Theorie parametrisierter Komplexität: Übung 2

Dienstag, 27. Oktober 2020

A1) $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$

1. $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$

„$3 \Rightarrow 2$:" $g(\kappa(x)) + f(\kappa(x)) \cdot p(|x| + \kappa(x))$

$\boxed{g(\kappa(x)) + \boxed{1} \cdot \tilde{p}(|x|)}$

p nicht fallend

mindestens $p(|x|+\kappa(x))$

„$2 \Rightarrow 1$": OBdA $|x| \geq 1$

$\exists$ polynom $c \cdot n^d$, sodass $p(n) \leq c \cdot n^d$.

$\boxed{a+b \leq a(b+1)}$ $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$

$$g(\kappa(x)) + f(\kappa(x)) \cdot c(|x| \cdot \kappa(x))^d$$
$$\leq g(\kappa(x)) + c\, f(\kappa(x)) \cdot |x|^d \cdot (\kappa(x)+1)^d$$
$$\leq g(\kappa(x)) \cdot |x|^d + c \cdot f(\kappa(x)) \cdot |x|^d \cdot (\kappa(x)+1)^d$$
$$= \underbrace{(g(\kappa(x)) + c \cdot f(\kappa(x)) \cdot (\kappa(x)+1)^d)}_{\text{„}f\text{"}} \cdot \underbrace{|x|^d}_{\text{„}p\text{"}}$$

„$1 \Rightarrow 3$" $\boxed{ab \leq a^2 + b^2}$ $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$

$$f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) \leq (f(\kappa(x)))^2 + (p(|x|))^2$$

A2) Wir hatten gesehen: „Kernelization $\Leftrightarrow$ fpt"

Beobachtung: $|V| \geq k \cdot (\deg(G)+1) \Rightarrow$ IS der Größe k.

Der Kernelization besteht darin eine positive Instanz $x_1 \in p\text{-deg-IS}$ auszugeben, wenn $|V| \geq k \cdot (\deg(G)+1)$, ansonsten Eingabe zurückgeben.

auszugeben, wenn $|V| \geq k \cdot (\deg(G)+1)$, ansonsten Eingabe zurückgeben.

Beweis der Beobachtung: Induktion über k.

IA: $k=0$: Jeder Graph besitzt IS der Größe 0. ✓

IS: „$\underline{k \to k+1}$": Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V| \geq (d+1)(k+1)$, deg(G)

$v \in V$ beliebiger Knoten und $v_1,\dots,v_\ell$ dessen Nachbarn $(\ell \leq d)$

$\Rightarrow G \setminus \{v, v_1, \dots, v_\ell\}$ mindestens $(d+1)k$ Knoten.

nach I.V. besitzt $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_\ell\}$ IS k □

A3) „$\Rightarrow$": $(Q,\kappa) \in \mathrm{FPT} \Rightarrow$ FPT-Algorithmus A, der Q entscheidet mit Laufzeit $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$

$\Rightarrow$ für $h=f$, $M=A$

„$\Leftarrow$": (Q,κ) ist letztendlich in P via h, M wie oben.

für $|x| \geq h(\kappa(x))$: 1. Prüfe ob $|x| \geq h(\kappa(x))$

↳ ja $h(\kappa(x))$

↳ $\boxed{M}$ simulieren $p(|x|)$ Polynom

$\underbrace{h(\kappa(x))}_{\text{berechenbar}} + \underbrace{p(|x|)}_{\text{Polynom}}$

A1 $\Rightarrow$ FPT.

Für $|x| < h(\kappa(x))$:

1. Prüfen, ob $|x| < h(\kappa(x))$

↳ ja $h(\kappa(x))$

Q entscheidbar $\Rightarrow \exists$ Algorithmus A, der Q entscheidet.

A hat Laufzeit $r(|x|)$

2. Simuliere A

$$f = r \circ h$$

$$\leq \boxed{f(Js(x))} \cdot 1 \qquad \square$$