Контрольная работа №1 «Числовые ряды»

Первый семестр 2024/25 учебного года

Задача 1. (2 балла) Найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{4^n - 3^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{5}{n(n-1)}$.

Задача 2. (6 баллов) Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)! \cdot n!}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n+1}{2n+3}\right)^{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+7+2n^5}{5n^2+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cos^2(n+1)}{4n^4+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2+4)}{n^7+9}$.

Задача 3. (3 балла) Исследовать данные ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3n}{5n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3}{\ln^{-2} n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2\sin^2(5n^2+1)}{5n^2+1}$.

Задача 4. (1 балл) Оценить сумму ряда

$$1 + 2 - 3 + 4 - \frac{2}{25} + \frac{2}{36} - \frac{2}{49} + \frac{2}{64} - \frac{2}{81} + \frac{2}{100} - \frac{2}{121} + \ldots$$

Задача 5. (1 балл) Выбрать верный ответ и обосновать его.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

1) сходится; 2) расходится; 3) нуждается в дополнительном исследовании.

Задача 6. (1 балл) Выбрать верный ответ и обосновать его.

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, где $a_n \geqslant 0$ при всех натуральных n, сходится, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

1) сходится; 2) расходится; 3) нуждается в дополнительном исследовании.

Задача 7. (1 балл) Выбрать верный ответ и обосновать его.

Каким бы ни был числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geqslant 0$ при всех натуральных n, если он сходится и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$.

Указание к задаче 1

Необходимо знать:

1) определения понятий числового ряда, сходимости ряда, суммы ряда, геометрической прогрессии;

2) формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

3) теорему о сумме сходящихся рядов и произведении ряда на число.

Необходимо уметь:

1) раскладывать правильную дробь в сумму простейших дробей;

2) вычислять предел последовательности.

Решение задачи 1 а)
Решение задачи 1 б)

Указание к задаче 2

Необходимо знать:

1) определения понятий числового ряда, сходимости ряда, обобщённого гармонического ряда;

2) теорему о сходимости обобщённого гармонического ряда;

3) необходимое условие сходимости числового ряда;

4) достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов (первый признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши);

5) таблицу основных эквивалентностей.

Необходимо уметь:

1) вычислять предел последовательности;

2) исследовать несобственный интеграл на сходимость;

3) заменять функции на эквивалентные им.

Решение задачи 2 а)
Решение задачи 2 б)
Решение задачи 2 в)
Решение задачи 2 г)
Решение задачи 2 д)
Решение задачи 2 е)

Указание к задаче 3

Необходимо знать:

1) определение понятий знакочередующегося ряда, абсолютной и условной сходимости;

2) признак Лейбница;

3) необходимое условие сходимости числового ряда;

4) признаки сходимости положительных рядов.

Необходимо уметь:

1) исследовать положительные ряды на сходимость;

2) исследовать функцию на монотонность;

3) вычислять предел последовательности.

Решение задачи 3 а)
Решение задачи 3 б)
Решение задачи 3 в)

Указание к задаче 4

Необходимо знать:

1) определения понятий знакочередующегося ряда, остатка ряда;

2) признак Лейбница и оценку остатка знакочередующегося ряда.

Необходимо уметь:

1) выполнять операции с неравенствами.

Решение задачи 4

Указание к задаче 5

Необходимо знать:

1) определения понятий сходящегося ряда, суммы ряда, знакочередующегося ряда, абсолютной и условной сходимости;

2) необходимое условие сходимости числового ряда;

3) достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов.

4) признак Лейбница.

Необходимо уметь:

1) применять вышеназванные определения и теоремы.

Решение задачи 5

Указание к задаче 6

Необходимо знать:

1) определения понятий сходящегося ряда, суммы ряда, знакочередующегося ряда, абсолютной и условной сходимости;

2) необходимое условие сходимости числового ряда;

3) достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов.

4) признак Лейбница.

Необходимо уметь:

1) применять вышеназванные определения и теоремы.

Решение задачи 6

Указание к задаче 7

Необходимо знать:

1) определения понятий сходящегося ряда, суммы ряда, знакочередующегося ряда, абсолютной и условной сходимости;

2) необходимое условие сходимости числового ряда;

3) достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов.

4) признак Лейбница.

Необходимо уметь:

1) применять вышеназванные определения и теоремы.

Решение задачи 7

Решение задачи 1 а)

Общий член данного ряда представим в таком виде:

$$\frac{4^n - 3^n}{6^n} = \frac{4^n}{6^n} - \frac{3^n}{6^n}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n}{6^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots$$

Видно, что он является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = (2/3)^3$ и знаменателем $q = 2/3$. Найдём эту сумму:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 = \frac{8}{9}.$$

Теперь перейдём к ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

Это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = (1/2)^3$ и знаменателем $q = 1/2$. Суммируем:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 = \frac{1}{4}.$$

Находим сумму исходного ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{6^n} = \frac{8}{9} - \frac{1}{4} = \frac{32-9}{36} = \frac{23}{36}.$$

Решение задачи 1 б)

Просуммируем данный ряд, пользуясь определением суммы числового ряда. Для этого построим последовательность частичных сумм и найдём её предел. Имеем:

$$S_n = \sum_{k=4}^{n} \frac{5}{k(k-1)} = \frac{5}{4\cdot(4-1)} + \frac{5}{5\cdot(5-1)} + \frac{5}{6\cdot(6-1)} + \ldots + \frac{5}{k(k-1)} + \ldots + \frac{5}{n(n-1)}.$$

Разложим дробь $\dfrac{5}{k(k-1)}$ на простейшие методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{5}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} = \frac{A(k-1)+Bk}{k(k-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=5 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{5}{k(k-1)}=\frac{-5}{k}+\frac{5}{k-1}=\frac{5}{k-1}-\frac{5}{k}.$$

Таким образом,

$$S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{5}{k(k-1)}=\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{5}{k-1}-\frac{5}{k}\right)=\underbrace{\frac{5}{4-1}-\frac{5}{4}}_{\text{первое слагаемое}}+\underbrace{\frac{5}{5-1}-\frac{5}{5}}_{\text{второе слагаемое}}+\ldots+$$

$$+\underbrace{\frac{5}{k-2}-\frac{5}{k-1}}_{(k-1)\text{-ое слагаемое}}+\underbrace{\frac{5}{k-1}-\frac{5}{k}}_{k\text{-ое слагаемое}}+\underbrace{\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}}_{(k+1)\text{-ое слагаемое}}+\ldots+\underbrace{\frac{5}{n-1}-\frac{5}{n}}_{\text{последнее слагаемое}}=$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{5}{5}+\ldots+\frac{5}{k-2}-\frac{5}{k-1}+\frac{5}{k-1}-\frac{5}{k}+\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}+\ldots+\frac{5}{n-1}-\frac{5}{n}=$$

$$=\frac{5}{3}+\underbrace{-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}}_{\text{взаимно уничтожаются}}+\underbrace{-\frac{5}{5}+\frac{5}{5}}_{\text{взаимно уничтожаются}}+\ldots+\underbrace{-\frac{5}{k}+\frac{5}{k}}_{\text{взаимно уничтожаются}}+\ldots+\underbrace{-\frac{5}{n-1}+\frac{5}{n-1}}_{\text{взаимно уничтожаются}}-\frac{5}{n}=$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{5}{n}.$$

Следовательно, мы имеем дело с последовательностью частичных сумм

$$S_n=\frac{5}{3}-\frac{5}{n}.$$

Вычислим её предел:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{n}\right)=\frac{5}{3}.$$

Стало быть, исходный ряд сходится и его сумма равна 5/3.

Решение задачи 2 а)

Общий член данного ряда содержит факториалы, поэтому удобно применить признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1+1)!\cdot(n+1)!}{(2(n+1)-1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n+1)!\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n+1)!\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\left|\begin{array}{l}(n+2)!=n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\\(2n+1)!=(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2n(2n+1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\\text{и знаменатель на } n^2\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}<1.$$

Признак Даламбера говорит о том, что ряд сходится.

Возможные типы задач на признак Даламбера

Решение задачи 2 б)

Общий член ряда содержит возведение в степень, поэтому удобно применить радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{2n+3}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n}}=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель и знаменатель}\\ \text{внутри скобок на } n\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n}}=\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty}\right]=+\infty>1.$$

Согласно признаку Коши ряд расходится.

Возможные типы задач на радикальный признак Коши

Решение задачи 2 в)

Вычислим предел общего члена данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7+2n^5}{5n^2+1}=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель}\\ \text{дроби на } n^2\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}+2n^3}{5+\dfrac{1}{n^2}}=\left[\frac{\infty}{5}\right]=+\infty\neq 0.$$

Мы видим, что нарушено необходимое условие сходимости, откуда вытекает расходимость ряда.

Возможные типы задач на необходимое условие сходимости

Решение задачи 2 г)

Общий член данного ряда является отношением ограниченной функции и многочлена, так что для исследования выгодно применить первый признак сравнения. Построим оценку:

$$a_n=\frac{3\cos^2(n+1)}{4n^4+5}\leqslant\left|\begin{array}{c}0\leqslant\cos^2(n+1)\leqslant 1,\\ \text{увеличим числитель}\end{array}\right|\leqslant\frac{3}{4n^4+5}\leqslant\left|\begin{array}{c}\text{уменьшим}\\ \text{знаменатель}\end{array}\right|\leqslant\frac{3}{4n^4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n^4}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ сходится, поскольку $4>1$. Согласно первому признаку сравнения исходный ряд тоже сходится.

Решение задачи 2 д)

Наличие логарифмов говорит о целесообразности применения интегрального признака Коши. Имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = \ln(x+1) \\ dt = \dfrac{dx}{x+1} \end{array} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{\ln(b+1)} t\,dt = \lim_{b\to+\infty} \frac{t^2}{2}\Big|_1^{\ln(b+1)} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln^2(b+1)}{2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty.$$

Из расходимости интеграла вытекает, что и ряд тоже расходится.

Решение задачи 2 е)

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Эквивалентность $\operatorname{arctg} x \sim \pi/2$ при $x \to \to +\infty$ приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\operatorname{arctg}(n^2+4)}{n^7+9} \sim \frac{\pi/2}{n^7} \text{ при } n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi/2}{n^7}$ сходится, так как $7 > 1$. Значит, исходный ряд также сходится.

Возможные типы задач на предельный признак сравнения

Решение задачи 3 а)

Сначала исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим «ряд из модулей»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n^2+1}.$$

Поскольку

$$\frac{3n}{5n^2+1} \sim \frac{3n}{5n^2} = \frac{3}{5n} \text{ при } n \to \infty,$$

а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то ввиду предельного признака сравнения «ряд из модулей» также расходится, поэтому исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Для выяснения вопроса о сходимости исходного ряда прибегнем к признаку Лейбница. Проверим, выполняется ли условие убывания: $a_n \geqslant a_{n+1}$. Для этого найдём производную функции

$$f(x) = \frac{3x}{5x^2+1}.$$

Имеем:

$$f'(x) = \frac{3\cdot(5x^2+1) - 3x\cdot 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-15x^2+3}{(5x^2+1)^2}.$$

Легко видеть, что $f'(x) < 0$ при всех $x \geqslant 1$. Следовательно, условие признака Лейбница об убывании выполняется.

Теперь проверим, выполняется ли второе условие признака Лейбница, состоящее в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n^2+1} = \left| \begin{array}{c} \text{числитель и} \\ \text{знаменатель} \\ \text{разделим на } n \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5n+\frac{1}{n}} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = 0$$

Второе условие признака Лейбница также выполняется, и, следовательно, исходный ряд сходится. Так как абсолютной сходимости нет, то сходится он условно.

Решение задачи 3 б)

Запишем общий член данного ряда иначе:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{\ln^{-2} n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 3\ln^2 n$$

Вычислим предел модуля общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} 3\ln^2 n = +\infty \neq 0.$$

Этот результат говорит о расходимости ряда, потому что нарушено необходимое условие сходимости.

Решение задачи 3 в)

Сначала выясним вопрос об абсолютной сходимости данного ряда. Для этого составим «ряд из модулей»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2(5n^2+1)}{5n^2+1}.$$

Для любого натурального n справедлива оценка

$$\frac{2\sin^2(5n^2+1)}{5n^2+1} \leqslant \frac{2}{5n^2+1},$$

так как $0 \leqslant \sin^2(5n^2+1) \leqslant 1$. В свою очередь, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2+1}$ в силу предельного признака сравнения сходится, ибо сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2}$ из эквивалентных членов. Таким образом, по первому признаку сравнения ряд, составленный из модулей членов данного знакочередующегося ряда, сходится. Следовательно, заданный в условии ряд сходится абсолютно.

Решение задачи 4

Запишем данный ряд в следующем виде:

$$\underbrace{1+2-3+4}_{\substack{\text{конечная сумма:} \\ \text{её можно вычислить}}} \underbrace{-\frac{2}{25}+\frac{2}{36}-\frac{2}{49}+\frac{2}{64}-\frac{2}{81}+\frac{2}{100}-\frac{2}{121}+\ldots}_{\text{знакочередующийся ряд}} =$$

$$= 4 + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{n^2} = 4 + 2\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Учитывая, что первое слагаемое ряда $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, т. е. число $-1/25$, является отрицательным, в силу признака Лейбница получим

$$-\frac{1}{25} < \sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} < 0.$$

Умножим всё на два и прибавим четыре:

$$-2\cdot\frac{1}{25}+4 < 4+2\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} < 4,$$

откуда

$$3{,}92 < 4+2\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} < 4.$$

Следовательно, сумма ряда принадлежит интервалу $(3{,}92; 4)$.

Решение задачи 5

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о характере сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ничего сказать нельзя: он может как сходиться, так и расходиться (условие равенства нулю предела общего члена лишь необходимо для сходимости). Следовательно, требуется дополнительное исследование, т. е. верный ответ указан в пункте 3).

Решение задачи 6

Известно, что если знакочередующийся ряд сходится, то ряд, составленный из модулей членов знакочередующегося ряда, может как сходиться, так и расходиться. Стало быть, необходимо дополнительное исследование, т. е. правильный ответ содержится в пункте 3).

Решение задачи 7

Формулировка задачи наводит на мысль об использовании радикального признака Коши. Если бы выполнялось неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд бы расходился. Значит, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$, причём здесь может реализоваться не только строгое неравенство, но и равенство (например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$). Итак, верный ответ записан в пункте 2).

Возможные типы задач на признак Даламбера

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^3+8}{3^{n+1}+2^n}$.

Найдём предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+8}{3^{n+1+1}+2^{n+1}}\cdot\frac{3^{n+1}+2^n}{n^3+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+8}{n^3+8}\cdot\frac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+2}+2^{n+1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель и знаменатель}\\ \text{первой дроби на } n^3,\\ \text{второй — на } 3^n\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3+\dfrac{8}{n^3}}{1+\dfrac{8}{n^3}}\cdot\frac{3^1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{3^2+2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}<1.$$

По признаку Даламбера исходный ряд сходится.

Пример 2. Выясним характер сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n\sqrt{n}}$.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}\cdot\frac{3^n\sqrt{n}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель и знаменатель}\\ \text{второй дроби на } \sqrt{n}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=[\infty\cdot 1]=+\infty>1.$$

Признак Даламбера говорит о расходимости ряда.

Возможные типы задач на радикальный признак Коши

Пример 3. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n+3}\right)^{-2n+1}$.

Находим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^{\dfrac{-2n+1}{n}}=\left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель и знаменатель}\\ \text{в основании и в показателе степени на } n\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}\right)^{-2+\dfrac{1}{n}}=3^{-2}=\frac{1}{9}<1.$$

В силу радикального признака Коши ряд сходится.

Возможные типы задач на необходимое условие сходимости

Пример 4. Изучим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8n^3-2}{4n^3+5}$.

Вычислим предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3-2}{4n^3+5} = \left| \begin{array}{c} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель} \\ \text{дроби на } n^3 \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\dfrac{2}{n^3}}{4+\dfrac{5}{n^3}} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, исследуемый ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n}$.

Вычислим предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n} = \left| \begin{array}{c} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель} \\ \text{дроби на } 3^n \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Стало быть, ряд расходится из-за нарушения необходимого условия сходимости.

Пример 6. Выясним поведение ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\frac{n+2}{n+1}$.

Найдём предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{n+1} = +\infty \neq 0.$$

Полученный результат говорит о расходимости ряда.

Возможные типы задач на предельный признак сравнения

Пример 7. Изучим ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7+2n^5}{5n^7+1}$.

При $n\to\infty$ имеем:

$$\frac{3n+7+2n^5}{5n^7+1} \sim \frac{2n^5}{5n^7} = \frac{2}{5n^2}.$$

Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то ввиду предельного признака сравнения исходный ряд тоже сходится.

Пример 8. Исследуем ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n^9}\cdot \operatorname{tg}^2\frac{5n}{n^4+3}$.

Вспоминая эквивалентность $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x\to 0$, получаем, что при $n\to\infty$ справедливы соотношения:

$$\sqrt[4]{n^9}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{5n}{n^4+3} \sim n^{9/4}\cdot\left(\frac{5n}{n^4+3}\right)^2 \sim n^{9/4}\cdot\frac{25n^2}{n^8} = \frac{25}{n^{15/4}}.$$

Поскольку ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{15/4}}$ сходится, то и исходный ряд согласно предельному признаку сравнения также сходится.