A1 Z: para-NP $\subseteq$ XP $\iff$ P = NP.

Lsg: p-COLOR para-NP-vollst.

„$\Rightarrow$" para-NP $\subseteq$ XP $\Rightarrow$ p-COLOR $\in$ XP.

$\Rightarrow$ jede Scheibe/Slice von p-COLOR liegt in P

$\Rightarrow$ 3-COLOR $\in$ P

3-COLOR NP-vollst. $\Rightarrow$ P=NP

„$\Leftarrow$": P = NP : $\Rightarrow$ jede Scheibe von p-COLOR in P liegt.

$\Rightarrow$ p-COLOR $\in$ XP

Da p-COLOR para-NP-vollst.

und nach Aufgabe 3 XP unter fpt-Reduktion abgeschlossen ist $\Rightarrow$ para-NP $\subseteq$ XP.

A3 FPT:

Lsg: $(Q_1, \kappa_1) \leq^{fpt} (Q_2, \kappa_2)$, f, h, g, p.

Zusätzlich: $(Q_2, \kappa_2) \in$ FPT via M_2 $f_2(\kappa(x)) \cdot p_2(|x|)$

Algorithmus für Q_1

Eingabe: x

Berechne mit h eine Eingabe $x_2 = h(x)$ für M_2

Simmuliere M_2 auf Eingabe x_2 und gebe Ausgabe zurück.

Laufzeit:

$$f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2(\kappa(x_2)) \cdot p_2(|x_2|)$$
$$\leq f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2(g(\kappa(x))) \cdot p_2(f((\kappa(x)) \cdot p(|x|))$$
$$\leq f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) + f_2(g(\kappa)) \cdot p_2(f(\kappa(x)) \cdot p_2(p(|x|)))$$
$$\leq f(\kappa(x)) \cdot p_2(p(|x|)) \cdot p(|x|))$$

TODO

A4 „$\in$ XP": simmuliere M für $|x|^{k}$ Schritte. ✓

XP-Laufzeit

„Schwer:" Sei $(Q, \kappa) \in$ XP. Sei M eine DTM, die Q in Laufzeit $|x|^{f(\kappa(x))} + f(\kappa(x))$ entscheidet.

Wähle berechenbare Fkt g, sodass Laufzeit vom M $\leq |x|^{g(\kappa(x))}$

Reduktion $x \longmapsto \langle M, x, g(\kappa(x)) \rangle$

$(Q, \kappa) \leq_m^{fpt}$ p-EXP-DTM-HALT

□

A5 „$\Rightarrow$" $(Q, \kappa) \in$ XP $\Rightarrow \exists$ berechenbares $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

A5) „$\Rightarrow$" $(Q, \mathcal{J}_\kappa) \in XP \Rightarrow \exists$ berechenbares $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine DTM M, die Q entscheidet und Laufzeit $g(\mathcal{J}_\kappa(x)) + |x|^{g(\mathcal{J}_\kappa(x))}$

$\Rightarrow f(k) \longmapsto (M, p)$

$p(n) = g(k) + n^{g(k)}$ „$|x| =: n$"

„$\Leftarrow$" Sei $f(k) = (M, p)$

Sei M_f eine DTM mit Laufzeit $r: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die f berechnet

$\Rightarrow M'$ DTM zeigt dass $(Q, \mathcal{J}_\kappa)$ in XP liegt.

Sei x Eingabe mit $\mathcal{J}_\kappa(x) = k$

1. Berechne $f(\mathcal{J}_\kappa(x)) = (M, p) \leftarrow r(|k|)$
2. Simuliere M für $p(|x|)$ Schritte $\leftarrow |x|^c$

wähle $g(k) = r(|k|) + c$

$\square$

A2) Z: $p\text{-DS} \equiv^{fpt} p\text{-HS}$

1) $p\text{-DS} \leq^{fpt} p\text{-HS}$

$((V, E), k) \longmapsto ((V, E'), k)$ und $E' = \{e_v \mid v \in V\}$

$e_v = \{v\} \cup \{u \mid \{u,v\} \in E\}$

Korrektheit: Z: jedes DS in G ein HS in $G' = (V, E')$

S ist DS in $G \Leftrightarrow \forall v \in V \setminus S\ \exists u \in S: \{u,v\} \in E$

$\Leftrightarrow \forall v \in V \setminus S\ \exists u \in S: \in e_v$

$\Leftrightarrow S$ ist HS in G'.

2) $p\text{-HS} \leq^{fpt} p\text{-DS}$

$(H, k) \longmapsto (G, k)$

$H = (V, E)$, $G = (V \cup E, E_1 \cup E_2)$

wobei $E_1 = \{\{v, e\} \mid v \in V, e \in E, v \in e\}$

$E_2 = \{\{u, v\} \mid u \neq v \in V\}$

Korrektheit: $(H, k) \in p\text{-HS} \Leftrightarrow (G, k) \in p\text{-DS}$.

„$\Rightarrow$" Sei S ein HS in H mit $|S| = k$.

Annahme: S ist kein DS in G.

$\Rightarrow$ $\boxed{(1) \text{ oder } (2) \text{ erfüllt}}$

(1) $\exists\, v \in V \setminus S\ \forall u \in S: \{u, v\} \notin E_2$

(2) $\exists\, e \in E\ \forall v \in S: \{v, e\} \notin E_1$

Keiner der beiden Fälle kann eintreten, wenn S HS in H ist

$\Rightarrow$ S ist DS in G.

„$\Leftarrow$": Sei S ein DS mit $|S| = k$. Falls $S \subseteq V \Rightarrow$ S ist HS in H

Andernfalls gilt $S \cap E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Wir ersetzen jedes e_i durch beliebigen Knoten $v_i \in e_i$

$$S' = (S \setminus \{e_1, \dots, e_n\}) \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Dann ist $|S'| \leq |S| \leq k$ und S' ist HS in H. $\square$