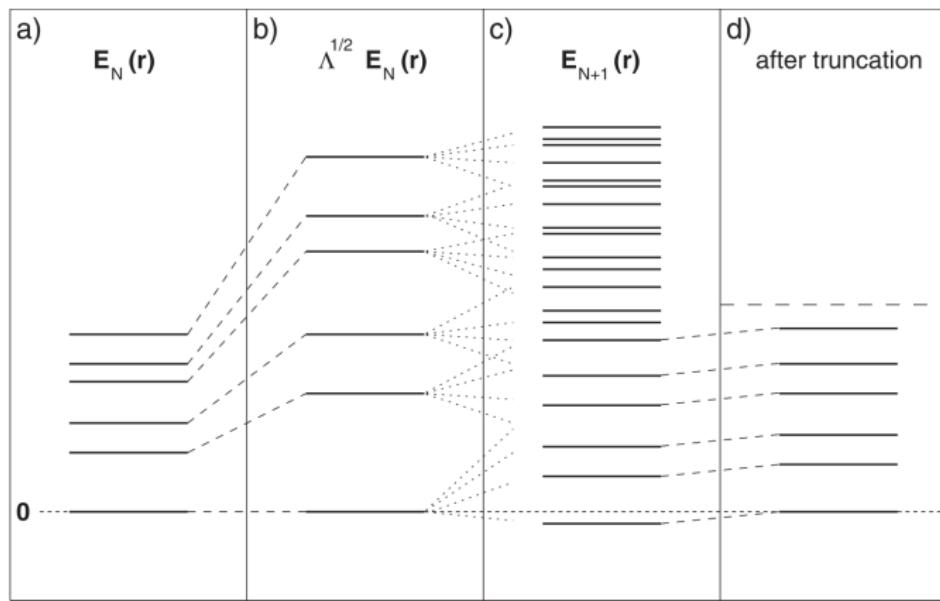


图 9: NRG 的过程: 对角化 \rightarrow 重新标度 \rightarrow 加入新的基矢 \rightarrow 截断

NRG：具体算法

Anderson 假设的两个不动点可以和自由电子建立联系：

- 对于 $J = 0$ 不动点，相当于链长为 L 的自由电子哈密顿量。
- 对于 $J = \infty$ 不动点，第一个 site 被完全束缚到杂质上，所以相当于链长为 $L - 1$ 的自由电子哈密顿量。

Wilson 计算得出链长为 L 的自由电子能量本征值为（取 $\Lambda = 2$ ）

| | | | | | |
|--------------|---|-------|-------|-----|--------|
| ϵ_n | 0 | 1.297 | 2.827 | ... | L 偶数 |
| | | 0.656 | 1.976 | ... | L 奇数 |

所以两种哈密顿量的本征值有本质差别，我们可以通过是否存在零能模式判断系统处于哪个不动点。

NRG：结果

对于偶数链长， L 增加时第一激发态能量的演化为

| | | | | | |
|-------|--------|-------|-------|--------|--------|
| L | 20 | 108 | 120 | 130 | 180 |
| E_0 | 0.0314 | 0.313 | 0.363 | 0.6541 | 0.6555 |

- 所以 $L = 0$ (即能标 $D \rightarrow \infty$) 时对应 $J = 0$ 不动点，而 $L = \infty$ (即能标 $D = 0$) 对应 $J = \infty$ 不动点。
- 这一结果完全解决了 Kondo 问题：Kondo 模型在 $T = 0$ 的基态是局域磁矩和电子自旋形成的自旋单态。
- 演化中只有两个不动点，这说明 T_K 只是不动点之间的 crossover。

NRG: 结果

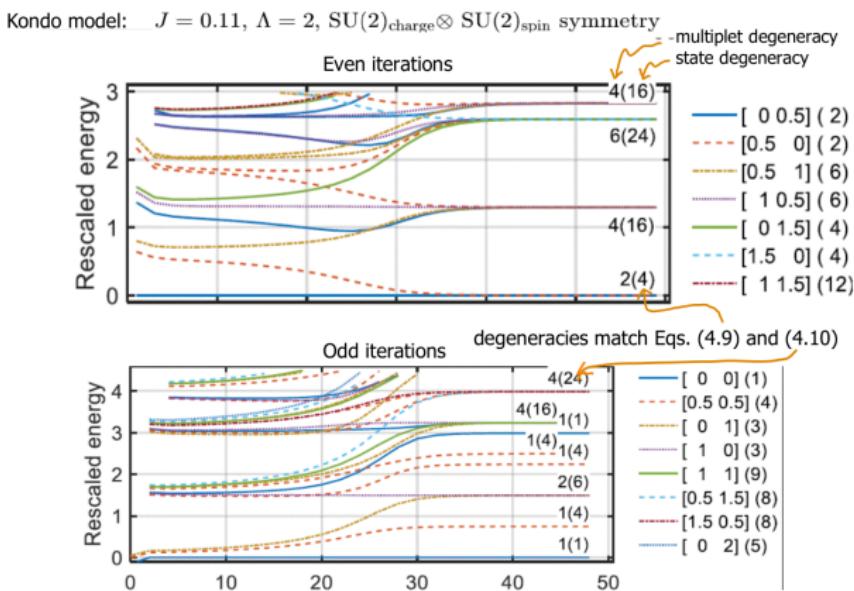


图 10: NRG 的能量演化, 链长分别为奇数和偶数

NRG: 结果

Kondo 模型只有两个不动点, T_K 是它们之间的 crossover。

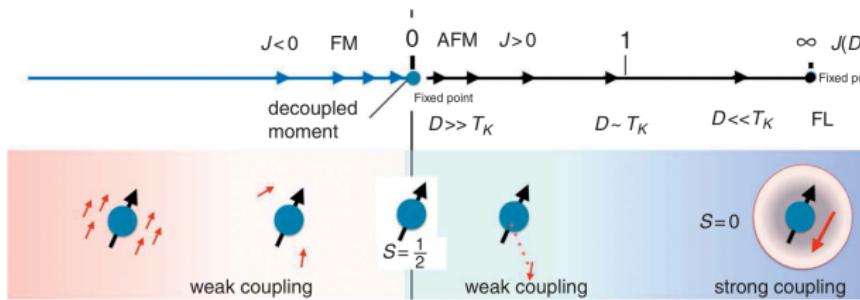


图 11: Kondo 模型的重整化群流

Nozieres 发现, 在强耦合不动点附近, 准粒子激发的行为仍然是费米液体, 其谱函数称作 **Kondo 共振**。

NRG：实现和结果

NRG 还可以计算磁化率、热容、谱函数等物理量（需要近似）：

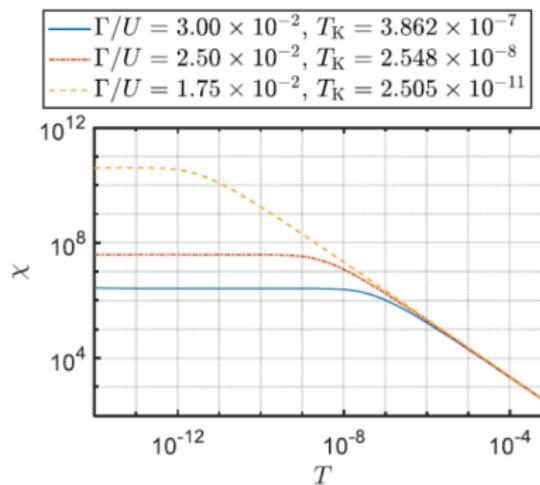


图 12：磁化率 χ ，注意 $T = T_K$ 并不存在发散，而是局域磁矩和传导电子两种行为的 crossover

NRG：实现和结果

NRG 还可以计算磁化率、热容、谱函数等物理量（需要近似）：

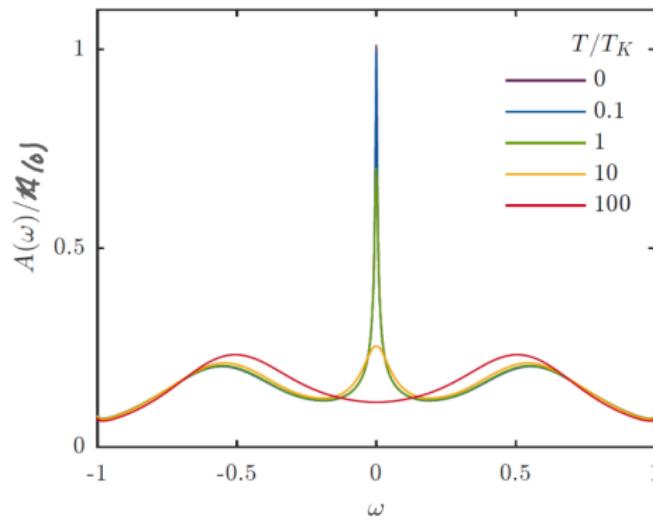


图 13: 谱函数，尖峰即为 Kondo 共振

NRG：总结

NRG 将复杂的 Kondo 哈密顿量映射到一维链状紧束缚模型，将能标的减少映射到几何上链长的增加。这样可以采用简单的迭代对角化的方法模拟非微扰的重整化群。这也是为何 Wilson 将其称作“数值重整化群”。

为何 NRG 能够很好处理 Kondo 模型？

- Kondo 模型是“零维关联”的（巡游电子无相互作用）。
- Wilson 链表象是高度非纠缠的，每个格点只和相邻两个格点相互作用，而且相互作用是空间衰减的。相比之下，实空间和动量空间表象都会引入长程的相互作用。
- 也正因如此，NRG 的可扩展性不强。巡游电子任意弱的相互作用在链表象中都是非局域的，所以对角化变得困难。
- 但 NRG 的思路可以推广到其他问题中。

- ① Kondo 模型介绍和微扰论计算
- ② Kondo 模型的重整化群计算
- ③ 数值重整化群
- ④ 总结和参考文献

Kondo 模型的历史

- 30-40 年代，实验上发现了金属电阻率的低温反常。
- 60 年代，Kondo 从理论上解释了这一现象。
- 70 年代，Wilson 使用 NRG 解决了 Kondo 问题。
- 80 年代，Andrei 和 Vigman 使用 Bethe ansatz 发现了 Kondo 模型的解析解。解析结果和数值结果完全吻合。
- 90 年代，Affleck 发现了由于可积性，多通道 Kondo 模型可以用边界共形场论（boundary CFT）描述。
- Kondo 模型是凝聚态强关联领域中解决得最彻底的问题。

Kondo 模型的扩展

- 在重费米子材料中，局域磁矩周期性排列，从而出现了更加复杂的性质，如非常规超导。其中很多物性还没完全理解。
- Kondo 模型等杂质问题还启发了动力学平均场理论 (DMFT) 的研究。DMFT 可以将强关联问题转换为自洽的杂质问题，它是强关联第一性原理计算的基础方法。
- 半导体、量子点输运的很多性质也可以用 Kondo 模型理解。

参考文献

- K. G. Wilson, The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem, Rev. Mod. Phys. 47, 773 (1975)
- A. C. Hewson, The Kondo Problem to Heavy Fermions, 1993
- R. Bulla, Numerical renormalization group method for quantum impurity systems, Rev. Mod. Phys. 80, 395(2008)
- P. Coleman, Introduction to Many-Body Physics, 2015, Ch.16
- J. von Delft, Tensor-Network Based Numerical Methods, 2021

Thanks!