第二章 范数理论

§1 向量的范数

例1 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$,规定 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^H x}$

则它是一种向量范数,称为<mark>向量2-范数</mark>。

注 直接证明第三条公理时要用到Cauchy

-Schwarz不等式

en en en

例3 对
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$$
,规定
$$\|x\|_{\infty} = \max|x_i|$$

则它是一种向量范数,称为向量∞-范数。

证(1) $\|\mathbf{0}\|_{\infty} = 0$; 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时,必有分量不为0,于是 $\|x\|_{\infty} > 0$;

(2)
$$||kx||_{\infty} = \max_{i} |kx_{i}| = |k| \max_{i} |x_{i}| = |k| ||x||_{\infty}$$

(3)
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\infty} = \max_{i} |x_{i} + y_{i}| \le \max_{i} (|x_{i}| + |y_{i}|)$$

 $\le \max_{i} |x_{i}| + \max_{i} |y_{i}| = \|\mathbf{x}\|_{\infty} + \|\mathbf{y}\|_{\infty}$

Aud Indi

THE ES

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i| |y_i|)^2 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{y}\|_2^2$$

或
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| |y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

则有
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i| |y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$$

$$\le \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 = (\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2)^2$$

例4 对
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$$
,规定
$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < +\infty)$$
 则它是一种向量范数,称为向量 p -范数。
注 证明第三条公理时要用到Hölder不等式
$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} (p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$
 则当 $p > 1$ 时,

例2 对
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$$
,规定
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

则它是一种向量范数,称为向量1-范数。

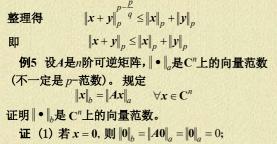
证 (1)
$$\|\mathbf{0}\|_1 = 0$$
; 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时, $\|x\|_1 > 0$;

(2)
$$||kx||_1 = \sum_{i=1}^n |kx_i| = |k| \sum_{i=1}^n |x_i| = |k| ||x||_1;$$

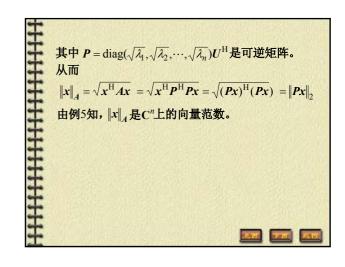
(3)
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{1} = \sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_{i}| + |y_{i}|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_{i}| + \sum_{i=1}^{n} |y_{i}| = \|\mathbf{x}\|_{1} + \|\mathbf{y}\|_{1}$$

 $\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{p}^{p} &= \sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}|^{p} = \sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}| \|x_{i} + y_{i}|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_{i}| \|x_{i} + y_{i}|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_{i}| \|x_{i} + y_{i}|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{n} |y_{i}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|\mathbf{x}\|_{p} + \|\mathbf{y}\|_{p}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i} + y_{i}|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|\mathbf{x}\|_{p} + \|\mathbf{y}\|_{p}\right) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{p}^{p} \end{aligned}$



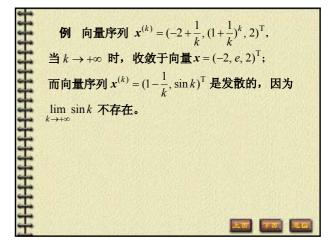
 若 $x \neq 0$, 则 $Ax \neq 0$ (否则, 若 Ax = 0, 两边左乘 A^{-1} 得 $A^{-1}Ax = A^{-1}0$, 即 x = 0, 矛盾) 于是 $\|\mathbf{x}\|_{b} = \|A\mathbf{x}\|_{a} > 0$

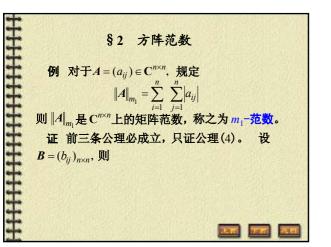


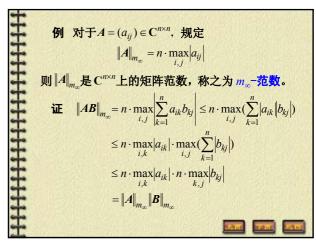
 $||kx||_b = ||A(kx)||_a = |k|||Ax||_a = |k||x||_b;$ (2) (3) $||x+y||_b = ||A(x+y)||_a \le ||Ax||_a + ||Ay||_a$ $= ||x||_{L} + ||y||_{L^{\circ}}$ 例如,取 ● 。为 Cⁿ上的向量1-范数,又取_n阶可逆 矩阵 $A = diag(1, 2, \dots, n)$,则 $\|\mathbf{x}\|_{b} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{1} = \sum_{i=1}^{n} |ix_{i}| = \sum_{i=1}^{n} i|x_{i}|$ $= |x_1| + 2|x_2| + \cdots + n|x_n|$ 这是一种新的向量范数。

例 证明向量的1-、2-、∞-范数等价。 证 因为 $\|x\|_{\infty} = \max |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \le n \max |x_i| = n \|x\|_{\infty}$ 所以向量的1-范数与2-范数等价;又有 $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{i} |x_{i}| \le \sqrt{\sum_{i} |x_{i}|^{2}} = \|\mathbf{x}\|_{2} \le \sqrt{n} \max_{i} |x_{i}| = \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_{\infty}$ 于是向量的2-范数与∞-范数等价。结合诸不等式得 $\|x\|_{1} \le n\|x\|_{\infty} \le n\|x\|_{2} \le n\sqrt{n}\|x\|_{\infty} \le n\sqrt{n}\|x\|_{1}$ $\frac{1}{n} \|x\|_{1} \leq \|x\|_{2} \leq \sqrt{n} \|x\|_{1}$ 即有 于是向量的2-范数与1-范数等价。

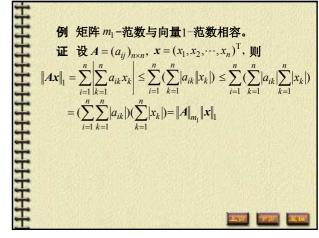
例6 设A是n阶Hermite正定矩阵,规定 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{H}} A \mathbf{x}} \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n)$ 则 ||x||, 是 Cⁿ上的向量范数, 称之为椭球范数。 证 由于A是Hermite正定矩阵,所以存在酉矩阵 U使得 $U^{H}AU = \operatorname{diag}(\lambda_{1}, \lambda_{2}, \dots, \lambda_{n}) \ (\lambda_{i} > 0, \ i = 1, 2, \dots, n)$ $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^{\mathrm{H}}$ = $U \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) U^{\mathrm{H}}$ $= \mathbf{P}^{\mathrm{H}} \mathbf{P}$

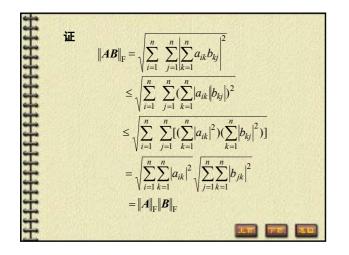


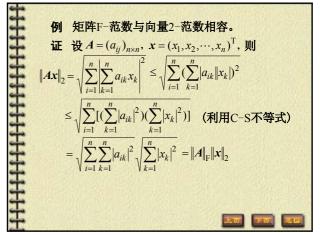


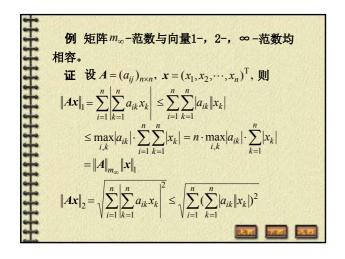


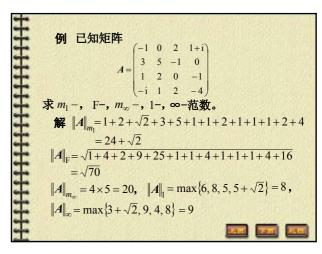


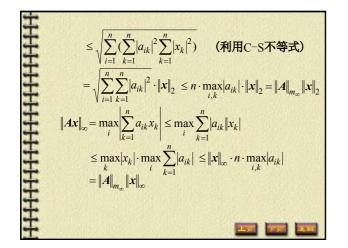


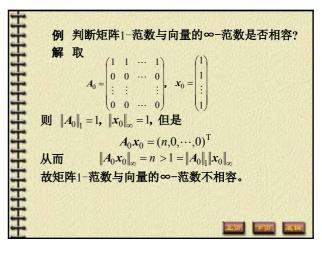


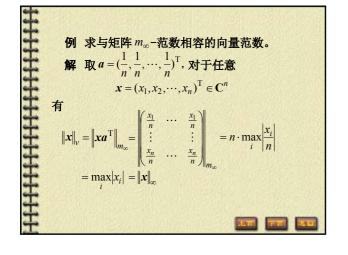


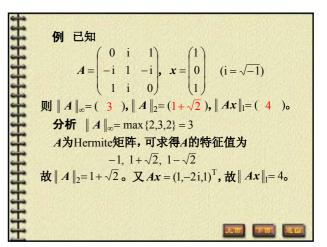


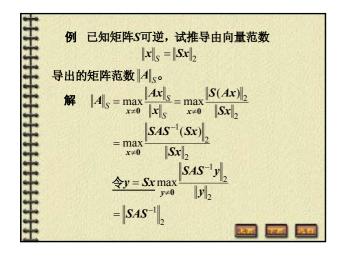






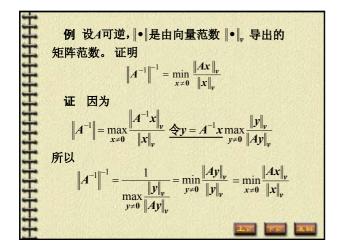


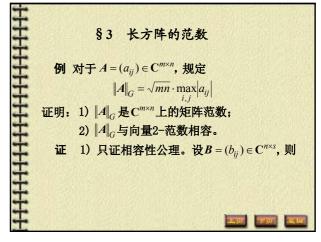


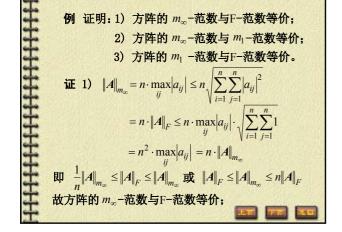


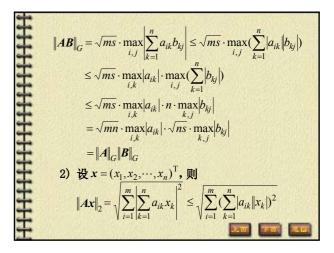
2)
$$\|A\|_{m_{\infty}} = n \cdot \max_{ij} |a_{ij}| \le n \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ij}|$$
 $= n\|A\|_{m_1} \le n \cdot \max_{ij} |a_{ij}| \cdot n^2 = n^2 \|A\|_{m_{\infty}}$
即 $\frac{1}{n} \|A\|_{m_{\infty}} \le \|A\|_{m_1} \le n\|A\|_{m_{\infty}}$ 或 $\frac{1}{n} \|A\|_{m_1} \le \|A\|_{m_{\infty}} \le n\|A\|_{m_1}$
故方阵的 m_{∞} 一范数与 m_1 一范数等价;

3) $\|A\|_{m_1} \le n\|A\|_{m_{\infty}} \le n^2 \|A\|_F \le n^2 \|A\|_{m_{\infty}} \le n^3 \|A\|_{m_1}$
即 $\frac{1}{n^2} \|A\|_{m_1} \le \|A\|_F \le n\|A\|_{m_1}$
故方阵的 m_1 一范数与F一范数等价。









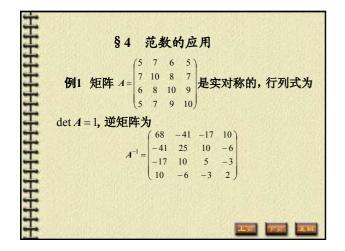
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^{2})(\sum_{k=1}^{n} |x_{k}|^{2})]}$$

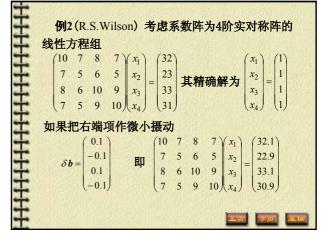
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^{2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_{k}|^{2}}$$

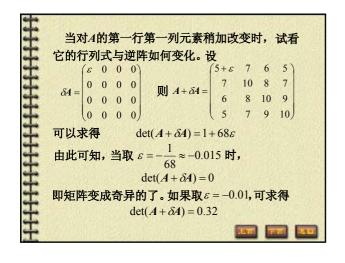
$$\leq \sqrt{mn} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot ||x||_{2}$$

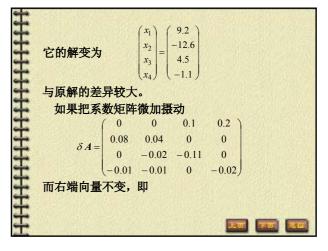
$$= ||A||_{G} ||x||_{2}$$











例 已知
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$$
 试估计A的特征值的范围。 解 可求得
$$\|A\|_{m_1} = 1, \ \|A\|_F = \sqrt{0.18} \approx 0.4243, \ \|A\|_{m_\infty} = 0.6$$

$$\|A\|_1 = \|A\|_{\infty} = 0.4$$
 于是A的任一特征值 λ 满足
$$|\lambda| \leq 0.4$$
 实际计算可知A的特征值是
$$0, -0.3i, \ 0.3i$$