2.4　参数的区间估计

一、区间估计的基本概念

二、正态总体均值与方差的区间估计

三、分布自由时总体均值的区间估计

四、单侧置信限

五、总体比率的区间估计

一、区间估计的基本概念

1.1 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, 对于给定值 α $(0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信度.

关于定义的说明

被估计的参数 θ 虽然未知, 但它是一个常数, 没有随机性, 而区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是随机的.

因此定义中下表达式

$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha$

的本质是:

随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含着参数 θ 的真值, 而不能说参数 θ 以 $1-\alpha$ 的概率落入随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等, 都是 n)

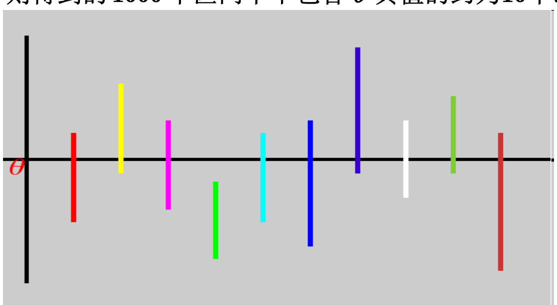
每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,

按**伯努利大数定理**, 在这样多的区间中,

包含 θ 真值的约占 $100(1-\alpha)\%$, 不包含的约占 $100\alpha\%$.

例如　若 $\alpha=0.01$, 反复抽样 1000 次, 则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的约为 10 个.



例　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 σ^2 为已知, μ 为未知, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解　因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计,

且 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, 分布是不依赖于任何未知参数的.

由标准正态分布的下侧 α 分位点的定义知

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|< z_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\right)$.

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}$.

如果在例子中取 $n=16,\ \sigma=1,\ \alpha=0.05,$

查表可得 $z_{1-\alpha/2}=z_{0.975}=1.96,$

得一个置信水平为0.95的置信区间 $\left(\bar{X}\pm\frac{1}{\sqrt{16}}\times1.96\right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x}=5.20,$

则置信区间为 (5.20 ± 0.49)**, 即** $(4.71,\ 5.69).$

注意：置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是不唯一的.

在例子中如果给定 $\alpha=0.05,$

则又有 $$P\left\{-z_{0.96}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{0.99}\right\}=0.95,$$

即 $$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.99}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.96}\}=0.95,$$

故 $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.99},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.96}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

其置信区间的长度为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.96}+z_{0.99})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.975}=3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.96}+z_{0.99})=4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1<L_2$. 置信区间短表示估计的精度高.

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取 a 和 b 关于原点对称时,能使置信区间长度最小.

1.2 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数 :

$$Z=Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$$

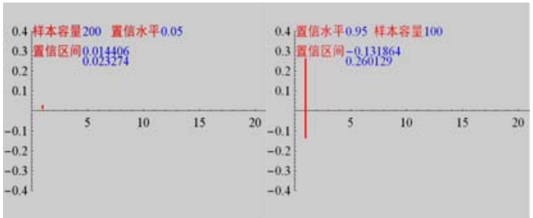
其中仅包含待估参数 θ, 并且 Z 的分布已知且不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a,b, 使 $P\{a<Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha.$

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

样本容量 n 固定, 置信水平 $1-\alpha$ 增大, 置信区间长度增大, 可信程度增大, 区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定, 样本容量 n 增大, 置信区间长度减小, 可信程度不变, 区间估计精度提高.



例 设某工件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 16)$, 今抽9件测量其长度, 得数据如下(单位:mm):

142, 138, 150, 165, 156, 148, 132, 135, 160.

试求参数 μ 的置信水平为95%的置信区间.

解 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right),$$

由 $n = 9, \sigma = 4, \alpha = 0.05, z_{0.975} = 1.96, \overline{x} = 147.333$ 知,

μ 的置信度为0.95的置信区间为 (144.720, 149.946).

二，正态总体均值与方差的区间估计

2.1 单个总体的情况

2.1 两个总体的情况

2.3 小结

2.1 单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

设给定置信水平为 $1-\alpha$, 并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知,

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right)$.

(2) σ^2 为未知,

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$.

推导过程如下:

由于区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$ 中含有未知参数 σ, 不能直接使用此区间,

但因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 可用 $S = \sqrt{S^2}$ 替换 σ,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

即 $P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

于是得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例 已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，且$\sigma^2 = 0.108^2$。现测量五炉铁水，其含碳量（%）分别是

4.28，4.40，4.42，4.35，4.37

试求总体期望 μ 的置信区间（$\alpha=0.05$，$\alpha=0.01$）。

解 由已知，$\sigma=0.108$，$n=5$，

由给出的数据算得 $\bar{x}=4.364$。

当 $\alpha=0.05$ 时，置信度 $1-\alpha=0.95$，

查表可得 $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96,$

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right).$$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间是（4.269，4.459）。

同理，当 $\alpha=0.01$ 时，μ 的置信度为 $1-\alpha=0.99$ 的置信区间是（4.239，4.489）。

对于相同的样本容量，置信度较大的，置信区间的长度也较大。对给定的置信度 $1-\alpha$，要使估计的范围更精确，必须增加样本容量 n。

例 设某种清漆的九个样品，其干燥时间（以小时计）分别为

6.0，5.7，5.8，6.5，7.0，6.3，5.6，6.1，5.0

设干燥时间服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解 本题是在方差未知的情况下，求 μ 的置信区间。

$n=9$，$1-\alpha=0.95$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$，

由样本观察值算出

$\bar{x}=6$，$s=0.5745$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \approx 5.558$$

$$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \approx 6.442$$

故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间

（5.558，6.442）。

例 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中σ^2和μ为未知参数，设随机变量 L 是关于μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间的长度，求 $E(L^2)$.

解 当σ^2未知时，

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

置信区间长度 $L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),$

$$L^2 = \frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2,$$

又 $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$

$$= E\left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[D(X_i) + E(X_i)^2] - n[D(\overline{X}) + E^2(\overline{X})]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2 + \mu^2] - n\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right]\right\} = \sigma^2,$$

于是 $E(L^2) = E\left(\frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2\right)$

$$= \frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2 E(S^2) = \frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2 \sigma^2.$$

2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要，只介绍 μ 未知的情况.

方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

则 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

即 $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

于是得方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

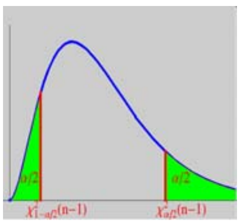
$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差 σ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意: 在密度函数不对称时,
如 χ^2 分布和 F分布,
习惯上仍取对称的分位点来
确定置信区间(如图).



例 从自动机床加工的同类零件中抽取16件，

测得其长度为(单位:mm)：

12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01
12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06

设零件长度近似服从正态分布，试求方差 σ^2，

标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信 区间。

解 由样本值算得 $s^2 = 0.00244$，$s = 0.0494$

$n=16$，$1-\alpha=0.95$，查 χ^2 分布表得

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(15) = 27.488$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(15) = 6.262$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\approx 0.0013,\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\approx 0.0058$$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间：(0.0013，0.0058)。

σ 的置信度为 0.95 的置信区间：(0.036，0.076)。

2.2 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设给定置信度为$1-\alpha$，并设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为第一个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为第二个总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，$\bar{X}, \bar{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值，S_1^2, S_2^2分别是第一、二个总体的样本方差.

讨论两个整体总体均值差和方差比的估计问题.

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

推导过程如下：

因为 $\bar{X}$，$\bar{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计，

所以 $\bar{X}-\bar{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计，

由 $\bar{X}$，$\bar{Y}$ 的独立性及

$$\bar{X}\sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right),\qquad \bar{Y}\sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

可知 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,

或 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

于是得 $\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2) σ_1^2和σ_2^2均为未知，

只要n_1和n_2都很大(实用上>50即可)，则有

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的近似置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right).$$

(3) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 为未知，

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\quad S_w=\sqrt{S_w^2}.$$

例 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取I型子弹10发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(\mathrm{m/s})$,标准差 $s_1 = 1.10(\mathrm{m/s})$, 随机地取II型子弹20发，得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(\mathrm{m/s})$, 标准差 $s_2 = 1.20(\mathrm{m/s})$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布,且由生产过程可认为它们的方差相等，求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95的置信区间.

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知),

37

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025, \quad n_1 = 10, \quad n_2 = 20, \quad n_1 + n_2 - 2 = 28,$$

查 $t(n-1)$ 分布表可知：$t_{0.025}(28) = 2.0484$,

$$s_w^{\ 2} = \frac{9 \times 1.10^2 + 19 \times 1.20^2}{28}, \quad s_w = \sqrt{S_w^{\ 2}} = 1.1688,$$

于是得 $\mu_1 - \mu_2$的一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm S_w \times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}\right) = (4 \pm 0.93),$$

即所求置信区间为 (3.07, 4.93).

38

例8 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂，为慎重起见，在试验工厂先进行试验. 设采用原来的催化剂进行了$n_1 = 8$ 次试验，得到得率的平均值 $\bar{x}_1 = 91.73$. 样本方差 $s_1^{\ 2} = 3.89$, 又采用新的催化剂进行了$n_2 = 8$ 次试验，得到得率的平均值$\bar{x}_2 = 93.75$, 样本方差 $s_2^{\ 2} = 4.02$,假设两总体都可认为近似地服从正态分布，且方差相等，求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.95的置信区间.

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知),

39

且 $s_w^{\ 2} = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^{\ 2} + (n_2 - 1)S_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2} = 3.96$,

于是得 $\mu_1 - \mu_2$的一个置信水平为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(14)\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}\right) = (-2.02 \pm 2.13),$$

即所求置信区间为 (−4.15, 0.11).

说明采用两种催化剂的生产过程的得率均值没有显著差异。

40

如果 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间的置信下限大于零，表示 $\mu_1 - \mu_2 > 0$，即 $\mu_1 > \mu_2$；

如果置信上限小于零，表示 $\mu_1 - \mu_2 < 0$，即 $\mu_1 < \mu_2$；

如果 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间包含零，表示 μ_1 与 μ_2 没有显著差别。

41

2.两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right).$$

推导过程如下:

由于 $\dfrac{(n_1 - 1)S_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}} \sim \chi^2(n_1 - 1)$, $\dfrac{(n_2 - 1)S_2^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \sim \chi^2(n_2 - 1)$,

42

且由假设知 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$ 与 $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$ 相互独立,

根据F分布的定义, 知 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$,

即 $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\}$$
$=1-\alpha,$

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\}$$
$=1-\alpha,$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right).$$

例 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2)$; 抽取机器$B$生产的管子 13 只, 测得样本方差为 $s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2)$. 设两样本相互独立,且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_i, \sigma_i^2 (i=1,2)$ 均未知, 求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.

解 $n_1 = 18,\quad n_2 = 13,\quad \alpha = 0.10,$

$s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2),\quad s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2),$

$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.05}(17, 12) = 2.59,$

$$F_{1-\alpha/2}(17, 12) = F_{0.95}(17, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 17)} = \frac{1}{2.38},$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 0.90 的置信区间

$$\left(\frac{0.34}{0.29}\times\frac{1}{2.59},\ \frac{0.34}{0.29}\times 2.38\right) = (0.45,\ 2.79).$$

说明 两个总体的方差没有显著差异，即根据这次试验的结果无法判定哪台机器生产的钢管内径波动性大。

当置信区间包含数 1 时，可以认为两个方差没有显著性差异，否则可以认为两个方差存在显著差别。

此时，若置信区间的上限小于 1，则有 $\sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$，即认为 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$；若置信区间的下限大于 1，则有 $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$，即 认为 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$。

例10 甲、乙两台机床加工同一种零件, 在机床甲加工的零件中抽取9个样品, 在机床乙加工的零件中抽取6个样品,并分别测得它们的长度(单位:mm), 由所给数据算得 $s_1^2 = 0.245$, $s_2^2 = 0.357$, 在置信度 0.98下, 试求这两台机床加工精度之比 σ_1/σ_2 的置信区间. 假定测量值都服从正态分布, 方差分别为 σ_1^2, σ_2^2.

解 $n_1 = 9,\quad n_2 = 6,\quad \alpha = 0.02,$

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.99}(8, 5) = 10.3,$

$$F_{\alpha/2}(8,5)=F_{0.01}(8,5)=\frac{1}{F_{0.99}(5,8)}=\frac{1}{6.63},$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 的一个置信度为 0.98 的置信区间

$$\left(\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}},\ \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0.245}{0.357\times 10.3}},\ \sqrt{\frac{0.245\times 6.63}{0.357}}\right)=(0.258,\ 2.133).$$

2.3 小结

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

(1) σ^2为已知, $\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\right)$.

(2) σ^2为未知, $\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

2. 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知, $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

σ_1^2和σ_2^2均为未知, $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$.

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

三，分布自由时总体均值的区间估计

设给定置信水平为$1-\alpha$, 并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的样本, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$, $\bar{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差.

由中心极限定理： 当$n\to\infty$时,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,1),$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,1),$$

则 $P\left\{-z_{1-\alpha/2}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<z_{1-\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha,$

于是得μ的置信度为 $1-\alpha$ 的近似置信区间

$$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha/2}\right).$$

四　单侧置信区间

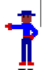
3.2 问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数θ,我们给出两个统计量$\underline{\theta},\overline{\theta}$,得到$\theta$的双侧置信区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

但在某些实际问题中,例如,对于设备、元件的寿命来说,平均寿命长是我们希望的,我们关心的是平均寿命θ的"下限";与之相反,在考虑产品的废品率p时,我们常关心参数p的"上限",这就引出了单侧置信区间的概念.

3.2 基本概念

1. 单侧置信区间的定义



对于给定值$\alpha\ (0<\alpha<1)$,若由样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$确定的统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\underline{\theta}\}\ge 1-\alpha,$$

则称随机区间$(\underline{\theta},+\infty)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间,$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

又如果统计量$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于任意$\theta\in\Theta$满足　$P\{\theta<\overline{\theta}\}\ge 1-\alpha,$

则称随机区间$(-\infty,\overline{\theta})$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间,$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体X的均值是μ,方差是σ^2(均为未知),

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本,由$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\mu>\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha,$

于是得μ的一个置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right),$$

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信下限　$\underline{\mu}=\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1).$

又根据$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\}=1-\alpha,$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

3.3 典型例题

例1 设从一批灯泡中，随机地取5只作寿命试验，测得寿命(以小时计)为 1050，1100，1120，1250，1280，设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95,\quad n=5,\quad \bar{x}=1160,\quad s^2=9950,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,$$

μ 的置信水平为 0.95 的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065.$$

例2 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，其中 θ $(\theta>0)$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，给定 α，求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限和置信上限.

解 令 $X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,

对于给定的 α，找 $0<\underline{\theta}\le 1$，使 $P\left\{\theta>\dfrac{X_{(n)}}{\underline{\theta}}\right\}=1-\alpha,$

即 $1-\alpha=\int_0^{\underline{\theta}} nz^{n-1}\mathrm{d}z=\underline{\theta}^n$，于是 $\underline{\theta}=\sqrt[n]{1-\alpha},$

所以 $P\left\{\dfrac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}<\theta\right\}=1-\alpha,$

θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{\theta}=\dfrac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}.$

对于给定的 α，找 $0<\overline{\theta}<1$，使 $P\left\{\theta<\dfrac{X_{(n)}}{\overline{\theta}}\right\}=1-\alpha,$

即 $1-\alpha=\int_{\overline{\theta}}^1 nz^{n-1}\mathrm{d}z=1-\overline{\theta}^n$，于是 $\overline{\theta}=\sqrt[n]{\alpha},$

所以 $P\left\{\theta<\dfrac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right\}=1-\alpha,$

θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限 $\overline{\theta}=\dfrac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}.$

3.4 小结

正态总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(-\infty,\ \boxed{\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)}\right),\qquad \left(\boxed{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)},\ +\infty\right),$$

单侧置信上限 $\overline{\mu}$　　单侧置信下限 $\underline{\mu}$

正态总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right).$$

单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}$

五、总体比率的区间估计

设总体 X 服从“0－1”分布，即 $X\sim B(1,p)$，

其中 p 被称为总体比率，

设来自 X 的样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

记 $\hat{p}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$，它是 p 的矩估计、MLE 和 MVUE.

由中心极限定理，得

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}}\ \dot{\sim}\ N(0,1),$$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1),$$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}\frac{X-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha,$$

Wilson 区间估计 $\left[\bar{x}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\quad \bar{x}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]$

p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似区间估计为

$$\left[\frac{2n\bar{X}+a^2-\sqrt{a^4+4n\bar{X}a^2-4n\bar{X}^2a^2}}{2(n+a^2)},\ \frac{2n\bar{X}+a^2+\sqrt{a^4+4n\bar{X}a^2-4n\bar{X}^2a^2}}{2(n+a^2)}\right],$$

其中 $a=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Agresti&Coull 区间估计

$$\left[\tilde{p}-a\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}},\ \tilde{p}+a\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}}\right],$$

其中 $a=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$，$\tilde{n}=n+a^2$，$\tilde{p}=\frac{1}{\tilde{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}a^2\right)$.

例

研究某高校英语六级考试的及格率,随机抽查了 40 份考卷,统计得其中 32 份成绩及格,试求所有考生及格率的置信水平为 95% 的区间估计.

- 作业：P61
39，43, 45，46，47， 49