第二章　范数理论

§1　向量的范数

例1　对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{C}^n$，规定

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm H}\boldsymbol{x}}$$

则它是一种向量范数，称为**向量2−范数**。

注　直接证明第三条公理时要用到Cauchy−Schwarz不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\|\boldsymbol{x}\|_2^2\|\boldsymbol{y}\|_2^2$$

或　$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}=\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2$$

则有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2&=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\le\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\\&\le\|\boldsymbol{x}\|_2^2+2\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2+\|\boldsymbol{y}\|_2^2=(\|\boldsymbol{x}\|_2+\|\boldsymbol{y}\|_2)^2\end{aligned}$$

例2　对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{C}^n$，规定

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

则它是一种向量范数，称为**向量1−范数**。

证（1）　$\|\boldsymbol{0}\|_1=0$；当 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|_1>0$；

（2）　$\|k\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|k|\|\boldsymbol{x}\|_1$；

（3）　$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1&=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\le\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)\\&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\|\boldsymbol{x}\|_1+\|\boldsymbol{y}\|_1\end{aligned}$$

例3　对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{C}^n$，规定

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_i|x_i|$$

则它是一种向量范数，称为**向量∞−范数**。

证（1）　$\|\boldsymbol{0}\|_\infty=0$；当 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ 时，必有分量不为0，于是 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty>0$；

（2）　$\|k\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_i|kx_i|=|k|\max_i|x_i|=|k|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$

（3）　$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty&=\max_i|x_i+y_i|\le\max_i(|x_i|+|y_i|)\\&\le\max_i|x_i|+\max_i|y_i|=\|\boldsymbol{x}\|_\infty+\|\boldsymbol{y}\|_\infty\end{aligned}$$

例4　对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{C}^n$，规定

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac1p}\qquad(1\le p<+\infty)$$

则它是一种向量范数，称为**向量 p−范数**。

注　证明第三条公理时要用到Hölder不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac1q}$$

$$\left(p>1,q>1,\frac1p+\frac1q=1\right)$$

则当 $p>1$ 时，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p&=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1}\\&\le\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1}\\&\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac1q}\\&\quad+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac1p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac1q}\\&=(\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac1q}\\&=(\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p)\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{\frac pq}\end{aligned}$$

整理得 $$\|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

即 $$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

例5 设A是n阶可逆矩阵，$\|\bullet\|_a$是C^n上的向量范数（不一定是p-范数）。规定

$$\|x\|_b = \|Ax\|_a \qquad \forall x \in C^n$$

证明$\|\bullet\|_b$是C^n上的向量范数。

证 （1）若 $x=0$, 则 $\|0\|_b = \|A0\|_a = \|0\|_a = 0$;

若$x \ne 0$, 则 $Ax \ne 0$（否则，若 $Ax=0$, 两边左乘A^{-1}得 $A^{-1}Ax = A^{-1}0$, 即 $x=0$, 矛盾）于是

$$\|x\|_b = \|Ax\|_a > 0$$

(2) $\|kx\|_b = \|A(kx)\|_a = |k|\|Ax\|_a = |k|\|x\|_b$;

(3) $\|x+y\|_b = \|A(x+y)\|_a \le \|Ax\|_a + \|Ay\|_a$
$= \|x\|_b + \|y\|_b$。

例如，取$\|\bullet\|_a$为C^n上的向量1-范数，又取n阶可逆矩阵 $A=\mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\|x\|_b = \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|ix_i| = \sum_{i=1}^{n} i|x_i|$$
$$= |x_1| + 2|x_2| + \cdots + n|x_n|$$

这是一种新的向量范数。

例6 设A是n阶Hermite正定矩阵，规定

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H A x} \qquad (\forall x \in C^n)$$

则$\|x\|_A$是C^n上的向量范数，称之为椭球范数。

证 由于A是Hermite正定矩阵，所以存在酉矩阵U使得

$$U^H A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \quad (\lambda_i > 0, \ i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是

$$A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H$$
$$= U\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) U^H$$
$$= P^H P$$

其中 $P = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) U^H$是可逆矩阵。从而

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H A x} = \sqrt{x^H P^H P x} = \sqrt{(Px)^H (Px)} = \|Px\|_2$$

由例5知，$\|x\|_A$是C^n上的向量范数。

例 证明向量的1-、2-、∞-范数等价。

证 因为

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1 \le n \max_i |x_i| = n\|x\|_\infty$$

所以向量的1-范数与2-范数等价；又有

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} = \|x\|_2 \le \sqrt{n}\max_i |x_i| = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

于是向量的2-范数与∞-范数等价。结合诸不等式得

$$\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \le n\|x\|_2 \le n\sqrt{n}\|x\|_\infty \le n\sqrt{n}\|x\|_1$$

即有 $$\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_1$$

于是向量的2-范数与1-范数等价。

例 向量序列 $x^{(k)} = (-2 + \frac{1}{k}, (1+\frac{1}{k})^k, 2)^T$,

当 $k \to +\infty$ 时，收敛于向量 $x = (-2, e, 2)^T$;

而向量序列 $x^{(k)} = (1 - \frac{1}{k}, \sin k)^T$ 是发散的，因为

$\lim\limits_{k \to +\infty} \sin k$ 不存在。

§2　方阵范数

例　对于 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

则 $\|A\|_{m_1}$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称之为 **m_1-范数**。

证　前三条公理必成立，只证公理(4)。　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则

例　对于 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|A\|_{m_\infty}=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$$

则 $\|A\|_{m_\infty}$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称之为 **m_∞-范数**。

证

$$\|AB\|_{m_\infty}=n\cdot\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\le n\cdot\max_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)$$

$$\le n\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\max_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|\right)$$

$$\le n\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot n\cdot\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty}$$

$$\|AB\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{jk}|\right)=\|A\|_{m_1}\|B\|_{m_1}$$

例　对于 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=[\mathrm{tr}(A^HA)]^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|A\|_F$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称之为 **Frobenius范数**。简称 F-范数。

例　矩阵 m_1-范数与向量1-范数相容。

证　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|\right)\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)=\|A\|_{m_1}\|x\|_1$$

证

$$\|AB\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2}$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2}$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{jk}|^2}$$

$$=\|A\|_F\|B\|_F$$

例　矩阵F-范数与向量2-范数相容。

证　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则

$$\|Ax\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|\right)^2}$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)\right]}\quad\text{(利用C-S不等式)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\|A\|_F\|x\|_2$$

例 矩阵 m_∞-范数与向量1-，2-，∞-范数均相容。

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，则

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}||x_k|$$

$$\le \max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|x_k| = n\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\sum_{k=1}^n|x_k|$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\|x\|_1$$

$$\|Ax\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||x_k|\Big)^2}$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^n|x_k|^2\Big)}\quad\text{（利用C-S不等式）}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2}\cdot\|x\|_2 \le n\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\|x\|_2=\|A\|_{m_\infty}\|x\|_2$$

$$\|Ax\|_\infty=\max_i\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|\le\max_i\sum_{k=1}^n|a_{ik}||x_k|$$

$$\le\max_k|x_k|\cdot\max_i\sum_{k=1}^n|a_{ik}| \le \|x\|_\infty\cdot n\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\|x\|_\infty$$

例 求与矩阵 m_∞-范数相容的向量范数。

解 取 $a=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})^{\mathrm T}$，对于任意

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in \mathbf{C}^n$$

有

$$\|x\|_v=\|xa^{\mathrm T}\|_{m_\infty}=\left\|\begin{pmatrix}\frac{x_1}{n}&\cdots&\frac{x_1}{n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{x_n}{n}&\cdots&\frac{x_n}{n}\end{pmatrix}\right\|_{m_\infty}=n\cdot\max_i\left|\frac{x_i}{n}\right|$$

$$=\max_i|x_i|=\|x\|_\infty$$

例 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2&1+\mathrm i\\ 3&5&-1&0\\ 1&2&0&-1\\ -\mathrm i&1&2&-4\end{pmatrix}$$

求 m_1-，F-，m_∞-，1-，∞-范数。

解 $\|A\|_{m_1}=1+2+\sqrt2+3+5+1+1+2+1+1+1+2+4$

$$=24+\sqrt2$$

$$\|A\|_F=\sqrt{1+4+2+9+25+1+1+4+1+1+1+4+16}$$

$$=\sqrt{70}$$

$\|A\|_{m_\infty}=4\times5=20$，$\|A\|_1=\max\{6,8,5,5+\sqrt2\}=8$，

$\|A\|_\infty=\max\{3+\sqrt2,9,4,8\}=9$

例 判断矩阵1-范数与向量的∞-范数是否相容?

解 取

$$A_0=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ 0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

则 $\|A_0\|_1=1$，$\|x_0\|_\infty=1$，但是

$$A_0x_0=(n,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$$

从而 $\|A_0x_0\|_\infty=n>1=\|A_0\|_1\|x_0\|_\infty$

故矩阵1-范数与向量的∞-范数不相容。

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}0&\mathrm i&1\\ -\mathrm i&1&-\mathrm i\\ 1&\mathrm i&0\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(\mathrm i=\sqrt{-1})$$

则 $\|A\|_\infty$=(3)，$\|A\|_2$=($1+\sqrt2$)，$\|Ax\|_1$=(4)。

分析 $\|A\|_\infty=\max\{2,3,2\}=3$

A为Hermite矩阵，可求得A的特征值为

$$-1,\ 1+\sqrt2,\ 1-\sqrt2$$

故 $\|A\|_2=1+\sqrt2$。又 $Ax=(1,-2\mathrm i,1)^{\mathrm T}$，故 $\|Ax\|_1=4$。

例 已知矩阵$\boldsymbol{S}$可逆，试推导由向量范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_S=\|\boldsymbol{Sx}\|_2$$

导出的矩阵范数$\|\boldsymbol{A}\|_S$。

解

$$\|\boldsymbol{A}\|_S=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_S}{\|\boldsymbol{x}\|_S}=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Ax})\|_2}{\|\boldsymbol{Sx}\|_2}$$

$$=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{SAS}^{-1}(\boldsymbol{Sx})\|_2}{\|\boldsymbol{Sx}\|_2}$$

$$\underline{\text{令}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Sx}}\max_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{SAS}^{-1}\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2}$$

$$=\|\boldsymbol{SAS}^{-1}\|_2$$

例 设$\boldsymbol{A}$可逆，$\|\bullet\|$是由向量范数$\|\bullet\|_v$导出的矩阵范数。证明

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}=\min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}$$

证 因为

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}\ \underline{\text{令}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}\max_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{y}\|_v}{\|\boldsymbol{Ay}\|_v}$$

所以

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}=\frac{1}{\max\limits_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{y}\|_v}{\|\boldsymbol{Ay}\|_v}}=\min_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ay}\|_v}{\|\boldsymbol{y}\|_v}=\min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}$$

例 证明：1）方阵的m_∞-范数与F-范数等价；

2）方阵的m_∞-范数与m_1-范数等价；

3）方阵的m_1 -范数与F-范数等价。

证 1）

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=n\cdot\max_{ij}|a_{ij}|\le n\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2}$$

$$=n\cdot\|\boldsymbol{A}\|_F\le n\cdot\max_{ij}|a_{ij}|\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1}$$

$$=n^2\cdot\max_{ij}|a_{ij}|=n\cdot\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$$

即 $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le\|\boldsymbol{A}\|_F\le\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$ 或 $\|\boldsymbol{A}\|_F\le\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le n\|\boldsymbol{A}\|_F$

故方阵的m_∞-范数与F-范数等价；

2）

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=n\cdot\max_{ij}|a_{ij}|\le n\cdot\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ij}|$$

$$=n\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\le n\cdot\max_{ij}|a_{ij}|\cdot n^2=n^2\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$$

即 $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\le n\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$ 或 $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\le\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le n\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$

故方阵的m_∞-范数与m_1-范数等价；

3）$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\le n\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le n^2\|\boldsymbol{A}\|_F\le n^2\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\le n^3\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$

即 $$\frac{1}{n^2}\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\le\|\boldsymbol{A}\|_F\le n\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$$

故方阵的m_1 -范数与F-范数等价。

§ 3 长方阵的范数

例 对于$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$，规定

$$\|\boldsymbol{A}\|_G=\sqrt{mn}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$$

证明：1）$\|\boldsymbol{A}\|_G$是$\mathbf{C}^{m\times n}$上的矩阵范数；

2）$\|\boldsymbol{A}\|_G$与向量2-范数相容。

证 1）只证相容性公理。设$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times s}$，则

$$\|\boldsymbol{AB}\|_G=\sqrt{ms}\cdot\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|\le\sqrt{ms}\cdot\max_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||b_{kj}|\Big)$$

$$\le\sqrt{ms}\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\max_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^n|b_{kj}|\Big)$$

$$\le\sqrt{ms}\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot n\cdot\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$=\sqrt{mn}\cdot\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\sqrt{ns}\cdot\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$=\|\boldsymbol{A}\|_G\|\boldsymbol{B}\|_G$$

2）设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^m\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^m\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||x_k|\Big)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}[(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2)(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)]} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \\
&\le \sqrt{mn}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_2 \\
&= \|\boldsymbol{A}\|_G\|\boldsymbol{x}\|_2
\end{aligned}
$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ 非奇异，且

$$
(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 204.82 & -128.12 & -53.12 & 31.25 \\ -128.12 & 77.53 & 31.78 & -18.81 \\ -53.12 & 31.78 & 14.03 & -8.31 \\ 31.25 & -18.81 & -8.31 & 5.12 \end{pmatrix}
$$

则 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 很大。

§4　范数的应用

例1　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ 是实对称的，行列式为

$\det\boldsymbol{A}=1$, 逆矩阵为

$$
\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}
$$

例2（R.S.Wilson）考虑系数阵为4阶实对称阵的线性方程组

$$
\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \text{ 其精确解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

如果把右端项作微小摄动

$$
\delta\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}
$$

当对$\boldsymbol{A}$的第一行第一列元素稍加改变时，试看它的行列式与逆阵如何变化。设

$$
\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{则 } \boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5+\varepsilon & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}
$$

可以求得　　$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=1+68\varepsilon$

由此可知，当取 $\varepsilon=-\dfrac{1}{68}\approx-0.015$ 时，

$$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=0$$

即矩阵变成奇异的了。如果取$\varepsilon=-0.01$, 可求得

$$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=0.32$$

它的解变为

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}
$$

与原解的差异较大。

如果把系数矩阵微加摄动

$$
\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}
$$

而右端向量不变，即

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

其解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

与原解的差异更大。

例 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

试估计$\boldsymbol{A}$的特征值的范围。

解 可求得

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} = 1, \quad \|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{0.18} \approx 0.4243, \quad \|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} = 0.6$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 0.4$$

于是$\boldsymbol{A}$的任一特征值λ满足

$$|\lambda| \le 0.4$$

实际计算可知$\boldsymbol{A}$的特征值是

$$0,\ -0.3\mathrm{i},\ 0.3\mathrm{i}$$