fpt Laufzeit $\boxed{f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)}$ Parameter

berechenbare Fkt

Polynom

A1 Lsg: Q entscheidbar $\Rightarrow \exists$ Algorithmus A, der Q entscheidet in Zeit $r: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Beh: A ist fpt-Algorithmus.

Bew:

$$r(|x|) \le \underbrace{f(|x|)}_{=r(|x|)} \cdot \underbrace{p(|x|)}_{:=1} \overset{\kappa(x)=|x|}{=} f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$$

Noch zu zeigen: r bzw. f sind berechenbar:

Algorithmus zur Berechnung von r simuliert A auf allen Eingaben der Länge n, zählt dabei die Schritte und berechnet das Maximum.

$\square$

A2 Achtung: g weder bijektiv noch streng monoton sein.

Lsg: Q entscheidbar $\Rightarrow \exists$ Algorithmus A, der Q mit Laufzeit r entscheidet. $p(|x|) := 1$

Wir suchen berechenbares f und f' mit

$$r(|x|) \overset{(1)}{\le} f(g(|x|)) \overset{(2)}{\le} f'(\kappa(x))$$

Setzen $f := r' \circ h$ mit

$h(m) := \min\{ n \mid g(n) > g(m) \}$

und $r'(n) \ge r(n)$ berechenbar monoton wachsend Fkt.

(z.B. $r'(n) := \max_{m \le n} r(m)$)

$\Rightarrow g(h(g(m))) > g(m) \quad \forall m.$

$\longrightarrow$ Strenge Monotonie

g unbeschränkt $\Rightarrow$ h wohldefiniert und berechenbar

$\Rightarrow$ f berechenbar.

Insgesamt: $h(g(|x|)) \ge |x|$, da $g(h(g(|x|))) > g(|x|)$

$\Rightarrow r'(h(g(|x|))) \ge r'(|x|)$, da r und r' monoton

$\Rightarrow f(g(|x|)) \ge r'(|x|) \ge r(|x|) \Rightarrow (1)$

Für (2): wieder monoton wachsende berechenbare Fkt.

$f' \ge f$ verwenden und .

für k≥1: wieder monoton wachsende berechenbare Fkt.

$f' \geq f$ verwenden, sodass

$\Rightarrow \quad r(|x|) \leq r'(|x|) \leq f(g(|x|)) \leq f'(g(|x|)) \leq f'(\kappa(x)) \cdot 1$

$\Rightarrow$ A fpt-Algorithmus.

□

A3) $(Q, 1) \in FPT \Leftrightarrow \exists$ fpt-Algorithmus A mit Laufzeit

$f(1) \cdot p(|x|) = c \cdot p(|x|) =: \underbrace{q(|x|)}_{\text{Polynom}}$

$\Leftrightarrow Q \in P$

□

A4) Lsg: Algorithmus von VL 1 (letzte Folie (8?)).

Alle Hitting Sets der Größe $\leq k$ im Suchbaum und in einer Menge S speichern.

Dies geschieht in Laufzeit $\Theta(d^k \cdot |H|)$, da der Suchbaum maximale Verzweigung d und Tiefe k hat.

bei $\geq k$ sonst verwerfen

Danach durchläuft man alle Hitting Sets in S (max. d^k) und gibt nur die minimalen Hitting Sets (bzgl. „$\subseteq$").

Für ein HS der Größe k kann man in $\Theta(k \cdot |H|)$ testen, ob es minimal ist.

□