第三章　矩阵分析

§1　矩阵序列的极限

一、定义及运算律

定义　设有矩阵序列$\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in \mathbf{C}^{m\times n}$。若 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$，则称$\{A^{(k)}\}$**收敛**于 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，记为 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$ 或 $A^{(k)}\to A\quad(k\to+\infty)$；如果$\{a_{ij}^{(k)}\}$中至少一个极限不存在，则称$\{A^{(k)}\}$**发散**。

可见一个矩阵序列的收敛相当于 mn 个数列极限的收敛。

定理　$\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$，其中$\|\bullet\|$是$\mathbf{C}^{m\times n}$的任意矩阵范数。

证　因为　$\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|\le\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=\|A^{(k)}-A\|_{\mathrm{G}}\le\sqrt{mn}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|$

所以　$\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^{(k)}-A\|_{\mathrm{G}}=0\overset{\text{等价性}}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$。　**证毕**

推论　若 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^{(k)}\|=\|A\|$。

证　由 $\left|\|A^{(k)}\|-\|A\|\right|\le\|A^{(k)}-A\|$ 即得。**证毕**

注　上述推论的相反结果不成立。如 $A^{(k)}=\begin{pmatrix}(-1)^k & \frac{1}{k}\\ 1 & 2\end{pmatrix}$不收敛，但

$$\lim_{k\to+\infty}\|A^{(k)}\|_{\mathrm{F}}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt{1+\tfrac{1}{k^2}+1+4}=\sqrt{6}\ 。$$

性质 1　设 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)}=B$，其中 A,B 同阶，则

$$\lim_{k\to+\infty}(\lambda A^{(k)}+\mu B^{(k)})=\lambda A+\mu B,\qquad \lambda,\mu\in\mathbf{C}$$

证　因为　$\|(\lambda A^{(k)}+\mu B^{(k)})-(\lambda A+\mu B)\|\le|\lambda|\|A^{(k)}-A\|+|\mu|\|B^{(k)}-B\|$

所以　$$\lim_{k\to+\infty}\|(\lambda A^{(k)}+\mu B^{(k)})-(\lambda A+\mu B)\|=0,$$

故 $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda A^{(k)}+\mu B^{(k)})=\lambda A+\mu B$。**证毕**

性质 2　设 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)}=B$，且 AB 有意义，则 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}B^{(k)}=AB$。

证 因为 $$\left\|A^{(k)}B^{(k)}-AB\right\|=\left\|A^{(k)}B^{(k)}-AB^{(k)}+AB^{(k)}-AB\right\|$$
$$\le\left\|A^{(k)}-A\right\|\left\|B^{(k)}\right\|+\left\|A\right\|\left\|B^{(k)}-B\right\|$$

由推论知$\left\|B^{(k)}\right\|$有界，从而 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}B^{(k)}-AB\right\|=0$，故 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}B^{(k)}=AB$。 **证毕**

性质 3 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}=A$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}PA^{(k)}Q=PAQ$。

性质 4 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{(k)}=A$，且 $A^{(k)}$与A均可逆，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}=A^{-1}$。

证 因为 $A^{(k)}(A^{(k)})^{-1}=I$，两边取极限并利用性质 2，得 $A\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}=I$，即 $\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}=A^{-1}$。**证毕**

注 性质 4 中要求 $A^{(k)}$与A的逆矩阵均存在，否则 $\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}$可能发散，如

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{k} & \frac{1}{k}\\ -1 & \mathrm{e}^{-k}\end{pmatrix}$$，可知 $A^{(k)}\to A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$不可逆，

而 $\det A^{(k)}=(1+\frac{1}{k})\mathrm{e}^{-k}+\frac{1}{k}\ne 0$，即 $A^{(k)}$均可逆，可求得

$$(A^{(k)})^{-1}=\frac{1}{(1+\frac{1}{k})\mathrm{e}^{-k}+\frac{1}{k}}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-k} & -\frac{1}{k}\\ 1 & 1+\frac{1}{k}\end{pmatrix}，$$ 它是发散的。

二、收敛矩阵

定义 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=O$，则称 A 为**收敛矩阵**。

定理 A 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A)<1$。

证 必要性 已知 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=O$，则 $[\rho(A)]^k=\rho(A^k)\le\left\|A^k\right\|$，即有 $\lim\limits_{k\to+\infty}[\rho(A)]^k=0$，故 $\rho(A)<1$。

充分性 已知 $\rho(A)<1$，则取 $\varepsilon>0$ 使 $\rho(A)+\varepsilon<1$，存在矩阵范数$\|\bullet\|_M$使得 $\|A\|_M\le\rho(A)+\varepsilon<1$，于是$\left\|A^k\right\|_M\le\|A\|_M^k$，即 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^k\right\|_M=0$，故 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=O$。

证毕

推论 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数$\|\bullet\|$有$\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵。

证 法 1. $\rho(A)\le\|A\|<1$，故 $A^k\to O$。

法 2. $\left\|\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{O}\right\|=\left\|\boldsymbol{A}^k\right\|\le\|\boldsymbol{A}\|^k$，当$\|\boldsymbol{A}\|<1$时，$\left\|\boldsymbol{A}^k\right\|\to 0$，故$\boldsymbol{A}^k\to\boldsymbol{O}$。**证毕**

例　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$是否为收敛矩阵？为什么？

解　$\|\boldsymbol{A}\|_1=0.9<1$(或$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{0.89}\approx 0.943<1$)，所以 $\boldsymbol{A}$ 是收敛矩阵。

（可求得 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=2.5$，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=3\times 0.5=1.5$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=1.4$。）

作为收敛矩阵的应用，考虑求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的迭代解法：

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是精确解，即 $\boldsymbol{Ax}^*=\boldsymbol{b}$，将方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价地变为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{d}$，这里等价的含义是 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{Bx}^*+\boldsymbol{d}$。构造迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{d}\qquad(k=0,1,\cdots)$$

取定初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，由迭代格式得到向量序列$\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$，希望 $\boldsymbol{x}^{(k)}\to\boldsymbol{x}^*\ (k\to+\infty)$，问应满足什么条件？

因为　$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x}^{(k-1)}-\boldsymbol{x}^*)=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}(\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^*)$$

可见　$$\boldsymbol{x}^{(k)}\to\boldsymbol{x}^*\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^k\to\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\rho(\boldsymbol{B})<1\Leftarrow\|\boldsymbol{B}\|<1。$$

常用的迭代格式是 Jacobi 迭代：

将线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 变形为

$$x_i=-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j+\frac{b_i}{a_{ii}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 Jacobi 迭代格式为　$$x_i^{(k+1)}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}+\frac{b_i}{a_{ii}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)。$$

§2 矩阵级数

一、矩阵级数

定义 由 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$ 构成的无穷和 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 称为**矩阵级数**。如果矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 的**部分和** $\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 所构成的矩阵序列 $\{\boldsymbol{S}^{(N)}\}$ 收敛，且有极限 $\boldsymbol{S}$，即 $\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{S}$，则称该矩阵级数**收敛**，$\boldsymbol{S}$ 称为**和**，记为 $\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$；如果 $\{\boldsymbol{S}^{(N)}\}$ 发散，则称矩阵级数**发散**。

若记 $\boldsymbol{A}^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$，$\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 相当于 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_{ij}^{(k)}=s_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$，即矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛相当于 mn 个数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_{ij}^{(k)}$ 收敛。如果其中至少一个数项级数发散，则矩阵级数发散。

定义 设 $\boldsymbol{A}^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in\mathbf{C}^{m\times n}$ $(k=0,1,\cdots)$，如果 mn 个数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_{ij}^{(k)}$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 均绝对收敛，即 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ 收敛，则称矩阵级数**绝对收敛**。

性质 1 若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$，$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{B}^{(k)}=\boldsymbol{B}$，则 $\sum_{k=0}^{+\infty}(\boldsymbol{A}^{(k)}+\boldsymbol{B}^{(k)})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

证 由 $\sum_{k=0}^{N}(\boldsymbol{A}^{(k)}+\boldsymbol{B}^{(k)})=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}+\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{B}^{(k)}$ 即得。**证毕**

性质 2 若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$，则 $\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda\boldsymbol{A}^{(k)}=\lambda\boldsymbol{A}$。

性质 3 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛，则它也一定收敛。

性质 4 绝对收敛矩阵级数不因改变项的位置而改变其和。

性质 5 矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$ 收敛，其中

$\|\bullet\|$ 是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的任意矩阵范数。

证 先取 m_1-范数。若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}$ 收敛，由于

$$|a_{ij}^{(k)}|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(k)}|=\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}\qquad(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

由正项级数的比较判别法知 $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{ij}^{(k)}|$ 均收敛，即 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛。反之，若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 绝对收敛，则 $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{ij}^{(k)}|$ 均收敛，从而其部分和有界，即 $\sum_{k=0}^{N}|a_{ij}^{(k)}|=M_{ij}$。取 $M=\max\limits_{i,j}M_{ij}$，则 $\sum_{k=0}^{N}|a_{ij}^{(k)}|\le M$，从而 $\sum_{k=0}^{N}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{(k)}|\le mnM$，故 $\sum_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}$ 收敛。这表明

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\text{ 绝对收敛}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}\text{ 收敛}$$

由矩阵范数的等价性有： $\alpha\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}\le\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|\le\beta\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}$

根据正项级数的比较判别法知：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|_{m_1}\text{ 收敛}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|\text{收敛}$$ **证毕**

性质 6 若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛（或绝对收敛），则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也收敛（或绝对收敛），且 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$ 。

证 若 $\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛，令 $\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$， $\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}$，则 $\lim\limits_{N\to+\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{S}$。从而

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{PA}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{P}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{PSQ}=\boldsymbol{P}(\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)})\boldsymbol{Q}$$

若$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$绝对收敛，则有 $\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}\|\le\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|\|\boldsymbol{Q}\|=c\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|$，其中$c=\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{Q}\|$。因为$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}\|$收敛，由比较判别法知：$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}\|$收敛，即$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}$绝对收敛。

证毕

性质 7 若$\mathbf{C}^{m\times n}$和$\mathbf{C}^{n\times l}$中的两个矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$和$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{B}^{(k)}$均绝对收敛，且其和分别为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$，则它们的柯西乘积

$$\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(0)}+(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(0)})+(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(2)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{B}^{(0)})+\cdots$$

也绝对收敛，且其和为$\boldsymbol{AB}$。

二、矩阵幂级数

1．矩阵幂级数

定义 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$a_k\in\mathbf{C}$（$k=0,1,\cdots$），称矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$为**矩阵$\boldsymbol{A}$的幂级数**。

幂级数的理论：幂级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ $(a_k\in\mathbf{R})$的收敛范围是包含原点的一个区间$(-r,r)$，且幂级数在此区间内绝对收敛，其中r是收敛半径，它由$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$确定：

若$\rho\ne0$，则$r=\dfrac{1}{\rho}$；若$\rho=0$，则$r=+\infty$；若$\rho=+\infty$，则$r=0$。区间端点应另外判别其收敛性。

对于复的幂级数，其收敛区域是复平面上包含原点的一个圆域$|x|<r$，且在圆域内，幂级数绝对收敛，其中收敛半径r仍由$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$确定。

定理 设幂级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$的收敛半径为$r$，又$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则

1）当$\rho(\boldsymbol{A})<r$时，矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$绝对收敛；

2）当 $\rho(\boldsymbol{A})>r$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$ 发散。

证 1） 因为 $\rho(\boldsymbol{A})<r$，故存在 $\varepsilon>0$，使 $\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon<r$。根据第二章的定理，存在 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\bullet\|$ 使得 $\|\boldsymbol{A}\|\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$，从而

$$\|a_k\boldsymbol{A}^k\|\le|a_k|\|\boldsymbol{A}\|^k\le|a_k|\ (\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon)^k \le |a_k|\,(r)^k$$

由 $\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon<r$ 知，级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon)^k$ 绝对收敛，从而 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛（因为 $\sum_{k=0}^{+\infty}\|a_k\boldsymbol{A}^k\|$ 收敛）。

2） 由 Schur 定理，存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$。于是

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{T}^k \text{ 收敛，}$$

而 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{T}^k$ 的对角元素是 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda_i^k$（$i=1,2,\cdots,n$），若 $\rho(\boldsymbol{A})>r$，则有某个特征值 λ_j 满足 $|\lambda_j|=\rho(A)>r$，从而 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda_j^k$ 发散，故 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{T}^k$ 发散，也即 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$ 发散。

证毕

推论 1 设幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 的收敛半径为 r，又 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$。若对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某个矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\|\boldsymbol{A}\|<r$，则 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛。

证 由 $\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|<r$ 即得。**证毕**

推论 2 若 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 的收敛半径是 $r=+\infty$，则对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛。

例　判断矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{6^k}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}^k$的敛散性。

解　法 1. 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，取幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{6^k}x^k$，因为

$$\rho=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{k+1}{6^{k+1}}}{\frac{k}{6^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{1}{6}$$

所以收敛半径为$r=\frac{1}{\rho}$=6。可求得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=5,\lambda_2=-3$，即$\rho(\boldsymbol{A})=5<6$，故矩阵幂级数绝对收敛。

法 2. 取幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty}kx^k$，$\boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$。可求得$r=1$，$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\frac{5}{6},\lambda_2=-\frac{1}{2}$。于是$\rho(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}<1$，故矩阵幂级数绝对收敛。

2. Neumann 级数

定理　设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^k$（称为 **Neumann 级数**）收敛的充要条件是$\rho(\boldsymbol{A})<1$（即$\boldsymbol{A}$为收敛矩阵），并且在收敛时，其和为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$。

证　（$\Rightarrow$）已知$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^k$收敛。记$\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^k$，$\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^k$，则$\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{S}$。

由于
$$\boldsymbol{A}^N=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^k-\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{S}^{(N)}-\boldsymbol{S}^{(N-1)}$$

所以
$$\lim_{N\to+\infty}\boldsymbol{A}^N=\lim_{N\to+\infty}(\boldsymbol{S}^{(N)}-\boldsymbol{S}^{(N-1)})=\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}=\boldsymbol{O}$$

即$\boldsymbol{A}$是收敛矩阵，故$\rho(\boldsymbol{A})<1$。

（$\Leftarrow$）已知$\rho(\boldsymbol{A})<1$。由于幂级数$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$的收敛半径为$r=1$，所以$\rho(\boldsymbol{A})<r$，即$\sum_{k=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^k$收敛。由于$\rho(\boldsymbol{A})<1$，可找到$\varepsilon>0$使$\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon<1$，从而存在矩阵范数，使$\|\boldsymbol{A}\|\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon<1$，这表明$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$可逆。于是由

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^N)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{N+1}$$

得 $$I+A+A^2+\cdots+A^N=(I-A)^{-1}-A^{N+1}(I-A)^{-1}$$

取极限，并注意 $A^{N+1}\to O$（$N\to+\infty$），即得 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}$。**证毕**

推论 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某个矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\|A\|<1$，则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}$，且有误差估计式（以 $(I-A)^{-1}$ 作为 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k$ 的近似）:

$$\left\|(I-A)^{-1}-(I+A+A^2+\cdots+A^N)\right\|\le\frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$$

证 因为 $\rho(A)\le\|A\|<1$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}$，从而

$$\left\|(I-A)^{-1}-(I+A+A^2+\cdots+A^N)\right\|=\left\|\sum_{k=N+1}^{+\infty}A^k\right\|$$

又因为 $$\left\|\sum_{k=N+1}^{N+l}A^k\right\|\le\sum_{k=N+1}^{N+l}\|A\|^k=\|A\|^{N+1}\frac{1-\|A\|^l}{1-\|A\|}$$

所以 $$\left\|\sum_{k=N+1}^{+\infty}A^k\right\|=\lim_{l\to+\infty}\left\|\sum_{k=N+1}^{N+l}A^k\right\|\le\frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$$

代人前式即得。**证毕**

例 已知 $A=\begin{pmatrix}0.2&0.1&0.2\\0.5&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{pmatrix}$，判断 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k$ 的敛散性。若收敛，求其和。

解 因为 $\|A\|_1=0.9<1$，所以 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k$ 收敛，且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0.8&-0.1&-0.2\\-0.5&0.5&-0.4\\-0.1&-0.3&0.8\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}28&14&14\\44&62&42\\20&25&35\end{pmatrix}$$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^k$ 收敛的原因是 $\underline{\rho(A)=\frac{5}{6}<1}$，且其和为 $\underline{(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}&-\frac{16}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}}$。