第二章　随机变量及其分布

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

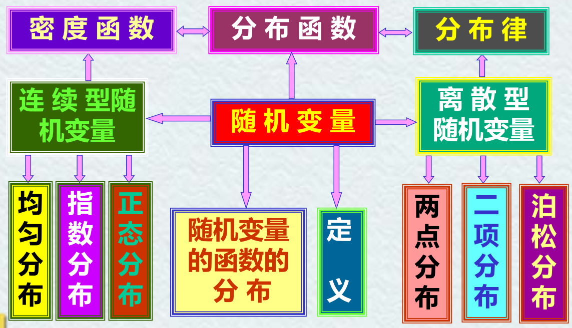
(0-1)分布、二项分布和泊松分布的分布律

正态分布、均匀分布和指数分布的分布函数、密度函数及有关区间概率的计算

2.难点

连续型随机变量的概率密度函数的求法

二、主要内容



随机变量

定义　设 E 是随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$.如果对于每一个 $e \in S$,有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值实值函数 $X(e)$,称随机变量.

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数，但它与普通的函数有着本质的差别，普通函数是定义在实数轴上的,而随机变量是定义在样本空间上的 (样本空间的元素不一定是实数).

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值,由于试验的各个结果的出现具有一定的概率,因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说：随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

随机变量的分类

随机变量
- 离散型
- 非离散型
  - 连续型
  - 其它

随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

离散型随机变量的分布律

(1)定义

设离散型随机变量X所有可能取的值为x_k $(k=1,2,\cdots)$, X取各个可能值的概率，即事件$\{X=x_k\}$的概率,为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

称此为离散型随机变量X的分布律.

(2)说明

1^0 $p_k \geq 0,\quad k=1,2,\cdots;$

2^0 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1;$

3^0离散型随机变量的分布律也可表为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	$x_n \cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	$p_n \cdots$

两点分布

设随机变量X只可能取0与1两个值，它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称X服从(0-1)分布或两点分布.

二项分布

X的分布律为

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
p_k	q^n	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	$\cdots$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	$\cdots$	p^n

$(k=0,1,2,\cdots,n,\quad 0<p<1)$

称这样的分布为二项分布.记为$X \sim b(n,p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

例如 在相同条件下相互独立地进行5次射击,每次射击时击中目标的概率为0.6,则击中目标的次数X服从$b(5,0.6)$的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1}0.6\cdot0.4^4$	$\binom{5}{2}0.6^2\cdot0.4^3$	$\binom{5}{3}0.6^3\cdot0.4^2$	$\binom{5}{4}0.6^4\cdot0.4$	0.6^5

泊松分布

设随机变量所有可能取的值为$0,1,2,\cdots$,而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中$\lambda>0$是常数.则称X服从参数为λ的泊松分布,记为$X \sim \pi(\lambda)$.

几何分布

若随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
p_k	p	qp	$\cdots$	$q^{k-1}p$	$\cdots$

$, p+q=1,$

则称 X 服从几何分布.

实例 设某批产品的次品率为 p,对该批产品做有放回的抽样检查，直到第一次抽到一只次品为止(在此之前抽到的全是正品)，那么所抽到的产品数 X 是一个随机变量，求X 的分布律.

解 X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \cdots$.

设 A_i 表示“抽到的第 i 个产品是正品”,

$$P\{X=k\}=P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A_k})$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \cdots \cdot P(A_{k-1})\cdot P(\overline{A_k})$$

$$=\underbrace{(1-p)(1-p)\cdot \cdots \cdot(1-p)}_{(k-1)}\cdot p=q^{k-1}p.$$

所以 X 服从几何分布. $(k=1,2,\cdots)$

说明 几何分布可作为描述某个试验 “首次成功” 的概率模型.

超几何分布

一个口袋里装有 a 个红球、b 个白球，从中任取 m 个球 $(1\leqslant m\leqslant a+b)$，设 X 表示从中取出的红球个数，则称 X 服从**超几何分布**。其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}\quad (1\leqslant k\leqslant \min\{m,a\})$$

随机变量的分布函数

(1)定义

设 X 是一个随机变量,x是任意实数,函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为 X 的分布函数.

(2)说明

分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

(3)性质

1^0 $0\le F(x)\le 1, \quad (-\infty,\infty);$

2^0 $F(x_1)\le F(x_2), \quad (x_1<x_2);$

3^0 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, \; F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1;$

4^0 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0), \quad (-\infty<x_0<\infty);$

即任一分布函数处处右连续.

(4)重要公式

$$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a),$$

$$P\{X>a\}=1-F(a).$$

离散型随机变量的分布函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_k.$$

连续型随机变量的概率密度

(1)定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,存在非负函数,使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量,其中 $f(x)$ 称为 X的概率密度函数,简称概率密度.

(2)性质

1° $f(x)\ge 0$;

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

3° $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $F'(x)=f(x)$.

(3)注意

若X是连续型随机变量，$\{X=a\}$是不可能事件, 则有 $P\{X=a\}=0$.

若 $P\{X=a\}=0$,

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$.

离散型

【例 1】 若 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$为某个连续型随机变量 X 的密度函数，求

(1) 常数 A;

(2) X 的分布函数;

(3) $P\left\{-\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=1$,

有 $2\int_{0}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=2A=1$, 得$A=\frac{1}{2}$。

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$

当 $x<0$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

当 $x\geqslant 0$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

总之

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $P\left\{-\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

均匀分布

(1)定义

设连续型随机变量 X 具有概率密度

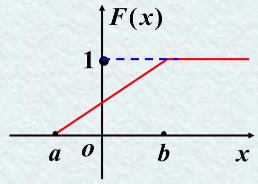
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布,记为

$$X \sim U(a,b).$$

(2)分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



指数分布

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

例 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $1/\lambda$ =2000的指数分布(单位:小时).

(1)任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上,求还能使用1000小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2000}x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(1) $P\{X>1000\}=1-P\{X\le 1000\}$

$$=1-F(1000)$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.607.$$

(2) $P\{X>2000 \mid X>1000\}$

$$=\frac{P\{X>2000, X>1000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$=\frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$=\frac{1-P\{X\le 2000\}}{1-P\{X\le 1000\}}$$

$$=\frac{1-F(2000)}{1-F(1000)}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.607.$$

指数分布的重要性质 :“无记忆性” .

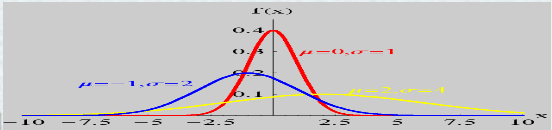
正态分布(或高斯分布)

(1)定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为

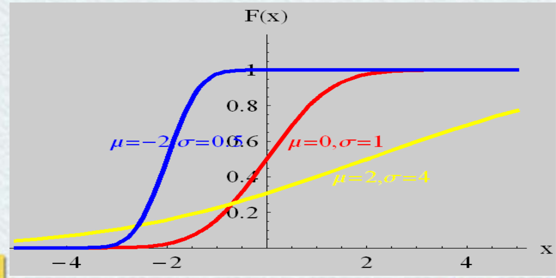
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数,则称X服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



(2)分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布,例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ; 正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.

正态分布下的概率计算

原函数不是初等函数

$$P\{X\le x\}=F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t}$$

$$=?$$

方法一:利用MATLAB软件包计算(演示)

方法二:转化为标准正态分布查表计算

(3)标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时,这样的正态分布称为标准正 态分布,记为 $N(0,1)$.

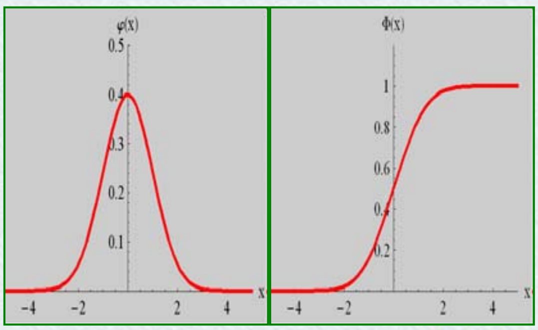
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty.$$

标准正态分布的图形



(4)重要公式

1^0 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

2^0 $P\{c\le X\le d\}=\Phi\left(\dfrac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{c-\mu}{\sigma}\right)$.

3^0 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

例 设 $X\sim N(0,1)$，计算(1) $P\{X<-1.23\}$；(2) $P\{X>1.23\}$；(3) $P\{|X|<1.23\}$；(4) $P\{|X|>1.23\}$。

解 (1) $P\{X<-1.23\}=1-\Phi(1.23)$

$=1-0.8907=0.1093$

(2) $P\{X>1.23\}=1-\Phi(1.23)=0.1093$

(3) $P\{|X|>1.23\}=1-P\{|X|\leqslant 1.23\}$

$=1-[2\Phi(1.23)-1]=2-2\Phi(1.23)$

$=2-2\times 0.8907=0.2186$

例 设 $X\sim N(-1,4)$，计算

(1) $P\{X\leqslant 1.23\}$；(2) $P\{X<-1.23\}$；

(3) $P\{|X|<1.23\}$。

解 因为 $X\sim N(-1,4)$，

所以$\dfrac{X-(-1)}{2}=\dfrac{X+1}{2}\sim N(0,1)$。

(1) $P\{X\leqslant 1.23\}=P\left\{\dfrac{X+1}{2}\leqslant\dfrac{2.23}{2}\right\}=\Phi(1.115)$

$\Phi(1.11)=0.8665,\ \Phi(1.12)=0.8686$

$P\{X\leqslant 1.23\}=\Phi(1.115)\approx\dfrac{1}{2}[\Phi(1.11)+\Phi(1.12)]$

≈ 0.8676

---

(2) $P\{X<-1.23\}$

$=\Phi\left(\dfrac{-1.23+1}{2}\right)=\Phi(-0.115)$

$=1-\Phi(0.115)\approx 1-\dfrac{1}{2}[\Phi(0.11)+\Phi(0.12)]$

$=0.4542$

(3) $P\{|X|<1.23\}=P\{-1.23<X<1.23\}$

$=\Phi\left(\dfrac{1.23+1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{-1.23+1}{2}\right)$

$=\Phi(1.115)-[1-\Phi(0.115)]=0.4134$

例 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P\{|X-\mu|\leqslant k\sigma\}$的值

$(k=1,2,3)$。

解 $P\{|X-\mu|\leqslant k\sigma\}=P\left\{\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right|\leqslant k\right\}$

$=2F_{0,1}(k)-1$

当 $k=1$ 时，$P\{|X-\mu|\leqslant k\sigma\}=0.6826$；

当 $k=2$ 时，$P\{|X-\mu|\leqslant k\sigma\}=0.9544$；

当 $k=3$ 时，$P\{|X-\mu|\leqslant k\sigma\}=0.9974$。

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，X 落在区间$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$上的概率为0.9974，几乎是必然的 3σ 准则

例 设 $X\sim N(160,\sigma^2)$，若 X 落在区间 $(120,200)$ 之间的概率不小于0.8，则允许 σ 最大为多少?

解 $P\{120<X<200\}$

$=\Phi\left(\dfrac{200-160}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{120-160}{\sigma}\right)$

$=\Phi\left(\dfrac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\dfrac{40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\dfrac{40}{\sigma}\right)-1\geqslant 0.8$

即 $\Phi\left(\dfrac{40}{\sigma}\right)\geqslant 0.9$。

$\dfrac{40}{\sigma}\geqslant 1.28$ $\sigma\leqslant 31.25$

(2)连续型随机变量的函数的分布

如果 X 是连续型随机变量,其函数 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量.

计算 Y 的概率密度通常是根据 X 的密度函数 $f_X(x)$ 求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$= \int_{g(x)\le y} f_X(x)\,\mathrm{d}x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

例 设 $X \sim N(0,1)$,求 $Y = X^2$ 的密度函数。

解 $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X^2 \leqslant y\}$

当 $y<0$ 时 $F_Y(y) = 0$

当 $y \geqslant 0$ 时 $F_Y(y) = P\{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\}$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$$

定理

设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x), x \in \mathbf{R}$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 则称 $Y = g(x)$ 是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \ne 0)$ 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \dfrac{1}{a} \ne 0$.

由公式 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, \alpha < y < \beta, \\ 0, \quad \text{其它}. \end{cases}$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

$$= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

得 $Y = aX + b$ $\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

三、典型例题

例1 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2, 0, 2, \sqrt{5}$, 相应的概率依次为 $\dfrac{1}{a}, \dfrac{3}{2a}, \dfrac{5}{4a}, \dfrac{7}{8a}$, 试求概率 $P\{|X| \le 2 | X \ge 0\}$.

[思路] 首先根据概率分布的性质求出常数 a 的值, 然后确定概率分布律的具体形式,最后再计算条件概率.

解 利用概率分布律的性质 $\sum_i p_i = 1$,

有 $1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a}$,

故 $a=\frac{37}{8}$,

因此 X 的分布律为

X	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{8}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{7}{37}$

从而

$$P\{|X|\le 2 \mid X\ge 0\}=\frac{P\{|X|\le 2, X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0\}+P\{X=2\}}{P\{X=0\}+P\{X=2\}+P\{X=\sqrt{5}\}}$$

$$=\frac{22}{29}.$$

例2 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,试确定常数 a,b,并求 X 的分布律.

[思路] 首先利用分布函数的性质求出常数 a, b, 再用已确定的分布函数来求分布律.

解 利用分布函数 $F(x)$ 的性质:

$$P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0),$$

$$F(+\infty)=1,$$

知 $\frac{1}{2}=P\{X=2\}$

$=(a+b)-(\frac{2}{3}-a)$

$=2a+b-\frac{2}{3}$,

且 $a+b=1$.

由此解得 $a=\frac{1}{6}, b=\frac{5}{6}$.

因此有 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{6}, & -1\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

从而 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

例3 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=Ae^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}\,dx=2\int_0^{+\infty} Ae^{-x}\,dx$

$=2A$,

故 $A=\frac{1}{2}$.

由于 $Y = X^2 \ge 0$,

故当 $y \le 0$ 时,有 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$;

当 $y > 0$ 时,有

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-x} \mathrm{d}x,$$

由于 $F_Y'(y) = f_Y(y)$,

故当 $y > 0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[\int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} \mathrm{d}x]$$

$$= e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

从而, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

例4 设随机变量 X 在（0,1）上服从均匀分布,

(1)求 $Y = \exp(X)$的概率分布;

(2) 求 $Y = -2\ln(X)$的概率分布.

例5 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 $d°C$, 液体的温度 X (以°C 计)是一个随机变量, 且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90$, 求 X 小于 89 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 $80°C$ 的概率不低于 0.99, 问d 至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$P\{X < 89\} = \Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

(2) $P\{X > 80\} \ge 0.99$

$$\Rightarrow 1 - P\{X \le 80\} \ge 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - F(80) \ge 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \ge 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \le 1 - 0.99 = 0.01,$$

即 $\frac{80-d}{0.5} \le -2.327 \Rightarrow d \ge 81.1635.$

例6 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \ne 0)$ 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \frac{1}{a} \ne 0.$

由公式 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right),\quad -\infty<y<\infty.$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}},\quad -\infty<y<\infty.$$

得 $Y=aX+b$
$\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$