第三章　多维随机变量及其分布

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布

有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

条件概率分布

随机变量函数的分布

二、主要内容

二维随机变量

推广

随机变量的相互独立性

定义

联合分布律

联合分布函数

联合概率密度

条件分布

定义

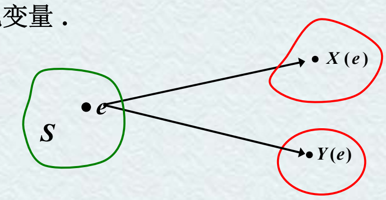
性质

边缘分布

两个随机变量的函数的分布

二维随机变量

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量．



实例1　炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量.

实例2　考查某一地 区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H,W).

说明

二维随机变量 (X,Y) 的性质不仅与 X、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

二维随机变量的分布函数

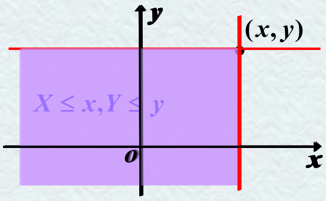
(1) 定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x, y，二元函数：

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

$F(x,y)$ 的函数值就是随机点落 在如图所示区域内的概率．



(2) 性质

1^0 $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$;

对于任意固定的 x，当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

2^0 $0 \le F(x,y) \le 1$, 且有

对于任意固定的 y，$F(-\infty,y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$;

对于任意固定的 x，$F(x,-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$;

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0;$$

$$F(+\infty,+\infty) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$$

3^0 $F(x,y) = F(x+0,y), F(x,y) = F(x,y+0)$,

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续．

4^0 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,

有 $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \ge 0$.

(3) n 维随机变量的概念

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S = \{e\}$，设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \cdots, X_n = X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量．

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**．

二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X,Y) 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i,j = 1,2,\cdots$，记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots,$$

称此为二维离散型随机 变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律．

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为:

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

(X,Y) 的联合分布律有下列性质：

(1) $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$

$(i=1,2,\cdots,m,\cdots;\ j=1,2,\cdots,n,\cdots)$；

(2) $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$；

(X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = \sum_{x_i \leqslant x,\, y_j \leqslant y} p_{ij}$$

例 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里,随机抽取两支,若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求 (X,Y) 的分布律.

解 (X,Y) 所取的可能值是

$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$.

抽 抽取一支绿笔,一支红笔 $\binom{}{0}\binom{}{0}\binom{}{2}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}$,

$$P\{X=0,Y=1\}=\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

X\Y	0	1	2
0	3/28	3/14	1/28
1	9/28	3/14	0
2	3/28	0	0

二维连续型随机变量的概率密度

(1) 定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$,如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量,函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度,或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

(2) 性质

1^0 $f(x,y)\geq 0.$

2^0 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty)=1.$

3^0 若$f(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$

4^0 设G是xoy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率是

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(3) 说明

几何上, $z = f(x,y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

表示介于 $f(x, y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

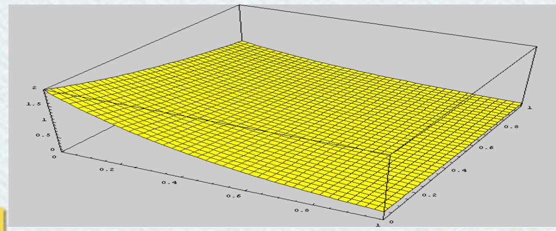
$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x,y)$为顶面的柱体体积.

例 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.



解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

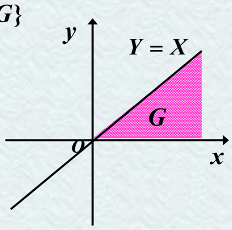
$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

即有 $\{Y\le X\}=\{(X,Y)\in G\}$,

$$P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in G\}$$
$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}.$$



例 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & x>0 \text{ 且 } y>x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(1) (X,Y)的分布函数;

(2) 求 $P\{0<X<1, x<Y<1\}$。

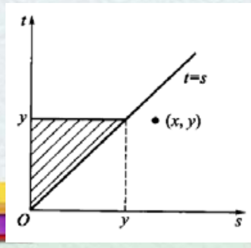
解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\mathrm{d}t$

当 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 时, $f(s,t)=0$

$$F(x,y)=0$$

当 $x>0$, $0<y\leqslant x$ 时

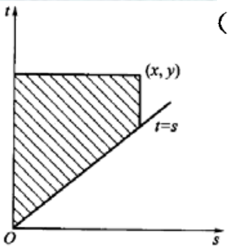
$$F(x,y)=\int_0^y \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^y t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1-y\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-y}$$



当 $x>0, y>x$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}s\int_s^y \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x(\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}s$$

$$=1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-y}$$



(2) $P\{0<X<1, x<Y<1\}$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=1-2\mathrm{e}^{-1}$$

(4) 两个常用的分布

设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S, 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty)$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数, $\sigma_1>0, \sigma_2>0, -1<\rho<1$, 则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布. 记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

边缘分布函数

问题: 已知 (X,Y) 的分布, 如何确定 X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\},\quad F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

边缘分布函数

设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数, 则

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\},$$

令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty)$$

为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty, Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

离散型随机变量的边缘分布

设二维离散随机变 量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律 .

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty} p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty} p_{mj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$\sum_{i=1}^{\infty} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{\infty} p_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{\infty} p_{in}$	$\cdots$	

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j=1,2,\cdots.$$

联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

随机变量关于X 和 Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

例 设(X,Y)的联合分布律为

求(X,Y)的边缘分布律。

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
1	1/18	1/9	1/18	2/9
2	1/18	1/18	1/9	2/9
3	1/9	2/9	2/9	5/9
$p_{\cdot j}$	2/9	7/18	7/18	

(X,Y)关于 X,Y 的边缘分布律分别为：

X	1	2	3
$p_{i\cdot}$	2/9	2/9	5/9

Y	0	1	2
$p_{\cdot j}$	2/9	7/18	7/18

连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X,Y),设它的概率密度为 $f(x,y)$,由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Y 的边缘概率密度.

例 设(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+3y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求(1) 常数 C；(2) $f_X(x)$，$f_Y(y)$。

解 (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} Ce^{-(2x+3y)}\,\mathrm{d}y=1$$

即$\dfrac{C}{6}=1$，故 $C=6$。

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $x<0$ 时，$f(x,y)=0$，因而 $f_X(x)=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}$；

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 3\mathrm{e}^{-3y}, & y\geqslant 0\end{cases}$$

例 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

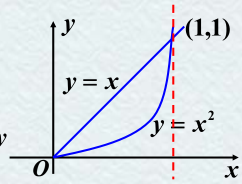
求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $0\le x\le 1$时,

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

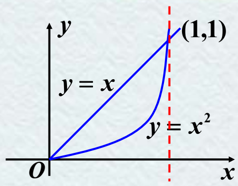
$=\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y$



$=6(x-x^2)$.

当 $x<0$ 或 $x>1$时,

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$.



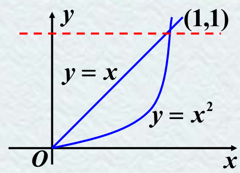
因而得 $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $0\le y\le 1$时,

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

$=\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x$

$=6(\sqrt{y}-y)$.



当 $y<0$ 或 $y>1$时, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=0$.

得 $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例 设二维随机变量 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$,

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0, \sigma_2>0$,

$-1<\rho<1$.

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,

令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(u^2-2\rho uv+v^2)}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\mathrm{e}^{\frac{-(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,并且都不依赖于参数 ρ.

请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定. 举一反例以示证明.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布 ,但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

随机变量的条件分布

(1) 离散型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 y_j, 若 $P\{Y=y_j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$$i=1,2,\cdots,$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同理可定义

对于固定的 i, $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

$$j=1,2,\cdots,$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

(2) 连续型随机变量的条件分布

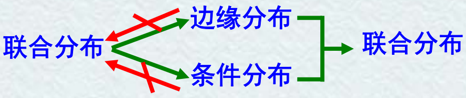
设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$.若对于固定的 y, $f_Y(y)>0$, 则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

在给定 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



随机变量的相互独立性

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数.若对于所有 x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即 $\quad F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的.

说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ 即 $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$.

(2) 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$

(3) X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

例 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3} + \alpha + \beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} + \alpha$	$\frac{1}{18} + \beta$	$\frac{2}{3} + \alpha + \beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \frac{2}{3} + \alpha + \beta = 1,$

故α与β应满足的条件是 : $\alpha \ge 0, \beta \ge 0$ 且 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$.

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\quad \alpha + \beta = \frac{1}{3}, \quad$ 得 $\beta = \frac{1}{9}.$

例 设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$,Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的联合概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<\infty$;

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

得 $f(x,y)=\dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时, $f(x,y)=0.$

例 已知(X,Y) 服从区域

$G:\{(x,y)/0\leqslant x<2,\ 0\leqslant y<\sqrt{2x-x^2}\}$

上的均匀分布,求关于 X 和 Y 的边缘分布密度,并判定 X 和 Y 是否独立?

解 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & 0\leqslant x<2 \text{ 且 } 0\leqslant y<\sqrt{2x-x^2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}dx=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\left[如在\left(1,\frac{1}{2}\right)处\right]$,

故 X,Y 不独立。

例

若(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho)$。

试证:X,Y 相互独立的充分必要条件是$\rho=0$。

证明 $f(x,y)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

若 X 与 Y 独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 对任意 x 与 y 均成立，在（μ_1，μ_2）点当然也成立。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=1$，故 $\rho=0$。

若 $\rho=0$，显然有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 恒成立。

故 X 与 Y 独立。

二维随机变量的推广

(1) n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**分布函数**为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\},$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为任意实数.

(2) n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**概率密度函数**

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

(3) n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的边缘**分布函数**

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

$$F_{X_1,X_2}(x_1)=F(x_1,x_2,\infty,\infty,\cdots,\infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 (X_1,X_2) 的**边缘分布函数**.

其它依次类推.

(4) n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**边缘概率密度**

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n,$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

(5) 随机变量相互独立的定义的推广

若对于所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_m,\ y_1,y_2,\cdots,y_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中 F_1,F_2,F 依次为随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 和 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,\ Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的分布函数，则称随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 是相互独立的.

定理　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立. 则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立. 又若 h，g 是连续函数. 则 $h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

随机变量函数的分布

(1)离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)} p_{ij},\quad k=1,2,\cdots.$$

例 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z=\max(X,Y)$ 的分布律 .

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\},$

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i, Y<i\}$$
$$+P\{X\le i, Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故 $Z=\max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(2)连续型随机变量函数的分布

$Z=X+Y$ 的分布

设 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$也可表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=}\ \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般,设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z=X+Y$仍然服从正态分布,且有$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

$\Downarrow$

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

$Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

设 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则$Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f(yz,y)\,\mathrm{d}y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\cdot f_X(yz)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

推广

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i),(i=1,2,\cdots,n)$ 则$M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$及$N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数分别为

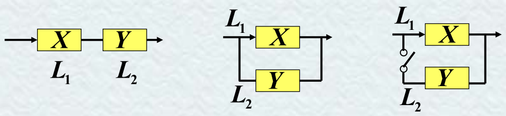
$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\ F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

例 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度 .

解 (i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时, 系统 L 才停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z=\max(X,Y)$.

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作, 因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和, 即

$$Z=X+Y$$

当 $z>0$ 时, $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}].$$

当 $z<0$ 时, $f(z)=0$,

于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}], & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品，从10件产品中不放回地抽取3件，用 X 表示其中的一等品数，Y 表示其中的二等品数．求：

(1) (X,Y) 的联合分布律；

(2) X,Y 的边缘分布律；

(3) X 和 Y 是否独立；

(4) 在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布律．

解 由题设知 X 只能取 0, 1, 2,

Y 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时，有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2\le i+j\le 3$ 时，由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X,Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0,$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立．

(4) 在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件概率为

$$P\{Y=j|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=j\}}{P\{X=0\}},\quad j=0,1,2,3.$$

因此 Y 的条件分布律为

$Y=j\|X=0$	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

例2 设随机变量 (X,Y) 在矩形

$$G=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 由题设知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 若\ (x,y)\in G,\\ 0, & 若\ (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$S=X\cdot Y$, 设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数，则当 $s<0$ 时, $F(s)=P\{XY\le s\}=0$,

当 $s\ge 2$ 时, $F(s)=P\{XY\le s\}=1$,

当 $0\le s<2$ 时,

$$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=1-P\{XY>s\}$$

$$=1-\iint_{xy>s} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

故 $$f(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0\le s<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例3 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立？为什么？

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}$, $P\{X<1|Y=2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

备用例题

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$, 得

$$1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y cxe^{-y}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{c}{2}\Gamma(3)=c,$$

$\Rightarrow c=1$.

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}xe^{-y}\,\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}\,\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

由于在 $0<x<y<+\infty$ 上, $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不独立.

(3) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(4) $P\{X<1|Y<2\}=\dfrac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 xe^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_0^2\frac{1}{2}y^2e^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-5e^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1} f_{X|Y}(x|2)\,\mathrm{d}x,$$

而 $f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

从而有

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有：

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$
$$=\int_0^y\mathrm{d}v\int_0^v ue^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2e^{-v}\,\mathrm{d}v$$
$$=1-\left(\frac{y^2}{2}+y+1\right)e^{-y}.$$

当 $0\le x<y<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x\mathrm{d}u\int_u^y ue^{-v}\,\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^x u(e^{-u}-e^{-y})\,\mathrm{d}u$$
$$=1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ 1-\left(\dfrac{y^2}{2}+y+1\right)e^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)e^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$,

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$, 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时, 从而有:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\ge 0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x$

$$=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=e^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1}f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\left[e^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}}\right]\mathrm{d}z=1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\ge 1\}$

$$=1-P\{X\ge 1,Y\ge 1\}$$
$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^v ue^{-v}\,\mathrm{d}u$$
$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}v^2e^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}e^{-1}.$$