算法设计与分析第二章作业

苏亦凡　　计科12班　　200111229

1

用 O、Ω、Θ 表示函数 f 与 g 之间阶的关系，并分别指出下列函数中阶最低和最高的函数：（该题考察阶的关系，20分）

(1) $f(n)=100$，$g(n)=\sqrt[100]{n}$

- $f(n)=O(g(n))$

(2) $f(n)=6n+n\lfloor\log n\rfloor$，$g(n)=3n$

- $f(n)=\Omega(g(n))$

(3) $f(n)=\frac{n}{\log n}-1$，$g(n)=2\sqrt{n}$

- $f(n)=\Omega(g(n))$

(4) $f(n)=2^n+n^2$，$g(n)=3^n$

- $f(n)=O(g(n))$

(5) $f(n)=\log_3 n$，$g(n)=\log_2 n$

- $f(n)=\Theta(g(n))$

阶最低函数：$f(n)=100$
阶最高函数：$g(n)=3^n$

2

证明：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ 有常数上界。（该题考察和式求和，20分）

当$k-1\le x\le k$ 时，有 $\dfrac{1}{k^2}\le\dfrac{1}{x^2}$，故:

$$\frac{1}{k^2}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx,(k=2,3\cdots)$$

故有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=2$$

故$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$有常数上界。

3

给出下列各式中 $T(n)$ 的渐近上下界，假设当 $n \leq 10$ 时，$T(n)$ 为常数，尽可能保证给出的界限是紧的，并验证给出的答案。（该题考察递归方程解法，20分）

3.1

$T(n)=3T(n/5)+\lg^2 n$

使用master定理
$a=3, b=5, f(n)=\lg^2 n, n^{\log_b a}=n^{\log_5 3}, \log_5 3 \approx 0.683$
有$f(n)=O(n^{\log_b a-\epsilon}), (0<\epsilon<log_b a)$
故$T(n)=\Theta(n^{\log_5 3})$

3.2

$T(n)=T(\sqrt{n})+\Theta(\lg\lg n)$

令$m=\lg n$，有$T(2^m)=T(2^{m/2})+\Theta(\lg m)$

令$S(m)=T(w^m)$，得$S(m)=S(m/2)+\Theta(\lg m)$

令$q=\lg m, Q(q)=S(2^q)$，得$Q(q)=Q(q-1)+\Theta(q)$。

易得$Q(q)=\Theta(q^2)$，$Q(q)=S(m)=T(n)$，$q=\lg\lg n$。

最终得到：$T(n)=\Theta((\lg\lg n)^2)$

3.3

$T(n)=10T(n/3)+17n^{1.2}$

使用master定理
$a=10, b=3, f(n)=17n^{1.2}, n^{\log_b a}=n^{\log_3 10}, \log_3 10 \approx 2.10$
有$f(n)=O(n^{1.2})=O(n^{\log_b a-\epsilon})$,取$\epsilon=0.8$
故$T(n)=\Theta(n^{\log_3 10})$

3.4

$T(n) = 7T(n/2) + n^3$

使用master定理
$a = 7, b = 2, f(n) = n^3, n^{\log_b a} = n^{\log_2 7}, \log_2 7 \approx 2.80$
有$f(n) = \Omega(n^{\log_3 7+\epsilon})$,取$\epsilon = 0.1$
正则条件：$af(n/b) = \frac{7}{8}n^3$，取$c = \frac{7}{8}$即可满足。
故$T(n) = \Theta(n^3)$

3.5

$T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6046}$

显然存在n_0使得$n > n_0$时有$\frac{1}{4}n > \sqrt{n}$
即$T(n/2) < T(n/2 + \sqrt{n}) < T(3n/4)$

用master定理计算$T_1(n) = T_1(n/2) + \sqrt{6046}$与$T_2(n) = T_2(3n/4) + \sqrt{6046}$，可得：$T_1(n) = \Theta(\lg n), T_2(n) = \Theta(\lg n)$

故应有$T(n) = \Theta(\lg n)$

4

运用主定理求解下面方程，假设 T 为 $O(1)$ 作为基本情况：（该题考察主定理，20分）

4.1

$T(n) = 25T(n/5) + n^{2.1}$

$a = 25, b = 5, f(n) = n^{2.1}, n^{\log_b a} = n^2$
有$f(n) = \Theta(n^{2+0.1})$
故$T(n) = \Theta(n^{2.1})$

4.2

$T(n) = 25T(n/5) + n^{1.5}$

$a = 25, b = 5, f(n) = n^{1.5}, n^{\log_b a} = n^2$
有$f(n) = \Theta(n^{2-0.5})$
故$T(n) = \Theta(n^2)$

4.3

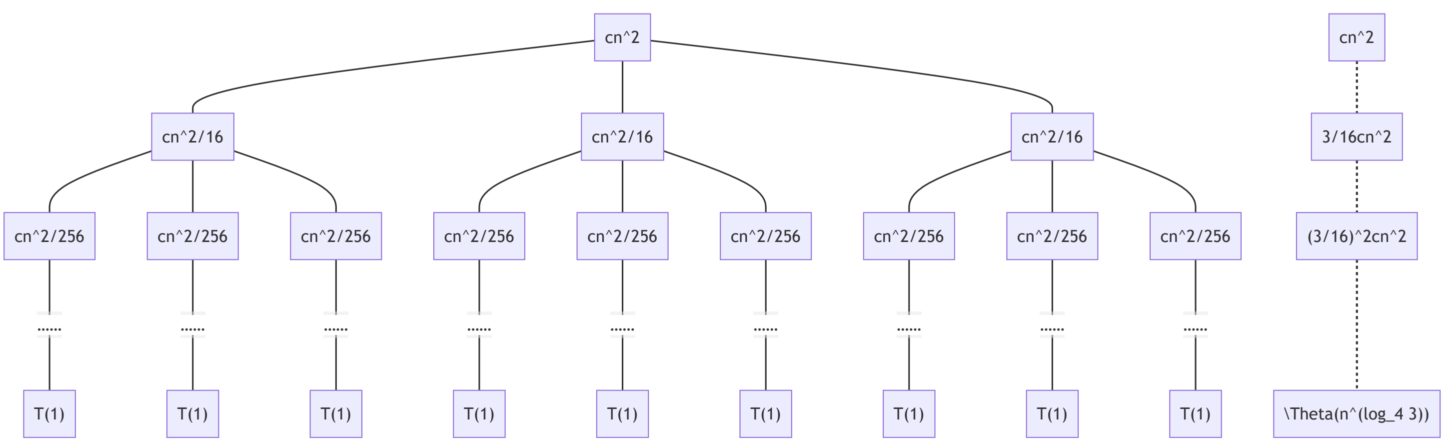
$T(n)=25T(n/5)+n^2$

$a=25,b=5,f(n)=n^2,n^{\log_b a}=n^2$
有$f(n)=\Theta(n^2)$
故$T(n)=\Theta(n^2\lg n)$

5

对递归式 $T(n)=3T(n/4)+cn^2$，用递归法确定一个渐进上界，并画出递归树。

可能会用到的公式：$a^{\log b^c}=c^{\log b^a}$（该题考察递归树，20分）



$$
\begin{aligned}
T(n)=&cn^2+\frac{3}{16}cn^2+(\frac{3}{16})^2cn^2+\cdots+(\frac{3}{16})^{\log_4(n-1)}cn^2+\Theta(n^{\log_4 3})\\
=&\sum_{i=0}^{\log_4(n-1)}(\frac{3}{16})^i cn^2+\Theta(n^{\log_4 3})\\
=&\frac{(\frac{3}{16})^{\log_4 n}-1}{\frac{3}{16}-1}cn^2+\Theta(n^{\log_4 3})
\end{aligned}
$$

猜想：$T(n)=O(n^2)$。代入验证：

使用第二数学归纳法。假设当$n<k$时，命题成立。即存在$d>0$，当$n<k$时有

$$T(n)\le dn^2 \tag{1}$$

当$n=k$时，有：

$$T(n)=3T(n/4)+cn^2\le 3dn^2/16+cn^2=(3/16d+c)n^2$$

令$d\le\frac{16}{13}c$，有：

$$T(n)\le dn^2 \tag{2}$$

由式(1)(2)有$T(n)=O(n^2)$成立。