§3　矩阵函数

矩阵函数是以矩阵为变量且取值为矩阵的一类函数。

一、矩阵函数的定义之一 ——利用收敛的矩阵幂级数的和

定义　设幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 r，其和函数为 $f(x)$。若矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $\rho(\boldsymbol{A}) < r$，则称收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \boldsymbol{A}^k$ 的和为 $\boldsymbol{A}$ 的**矩阵函数**，记为 $f(\boldsymbol{A})$，即 $f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \boldsymbol{A}^k$ 。

例如，在复变函数理论中，已知

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}x^k + \cdots \qquad r = +\infty$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \qquad r = +\infty$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \qquad r = +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{k+1}x^{k+1} + \cdots \qquad r = 1$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad r = 1$$

根据定义可得如下一些常用的矩阵函数：

1）指数函数

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k + \cdots \qquad \forall\ \boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

2）正弦函数

$$\sin \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 + \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)!}\boldsymbol{A}^{2k+1} + \cdots \qquad \forall\ \boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

3）余弦函数

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 + \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{(2k)!}\boldsymbol{A}^{2k} + \cdots \qquad \forall\ \boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

4）对数函数

$$\ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2 + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^3 + \cdots + (-1)^k \tfrac{1}{k+1}\boldsymbol{A}^{k+1} + \cdots \qquad \rho(\boldsymbol{A}) < 1$$

5）$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots \qquad \rho(\boldsymbol{A}) < 1$

如果把矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的变元换成 $\boldsymbol{A}t$ （t 为参数），则得 $f(\boldsymbol{A}t)$。如：

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k!}A^k t^k\ ,$$

$$\sin At=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1}t^{2k+1}\ ,$$

$$\cos At=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\tfrac{1}{(2k)!}A^{2k}t^{2k}$$

后面要用到的主要是 e^{At}。

二、矩阵函数值的计算

方法 1　利用 Hamilton—Cayley 定理

首先利用 Hamilton—Cayley 定理找出矩阵乘幂之间的关系，利用它化简矩阵幂级数，最后利用数项级数的有关结果计算之。

例　已知 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，试求 $e^A, e^{At}, \sin A, \cos At$。

解　因为 $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$，所以 $A^2+I=O$，即 $A^2=-I$。从而

$$A^3=-A,\quad A^4=I,\quad A^5=A,\quad A^6=-I,\quad A^7=-A,\quad A^8=I,\cdots$$

可知
$$A^{2k}=(-1)^k I,\quad A^{2k+1}=(-1)^k A\qquad (k=1,2,\cdots)$$

故
$$e^A=I+\tfrac{1}{1!}A+\tfrac{1}{2!}A^2+\tfrac{1}{3!}A^3+\tfrac{1}{4!}A^4+\tfrac{1}{5!}A^5+\tfrac{1}{6!}A^6+\cdots$$

$$=I+\tfrac{1}{1!}A-\tfrac{1}{2!}I-\tfrac{1}{3!}A+\tfrac{1}{4!}I+\tfrac{1}{5!}A-\tfrac{1}{6!}I-\tfrac{1}{7!}A+\tfrac{1}{8!}I-\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{4!}-\tfrac{1}{6!}+\tfrac{1}{8!}-\cdots)I+(1-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{5!}-\tfrac{1}{7!}+\cdots)A$$

$$=(\cos 1)I+(\sin 1)A=\begin{pmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=I+\tfrac{1}{1!}At+\tfrac{1}{2!}A^2t^2+\tfrac{1}{3!}A^3t^3+\tfrac{1}{4!}A^4t^4+\cdots$$

$$=(1-\tfrac{t^2}{2!}+\tfrac{t^4}{4!}-\tfrac{t^6}{6!}+\cdots)I+(t-\tfrac{t^3}{3!}+\tfrac{t^5}{5!}-\cdots)A$$

$$=(\cos t)I+(\sin t)A=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

$$\sin A=A-\tfrac{1}{3!}A^3+\tfrac{1}{5!}A^5-\tfrac{1}{7!}A^7+\tfrac{1}{9!}A^9-\cdots=A+\tfrac{1}{3!}A+\tfrac{1}{5!}A+\tfrac{1}{7!}A+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}[\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots)-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\cdots)]$$

$$=\boldsymbol{A}[\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}]=\boldsymbol{A}\,\mathrm{sh}1=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{sh}1\\ \mathrm{sh}1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4-\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6t^6+\cdots=\boldsymbol{I}(1+\tfrac{1}{2!}t^2+\tfrac{1}{4!}t^4+\cdots)$$

$$=\boldsymbol{I}[\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}]=\boldsymbol{I}\,\mathrm{ch}\,t=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,t & 0\\ 0 & \mathrm{ch}\,t\end{pmatrix}$$

方法 2. 可对角化矩阵的情形

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角阵，则易于求得矩阵函数值。

1．对于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，有

$$f(\boldsymbol{\Lambda})=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{\Lambda}^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$$

$$=\mathrm{diag}(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda_1^k,\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda_2^k,\cdots,\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda_n^k)$$

$$=\mathrm{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))$$

其中要求 λ_i 满足 $|\lambda_i|<r$（$i=1,2,\cdots,n$），而 r 是幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 的收敛半径。同样可推得

$$f(\boldsymbol{\Lambda}t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{\Lambda}^kt^k=\mathrm{diag}(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\lambda_1t)^k,\cdots,\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\lambda_nt)^k)$$

$$=\mathrm{diag}(f(\lambda_1t),f(\lambda_2t),\cdots,f(\lambda_nt))$$

例 已知 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,-2,0,4)$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}},\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t},\sin\boldsymbol{\Lambda}t,\cos\boldsymbol{\Lambda}$。

解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}}=\mathrm{diag}(\mathrm{e},\mathrm{e}^{-2},1,\mathrm{e}^4)$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-2t},1,\mathrm{e}^{4t})$，

$\sin\boldsymbol{\Lambda}t=\mathrm{diag}(\sin t,-\sin2t,0,\sin4t)$，$\cos\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\cos1,\cos2,1,\cos4)$

2．若对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，则

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^k=\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{\Lambda}^k\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$f(\boldsymbol{A}t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}t)^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{\Lambda}^k t^k\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda}t)\boldsymbol{P}^{-1}$$

例　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$，试求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}t$ 。

解　$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$， $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{p}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{p}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，故相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}，使\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix},$$

从而

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{e}&&\\&\mathrm{e}^2&\\&&\mathrm{e}^3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^3&\mathrm{e}-\mathrm{e}^2&-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^3\\\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^3&\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^3\\-\mathrm{e}+\mathrm{e}^2&-\mathrm{e}+\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&&\\&\mathrm{e}^{2t}&\\&&\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{3t}&\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{3t}\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{3t}&\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{3t}\\-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix},$$

$$\sin\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sin t&&\\&\sin 2t&\\&&\sin 3t\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sin t-\sin 2t+\sin 3t&\sin t-\sin 2t&-\sin 2t+\sin 3t\\\sin 2t-\sin 3t&\sin 2t&\sin 2t-\sin 3t\\-\sin t+\sin 2t&-\sin t+\sin 2t&\sin 2t\end{pmatrix}。$$

方法 3.　利用 Jordan 标准形

1．设 $\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$ 是 r_i 阶 Jordan 块， $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k$ 为幂级数，且 $|\lambda_i|<r$，其中 r 是幂级数的收敛半径，则

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

而
$$f(\boldsymbol{J}_i t)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{t}{1!}f'(\lambda) & \frac{t^2}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}f''(\lambda) \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!}f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_i t}$$

只推导后一式，取$t=1$时即得前一式：

$$f(\boldsymbol{J}_i t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{J}_i^k t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\begin{pmatrix} \lambda_i^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} & \mathrm{C}_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \mathrm{C}_k^{r_i-1}\lambda_i^{k-r_i+1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \mathrm{C}_k^2\lambda_i^{k-2} \\ & & & \ddots & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}t^k$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\begin{pmatrix} \lambda^k & t(\lambda^k)' & \frac{t^2}{2!}(\lambda^k)'' & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}(\lambda^k)^{(r_i-1)} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}(\lambda^k)'' \\ & & & \ddots & t(\lambda^k)' \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_i t}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda^k & t\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\lambda^k)' & \cdots & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\lambda^k)^{(r_i-1)} \\ & \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda^k & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\lambda^k)' \\ & & & & \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda^k \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_i t}$$

$$
=\begin{pmatrix}
f(\lambda) & \dfrac{t}{1!}f'(\lambda) & \dfrac{t^2}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \dfrac{t^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda) \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2!}f''(\lambda) \\
 & & & \ddots & \dfrac{t}{1!}f'(\lambda) \\
 & & & & f(\lambda)
\end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_i t}
$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，试求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \sin \boldsymbol{A}t, \cos \boldsymbol{A}$。

解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 & \frac{1}{6}\mathrm{e}^2 \\ & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \\ & & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ & & & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{2t} & \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^{3t} \\ & \mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{2t} \\ & & \mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} \\ & & & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$，

$$
\sin \boldsymbol{A}t=\begin{pmatrix} \sin 2t & t\cos 2t & -\frac{t^2}{2}\sin 2t & -\frac{t^3}{6}\cos 2t \\ & \sin 2t & t\cos 2t & -\frac{t^2}{2}\sin 2t \\ & & \sin 2t & t\cos 2t \\ & & & \sin 2t \end{pmatrix},
$$

$$
\cos \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos 2 & -\sin 2 & -\frac{1}{2}\cos 2 & \frac{1}{6}\sin 2 \\ & \cos 2 & -\sin 2 & -\frac{1}{2}\cos 2 \\ & & \cos 2 & -\sin 2 \\ & & & \cos 2 \end{pmatrix}。
$$

2．设 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$ （$i=1,2,\cdots,s$），

则

$$
f(\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & & & \\ & f(\boldsymbol{J}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix}，\quad f(\boldsymbol{J}t)=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1 t) & & & \\ & f(\boldsymbol{J}_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{J}_s t) \end{pmatrix}。
$$

只推导后一式：

$$
f(\boldsymbol{J}t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \boldsymbol{J}^k t^k=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1^k t^k, \boldsymbol{J}_2^k t^k, \cdots, \boldsymbol{J}_s^k t^k)
$$

$$=\operatorname{diag}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\boldsymbol{J}_1 t)^k,\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\boldsymbol{J}_2 t)^k,\ \cdots,\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\boldsymbol{J}_s t)^k\Big)$$

$$=\operatorname{diag}(f(\boldsymbol{J}_1 t),\ f(\boldsymbol{J}_2 t),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{J}_s t))$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \sin \boldsymbol{A}t, \cos \boldsymbol{A}t$。

解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mathrm{e}^2 & & \\ & & & & \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \\ & & & & & \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & & & \\ & 1 & t & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mathrm{e}^{2t} & & \\ & & & & \mathrm{e}^{-t} & t\,\mathrm{e}^{-t} \\ & & & & & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$，

$$\sin \boldsymbol{A}t=\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & & & \\ & 0 & t & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \sin 2t & & \\ & & & & -\sin t & t\cos t \\ & & & & & -\sin t \end{pmatrix},$$

$$\cos \boldsymbol{A}t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{t^2}{2} & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos 2t & & \\ & & & & \cos t & t\sin t \\ & & & & & \cos t \end{pmatrix}。$$

3．设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{C}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_s)$，则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & & & \\ & f(\boldsymbol{J}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$f(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1 t) & & & \\ & f(\boldsymbol{J}_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{J}_s t) \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}。$$

只推导后一式：

$$f(\boldsymbol{A}t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \boldsymbol{A}^k t^k=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k t^k=\boldsymbol{P}(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \boldsymbol{J}^k t^k)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{J}t)\boldsymbol{P}^{-1}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}$。

解 可求得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}t}\,\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ -t\,\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}-t\,\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(\sin\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \sin 2 & \cos 2 & 0 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin 2+\cos 2 & \cos 2 & 0 \\ -\cos 2 & \sin 2-\cos 2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2-\frac{1}{2}\sin 4 & \frac{1}{2}\sin 2-\frac{1}{2}\sin 4 & \sin 4 \end{pmatrix}。$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}$。

解 可求得相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$，故

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=P\begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^t & te^t \\ & & e^t \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} (1-2t)e^t & -2te^t & 6te^t \\ -te^t & (1-t)e^t & 3te^t \\ -te^t & -te^t & (1+3t)e^t \end{pmatrix};$$

$$\sin A=P(\sin J)P^{-1}=P\begin{pmatrix} \sin 1 & & \\ & \sin 1 & \cos 1 \\ & & \sin 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1 \\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1 \end{pmatrix}。$$

结论 设 $A\in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵函数 $f(A)$ 的 n 个特征值为 $f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),\cdots,\ f(\lambda_n)$。

方法 4. 待定系数法——有限级数表示法

分析： 设 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互异，且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$。由 H-C 定理知 $\varphi(A)=O$。为计算矩阵函数 $f(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kA^k$，设 $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\lambda^k$。设想用 $\varphi(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 得

$$f(\lambda)=q(\lambda)\ \varphi(\lambda)+r(\lambda)$$

其中 $r(\lambda)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式，设为 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{n-1}\lambda^{n-1}$。只要定出 b_0，$b_1,\cdots$，b_{n-1}，则

$$f(A)=q(A)\ \varphi(A)+r(A)=r(A)=b_0I+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1}$$

即 $f(A)$ 可以用有限级数来表示了。为了定出 b_0，$b_1,\cdots$，b_{n-1} 这 n 个系数，需要 n 个条件。注意到 $\varphi^{(l)}(\lambda_i)=0$ （$l=0,1,\cdots,n_i-1$； $i=1,2,\cdots,s$），则有

$$f^{(l)}(\lambda_i)=r^{(l)}(\lambda_i)\qquad (l=0,1,\cdots,n_i-1;\ i=1,2,\cdots,s)$$

同理，为计算含参数 t 的矩阵函数 $f(At)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kA^kt^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_kt^k)A^k$，设

$$f(\lambda t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\tilde{a}_k(t)\lambda^k\text{，}\qquad \text{其中 }\tilde{a}_k(t)=c_k t^k$$

设想用$\varphi(\lambda)$除$f(\lambda t)$得 $\qquad f(\lambda t)=q_t(\lambda)\,\varphi(\lambda)+r_t(\lambda)$

其中$r_t(\lambda)$是次数不超过$n-1$的多项式，设为 $r_t(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{n-1}\lambda^{n-1}$，

注意其中b_i（$i=0,1,\cdots,n-1$）均是t的函数。同样，由

$$\varphi^{(l)}(\lambda_i)=0 \qquad (l=0,1,\cdots,n_i-1;\ i=1,2,\cdots,s)$$

得 $$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda^l}f(\lambda t)\Big|_{\lambda=\lambda_i}=\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda^l}r_t(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i}\ \text{或}\qquad t^l\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}u^l}f(u)\Big|_{u=\lambda_i t}=\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda^l}r_t(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i}$$

$$(l=0,1,\cdots,n_i-1;\ i=1,2,\cdots,s)$$

利用上面诸式即可定出b_0，$b_1,\cdots$，b_{n-1}。

综上分析，用有限级数法求矩阵函数$f(\boldsymbol{A})$(或$f(\boldsymbol{A}t)$)的步骤如下：

第一步：求$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}\text{，}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$互异，$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$；

第二步：设$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{n-1}\lambda^{n-1}$，根据

$$\begin{cases}r(\lambda_i)=f(\lambda_i)\\ r'(\lambda_i)=f'(\lambda_i)\\ \quad\vdots\\ r^{(n_i-1)}(\lambda_i)=f^{(n_i-1)}(\lambda_i)\end{cases}\qquad\left(\text{或}\begin{cases}r(\lambda_i)=f(\lambda_i t)\\ r'(\lambda_i)=tf'(\lambda\ )\big|_{\lambda=\lambda_i t}\\ \quad\vdots\\ r^{(n_i-1)}(\lambda_i)=t^{n_i-1}f^{(n_i-1)}(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_i t}\end{cases}\right)\qquad i=1,2,\cdots,s$$

列方程组解出b_0，$b_1,\cdots$，b_{n-1}；

第三步：$f(\boldsymbol{A})$（或$f(\boldsymbol{A}t)$）$=r(\boldsymbol{A})=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+\cdots+b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}$

该方法的方便之处是不需确定相似变换阵（即不需求特征向量），但需要求解线性方程组以确定诸系数。

例 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，试计算$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}},\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\sin\boldsymbol{A}t,\cos\boldsymbol{A}$。

解 法 1. $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$，$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$（三重）。设

$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$，列方程组

（求 $e^{\boldsymbol{A}}$　　$e^{\boldsymbol{A}t}$　　$\sin \boldsymbol{A}t$　　$\cos\boldsymbol{A}$）

$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1+4b_2 &= e^2 & e^{2t} & \sin 2t & \cos 2 \\ r'(2)= \quad b_1+4b_2 &= e^2 & t\,e^{2t} & t\cos 2t & -\sin 2 \\ r''(2)= \quad 2b_2 &= e^2 & t^2 e^{2t} & -t^2\sin 2t & -\cos 2 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b_0=e^2 & e^{2t}-2t\,e^{2t}+2t^2e^{2t} & \sin 2t-2t\cos 2t-2t^2\sin 2t & 2\sin 2-\cos 2 \\ b_1=-e^2 & t\,e^{2t}-2t^2e^{2t} & t\cos 2t+2t^2\sin 2t & -\sin 2+2\cos 2 \\ b_2=\frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & -\frac{1}{2}t^2\sin 2t & -\frac{1}{2}\cos 2 \end{cases}$$

故

$$f(\boldsymbol{A})\text{（或 }f(\boldsymbol{A}t)\text{）}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} b_0+2b_1+4b_2 & 0 & 0 \\ b_1+4b_2 & b_0+b_1 & b_1+4b_2 \\ b_1+4b_2 & -b_1-4b_2 & b_0+3b_1+8b_2 \end{pmatrix}$$

从而
$$e^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & e^2 \\ e^2 & -e^2 & 2e^2 \end{pmatrix},\qquad e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ t\,e^{2t} & e^{2t}-t\,e^{2t} & t\,e^{2t} \\ t\,e^{2t} & -t\,e^{2t} & e^{2t}+t\,e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$\sin\boldsymbol{A}t=\begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 0 \\ t\cos 2t & \sin 2t-t\cos 2t & t\cos 2t \\ t\cos 2t & -t\cos 2t & \sin 2t+t\cos 2t \end{pmatrix},$$

$$\cos\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos 2 & 0 & 0 \\ -\sin 2 & \sin 2+\cos 2 & -\sin 2 \\ -\sin 2 & \sin 2 & -\sin 2+\cos 2 \end{pmatrix}。$$

法 2. 对应特征值 2 有 2 个线性无关的特征向量，于是 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-2)^2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式。设　　$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda$

由
$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1 &= e^2 & e^{2t} & \sin 2t & \cos 2 \\ r'(2)= \quad b_1 &= e^2 & t\,e^{2t} & t\cos 2t & -\sin 2 \end{cases}$$

（求 $e^{\boldsymbol{A}}$　　$e^{\boldsymbol{A}t}$　　$\sin\boldsymbol{A}t$　　$\cos\boldsymbol{A}$）

解得
$$\begin{cases} b_0=-e^2 & (1-2t)e^{2t} & \sin 2t-2t\cos 2t & \cos 2+2\sin 2 \\ b_1=e^2 & t\,e^{2t} & t\cos 2t & -\sin 2 \end{cases}$$

故 $$f(\boldsymbol{A})\text{（或 } f(\boldsymbol{A}t)\text{）}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_0+2b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0+b_1 & b_1 \\ b_1 & -b_1 & b_0+3b_1 \end{pmatrix}=\cdots$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，试计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 和 $\sin\boldsymbol{A}$。

解 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=1$。设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$，则由

$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1+4b_2 & =\mathrm{e}^{2t} & \sin 2 \\ r'(2)=b_1+4b_2 & =t\,\mathrm{e}^{2t} & \cos 2 \\ r(1)=b_0+b_1+b_2 & =\mathrm{e}^{t} & \sin 1 \end{cases}$$

（求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ $\quad\sin\boldsymbol{A}$）

解得 $$\begin{cases} b_0=4\mathrm{e}^t-3\mathrm{e}^{2t}+2t\,\mathrm{e}^{2t} & 4\sin 1-3\sin 2+2\cos 2 \\ b_1=-4\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t}-3t\,\mathrm{e}^{2t} & -4\sin 1+4\sin 2-3\cos 2 \\ b_2=\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+t\,\mathrm{e}^{2t} & \sin 1-\sin 2+\cos 2 \end{cases}$$

于是 $f(\boldsymbol{A})$（或 $f(\boldsymbol{A}t)$）$=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2$

$$=\begin{pmatrix} b_0+2b_1+4b_2 & b_1+16b_2 & 4(b_1+3b_2) \\ 0 & b_0+2b_1+4b_2 & 0 \\ 0 & 3(b_1+3b_2) & b_0+b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

故 $$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 12\mathrm{e}^t-12\mathrm{e}^{2t}+13t\,\mathrm{e}^{2t} & -4\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & -3\mathrm{e}^t+3\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \sin 2 & 12\sin 1-12\sin 2+13\cos 2 & -4\sin 1+4\sin 2 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & -3\sin 1+3\sin 2 & \sin 1 \end{pmatrix}。$$

3

三、 矩阵函数的定义之二——利用 Jordan 标准形

前面利用收敛的矩阵幂级数的和来定义矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$，要求 $f(x)$ 有无穷阶导数，这一条件太强。由前面介绍的方法 3 和 4 可知，只要函数 $f(x)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值处有有限阶的导数即可。故给出矩阵函数的另一定义如下：

定义　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，且可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}，其中 \boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}\quad（i=1,2,\cdots,s）。$$

若函数 $f(x)$ 在 λ_i 处有直到 r_i-1 阶的导数（$i=1,2,\cdots,s$），则定义**矩阵函数**

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{J}_1) & & & \\ & f(\boldsymbol{J}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{J}_s)\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{pmatrix}f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i)\end{pmatrix}$$

四、常用矩阵函数的性质

性质 1　负角公式　$\cos(-\boldsymbol{A})=\cos\boldsymbol{A}$，$\sin(-\boldsymbol{A})=-\sin\boldsymbol{A}$。

性质 2　Euler 公式

$$\boldsymbol{e}^{i\boldsymbol{A}}=\cos\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\sin\boldsymbol{A}，\quad \cos\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}}}{2}，\quad \sin\boldsymbol{A}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}}}{2\mathrm{i}}$$

证　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}\mathrm{i}\boldsymbol{A}-\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2-\frac{1}{3!}\mathrm{i}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4+\cdots$

$$=(\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4-\cdots)+\mathrm{i}(\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\cdots)=\cos\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\sin\boldsymbol{A}$$

同理可证得　$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{A}}=\cos\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\sin\boldsymbol{A}$，解之即得后两式。**证毕**

性质 3　如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则　$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$。

证　$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots)(\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2+\cdots)$

$$=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\tfrac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)+\cdots$$

$$=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\tfrac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2+\cdots=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$$

证毕

注　当 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\neq\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$。如取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，

则

$$e^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad e^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\neq e^{\boldsymbol{B}}e^{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix};$$

又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\det(\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))=\lambda^2-1$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$。

设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda$，由 $\begin{cases}r(1)=b_0+b_1=e\\r(-1)=b_0-b_1=e^{-1}\end{cases}$ 解得 $b_0=\dfrac{e+e^{-1}}{2},b_1=\dfrac{e-e^{-1}}{2}$，于是

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}e+e^{-1}&e-e^{-1}\\e-e^{-1}&e+e^{-1}\end{pmatrix}，可见\quad e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}\neq e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}\neq e^{\boldsymbol{B}}e^{\boldsymbol{A}}。$$

性质 4 $e^{\boldsymbol{A}}$ 可逆，且 $(e^{\boldsymbol{A}})^{-1}=e^{-\boldsymbol{A}}$。

证 $e^{\boldsymbol{A}}e^{-\boldsymbol{A}}=e^{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}}=e^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{I}$，故 $(e^{\boldsymbol{A}})^{-1}=e^{-\boldsymbol{A}}$。**证毕**

注 即使 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，但 $e^{\boldsymbol{A}}$ 总可逆；而当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\sin\boldsymbol{A}$ 和 $\cos\boldsymbol{A}$ 可能不可逆，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}&\\&\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}可逆，但\cos\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&\\&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\\&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}不可逆。$$

性质 5 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}$，$\sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}+\cos\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}$

证 $\cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}=\dfrac{e^{i\boldsymbol{A}}+e^{-i\boldsymbol{A}}}{2}\cdot\dfrac{e^{i\boldsymbol{B}}+e^{-i\boldsymbol{B}}}{2}-\dfrac{e^{i\boldsymbol{A}}-e^{-i\boldsymbol{A}}}{2i}\cdot\dfrac{e^{i\boldsymbol{B}}-e^{-i\boldsymbol{B}}}{2i}$

$$=\frac{e^{i\boldsymbol{A}}e^{i\boldsymbol{B}}+e^{i\boldsymbol{A}}e^{-i\boldsymbol{B}}+e^{-i\boldsymbol{A}}e^{i\boldsymbol{B}}+e^{-i\boldsymbol{A}}e^{-i\boldsymbol{B}}}{4}+\frac{e^{i\boldsymbol{A}}e^{i\boldsymbol{B}}-e^{i\boldsymbol{A}}e^{-i\boldsymbol{B}}-e^{-i\boldsymbol{A}}e^{i\boldsymbol{B}}+e^{-i\boldsymbol{A}}e^{-i\boldsymbol{B}}}{4}$$

$$=\frac{e^{i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}+e^{-i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}}{2}=\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$

另一式类似地证明。**证毕**

性质 6 $\cos 2\boldsymbol{A}=\cos^2\boldsymbol{A}-\sin^2\boldsymbol{A}$，$\sin 2\boldsymbol{A}=2\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{A}$，$\sin^2\boldsymbol{A}+\cos^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，

$$\sin(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\sin\boldsymbol{A},\quad\cos(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\cos\boldsymbol{A},\quad e^{\boldsymbol{A}+i2\pi\boldsymbol{I}}=e^{\boldsymbol{A}}。$$

证 在性质 5 中取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 即得前两式，在性质 5 的第一式中取 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$ 得

$$\cos\boldsymbol{O}=\cos\boldsymbol{A}\cos(-\boldsymbol{A})-\sin\boldsymbol{A}\sin(-\boldsymbol{A})\quad 即\quad\cos^2\boldsymbol{A}+\sin^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}。$$

又
$$\cos(\boldsymbol{A}+2\pi\boldsymbol{I})=\cos\boldsymbol{A}\cos(2\pi\boldsymbol{I})-\sin\boldsymbol{A}\sin(2\pi\boldsymbol{I})=\cos\boldsymbol{A}$$

（**注**：$\cos(2\pi\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$，$\sin(2\pi\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$）。同理可证另两式。**证毕**

性质 7 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=(f(\boldsymbol{A}))^{\mathrm{T}}$。

证 $f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k=(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=(f(\boldsymbol{A}))^{\mathrm{T}}$。**证毕**

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ 1 & -2 & \\ & 1 & -2\end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$。

解 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & \\ & -2 & 1\\ & & -2\end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}f(-2) & f'(-2) & \frac{1}{2}f''(-2)\\ & f(-2) & f'(-2)\\ & & f(-2)\end{pmatrix}$，

故
$$f(\boldsymbol{A})=(f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}f(-2) & & \\ f'(-2) & f(-2) & \\ \frac{1}{2}f''(-2) & f'(-2) & f(-2)\end{pmatrix}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\cos\boldsymbol{A}$。

解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix}1 & t & & \\ & 1 & & \\ & & \mathrm{e}^t & \\ & & t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}$，$\cos\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & \cos 1 & \\ & & -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}$。