Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Lösungshinweise zum 3. Übungsblatt

03.11.2020

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $\mathsf{para\text{-}NP} \subseteq \mathsf{XP}$ gdw. $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$

Lösungshinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass p-COLOR $\mathsf{para\text{-}NP}$-vollständig ist.
„$\Rightarrow$“: Falls $\mathsf{para\text{-}NP} \subseteq \mathsf{XP}$, ist insbesondere p-COLOR $\in \mathsf{XP}$. Da dann jede Slice (Scheibe) von p-COLOR in P liegt, ist das NP-vollständige 3-COLOR in P.
„$\Leftarrow$“: Aus $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ folgt, dass jede Slice von p-COLOR in P liegt, d.h. p-COLOR liegt in XP. Da p-COLOR $\mathsf{para\text{-}NP}$-vollständig ist und XP unter fpt-Reduktionen abgeschlossen ist, folgt daraus $\mathsf{para\text{-}NP} \subseteq \mathsf{XP}$. $\square$

Aufgabe 2: Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein dominating set, falls jeder Knoten in $V \setminus S$ mit mindestens einem Knoten aus S verbunden ist. Das Problem p-Dominating-Set ist wie folgt definiert:

Instanz: Ein Graph G und ein $k \in \mathbb{N}$.
Parameter: k.
Frage: Hat G ein dominating set der Größe k?

Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ eines Hypergraphen $H = (V, E)$ ist ein hitting set, falls $S \cap e \neq \emptyset$ für alle Kanten $e \in E$ gilt. Das Problem p-Hitting-Set ist wie folgt definiert:

Instanz: Ein Hypergraph H und ein $k \in \mathbb{N}$.
Parameter: k.
Frage: Hat H ein hitting set der Größe k?

Zeigen Sie, dass p-Dominating-Set $\equiv^{\text{fpt}}$ p-Hitting-Set gilt.

Lösungshinweis: Um zu zeigen, dass p-Dominating-Set $\leq^{\text{fpt}}$ p-Hitting-Set nutzen wir die Abbildung $((V, E), k) \mapsto ((V, E'), k)$ mit $E' = \{e_v \mid v \in V\}$ und

$$e_v = \{v\} \cup \{u \mid \{u, v\} \in E\}$$

Für die Korrektheit der Reduktion zeigen wir, dass jedes DS S in $G = (V, E)$ ein HS in $G' = (V, E')$ ist.

$$\begin{aligned} & S \text{ ist DS in } G \\ \iff & \forall v \in V \setminus S \; \exists u \in S : \{u, v\} \in E \\ \iff & \forall v \in V \setminus S \; \exists u \in S : u \in e_v \\ \iff & S \text{ ist HS in } G \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass p-Hitting-Set $\leq^{\text{fpt}}$ p-Dominating-Set nutzen wir die Abbildung $(H, k) \mapsto (G, k)$ für $H = (V, E)$ und $G = (V \cup E, E_1 \cup E_2)$ mit

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\{v, e\} \mid v \in V, e \in E, v \in e\} \\ E_2 &= \{\{u, v\} \mid u \neq v \in V\} \end{aligned}$$

Für die Korrektheit zeigen wir, dass $(H,k) \in p$-HITTING-SET, gdw. $(G,k) \in p$-DOMINATING-SET.

„$\Rightarrow$": Sei S ein HS in H mit $|S| = k$. Nehmen wir an, dass S kein DS in G ist. Dann muss mindestens einer der beiden Konditionen zutreffen:

$$\exists v \in V \setminus S \,\forall u \in S : \{u,v\} \notin E_2 \tag{1}$$

$$\exists e \in E \,\forall v \in S : \{v,e\} \notin E_1 \tag{2}$$

Keiner dieser beiden Fälle kann eintreffen, wenn S ein HS in H ist. Also muss S auch ein DS in G sein.

„$\Leftarrow$": Sei S ein DS der Größe k in G. Falls $S \subseteq V$ gilt, dann ist S ein HS in H. Andernfalls gilt, dass $S \cap E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Wir ersetzen jedes e_i durch einen beliebigen Knoten $v_i \in e_i$:

$$S' = (S \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}) \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Dann ist $|S'| \leq |S| \leq k$ und S' ein HS in H. $\square$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Klassen FPT und XP abgeschlossen sind unter $\leq^{\text{fpt}}$-Reduktionen. Zur Erinnerung: eine Klasse von parametrisierten Problemen $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen unter $\leq^{\text{fpt}}$-Reduktionen, falls für alle PP $(Q_1,\kappa_1),(Q_2,\kappa_2)$ gilt:

$$(Q_1,\kappa_1) \leq^{\text{fpt}} (Q_2,\kappa_2) \text{ und } (Q_2,\kappa_2) \in \mathcal{C} \Rightarrow (Q_1,\kappa_1) \in \mathcal{C}$$

Lösungshinweis: Sei $(Q_1,\kappa_1) \leq^{\text{fpt}} (Q_2,\kappa_2)$, f,h,g,p wie in Definition, $(Q_2,\kappa_2) \in \mathcal{C} \in \{\mathsf{FPT}, \mathsf{XP}\}$ (via M_2).

Algorithmus für Q_1:
Eingabe: x
Berechne mit h eine Eingabe $x_2 = h(x)$ für Maschine M_2.
Simmuliere M_2 auf Eingabe x_2 und gibt die Ausgabe (ja/nein) zurück.

Unterscheide nun 2 Fälle:
Fall 1: $(Q_2,\kappa_2) \in \mathsf{FPT}$
M_2 hat Laufzeit $f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|)$

Laufzeit für Algorithmus für Q_1:

$$\begin{aligned}
& f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|) \\
\leq\; & f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2\Big(g(\kappa(x))\Big) \cdot p_2\Big(f\Big((\kappa(x)) \cdot p(|x|)\Big) \\
\leq\; & f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2\Big(g(\kappa(x))\Big) \cdot p_2\Big(f\Big((\kappa(x)) \cdot p_2(p(|x|))\Big)
\end{aligned}$$

Also fpt-Laufzeit, da von der Form $g(\kappa(x)) + f(\kappa(x)) \cdot p(|x| + \kappa(x))$, wie in Übung 2.

Fall 2: $(Q_2,\kappa_2) \in \mathsf{XP}$
M_2 hat Laufzeit $f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|)$

Laufzeit für Algorithmus für Q_1:

$$\begin{aligned}
& f(\kappa(x)) + |x|^{f(\kappa(x))} + f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|) \\
=\; & f(\kappa(x)) + f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|) + |x|^{f(\kappa(x))} \\
\overset{\text{Übung 2}}{\leq}\; & f(\kappa(x)) + f_2(\kappa(x))^2 + p_2(|x|)^2 + |x|^{f(\kappa(x))} \\
\leq\; & f(\kappa(x)) + f_2(\kappa(x))^2 + |x|^{f(\kappa(x)) + \deg(p)} \\
\leq\; & \tilde{f}(\kappa(x)) + |x|^{\tilde{f}(\kappa(x))}
\end{aligned}$$

Also XP-Laufzeit, für ein geeignetes $\tilde{f}$. $\square$

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Das parametrisierte Problem p-EXP-DTM-HALT ist XP -vollständig. Zur Erinnerung:

> **Instanz:** DTM M, $x \in \Sigma^*$, $k \in \mathbb{N}$
> **Parameter:** k
> **Frage:** Hält M bei Eingabe x in $\leq |x|^k$ Schritten?

Lösungshinweis:

p-EXP-DTM-HALT $\in \mathsf{XP}$: Simuliere M für $|x|^k$ Schritte.

Schwere: Sei $(Q, \kappa) \in \mathsf{XP}$ beliebig. Sei M eine DTM, die Q in der Laufzeit $|x|^{f(\kappa(x))} + f(\kappa(x))$ entscheidet. Wähle eine berechenbare Funktion g, sodass die Laufzeit von $M \leq |x|^{g(\kappa(x))}$.

Reduktion: $x \mapsto \langle M, x, g(\kappa(x)) \rangle$

$(Q, \kappa) \leq_m^{\text{fpt}}$ p-EXP-DTM-HALT

$\square$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass (Q, κ) in XP liegt, gdw. es eine berechenbare Funktion $f(k) = (M, p)$ gibt, sodass M eine DTM ist, welche die k-te Slice $(Q, \kappa)_k$ entscheidet und der Zeitbedarf dabei durch das Polynom p beschränkt ist.

Lösungshinweis:
"$\Rightarrow$": $(Q, \kappa) \in \mathsf{XP}$, d.h. es gibt eine berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine DTM M, welche Q entscheidet in Laufzeit $g(\kappa(x)) + |x|^{g(\kappa(x))} \implies$ die berechenbare Funktion $f(k) \mapsto (M, p)$ mit $p(n) = g(k) + n^{g(k)}$ erfüllt die Anforderungen
"$\Leftarrow$": Sei $f(k) = (M, p)$ die berechenbare Funktion wie aus der Aufgabe und sei M_f eine DTM mit Laufzeit $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche f berechnet. Dann zeigt folgende DTM M' , dass (Q, κ) in XP liegt. Sei x die Eingabe mit $\kappa(x) = k$

1. Berechen $f(\kappa(x)) = (M, p)$
2. Simuliere M für $p(|x|)$ Schritte

Der erste Schritt benötigt $r(|k|)$ Zeit und der zweite Schritt $p(|x|) = |x|^c$ Zeit für ein $c \in \mathbb{N}$. Dann wählen wir $g(k) = r(|k|) + c$. $\square$