

Bethe Ansatz

平衡态统计物理讨论班

林沛晗

北京大学物理学院

2025 年 4 月 28 日

- ① 历史回顾和动机
- ② 一维 Heisenberg 链的严格解
- ③ Bethe ansatz 和数学物理
- ④ 总结

- ① 历史回顾和动机
- ② 一维 Heisenberg 链的严格解
- ③ Bethe ansatz 和数学物理
- ④ 总结

Feynman's Blackboard

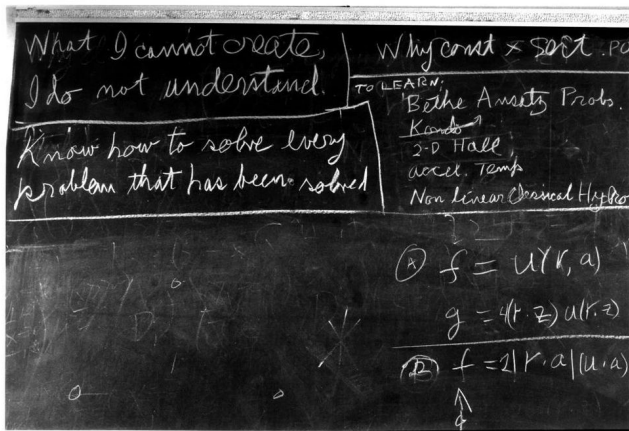


图 1: Feynman 去世前黑板上 "To Learn" 部分第一条就是 Bethe ansatz。

Hans Bethe

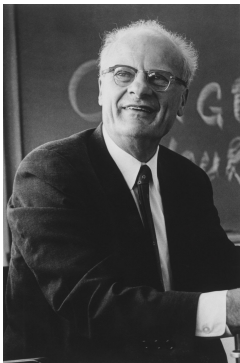


图 2: Hans Bethe (1906-2005), 德裔美籍物理学家, 1967 年因恒星的碳氮氧循环获诺贝尔物理学奖, 除此之外在物理学的各个领域都做出了重要贡献。被他的学生 Dyson 称为“20 世纪最伟大的问题解决者”。

历史回顾

- Ansatz (拟设): 来自德语, 意为“初次尝试”。
- 先通过物理直觉或数学观察假设答案的形式, 再证明答案是正确的。
- 一般只能找到特解, 但是对于很多问题特解已经足够。
- 例: 待定系数法、分离变量法、变分法等。

1931 年, Bethe 通过拟设多体波函数的形式, 解决了一维 Heisenberg 链的本征态问题。他假设的波函数形式也被称作 Bethe ansatz。

历史回顾

Bethe ansatz 的一些应用：

- 一维自旋链 (Bethe 1931, Orbach 1958, Yang and Yang 1966)
- 一维 Hubbard 模型 (Lieb and Wu 1968)
- Kondo 模型和 Anderson 模型 (Andrei 1980, Vigman 1980)
- 一维费米子/玻色子相互作用气体 (Lieb and Liniger 1963, Yang and Yang 1967, Yang and Yang 1969)
- 以及很多能够映射到一维系统的模型，如可积 AdS/CFT¹

可以看到，Bethe ansatz 的适用范围主要是一维系统。更本质的限制是可积性，即 S 矩阵满足 Yang-Baxter 方程。

¹<https://www.zhihu.com/question/28739278/answer/137003737>

动机

为何 Bethe ansatz 如此重要？

- 对于大部分多体系统，解析解极为困难。所以一维情况下由 Bethe ansatz 给出的解析解极为宝贵。
- 在一维问题中由于经典的或量子的涨落，平均场理论等近似通常不适用。此时解析解可以用于验证不同近似的正确性，也可以启发对高维的模型进行正确的近似。

- ① 历史回顾和动机
- ② 一维 Heisenberg 链的严格解
- ③ Bethe ansatz 和数学物理
- ④ 总结

本征态解

考虑一维自旋 $\frac{1}{2}$ 的 Heisenberg 链，链长为 L ，哈密顿量为（取周期性边界条件）：

$$H = J \sum_i \left[S_i^z S_{i+1}^z + \frac{1}{2} (S_{j+1}^+ S_j^- + S_{j+1}^- S_j^+) \right] \quad (1)$$

记完全磁化的状态为 $|\text{FM}\rangle$ 。其能量本征值为 $E_0 = \frac{LJ}{4}$ 。²
一般的状态可以写作相对 $|\text{FM}\rangle$ 的 N 个自旋翻转。定义波函数 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ，对应的自旋态为

$$|\psi\rangle = \sum_{x_1, \dots, x_N=1}^L \psi(x_1, \dots, x_N) S_{x_1}^- S_{x_2}^- \cdots S_{x_N}^- |\text{FM}\rangle \quad (2)$$

² $|\text{FM}\rangle$ 是本征态，但只对 $J < 0$ 为基态。

本征态解

首先考虑 $N = 1$ 的情况，或 $\psi(x)$ 。将 H 作用于其上结果为

$$E\psi(x) = H\psi(x) = E_0\psi(x) - J\psi(x) + \frac{J}{2}(\psi(x-1) + \psi(x+1)) \quad (3)$$

假设 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx}$ ，其中周期性边界条件要求 $k = \frac{2\pi n}{L}$ ，那么

$$E = J(\cos k - 1 + \frac{L}{4})。$$

本征态解

其次考虑 $N = 2$ ，此时在 $|x_1 - x_2| \gg 1$ 时，波函数形式为平面波。但当两个“粒子”互相接近时，它们会发生碰撞和动量交换。在这一过程中“能量”和“动量”守恒，所以要求 $k'_1 = k_1, k'_2 = k_2$ 或 $k'_1 = k_2, k'_2 = k_1$ 。³ 可以假设

$$\psi(x_1, x_2) = \alpha e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + \beta e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)} \quad (4)$$

周期性边界条件要求 $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1 + L)$ 。³ 所以

$$\frac{\alpha}{\beta} = e^{ik_1 L} \quad k_1 + k_2 = \frac{2\pi n}{L} \quad (5)$$

³请注意，只有一维系统有这样简洁的条件！

本征态解

将 H 作用在 $\psi(x_1, x_2)$ 上。当 $|x_1 - x_2| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} H\psi(x_1, x_2) &= (E_0 - 2J)\psi(x_1, x_2) \\ &+ \frac{J}{2}(\psi(x_1, x_2 + 1) + \psi(x_1, x_2 - 1) + \psi(x_1 + 1, x_2) + \psi(x_1 - 1, x_2)) \end{aligned} \quad (6)$$

而 $|x_1 - x_2| = 1$ 时, 某些自旋翻转是不可能的。可以验证

$$H\psi(x, x+1) = (E_0 - J)\psi(x, x+1) + \frac{J}{2}(\psi(x-1, x+1) + \psi(x, x+2)) \quad (7)$$

将 $x_1 = x, x_2 = x + 1$ 直接代入 (6) 并和 (7) 比较, 可以发现

$$J\psi(x, x+1) = \frac{J}{2}(\psi(x, x) + \psi(x+1, x+1)) \quad (8)$$

本征态解

所以 $N = 2$ 的解为

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= -\frac{e^{i(k_1-k_2)/2} - \cos(k_1 + k_2)/2}{e^{-i(k_1-k_2)/2} - \cos(k_1 + k_2)/2} \\ &= -e^{i\theta(k_1, k_2)}\end{aligned}\tag{9}$$
$$Lk_1 = 2\pi\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \theta(k_1, k_2)$$
$$Lk_2 = 2\pi\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \theta(k_2, k_1)$$

其中 $\theta(k_1, k_2) = -\theta(k_2, k_1)$, 可以理解为散射相移。虽然波函数是平面波的形式, 但两个“粒子”的动量是关联的。

本征态解

接下来考虑一般的 N 。我们直接假设波函数为

$$\psi = \sum_P A_P \exp \left[i \sum_{j=1}^N k_{Pj} x_j \right] \quad (10)$$

其中 P 为 N 阶置换群的元素。和 $N=2$ 类似，要求

$$2\psi(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots) = \psi(\dots, x_k+1, x_{k+1}, \dots) + \psi(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \quad (11)$$

对于每个 P ，都可定义 $P' = P_{k,k+1}P$ 。那么

$$\begin{aligned} \psi(\dots, x_k + m, x_{k+1} + n, \dots) &= \sum_P' e^{i \sum_{j \neq k, k+1} k_{Pj} x_j} e^{i(k_{Pk} + k_{P'k})x_k} \\ &\quad \cdot (A_P e^{i(mk_{Pk} + nk_{P'k})} + A_{P'} e^{i(mk_{P'k} + nk_{Pk})}) \end{aligned} \quad (12)$$

其中求和遍及所有 $Pk < P(k+1)$ 的置换。

本征态解

那么

$$2(A_P e^{ik_{P'k}} + A_{P'} e^{ik_{Pk}}) = (A_P + A_{P'})(1 + e^{i(k_{Pk} + k_{P'k})})$$

$$\frac{A_P}{A_{P'}} = -e^{i\theta(k_{Pk}, k_{P'k})} \quad (13)$$

其中 θ 和 (9) 定义相同。这是对 (9) 的推广。

周期性条件要求 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_2, \dots, x_N, x_1 + L)$ 。定义 P'' 使 $(PN, P1, \dots, P(N-1)) = (P''1, P''2, \dots, P''N)$, 则

$$\frac{A_P}{A_{P''}} e^{ik_{P''1}L} = 1 \quad (14)$$

P'' 可通过 P 进行 $N-1$ 次置换得到。应用 (13), 得知

$$(-1)^{N-1} \exp(i \sum_{j=1}^N \theta(k_j, k_k)) e^{ik_k L} = 1 \quad (15)$$

本征态解

也即 (I_i 为整数当 N 为奇数, 为半整数当 N 为偶数):

$$Lk_i = 2\pi I_i + \sum_j \theta(k_i, k_j) \quad (16)$$

对应的总能量为

$$E = \frac{JL}{4} - J \sum_{i=1}^N (1 - \cos k_i) \quad (17)$$

总动量为

$$P = \sum_{i=1}^N k_i \quad (18)$$

基态与激发态

基态应当最小化总能量 E 。

- 对于铁磁耦合, $J < 0$, 所以要求所有 $1 - \cos k_i = 0$ (即 $k_i = 0$), 且 $N = 0$ (无自旋翻转)。这说明 $|\text{FM}\rangle$ 为铁磁耦合的基态。
- 对于反铁磁耦合, 应有 $k_i = \pi$, 且 N 取极大值。但 (16) 给出的约束使问题复杂化。严格结果由杨振宁和 Chen-Ping Yang 给出, 他们证明了基态有 $N = \frac{L}{2}$, 没有净磁矩。

基态与激发态

下面通过具体计算得出基态和激发态的性质。令 $\lambda = \frac{1}{2} \cot \frac{k}{2}$, 那么

$$2\pi I'_i = 2L \arctan(2\lambda_i) - 2 \sum_j \arctan(\lambda_i - \lambda_j) \quad (19)$$

定义 $\text{RHS} = \Phi(\lambda_i)$, 那么 $\Phi(\lambda_i) = 2\pi I'_i$ 。由于 $-\Phi_0 < \Phi < \Phi_0$ (其中 $\Phi_0 = \pi(L - N)$), 所以有 $L - N$ 个根。我们应取其中的 N 个根作为真实粒子的参数。

对于反铁磁基态, $N = \frac{L}{2}$, 所以根的选择只有一种方案。在热力学极限下, 可定义根的密度⁴:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\lambda} \quad (20)$$

⁴相当于 $1/\Delta\lambda$

基态与激发态

那么将求和连续化为积分：

$$\Phi(\lambda) = 2L \arctan(2\lambda) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \rho(\lambda') \arctan(\lambda - \lambda') \quad (21)$$

对其求导即为 $\rho(\lambda)$ 。所以 $\rho(\lambda)$ 满足卷积积分方程：

$$2\pi\rho(\lambda) = \frac{4L}{1+4\lambda^2} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{1+(\lambda-\lambda')^2} \quad (22)$$

其解为 $\rho(\lambda) = \frac{L}{2 \cosh(\pi\lambda)}$ ，是中心位于 $\lambda = 0$ ($k = \pi$) 的有限展宽函数。这表明基态仍然接近 Neel 态，但存在量子涨落。

基态与激发态

反铁磁的基态能量 (17) 为

$$\begin{aligned} E &= \frac{LJ}{4} - J \sum_j (1 - \cos k_j) \\ &= \frac{LJ}{4} - J \sum_j \frac{2}{1 + 4\lambda_j} \\ &= \frac{LJ}{4} - J \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) \frac{2}{1 + 4\lambda} \\ &= JL \left(\frac{1}{4} - \ln 2 \right) \approx -0.443 JL \end{aligned} \tag{23}$$

这一结果小于经典的 Neel 态能量 $E_N = -\frac{JL}{4}$, 展示了量子涨落的作用。

基态与激发态

最后考虑激发态的性质。对于 $N < \frac{L}{2}$ ，必然有根不出现在 (19) 的求和之中。类似地定义其密度为 $\rho_h(\lambda)$ ，那么

$$2\pi\rho(\lambda) = \frac{4L}{1+4\lambda^2} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{\rho(\lambda') - \rho_h(\lambda')}{1 + (\lambda - \lambda')^2} \quad (24)$$

解为

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \rho_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \rho_h(\lambda') \phi(\lambda - \lambda') \\ \rho_0(\lambda) &= \frac{L}{2 \cosh(\pi\lambda)} \quad \phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-i\lambda\xi}}{1 + e^{|\xi|}} \end{aligned} \quad (25)$$

基态与激发态

系统的激发能量为

$$\Delta E = -J \int_{-\infty}^{\infty} (\rho - \rho_0 - \rho_h) \frac{2}{1 + 4\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(\lambda) \epsilon(\lambda) d\lambda \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' (\delta(\lambda - \lambda') - \phi(\lambda - \lambda')) \cdot \frac{2J}{1 + 4\lambda'^2} \\ &= \frac{\pi J}{2 \cosh \pi \lambda} \end{aligned} \quad (27)$$

$\epsilon(\lambda)$ 即为单粒子激发能量。类似地，单粒子激发动量为

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' (\delta(\lambda - \lambda') - \phi(\lambda - \lambda')) 2 \arctan(2\lambda') \\ &= \arctan(\sinh \pi \lambda) \end{aligned} \quad (28)$$

基态与激发态

那么单粒子激发谱为（称作**自旋子**(spinon) 谱）:

$$\epsilon = \frac{\pi J}{2} \cos q \quad (29)$$

- 由于 $\epsilon > 0$, 要求 $|q| < \frac{\pi}{2}$, 所以布里渊区被折叠。其物理意义见图3。
- 激发谱是**无能隙**(gapless) 的。事实上这是半整数自旋 Heisenberg 模型的一般特征 (Haldane 猜想)。

我们熟知的单自旋翻转实际上为两个 spinon 的叠加（称为磁振子 (magnon)）。其物理意义见图4。

基态与激发态

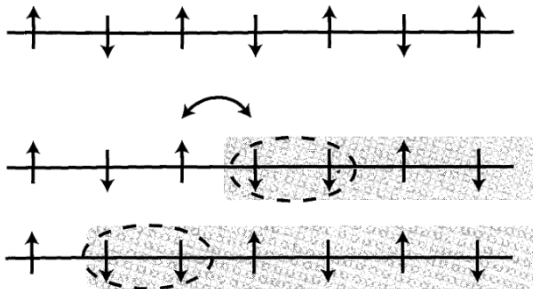


图 3: spinon 激发的示意图，可将其理解为畴壁的形成。自旋翻转哈密顿量使畴壁一次性移动两个晶格，即晶格周期变为 2。

基态与激发态

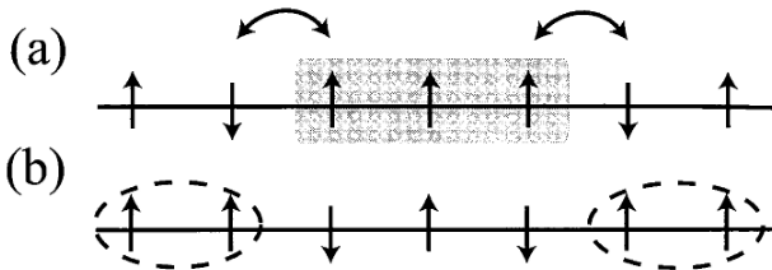


图 4: magnon 激发的示意图。一个翻转的自旋变为相反方向传播的两个 spinon。

第二部分总结

在此部分中，我们使用了 Bethe ansatz 求解了一维 Heisenberg 链的**所有本征态**。

- Bethe ansatz 的波函数： $\psi = \sum_P A_P \exp(i \sum_j k_{Pj} x_j)$ 。
- 本征态由 N 个准粒子动量标记。它们满足
$$Lk_i = 2\pi I_i + \sum_j \theta(k_i, k_j)。$$
- 对于铁磁耦合，基态为完全极化态。
- 对于反铁磁耦合，基态净磁矩仍为 0，但具体状态为一系列自旋翻转的叠加。
- 反铁磁耦合的元激发是 spinon，对应畴壁的形成。⁵

⁵在高维问题中也存在 spinon，但和现在讨论的概念不同。

见<https://www.zhihu.com/question/473363778/answer/2059700369>。

- ① 历史回顾和动机
- ② 一维 Heisenberg 链的严格解
- ③ Bethe ansatz 和数学物理
- ④ 总结

Lyudvig Faddeev

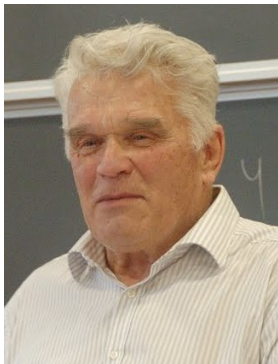


图 5: Lyudvig Faddeev (1934-2017), 苏联数学物理学家, 列宁格勒学派的领导者。贡献包括非阿贝尔规范场的量子化 (Faddeev-Popov Ghost), 三体问题的 Faddeev 方程, 以及下面将会提到的“量子逆散射方法”。

Bethe ansatz 和量子可积性

- 经典可积：对于 n 自由度系统，存在 $2n$ 个独立的物理量⁶，他们之间泊松括号为 0，且和哈密顿量的泊松括号也为 0。
- 量子可积：存在无穷多个⁷独立的物理量，它们之间互相对易，且和哈密顿量对易。
- 接下来将会看到，Bethe ansatz 满足 Yang-Baxter 方程，从而可以通过“量子逆散射方法”构造无穷多个独立的守恒量。⁸所以，如果系统可以通过 Bethe ansatz 求解，那么它一定是量子可积的。

⁶定义为 $dQ_1 \wedge dQ_2 \cdots \wedge dQ_{2n} = 0$ 。

⁷在热力学极限下。

⁸虽然这些守恒量可能是高度非局域的。

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

Yang-Baxter 方程 (YBE): 两体散射矩阵元满足的关系

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (30)$$

很显然, 对于 Bethe ansatz, $\frac{\alpha}{\beta} = -e^{i\theta(k_1, k_2)}$ 满足 Yang-Baxter 条件。

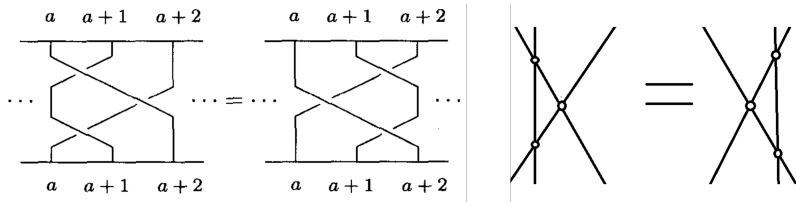


图 6: YBE 的图示: (左) 纽结理论 (右) 更简洁的形式

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

定义透射矩阵（对应被 L 个粒子散射的振幅）：

$$T_a = R_{a,L} R_{a,L-1} \cdots R_{a,2} R_{a,1} \quad (31)$$

对于满足 YBE 的散射矩阵，可以证明 RTT 关系：

$$R_{ab} T_a T_b = T_b T_a R_{ab} \quad (32)$$

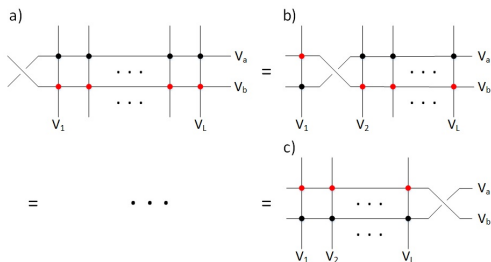


图 7: RTT 关系的几何说明

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

应用这一性质，定义 $t(\lambda) = \text{Tr}_a T_a(\lambda)$ ⁹。由于 $R_{ab}(\lambda - \lambda') T_a(\lambda) T_b(\lambda') R_{ab}^{-1}(\lambda - \lambda') = T_b(\lambda') T_a(\lambda)$ ，则

$$[t(\lambda), t(\lambda')] = 0 \quad (33)$$

在 $\lambda = 0$ 附近展开 $\ln t(\lambda)$ ：

$$\ln t(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \lambda^n \quad (34)$$

则 $[J_n, J_m] = 0$ 。事实上， J_1 即为哈密顿量。所以 $J_{n>1}$ 为更高阶的守恒量。这一序列理论上可以无穷延伸，这样就找到了几乎无穷多个守恒量。它们实际上是无穷维 Yangian 代数的中心荷。

⁹此处 λ 为动量等量子数。

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

- 物理上, Yang-Baxter 方程本质要求 **多个准粒子的散射矩阵能够约化为两体散射的乘积**。
- 对于全同粒子, 两体散射前后只会 **互换动量或保持动量不变**, 所以系统的波函数可以由参数 k_1, \dots, k_N 描述。
- 这样至少可以构造 N 个独立的守恒量, 其本征值为

$$I_n = \sum_{j=1}^N k_j^n \quad 1 \leq n \leq N \quad (35)$$

- 那么系统一定是可积的。

使用 Yang-Baxter 方程构造守恒量的方法被 Faddeev, Takhtajyan 和 Reshetikhin 等人发展为“量子逆散射方法”(Quantum inverse scattering method)。使用这一形式可以很方便地进行 Bethe ansatz 计算 (即代数 Bethe ansatz)。

- ① 历史回顾和动机
- ② 一维 Heisenberg 链的严格解
- ③ Bethe ansatz 和数学物理
- ④ 总结

总结

- Bethe ansatz 作为一维系统严格解的重要出发点，是数学物理和实验观测的桥梁。
- Bethe ansatz 的本质是可积性，而可积系统大多数是一维系统。另一方面，理论上的确存在高维的可积系统，但通常不对应真实的物理模型。这也是 Bethe ansatz 扩展到高维模型的主要困难。

参考文献：

- T. Giamarchi, Quantum Physics in One Dimension, 2003
- L. D. Faddeev, Algebraic Aspects of Bethe-Ansatz, 1994
- D. R. M. Rincon, More About the Yang Baxter Equation, 2013

Thanks!