第二章　范数理论

§1 向量的范数

一、定义与基本性质

定义　若向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ 对应的实函数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 满足

（1）　非负性：当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$；

（2）　齐次性：$\|k\boldsymbol{x}\|=|k|\|\boldsymbol{x}\|,\quad k\in\mathbf{C}$；

（3）　三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$，　$\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^n$

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**。

定义中并未给出由已知的 $\boldsymbol{x}$ 确定 $\|\boldsymbol{x}\|$ 的方法，只是规定了范数应满足的一些性质（公理），称如上三条为**向量范数三公理**，凡满足这三公理的实函数都可以作为向量的范数。

性质 1　$\|-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$；

性质 2　$\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，　$\big|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\big|\le\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|$

证　因为 $\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|$，所以 $\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

又　$\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\|\le\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}\|$，即 $\|\boldsymbol{y}\|-\|\boldsymbol{x}\|\le\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，两式结合即得。**证毕**

二、　常用的向量范数

例 1　对 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，规定　$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}$，则它是一种向量范数，称为**向量 2−范数**。

性质　$\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2$，$\boldsymbol{U}$ 为 n 阶酉矩阵。（**酉不变性**）

例 2　对 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，规定　$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$，则它是一种向量范数，称为**向量 1−范数**。

证　（1）　$\|\boldsymbol{0}\|_1=0$；当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，　$\|\boldsymbol{x}\|_1>0$；

（2） $\|k\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|k\xi_i| = |k|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| = |k|\|\boldsymbol{x}\|_1$；

（3） $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i| \le \sum_{i=1}^{n}(|\xi_i|+|\eta_i|) = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i| + \sum_{i=1}^{n}|\eta_i| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$。

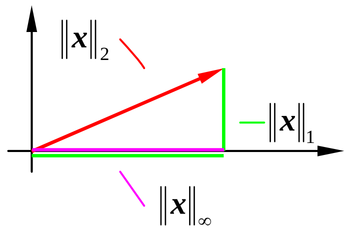
例 3 对 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，规定 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i|\xi_i|$，则它是一种向量范数，称为**向量$\infty$−范数**。

证 （1）$\|\boldsymbol{0}\|_\infty = 0$；当 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ 时，必有分量不为 0，于是$\|\boldsymbol{x}\|_\infty > 0$；

（2）$\|k\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i|k\xi_i| = |k|\max_i|\xi_i| = |k|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$；

（3）$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_i|\xi_i+\eta_i| \le \max_i(|\xi_i|+|\eta_i|) \le \max_i|\xi_i| + \max_i|\eta_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$。

在$\mathbf{R}^2$中，向量的 1-、2-、∞-范数可以作几何解释，如右图。



例如，已知向量 $\boldsymbol{x}=(1, 2, \cdots, n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}，\quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}，\quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = n。$$

例 4 对于 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，规定 $\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$， $1\le p<+\infty$

则它是一种向量范数，称为**向量 p−范数**。

由于 p 可以取大于等于 1 的任意实数，所以在$\mathbf{C}^n$上已经定义了无穷多的范数。另外，取 $p=1$和 2，分别得到向量的$1-$范数和$2-$范数。

定理 $\lim_{p\to+\infty}\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$。

证 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，结论成立（两边均为零）。设 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$，又设 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i|\xi_i| = |\xi_k| \ne 0$，则

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = |\xi_k| \le (\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p \le (n|\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

由于 $\lim\limits_{p\to+\infty} n^{\frac{1}{p}}=1$，利用两边夹定理即得 $\lim\limits_{p\to+\infty}\|\boldsymbol{x}\|^p=\|\boldsymbol{x}\|_\infty$。**证毕**

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数（不一定是 p-范数），对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，规定 $\|\boldsymbol{x}\|_b=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a$，证明 $\|\bullet\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数。

证（1）若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\|\boldsymbol{x}\|_b=0$；若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，于是 $\|\boldsymbol{x}\|_b=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a>0$；

（2） $\|k\boldsymbol{x}\|_b=\|\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})\|_a=|k|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a=|k|\|\boldsymbol{x}\|_b$；

（3） $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_b=\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_a\le\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a+\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|_a=\|\boldsymbol{x}\|_b+\|\boldsymbol{y}\|_b$。

例如，已知 $\mathbf{C}^n$ 上的向量1－范数，取 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$，则

$$\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|i\xi_i|=\sum_{i=1}^{n}i|\xi_i|=|\xi_1|+2|\xi_2|+\cdots+n|\xi_n|$$

这是一种新的向量范数。

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称正定矩阵，对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，规定 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$，则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 上的向量范数，称之为**椭球范数**或**加权范数**。

证 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵，所以存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\qquad \lambda_i>0\ （i=1,2,\cdots,n）$$

于是 $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$$

其中 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵。从而

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}=\sqrt{(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})}=\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_2$$

由例 5 知，$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数。

三、 向量范数的等价性

定义 设 $\|\bullet\|_a$ 和 $\|\bullet\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，如果存在与 $\boldsymbol{x}$ 无关的正常数 α,β，使对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ 都有

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\|_b\le\|\boldsymbol{x}\|_a\le\beta\|\boldsymbol{x}\|_b$$

则称 $\|\bullet\|_a$ 与 $\|\bullet\|_b$ **等价**。

例 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |\xi_i| \le \sum_{i=1}^n |\xi_i| = \|\boldsymbol{x}\|_1 \le n \max_i |\xi_i| = n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$，

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |\xi_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} = \|\boldsymbol{x}\|_2 \le \sqrt{n} \max_i |\xi_i| = \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty 。$$

定理 $\mathbf{C}^n$ 上的所有向量范数彼此等价。

***证** 设$\|\bullet\|_a$是$\mathbf{C}^n$上任一种向量范数。第一步，证明$\|\bullet\|_a$是其分量的连续函数。

对 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，记 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \|\boldsymbol{x}\|_a$ (n 元函数)，容易证明 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是连续函数。这是因为

$$\begin{aligned}|\varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) - \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)| &= \left| \|\boldsymbol{y}\|_a - \|\boldsymbol{x}\|_a \right| \le \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_a = \\ &\|(\eta_1 - \xi_1)\boldsymbol{e}_1 + (\eta_2 - \xi_2)\boldsymbol{e}_2 + (\eta_n - \xi_n)\boldsymbol{e}_n\|_a \le \\ &|\eta_1 - \xi_1|\|\boldsymbol{e}_1\|_a + |\eta_2 - \xi_2|\|\boldsymbol{e}_2\|_a + \cdots + |\eta_n - \xi_n|\|\boldsymbol{e}_n\|_a\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）。由于$\|\boldsymbol{e}_i\|_a$是常数，所以当$\eta_i \to \xi_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）时，$\varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \to \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，故$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$是连续函数。

第二步，证明$\|\bullet\|_a$与$\|\bullet\|_2$等价。考虑集合$\mathrm{S} = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$，这是$\mathbf{C}^n$中的一个有界闭集。根据连续函数的性质，$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$在S上达到最大值$\beta$与最小值$\alpha$。由于S不含零向量且$\varphi$是非负函数，所以 $\beta \ge \alpha > 0$。当$\boldsymbol{x} \ne \mathbf{0}$时，构造向量$\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$，则$\boldsymbol{y} \in \mathrm{S}$，从而

$$\alpha \le \varphi\left(\frac{\xi_1}{\|\boldsymbol{x}\|_2}, \frac{\xi_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}, \cdots, \frac{\xi_n}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\right) = \|\boldsymbol{y}\|_a = \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\right\|_a = \frac{\|\boldsymbol{x}\|_a}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \le \beta,$$

即 $\alpha\|\boldsymbol{x}\|_2 \le \|\boldsymbol{x}\|_a \le \beta\|\boldsymbol{x}\|_2$；而当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时，该式显然成立，从而$\|\bullet\|_a$与$\|\bullet\|_2$等价。

第三步，证明$\|\bullet\|_a$与$\|\bullet\|_b$等价。若$\|\bullet\|_b$是$\mathbf{C}^n$上的任一向量范数，它也与$\|\bullet\|_2$等价，即

$$\alpha_1\|\boldsymbol{x}\|_2 \le \|\boldsymbol{x}\|_b \le \beta_1\|\boldsymbol{x}\|_2$$

故 $$\frac{\alpha_1}{\beta}\|\boldsymbol{x}\|_a \le \|\boldsymbol{x}\|_b \le \frac{\beta_1}{\alpha}\|\boldsymbol{x}\|_a$$ **证毕**

四、 应用——向量序列的极限

定义 给定 $\mathbf{C}^n$ 中的向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$，其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\xi^{(k)}{}_1, \xi_2{}^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$（$k=1,2,\cdots$），若 $\lim\limits_{k\to+\infty}\xi_i^{(k)} = \xi_i$ （$i=1,2,\cdots,n$），则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$**收敛**于 $\boldsymbol{x} = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$，记为 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$ （$k\to+\infty$）。如果至少一个分量的极限不存在，则称该向量序列**发散**。

例如，向量序列 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (-2+\frac{1}{k}, (1+\frac{1}{k})^k, 2)^{\mathrm{T}}$，当 $k\to+\infty$ 时，收敛于向量 $\boldsymbol{x} = (-2, e, 2)^{\mathrm{T}}$；而向量序列 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (1-\frac{1}{k}, \sin k)^{\mathrm{T}}$ 是发散的，因为 $\lim\limits_{k\to+\infty}\sin k$ 不存在。

定理 $\mathbf{C}^n$ 中向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是，对于 $\mathbf{C}^n$ 上任意一种向量范数 $\|\bullet\|$ 都有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\| = 0$。

证 先取 ∞-范数。因为

$$\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i\right| \le \max_i\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i\right| = \left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\|_\infty \le \sum_{i=1}^n\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i\right|$$

所以 $$\lim_{k\to+\infty}\xi_i^{(k)} = \xi_i \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty}\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\|_\infty = 0$$

对 $\mathbf{C}^n$ 的任一种向量范数 $\|\bullet\|$，由等价性有

$$\alpha\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\| \le \left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\|_\infty \le \beta\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\|$$

从而 $$\lim_{k\to+\infty}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\|_\infty = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{k\to+\infty}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\right\| = 0$$ **证毕**