

# 1

用  $O$ 、 $\Omega$ 、 $\Theta$  表示函数  $f$  与  $g$  之间阶的关系，并分别指出下列函数中阶最低和最高的函数：（该题考察阶的关系，20分）

(1)  $f(n) = 100, g(n) = \sqrt[100]{n}$

•  $f(n) = O(g(n))$

(2)  $f(n) = 6n + n \lfloor \log n \rfloor, g(n) = 3n$

•  $f(n) = \Omega(g(n))$

(3)  $f(n) = \frac{n}{\log n} - 1, g(n) = 2\sqrt{n}$

•  $f(n) = \Omega(g(n))$

(4)  $f(n) = 2^n + n^2, g(n) = 3^n$

•  $f(n) = O(g(n))$

(5)  $f(n) = \log_3 n, g(n) = \log_2 n$

•  $f(n) = \Theta(g(n))$

阶最低函数：  $f(n) = 100$

阶最高函数：  $g(n) = 3^n$

# 2

证明：  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  有常数上界。（该题考察和式求和，20分）

当  $k-1 \leq x \leq k$  时，有  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ，故：

$$\frac{1}{k^2} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx, (k = 2, 3 \dots)$$

故有：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

故  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  有常数上界。

### 3

给出下列各式中  $T(n)$  的渐近上下界，假设当  $n \leq 10$  时， $T(n)$  为常数，尽可能保证给出的界限是紧的，并验证给出的答案。（该题考察递归方程解法，20分）

#### 3.1

$$T(n) = 3T(n/5) + \lg^2 n$$

**使用master定理**

$$a = 3, b = 5, f(n) = \lg^2 n, n^{\log_b a} = n^{\log_5 3}, \log_5 3 \approx 0.683$$

$$\text{有 } f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}), (0 < \epsilon < \log_b a)$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^{\log_5 3})$$

#### 3.2

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\lg \lg n)$$

$$\text{令 } m = \lg n, \text{ 有 } T(2^m) = T(2^{m/2}) + \Theta(\lg m)$$

$$\text{令 } S(m) = T(2^m), \text{ 得 } S(m) = S(m/2) + \Theta(\lg m)$$

$$\text{令 } q = \lg m, Q(q) = S(2^q), \text{ 得 } Q(q) = Q(q-1) + \Theta(q).$$

$$\text{易得 } Q(q) = \Theta(q^2), Q(q) = S(m) = T(n), q = \lg \lg n.$$

$$\text{最终得到: } T(n) = \Theta((\lg \lg n)^2)$$

#### 3.3

$$T(n) = 10T(n/3) + 17n^{1.2}$$

**使用master定理**

$$a = 10, b = 3, f(n) = 17n^{1.2}, n^{\log_b a} = n^{\log_3 10}, \log_3 10 \approx 2.10$$

$$\text{有 } f(n) = O(n^{1.2}) = O(n^{\log_b a - \epsilon}), \text{ 取 } \epsilon = 0.8$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^{\log_3 10})$$

## 3.4

$$T(n) = 7T(n/2) + n^3$$

### 使用master定理

$$a = 7, b = 2, f(n) = n^3, n^{\log_b a} = n^{\log_2 7}, \log_2 7 \approx 2.80$$

$$\text{有 } f(n) = \Omega(n^{\log_3 7 + \epsilon}), \text{ 取 } \epsilon = 0.1$$

$$\text{正则条件: } af(n/b) = \frac{7}{8}n^3, \text{ 取 } c = \frac{7}{8} \text{ 即可满足。}$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^3)$$

## 3.5

$$T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6046}$$

$$\text{显然存在 } n_0 \text{ 使得 } n > n_0 \text{ 时有 } \frac{1}{4}n > \sqrt{n}$$

$$\text{即 } T(n/2) < T(n/2 + \sqrt{n}) < T(3n/4)$$

$$\text{用master定理计算 } T_1(n) = T_1(n/2) + \sqrt{6046} \text{ 与 } T_2(n) = T_2(3n/4) + \sqrt{6046}, \text{ 可得: } T_1(n) = \Theta(\lg n), T_2(n) = \Theta(\lg n)$$

$$\text{故应有 } T(n) = \Theta(\lg n)$$

## 4

运用主定理求解下面方程，假设  $T$  为  $O(1)$  作为基本情况：（该题考察主定理，20分）

### 4.1

$$T(n) = 25T(n/5) + n^{2.1}$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{2.1}, n^{\log_b a} = n^2$$

$$\text{有 } f(n) = \Theta(n^{2+0.1})$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^{2.1})$$

### 4.2

$$T(n) = 25T(n/5) + n^{1.5}$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{1.5}, n^{\log_b a} = n^2$$

$$\text{有 } f(n) = \Theta(n^{2-0.5})$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^2)$$

## 4.3

$$T(n) = 25T(n/5) + n^2$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^2, n^{\log_b a} = n^2$$

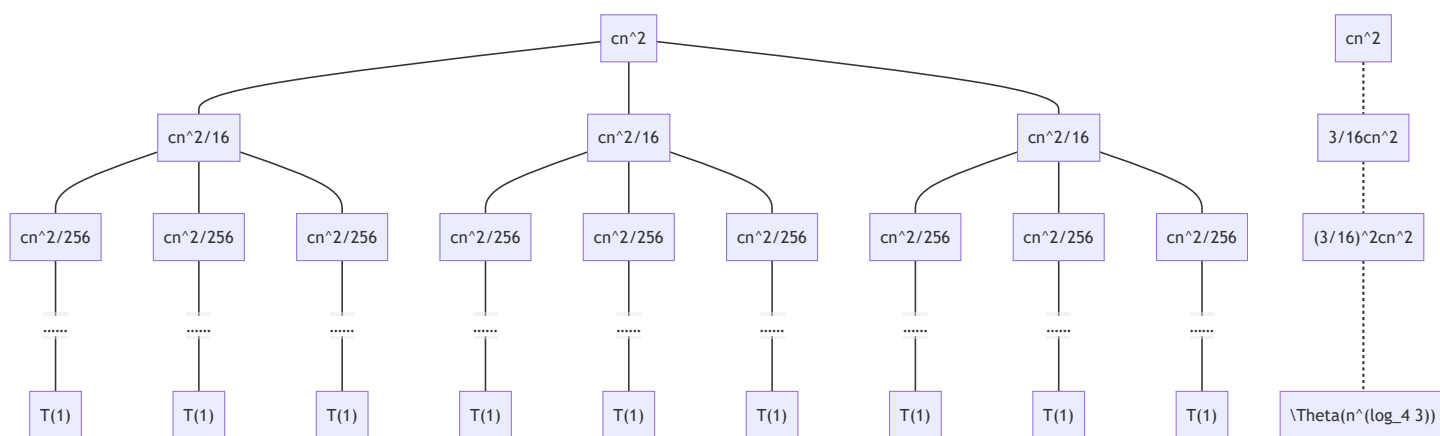
$$\text{有 } f(n) = \Theta(n^2)$$

$$\text{故 } T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$$

## 5

对递归式  $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$ , 用递归法确定一个渐进上界, 并画出递归树。

可能会用到的公式:  $a^{\log b^c} = c^{\log b^a}$  (该题考察递归树, 20分)



$$\begin{aligned} T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4(n-1)}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \sum_{i=0}^{\log_4(n-1)} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \end{aligned}$$

猜想： $T(n) = O(n^2)$ 。代入验证：

使用第二数学归纳法。假设当 $n < k$ 时，命题成立。即存在 $d > 0$ ，当 $n < k$ 时有

$$T(n) \leq dn^2 \tag{1}$$

当 $n = k$ 时，有：

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2 \leq 3dn^2/16 + cn^2 = (3/16d + c)n^2$$

令 $d \leq \frac{16}{13}c$ ，有：

$$T(n) \leq dn^2 \tag{2}$$

由式(1)(2)有 $T(n) = O(n^2)$ 成立。