第三章　假设检验

3.1、假设检验思想

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的假设.

例如，提出总体服从泊松分布的假设；

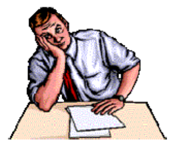
又如，对于正态总体提出数学 期望等于 μ_0 的假设等.

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断：是接受，还是拒绝.

假设检验问题是统计推断的另一类重要问题.

如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法，其基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓实际推断原理：“**一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的**”.

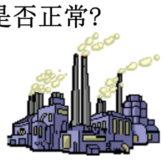


下面结合实例来说明假设检验的基本思想.

实例　某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装糖重是一个随机变量，它服从正态分布. 当机器正常时，其均值为0.5千克，标准差为0.015千克. 某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖9袋，称得净重为(千克)：

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511
0.520　0.515　0.512，　问机器是否正常?

分析: 用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 的均值和标准差，



由长期实践可知，标准差较稳定，设 $\sigma = 0.015$,

则 $X \sim N(\mu,\ 0.015^2)$，其中 μ 未知.

问题：根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

提出两个对立假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$.

再利用已知样本作出判断是接受假设 H_0 (拒绝假设 H_1)，还是拒绝假设 H_0 (接受假设 H_1).

如果作出的判断是接受 H_0，则 $\mu = \mu_0$，

即认为机器工作是正常的，否则，认为是不正常的.

由于要检验的假设涉及总体均值，故可借助于样本均值来判断.

因为 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量，

所以若 H_0 为真，则 $|\bar{x} - \mu_0|$ 不应太大，

当 H_0 为真时，$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

衡量 $|\bar{x} - \mu_0|$ 的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小，

于是可以选定一个适当的正数 k，

当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$ 时，拒绝假设 H_0，

反之，当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$ 时，接受假设 H_0.

因为当 H_0 为真时 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

给定 $0 < \alpha < 1$，选取 k 的值使得 $P\left(\dfrac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k \mid H_0\right) = \alpha$.

由标准正态分布分位点的定义得 $k = u_{1-\alpha/2}$，

当 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0，$\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$ 时，接受 H_0.

假设检验过程如下:

在实例中若取定 $\alpha = 0.05$,

则 $k = u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$,

又已知 $n = 9$, $\sigma = 0.015$,

由样本算得 $\bar{x} = 0.511$, 即有 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.2 > 1.96$,

于是拒绝假设H_0, 认为包装机工作不正常.

以上所采取的检验法是符合实际推断原理的.

由于通常 α总是取得很小 ,一般取 $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$,

因而当H_0为真,即$\mu = \mu_0$时, $\left\{ \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha/2} \right\}$是一个小概率事件,根据实际推断原理,就可以认为如果H_0为真,由一次试验得到满足不 等式$\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq u_{1-\alpha/2}$的观察值 $\bar{x}$,几乎是不会发生的.

在一次试验中,得到了满足不等式 $\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq u_{1-\alpha/2}$ 的观察值 $\bar{x}$,则我们有理由怀疑原来 的假设H_0的正确性,因而拒绝H_0.

若出现观察值 $\bar{x}$ 满足不等式 $\left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < u_{1-\alpha/2}$,则没有理由拒绝假设 H_0, 因而只能接受 H_0.

二、假设检验的相关概念

1. 显著性水平

当样本容量固定时 ,选定α后,数 k 就可以确定,然后按照统计量 $U = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 的观察值的绝对值大于等于 k 还是小于 k 来作决定.

如果$|z| = \left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k$, 则称 $\bar{x}$ 与μ_0的差异是显著的 ,则我们拒绝 H_0,

反之,如果$|u| = \left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < k$,则称 $\bar{x}$ 与μ_0的差异是不显著的,则我们接受 H_0,

数 α 称为显著性水平.

上述关于 $\bar{x}$ 与 μ_0 有无显著差异的判断是 在显著性水平 α 之下作出的 .

2. 检验统计量

统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 称为检验统计量 .

3. 原假设与备择假设

假设检验问题通常叙述为: 在显著性水平 α下,检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$.

或称为 “在显著性水平 α下,针对 H_1检验 H_0”.

H_0称为原假设或零假设, H_1 称为备择假设.

4. 拒绝域与临界点

当检验统计量取某个区域W中的值时, 我们拒绝原假设H_0, 则称区域W为**拒绝域**, 拒绝域的边界点称为**临界点**.

如在前面实例中,

拒绝域为 $|u| \geq u_{1-\alpha/2}$,

临界点为 $u = -u_{1-\alpha/2}$, $u = u_{1-\alpha/2}$.

5. 两类错误及记号

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生, 但很难发生不等于不发生, 因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝H_0的判断, 称做**第一类错误**, 又叫**弃真错误**, 这类错误是"以真为假". 犯第一类错误的概率是显著性水平α.

(2) 当原假设 H_0 不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受 H_0 的判断, 称做**第二类错误**, 又叫**取伪错误**, 这类错误是"以假为真".

犯第二类错误的概率记为

$P\{$当 H_0 不真接受 $H_0\}$ 或 $P_{\mu \in H_1}\{$接受 $H_0\}$.

当样本容量 n 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

6. 显著性检验

只对犯第一类错误的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误的概率的检验, 称为**显著性检验**.

7. 双侧备择假设与双侧假设检验

在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中, 备择假设 H_1 表示 μ可能大于μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双侧备择假设, 形如 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双侧假设检验.

8. 右侧检验与左侧检验

形如 $H_0: \mu = (\leq)\mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右侧检验.

形如 $H_0: \mu = (\geq)\mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左侧检验.

右侧检验与左侧检验统称为**单侧检验**.

三、假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求, 提出原假设 H_0 及备择假设 H_1;
2. 给定显著性水平 α 以及样本容量 n;
3. 确定检验统计量以及拒绝域形式;
4. 按 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} = \alpha$ 求出拒绝域;
5. 取样, 根据样本观察值确定接受还是拒绝 H_0.

四 尾概率

原假设：$\theta = \theta_{0,}$ 检验统计量为 T，设T的值越大对接受 H_0 越不利。设样本值 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，相应的统计值 $t = T(x)$，称$p = P_{\theta_0}\{T(\mathbf{x}) \geq t\}$为尾概率，或称为 $p-$值。

对给定的水平α，设$P_{\theta_0}(T \geq t_{1-\alpha}) = \alpha$，则$p < \alpha$当且仅当 $t > t_{1-\alpha}$. 当$p < \alpha$时就拒绝$H_{0,}$否则接受H_0.