§3 Jordan 标准形介绍

并不是任何一个方阵都能相似于对角阵，对于一般方阵，通过相似变换能化成的较简单的形式是什么呢？

一、Jordan 标准形的概念

定义 如下形式的分块对角矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}，其中 \boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

称为 **Jordan 矩阵**，称 $\boldsymbol{J}_i$ 为 r_i **阶 Jordan 块**；特别地，一阶 Jordan 块就是 $\boldsymbol{J}_i=(\lambda_i)$ 。

例如，矩阵 $\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{ccc|c|cc|cc} 2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & & 2 & 0 & & & & \\ \hline & & & 2 & 0 & & & \\ \hline & & & & -3\mathrm{i} & 1 & & \\ & & & & & -3\mathrm{i} & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right)$ 就是一个 Jordan 矩阵，它包含四个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{J}_2=(2)$，$\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix}-3\mathrm{i} & 1 \\ & -3\mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{J}_4=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ & 0\end{pmatrix}$。

显然，Jordan 块本身就是一个 Jordan 阵。对角矩阵也是一个 Jordan 阵，只不过它的每个 Jordan 块都是一阶的。

定理（Jordan） 每个矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 都与一个 Jordan 矩阵 $\boldsymbol{J}$ 相似，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 。如果不计 $\boldsymbol{J}$ 中 Jordan 块的排列顺序，则它由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定，称 $\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Jordan 标准形**。

二、求 Jordan 标准形的方法

方法 1 特征向量法

结论 若 λ_i 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值，则它对应一阶 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_i=(\lambda_i)$；若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r_i 重特征值，且对应 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量 $(s_i\le r_i)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$ 中含有 s_i 个以 λ_i 为对角元的 Jordan 块，且这 s_i 个 Jordan 块的阶数之和

等于 r_i。

可见，只有在 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值的情况下，它才可能有二阶及二阶以上的 Jordan 块。说明如下：

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 4 重特征值，则对应 $\lambda=3$ 的 Jordan 块可能出现以下几种情况：

(1) 对应 $\lambda=3$ 有 4 个线性无关的特征向量时，Jordan 块为 $\begin{pmatrix}3&&&\\&3&&\\&&3&\\&&&3\end{pmatrix}$；

(2) 对应 $\lambda=3$ 有 3 个线性无关的特征向量时，Jordan 块为 $\begin{pmatrix}3&&&\\&3&&\\&&3&1\\&&&3\end{pmatrix}$；

(3) 对应 $\lambda=3$ 有 2 个线性无关的特征向量时，Jordan 块为

$$\begin{pmatrix}3&&&\\&3&1&\\&&3&1\\&&&3\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{pmatrix}3&1&&\\&3&&\\&&3&1\\&&&3\end{pmatrix};$$

(4) 对应 $\lambda=3$ 有 1 个线性无关的特征向量时，Jordan 块为 $\begin{pmatrix}3&1&&\\&3&1&\\&&3&1\\&&&3\end{pmatrix}$。

例　求下列矩阵的 Jordan 标准形：

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$；

解　可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$。又对应 $\lambda=2$ 有 2 个线性无关的特征向量

$(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$　（或 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 秩为 1），

故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$（或 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$）。

2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

解 可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\ \lambda_4=3$。又对应 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量 $(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 3\end{pmatrix}，（或\ \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}）。$$

上述方法的缺点是，当 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值的重数为 4 或大于 4 时，其对应的 Jordan 块可能无法确定。

方法 2　初等变换法

定义 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda)\end{pmatrix}$，其中 $a_{ij}(\lambda)$ 均是 λ 的多项式，则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为 **λ-矩阵**或**多项式矩阵**。相应地可以定义 λ-矩阵的秩的概念。

定义 2　对 λ-矩阵进行的如下三种变换称为**初等变换**：

1°）交换两行（列）；　若交换 i, j 两行（列），记为 $\mathrm{r}_i\leftrightarrow\mathrm{r}_j$　（$\mathrm{c}_i\leftrightarrow\mathrm{c}_j$）；

2°）用数 $k\neq0$ 乘某行（列）；　若 k 乘第 i 行（列），记为 $\mathrm{r}_i\times k$　（$\mathrm{c}_i\times k$）；

3°）将某一行（列）的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行（列）上，其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的多项式；第 j 行（列）的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到第 i 行（列），记为　$\mathrm{r}_i+\varphi(\lambda)\mathrm{r}_j$　（$\mathrm{c}_i+\varphi(\lambda)\mathrm{c}_j$）。

结论　λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 总可以通过初等变换化为如下形式的矩阵

$$\boldsymbol{S}(\lambda)=\begin{pmatrix}d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \boldsymbol{O}\\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}(\lambda)$$

其中 $d_i(\lambda)$ 均是首一多项式，且 $d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda)\quad(i=1,2,\cdots,r-1)$，且 $\boldsymbol{S}(\lambda)$ 是由 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 唯一确定的，称之为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 **Smith 标准形**，称 $d_i(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的**不变因子**。

在用初等变换法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形时，是对 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 这一特殊的 λ-矩阵用初等变换化为 Smith 标准形来进行的。举例说明如下：

例 求下列矩阵的 Jordan 标准形：

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$；

解 第一步：对 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 用初等变换化为 Smith 标准形：

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-(\lambda-1)c_1}\begin{pmatrix}\lambda-3 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-(\lambda-3)r_2}\begin{pmatrix}0 & -(\lambda-2)^2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{c_2+c_3}\begin{pmatrix}0 & (\lambda-2)^2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix}$$

从而 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子（有时称为 $\boldsymbol{A}$ 的**不变因子**）为 $d_1(\lambda)=1,\ \ d_2(\lambda)=\lambda-2,$

$d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$。

第二步：再把 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的每个次数大于零的不变因子（此处是 $d_2(\lambda)$ 和 $d_3(\lambda)$）分解成关于 λ 的不同的一次因式方幂的乘积，并分别写出这些方幂（相同的按出现的次数计数），称之为 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$（或 $\boldsymbol{A}$）的**初等因子**。此题中 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-2$ 和($\lambda-2)^2$。

第三步： 对每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 作出 r_i 阶 Jordan 块 $\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$，

所有初等因子对应的 Jordan 块构成的 Jordan 矩阵即是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形。此题中 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$。

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$。

解 $$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1-(\lambda-1)c_2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\lambda(\lambda+2) & \lambda+3 & 2\lambda\\ -2\lambda & 2 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r\\ c_1\leftrightarrow c_{21}}]{r_2-(\lambda+3)r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda(\lambda+2) & 2\lambda\\ 0 & -2\lambda & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+2c_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2+2\lambda & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda,\quad d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda,\quad \lambda,\quad \lambda-2$

$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $$\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

例 已知一个 12 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9},\quad (\lambda-1)^2,\quad (\lambda-1)^2(\lambda+2),\quad (\lambda-1)^2(\lambda+2)(\lambda^2+3)^2$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形。

解 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,\quad (\lambda-1)^2,\quad (\lambda+2),\quad (\lambda-1)^2,$$

$$(\lambda+2),\quad (\lambda-\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2,\quad (\lambda+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为：

$$\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{cccccccccccc}1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & -2 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & -2 & & & & \\ & & & & & & & & \sqrt{3}\,\mathrm{i} & 1 & & \\ & & & & & & & & & \sqrt{3}\,\mathrm{i} & & \\ & & & & & & & & & & -\sqrt{3}\,\mathrm{i} & 1 \\ & & & & & & & & & & & -\sqrt{3}\,\mathrm{i}\end{array}\right)。$$

方法 3　行列式因子法

定义　λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中所有 k 阶子式的首一最大公因式称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k **阶行列式因子**，记为 $D_k(\lambda)$。

结论 1　$D_k(\lambda) \mid D_{k+1}(\lambda)$　（$k=1,2,\cdots$）

结论 2　设 $d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子，则

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\quad d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

结论 3　若 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 经过初等变换变成 $\boldsymbol{B}(\lambda)$，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 的行列式因子相同。

用行列式因子法求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形时，是对 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 求其行列式因子，再求不变因子和初等因子而得到 Jordan 标准形的。

例 求下列矩阵的 Jordan 标准形：

1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$；

解　$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&0\\1&\lambda-1&0\\1&1&\lambda-2\end{pmatrix}$ 的一阶子式共有 9 个，显然 $D_1(\lambda)=1$。

二阶子式共有 $\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_3^2=9$ 个：

$$\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2,\ \begin{vmatrix}\lambda-3&0\\1&0\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}-1&0\\\lambda-1&0\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\1&1\end{vmatrix}=\lambda-2\ ,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)\ ,\ \begin{vmatrix}-1&0\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=-(\lambda-2)\ ,$$

$$\begin{vmatrix}1&\lambda-1\\1&1\end{vmatrix}=-(\lambda-2)\ ,\ \begin{vmatrix}1&0\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda-2\ ,\ \begin{vmatrix}\lambda-1&0\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

所以 $D_2(\lambda)=\lambda-2$。又 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$，故 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$。从而 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda-2,\quad d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)^2;$$

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为　　$\lambda-2$，　$(\lambda-2)^2$；

$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\2&2&-1&-1\\1&2&-1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$；

解 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&-1&1\\-2&\lambda-2&1&1\\-1&-2&\lambda+1&-2\\0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}$，其中三阶子式

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\\lambda-1&\lambda-2&1\\-1&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3\ ,\quad \begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\-2&\lambda-2&1\\-1&-2&-2\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(2\lambda-5)$$

故 $D_3(\lambda)=1$，从而 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$。又有 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$，所以 $D_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$， $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-3),$$

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $(\lambda-1)^3$， $\lambda-3$；$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&3\end{pmatrix}$。

3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-2&3&3&-6&0&3\end{pmatrix}$。

解 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-1&0&0&0&0\\0&\lambda&-1&0&0&0\\0&0&\lambda&-1&0&0\\0&0&0&\lambda&-1&0\\0&0&0&0&\lambda&-1\\2&-3&-3&6&0&\lambda-3\end{pmatrix}$ 中 5 阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \lambda & -1 & \\ & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5\text{，}$$ 所以 $D_1(\lambda) = \cdots = D_5(\lambda) = 1$ 。又

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = D_6(\lambda)$$

$\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda) = \cdots = d_5(\lambda) = 1,\quad d_6(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $(\lambda-1)^3,\quad (\lambda-2),\quad (\lambda+1)^2$

$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$。

例 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

解 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$，$D_4(\lambda) = (\lambda-1)^4$ 。 3 阶子式

$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{vmatrix} = -4\lambda(\lambda+1)$, 因为 $D_3(\lambda)$ 整除所有 3 阶子式，且 $D_3(\lambda) \mid D_4(\lambda)$，

所以 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = D_3(\lambda) = 1$。$\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 1，1，1，$D_4(\lambda) = (\lambda-1)^4$ 。故

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$