§2　方阵范数

一、定义与基本性质

定义　若矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 对应的实函数 $\|\boldsymbol{A}\|$ 满足

（1）　非负性：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|=0$；若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|>0$；

（2）　齐次性：　$\|k\boldsymbol{A}\|=|k|\|\boldsymbol{A}\|,\quad k\in\mathbf{C}$；

（3）　三角不等式：　$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$，　$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$；

（4）　相容性：　$\|\boldsymbol{AB}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$，　$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，

则称 $\|\bullet\|$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的**矩阵范数**。

由于矩阵范数的前三条公理与向量范数一致，因此矩阵范数具有向量范数所具有的性质，如 $\|-\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{A}\|$，$\big|\|\boldsymbol{A}\|-\|\boldsymbol{B}\|\big|\leq\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$，$\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的任意两个矩阵范数等价。

二、常用矩阵范数之一 —由向量范数推广

由于在矩阵范数定义中第四条相容性公理的出现，使得在某些情形下，由向量范数直接推广到矩阵范数时需做一些修改。

例　对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

（这是向量 1-范数的直接推广），

则 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称之为 m_1**-范数**。

证　前三条公理必成立，只证公理（4）。设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\|\boldsymbol{AB}\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\Big)\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|\Big)$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{jk}|\Big)=\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\|\boldsymbol{B}\|_{m_1}$$

例　对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}$$

（向量 2-范数的推广）

则$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$是$\mathbf{C}^{n\times n}$上的矩阵范数，称之为 **Frobenius 范数**，简称 **F-范数**。

证 $\|\boldsymbol{AB}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^{2}}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|)^{2}}\le$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^{2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^{2})^{\frac{1}{2}}]^{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^{2}}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{jk}|^{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{F}}$$

如果把向量的∞-范数直接推广为$\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$，则前三条公理必满足，但相容性公理却不成立。如取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\|\boldsymbol{AB}\|=2$，$\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{B}\|=1$。可见，$\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|$不成立，因此要做适当修改。

例 对于$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}|a_{ij}|,$$

则 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$是$\mathbf{C}^{n\times n}$上的矩阵范数，称为$m_\infty$**-范数**。

证 $\|\boldsymbol{AB}\|_{m_\infty}=n\max\limits_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\le n\max\limits_{i,j}(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|)\le n\max\limits_{i,k}|a_{ik}|\max\limits_{i,j}(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|)$

$$\le n\max_{i,k}|a_{ik}|n\max_{k,j}|b_{kj}|=\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\|\boldsymbol{B}\|_{m_\infty}$$

对于矩阵的m_1-，F-和m_∞-范数，有如下一些性质。

性质 1 $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|$ （m_1-，F-，m_∞-范数）

性质 2 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，即$\boldsymbol{A}$按列分块，则

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=\|\boldsymbol{a}_1\|_1+\cdots+\|\boldsymbol{a}_n\|_1,\quad \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\|\boldsymbol{a}_1\|_2^2+\cdots+\|\boldsymbol{a}_n\|_2^2},$$

$F \longrightarrow 2$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=n\max(\|\boldsymbol{a}_1\|_\infty,\cdots,\|\boldsymbol{a}_n\|_\infty)。$$

性质 3 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$为任意$n$阶酉矩阵，则

$$\|\boldsymbol{UA}\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{AV}\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{UAV}\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$$

证 法 1.

$$\|\boldsymbol{UA}\|_{\mathrm{F}}=\|(\boldsymbol{Ua}_1,\cdots,\boldsymbol{Ua}_n)\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\|\boldsymbol{Ua}_1\|_2^2+\cdots+\|\boldsymbol{Ua}_n\|_2^2}=\sqrt{\|\boldsymbol{a}_1\|_2^2+\cdots+\|\boldsymbol{a}_n\|_2^2}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$$

法 2. $\|\boldsymbol{UA}\|_{\mathrm{F}}=\{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{UA})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UA})]\}^{\frac{1}{2}}=\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{UA})\}^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$

而 $$\|AV\|_F=\|(AV)^H\|_F=\|V^HA^H\|_F=\|A^H\|_F=\|A\|_F$$

最后 $$\|UAV\|_F=\|AV\|_F=\|A\|_F$$ **证毕**

这一性质称为 F-范数的**酉不变性**。

三、与向量范数的相容问题

定义 设 $\|\bullet\|_M$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$\|\bullet\|_v$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，若对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{Ax}\|_v\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\|_v$，则称**矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ 与向量范数 $\|\bullet\|_v$ 相容**。

例 矩阵 m_1-范数与向量 1-范数相容。

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$， $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right|\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||\xi_k|\right)\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|\sum_{k=1}^n|\xi_k|\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|\right)=\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}\|\boldsymbol{x}\|_1$$

例 矩阵 F-范数与向量 2-范数相容。

证 $$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||\xi_k|\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2\right)^{\frac12}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2}=\|\boldsymbol{A}\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2$$

例 矩阵 m_∞-范数与向量 1-，2-，∞-范数均相容。

证 $$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right|\le\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}||\xi_k|\le\max_{i,k}|a_{ik}|\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|\xi_k|$$

$$=n\max_{i,k}|a_{ik}|\sum_{k=1}^n|\xi_k|=\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\|\boldsymbol{x}\|_1$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}||\xi_k|\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2\right)}$$

$$=\|\boldsymbol{x}\|_2\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2}\le\|\boldsymbol{x}\|_2\,n\max_{i,k}|a_{ik}|=\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k\right| \le \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}||\xi_k| \le \max_k |\xi_k| \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

$$\le \|x\|_\infty \, n\max_{i,k}|a_{ik}| = \|A\|_{m_\infty} \|x\|_\infty$$

定理 设$\|\bullet\|_M$是$\mathbf{C}^{n\times n}$的矩阵范数，则总存在$\mathbf{C}^n$的向量范数与之相容。

证 任意取定$\mathbf{0}\ne \boldsymbol{a}\in \mathbf{C}^n$，对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，规定

$$\|\boldsymbol{x}\|_v = \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M$$

则（1）$\|\mathbf{0}\|_v = \|\mathbf{0}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = \|\boldsymbol{O}\|_M = 0$；当$\boldsymbol{x}\ne\mathbf{0}$时，$\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\ne \boldsymbol{O}$，于是$\|\boldsymbol{x}\|_v = \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M > 0$；

（2） $\|k\boldsymbol{x}\|_v = \|(k\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = \|k(\boldsymbol{x}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\|_M = |k|\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = |k|\|\boldsymbol{x}\|_v$；

（3） $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_v = \|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M \le \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M + \|\boldsymbol{y}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = \|\boldsymbol{x}\|_v + \|\boldsymbol{y}\|_v$

故$\|\bullet\|_v$是向量范数。又

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_v = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\|_M \le \|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_M = \|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\|_v$$ **证毕**

由于$\boldsymbol{a}\ne\mathbf{0}$的任意性，因此我们可以构造出与$\|\bullet\|_M$相容的无穷多向量范数。

例 求与矩阵m_∞-范数相容的向量范数。

解 取$\boldsymbol{a}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})^{\mathrm{T}}$，对于$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$有

$$\|\boldsymbol{x}\|_v = \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\|_{m_\infty} = \left\|\begin{pmatrix} \frac{\xi_1}{n} & \cdots & \frac{\xi_1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\xi_n}{n} & \cdots & \frac{\xi_n}{n} \end{pmatrix}\right\| = n\max_i\left|\frac{\xi_i}{n}\right| = \max_i|\xi_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

四、常用矩阵范数之二——由向量范数导出

单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于 1 在数的乘法中的作用，但对于已知的矩阵范数有$\|\boldsymbol{I}_n\|_{m_1}=n$，$\|\boldsymbol{I}_n\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{n}$，$\|\boldsymbol{I}_n\|_{m_\infty}=n$，当$n$变化时，以上三种矩阵范数的值均发生变化，这对于一些理论分析带来不便。对于一般的矩阵范数，总有$\|\boldsymbol{I}_n\|\ge 1$，这是因为

$$\|\boldsymbol{x}\|_v = \|\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}\|_v \le \|\boldsymbol{I}\|\|\boldsymbol{x}\|_v, \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$$

所以$\|\boldsymbol{I}\|\ge 1$（其中$\|\bullet\|_v$是与$\|\bullet\|$相容的向量范数）。

那么能否构造出使$\|\boldsymbol{I}_n\|\equiv 1$的矩阵范数呢？

定理　已知$\mathbf{C}^n$的向量范数$\|\bullet\|_v$，对任意$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定

$$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}=\max_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v$$

则$\|\bullet\|$是$\mathbf{C}^{n\times n}$上与向量范数$\|\bullet\|_v$相容的矩阵范数，且$\|I\|\equiv 1$，称之为由**向量范数$\|\bullet\|_v$导出的矩阵范数**或**从属向量范数$\|\bullet\|_v$的矩阵范数**，简称**导出范数**或**从属范数**（也称为**算子范数**）。

证　$\|I_n\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v}=1$；

由　$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\geq\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$　得　$\|Ax\|_v\leq\|A\|\|x\|_v$；又对$x=0$该式成立，故$\|\bullet\|$与向量范数$\|\bullet\|_v$相容。

（1）当$A=O$时，$\|A\|=0$；当$A\neq O$时，存在x_0使$Ax_0\neq 0$，从而$\|A\|\geq\frac{\|Ax_0\|_v}{\|x_0\|_v}>0$；

（2）$\|kA\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|(kA)x\|_v}{\|x\|_v}=|k|\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}=|k|\|A\|$；

（3）$\|A+B\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v}\leq\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}+\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v}=\|A\|+\|B\|$；

（4）$\|AB\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|(AB)x\|_v}{\|x\|_v}\leq\|A\|\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v}=\|A\|\|B\|$。　　**证毕**

定理　设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则由向量1-，2-，$\infty$-范数导出的矩阵范数依次为

（1）$\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$　　称为**矩阵1-范数**或**列和范数**；

（2）$\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$　　称为**矩阵∞-范数**或**行和范数**；

（3）$\|A\|_2=\sqrt{A^{\mathrm{H}}A\text{的最大特征值}}$　　称为**矩阵2-范数**或**谱范数**；

证　（1）对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$有

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j|=\sum_{j=1}^{n}[|\xi_j|(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|)]\le$$

$$(\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|)(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|)\ =(\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|)\|\boldsymbol{x}\|_1$$

即 $\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\le\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$。下证可以取得 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 达到右边的值。

设 $\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$，其中 $\xi_j^{(0)}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\ne k\end{cases}$，

则 $\|\boldsymbol{x}^{(0)}\|_1=1$，且

$$\frac{\|\boldsymbol{Ax}^{(0)}\|_1}{\|\boldsymbol{x}^{(0)}\|_1}=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(0)}\right|=\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

故 $\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}=\max\limits_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$。

(2) $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}\xi_j|\le\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j|\le\max\limits_j|\xi_j|\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

即 $\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，也即 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\le\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

又设 $\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|=\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，取 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\cdots,\xi_n^{(1)})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，其中

$\xi_j^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{|a_{kj}|}{a_{kj}}, & a_{kj}\ne 0\\ 1, & a_{kj}=0\end{cases}$，则 $\|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty=1$，且由 $\boldsymbol{Ax}^{(1)}=(*,\cdots,*,\overset{k行}{\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|},*,\cdots,*)^{\mathrm{T}}$，得

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\ge\frac{\|\boldsymbol{Ax}^{(1)}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty}=\max_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(1)}\right|\ge\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

故 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}=\max\limits_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。

(3) 先证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值全非负。设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$，则

$$0\le\|\boldsymbol{Ax}\|_2^2=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\lambda\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

所以 $\lambda\ge 0$。

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$，则存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

设 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$，则 $\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$。由于 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 有 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n$，从而

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} =$$

$$\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n)} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(k_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_n\lambda_n\boldsymbol{u}_n)} =$$

$$\sqrt{(\bar{k}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{H}} + \cdots + \bar{k}_n\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{H}})(k_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_n\lambda_n\boldsymbol{u}_n)} =$$

$$\sqrt{\lambda_1|k_1|^2 + \cdots + \lambda_n|k_n|^2} \le \sqrt{\lambda_1}\sqrt{|k_1|^2 + \cdots + |k_n|^2}$$

又 $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}} = \sqrt{|k_1|^2 + \cdots + |k_n|^2}$，即有 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \le \sqrt{\lambda_1}$。取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$，则

$$\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1\|_2}{\|\boldsymbol{u}_1\|_2} = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1} = \sqrt{\lambda_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_1} = \sqrt{\lambda_1}$$

故 $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}} \dfrac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\lambda_1}$。**证毕**

性质 1 $\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_1 = \|\boldsymbol{A}\|_\infty$，$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_\infty = \|\boldsymbol{A}\|_1$，$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2$。

证 前两式易证。为证第三式，先证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 非零特征值相同。

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，$\lambda \ne 0$ 且 $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$。因为 $\lambda\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$。从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$$

即 $\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 对应 λ 的特征向量。同理可证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的任一非零特征值也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值。故

$$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\text{的最大特征值}} = \sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\text{的最大特征值}} = \|\boldsymbol{A}\|_2$$ **证毕**

性质 2 $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\|_2 = \|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\|_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2$，其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是 n 阶酉矩阵，即 2-范数具有酉不变性质。

证 $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A})\text{的最大特征值}} = \sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\text{的最大特征值}} = \|\boldsymbol{A}\|_2$

$$\|AV\|_2=\|V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}\|_2=\|A^{\mathrm{H}}\|_2=\|A\|_2,\quad \|UAV\|_2=\|AV\|_2=\|A\|_2。$$ **证毕**

例 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2&1+\mathrm{i}\\3&5&-1&0\\1&2&0&-1\\-\mathrm{i}&1&2&-4\end{pmatrix}$，求 m_1-，F-，m_∞-，1-，∞-范数。

解 $\|A\|_{m_1}=1+2+\sqrt{2}+3+5+1+1+2+1+1+1+2+4=24+\sqrt{2}$；

$\|A\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{1+4+2+9+25+1+1+4+1+1+1+4+16}=\sqrt{70}$；

$\|A\|_{m_\infty}=4\times 5=20$； $\|A\|_1=\max\{6,8,5,5+\sqrt{2}\}=8$；

$\|A\|_\infty=\max\{3+\sqrt{2},9,4,8\}=9$。