Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Lösungshinweise zum 2. Übungsblatt

27.10.2020

Aufgabe 1: Sei (Q, κ) ein parametrisiertes Problem. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. (Q, κ) ist fixed-parameter tractable
2. Q ist entscheidbar in Zeit $g(\kappa(x)) + f(\kappa(x)) \cdot p(|x| + \kappa(x))$, f, g berechenbar, p Polynom
3. Q ist entscheidbar in Zeit $g(\kappa(x)) + p(|x|)$, g berechenbar, p Polynom

Lösungshinweis: 3. $\implies$ 2.: Da wir p als nichtfallend annehmen können und $f = 1$ setzen können.
2. $\implies$ 1.: Sei $k = \kappa(x)$, $n = |x|$. O.B.d.A. $n \geq 1$.
Es gibt ein Polynom $c \cdot n^d$, so dass $p(n) \leq c \cdot n^d$. Da $a + b \leq a(b+1)$ für alle $a \geq 1$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & g(k) + f(k) \cdot c(n+k)^d \\ \leq\ & g(k) + cf(k) \cdot n^d \cdot (k+1)^d \\ \leq\ & g(k) \cdot n^d + cf(k) \cdot n^d \cdot (k+1)^d \\ =\ & (g(k) + cf(k) \cdot (k+1)^d) \cdot n^d \end{aligned}$$

1. $\implies$ 3.: Es gilt stets $ab \leq a^2 + b^2$, also ist $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) \leq f(\kappa(x))^2 + p(|x|)^2$. □

Aufgabe 2: Das Problem *p-deg*-INDEPENDENT-SET ist wie folgt definiert:

Instanz: Ein Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.
Parameter: $k + \mathsf{deg}(G)$, wobei $\mathsf{deg}(G) = \max\{\mathsf{deg}(v) \mid v \in V\}$.
Frage: Hat der Graph G ein k-elementiges independent set?

Zeigen Sie, dass *p-deg*-INDEPENDENT-SET in FPT liegt.

Lösungshinweis: Wir zeigen, dass *p-deg*-INDEPENDENT-SET in FPT liegt, indem wir eine Kernelisierung angeben.
Beobachtung: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq k \cdot (\mathsf{deg}(G) + 1)$ gilt, dass er ein IS der Größe k hat.
Die Kernelisierung besteht dann darin eine positive Instanz $x_1 \in$ *p-deg*-INDEPENDENT-SET auszugeben, falls $|V| \geq k(\mathsf{deg}(G) + 1)$, ansonsten die Eingabe selbst.

Beweis der Beobachtung: Per Induktion über k. Jeder Graph hat ein IS der Größe $k = 0$. Für $k+1$ sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph mit $|V| \geq (d+1)(k+1)$, $v \in V$ ein beliebiger Knoten, und $v_1, \ldots, v_e$ dessen Nachbarn ($e \leq d$). Dann hat $G \setminus \{v, v_1, \ldots, v_e\}$ mindestens $(d+1)k$ Knoten und nach I.V. ein IS U der Größe k. Da kein Nachbar von v in U vorkommt, ist $\{v\} \cup U$ ein IS der Größe $k + 1$ für G. □

Aufgabe 3: Sei (Q, κ) ein parametrisiertes Problem. (Q, κ) liegt *letztendlich in* P, falls es eine berechenbare Funktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und einen Polynomialzeitalgorithmus M gibt, der bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ mit $|x| \geq h(\kappa(x))$ entscheidet, ob $x \in Q$. Das Verhalten auf Eingaben $x \in \Sigma^*$ mit $|x| < h(\kappa(x))$ ist beliebig. Zeigen Sie, dass

$$(Q, \kappa) \in \mathsf{FPT} \text{ gdw. } Q \text{ ist entscheidbar und } (Q, \kappa) \text{ ist letztendlich in } \mathsf{P}.$$

Lösungshinweis: „⇒“: $(Q, \kappa) \in \mathsf{FPT} \implies$ FPT-Algorithmus A, der Q entscheidet mit Laufzeit $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) \implies$ für $h = f$ ist A der gesuchte Polynomialzeitalgorithmus
„⇐“: (Q, κ) ist letztendlich in P via h, M wie oben. Da Q entscheidbar ist, gibt es einen weiteren Algorithmus A, welcher in Zeit $r(|x|)$ läuft. Der fpt-Algorithmus, welcher (Q, κ) entscheidet, sieht dann wie folgt aus. Prüfe, ob $|x| \geq h(\kappa(x))$. Falls ja, dann führe Algorithmus M auf Eingabe x aus. Ansonsten führe Algorithmus A aus. Die Laufzeit im zweiten Fall ist dann beschränkt durch $f = r \circ h$.

$\square$