第四章　矩阵分解

§1　三角分解

一、 三角分解的定义与条件

定义　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，若存在下三角矩阵 $\boldsymbol{L} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 和上三角矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

则称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**三角分解**.

问题： 给出一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$， 在什么条件下它能进行三角分解？三角分解是否唯一？如何进行三角分解？

定理　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶非奇异矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可进行三角分解的充要条件是

$\Delta_k \neq 0$（$k = 1,2,\cdots,n$），其中

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$（$k = 1,2,\cdots,n$），称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**顺序主子式**

由此定理可见，并不是每个非奇异矩阵都能进行三角分解，如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 就不能进行三角分解。

定理　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 且 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$， 如果 $\Delta_k \neq 0$（$k = 1,2,\cdots,r$），即 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个顺序主子式不为 0，则 $\boldsymbol{A}$ 可进行三角分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$，且可适当选择分解使得 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 非奇异。

该定理的条件仅是充分的，如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 1，不满足定理条件，但

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

等都是 $\boldsymbol{A}$ 的三角分解。

二、 三角分解的唯一性问题

即使一个矩阵的三角分解存在，它也不是唯一的，这是因为，若取 $\boldsymbol{D}$ 为任意非奇异的对角阵，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{-1})(\boldsymbol{D}\boldsymbol{U})$ 又是一个三角分解。为了讨论唯一性问题，将三角分解规范化，从而得到如下几种特殊形式的三角分解。

定义　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$， 则称

（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 为 **Doolittle 分解**，其中 $\boldsymbol{L}$ 是单位下三角阵（主对角元素均是 1），$\boldsymbol{U}$ 是上三角阵；

（2）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 为 **Crout 分解**，其中 $\boldsymbol{L}$ 是下三角阵，$\boldsymbol{U}$ 是单位上三角阵；

（3）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 为 **LDU 分解**，其中 $\boldsymbol{L}$ 是单位下三角阵，$\boldsymbol{D}$ 是对角阵，$\boldsymbol{U}$ 是单位上三角阵。

定理　n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一 LDU 分解的充要条件 $\boldsymbol{A}$ 是的所有顺序主子式不为 0，即 $\Delta_k \neq 0$（$k=1,2,\cdots,n$），且对角阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})$ 的元素满足

$$d_{11}=\Delta_1,\qquad d_{ii}=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\quad (i=2,\cdots,n)$$

推论　n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一 Doolittle 分解或 Crout 分解的充要条件是 $\Delta_k \neq 0$（$k=1,2,\cdots,n-1$）。

上述定理的条件还可以适当放宽。

定理　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一 LDU（或 Doolittle，或 Crout）分解的充要条件是 $\Delta_k \neq 0$（$k=1,2,\cdots,n-1$）。

三、 三角分解的紧凑计算格式

以下总假设 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的三角分解唯一存在。

1．Doolittle 分解

由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn}\end{pmatrix}$，得

$$\begin{cases} a_{1j}=u_{1j}\ (j=1,2,\cdots,n),\quad a_{i1}=l_{i1}u_{11}\ (i=1,2,\cdots,n) \\ a_{kj}=\displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}+u_{kj}\quad (j\geq k;k=1,2,\cdots,n-1) \\ a_{ik}=\displaystyle\sum_{t=1}^{k-1} l_{it}u_{tk}+l_{ik}u_{kk}\quad (i\geq k+1;k=1,2,\cdots,n-1) \end{cases}$$

因此
$$\begin{cases} u_{1j}=a_{1j}\ (j=1,2,\cdots,n),\quad l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{u_{11}}\ (i=2,\cdots,n) \\ u_{kj}=a_{kj}-\displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}\quad (j\geq k) \\ l_{ik}=\dfrac{1}{u_{kk}}\Big(a_{ik}-\displaystyle\sum_{t=1}^{k-1} l_{it}u_{tk}\Big)\quad (i\geq k+1) \end{cases}\qquad (k=2,3,\cdots,n)$$

这就是 Doolittle 分解的**紧凑计算格式**。

实际计算时，u_{kj} 与 l_{ik} 交叉计算，由算法公式知，在算出 u_{kj} 或 l_{ik} 后，a_{kj} 或 a_{ik} 就不再使用了，因此算出的结果放在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应元素位置上，见图。

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & \text{第 1 框} \\
\cline{2-5}
l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & \text{第 2 框} \\
\cline{3-5}
l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} & \text{第 3 框} \\
\cline{4-5}
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & u_{nn} & \text{第 } n \text{ 框}
\end{array}
$$

例　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$ 的 Doolittle 分解和 LDU 分解。

解

$$
\begin{array}{|c|c|c}
\hline
5 & 2 & -4 \\
\cline{2-3}
\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\
\cline{3-3}
-\frac{4}{5} & -2 & \multicolumn{1}{|c}{1}
\end{array}
$$

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{5} & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{5} & 1 & 0\\ -\frac{4}{5} & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & & \\ & \frac{1}{5} & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Crout 分解

与前面的推导类似，可以得到 Crout 分解的**紧凑计算格式**：

$$
\begin{cases}
l_{i1}=a_{i1}\ (i=1,2,\cdots,n),\quad u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}}\ (j=2,3,\cdots,n) \\
l_{ik}=a_{ik}-\displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}\quad (i\ge k) \\
u_{kj}=\dfrac{1}{l_{kk}}(a_{kj}-\displaystyle\sum_{t=1}^{k-1} l_{tk}u_{tj})\quad (j\ge k+1)
\end{cases}
\qquad（k=2,3,\cdots,n）
$$

3. Cholesky 分解

当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称正定阵时，$\Delta_k>0$（$k=1,2,\cdots,n$），于是 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 LDU 分解，且 $\boldsymbol{D}$ 的对角元素均大于 0（$d_{11}=\Delta_1>0$，$d_{ii}=\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}>0$

（$i=2,\cdots,n$））。从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}=\boldsymbol{LD}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}，\qquad \text{其中 } \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(\sqrt{d_{11}},\sqrt{d_{22}},\cdots,\sqrt{d_{nn}})$$

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 及分解的唯一性可得 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，于是 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{LD}^{\frac{1}{2}})(\boldsymbol{LD}^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{G}$ 是下三角阵，称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Cholesky 分解**。

由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}$ 得

（只比较下三角部分）$\begin{cases} a_{11}=g_{11}^2, \quad a_{i1}=g_{i1}g_{11}\ (i=2,\cdots,n) \\ a_{kk}=g_{k1}^2+g_{k2}^2+\cdots+g_{kk}^2 \\ a_{ik}=g_{i1}g_{k1}+\cdots+g_{ik}g_{kk} \quad (i>k) \end{cases}$ （$k=2,3,\cdots,n$）

从而得 $\begin{cases} g_{11}=\sqrt{a_{11}}, \quad g_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{g_{11}}\ (i=2,\cdots,n) \\ g_{kk}=\sqrt{a_{kk}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}g_{kr}^2} \\ g_{ik}=\dfrac{1}{g_{kk}}(a_{ik}-\sum\limits_{t=1}^{k-1}g_{it}g_{kt}) \quad (i>k) \end{cases}$ （$k=2,3,\cdots,n$）

计算时如右图，一列一列计算：
$$\begin{matrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{matrix}$$

例 求正定矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的 Cholesky 分解。

解 因为
$$\begin{matrix} \sqrt{5} & & \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{11}{5}} & \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{11}} & \sqrt{\frac{6}{11}} \end{matrix}$$

所以
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{11}{5}} & \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{11}} & \sqrt{\frac{6}{11}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ & \sqrt{\frac{11}{5}} & -\sqrt{\frac{5}{11}} \\ & & \sqrt{\frac{6}{11}} \end{pmatrix}$$

三角分解的应用说明如下：（设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ ）

1．求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 化为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 求解；

2．求行列式 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{L}\det\boldsymbol{U}=l_{11}\cdots l_{nn}u_{11}\cdots u_{nn}$；

3．求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}$。

四、分块三角分解

在处理较高阶矩阵时常用的一种简化方法就是将矩阵加以分块，并在分块的形式下进行计算，即把不必过细剖分的部分当成一个整体来处理。这样既避免了繁琐的表达式，又易于抓住主要特征。

考虑如下的四分块矩阵：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times m},\ \boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{n\times n}\text{，且假设 }\boldsymbol{A}\text{ 或 }\boldsymbol{D}\text{ 是可逆的}$$

情形 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆

因为
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

或
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

又有
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

可求得
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

故得
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

这是分块矩阵的分块三角分解。

利用这组公式可以得到

1） 行列式：$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{A}\cdot\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$

可见 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可逆（条件 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$）

2） 逆矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

这样就可将高阶矩阵求逆问题转化为低阶矩阵的求逆问题。

情形 2. 设 D 可逆

同样有一组公式：

$$\begin{pmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ O & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix}$$

相应地可以得到行列式及逆矩阵的有关结果。

作为上述思想的应用，举如下几例。

例 设 A, B 为同阶方阵，证明 $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\ \det(A-B)$。

证 因为 $\begin{pmatrix} I & O \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{pmatrix}$，取行列式即得。

例 设 A, B, C, D 为同阶方阵，A 可逆，且 $AC = CA$。证明：

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-CB)$$

证 因为 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$，取行列式得

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D-CA^{-1}B) = \det[A(D-CA^{-1}B)] = \det(AD-ACA^{-1}B)$$

$$= \det(AD-CAA^{-1}B) = \det(AD-CB)\text{。}$$

例　设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times m}$。证明：$\det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA})$。

证　构造矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$，因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

所以

$$\det(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{AB})$$

例　条件同上例，且 $\lambda \neq 0$。证明：$\det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) = \lambda^{m-n} \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})$（即 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值相同）。

证　构造矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$，因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

所以

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{I}_m - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{AB})\ \det(\lambda\boldsymbol{I}_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda^m}\det(\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})\ \lambda^n = \lambda^{n-m}\det(\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})$$