第一章　矩阵的相似变换

§1　基本概念

$m\times n$ 矩阵　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，

其中的 a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **i 行 j 列元素**，$m\times n$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**阶**。当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵**。当 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 全为实数时，称为**实矩阵**。$m\times n$ 阶实矩阵的全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$。当 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 为复数时，称为**复矩阵**。$m\times n$ 阶复矩阵的全体记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$。

由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 得到的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$（或 $\boldsymbol{A}'$）称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=(\overline{a}_{ji})_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭转置**。显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 i 行 j 列元素是 a_{ji}，且有 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 i 行 j 列元素是 $\overline{a}_{ji}$，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$。方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**记为 $\det\boldsymbol{A}$。$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**。

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为**对角矩阵**，简记为

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

对角元素全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$；如果其阶数为 n，则写成 $\boldsymbol{I}_n$。

一个 $n\times 1$ 的矩阵称为 **n 维列向量**，用小写英文黑体字母表示（为方便，一般用小写英文字母表示向量，小写希腊字母表示数）。如

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=(\xi_1,\quad \xi_2,\quad \cdots,\quad \xi_n)^{\mathrm{T}}$$

其中 ξ_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的**第 i 个分量**。分量全为实数的向量称为**实向量**，n 维实列向量的全体记为 $\mathbf{R}^n$。分量为复数的向量称为**复向量**，n 维复列向量的全体记为 $\mathbf{C}^n$。**零**

向量记为 $\mathbf{0}$ 。

$1\times n$ 矩阵称为 n 维行向量，有时 $\mathbf{R}^n$ 也表示 n 维实行向量的全体。

一、特征值与特征向量

1．定义

对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在 $\lambda\in\mathbf{C}$ 和非零列向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，使得

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$$

则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的**特征向量**。称

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**，称 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，它是关于 λ 的首一（最高次项系数为 1）n 次多项式；称 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**。

2．特征值与特征向量的求法

将 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 变形为 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，所以该齐次方程组有非零解，故必须 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$。由此得出求特征值与特征向量的方法如下：

1）计算 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$；

2）由 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

3）解齐次方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其非零解向量都是对应特征值 λ_i 的特征向量。

例 求下列矩阵的特征值与特征向量：

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$；

解 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}\overset{\mathrm{r}_1+(\lambda-2)\mathrm{r}_3}{\underset{\mathrm{r}_2+\mathrm{r}_3}{=\!=}}$

$$=\begin{vmatrix}0 & -\lambda+3 & (\lambda-2)^2-1\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=-(\lambda-3)\begin{vmatrix}-1 & \lambda^2-4\lambda+3\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$。对于 $\lambda_1=1$，求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}\xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=0\end{cases}$，基础解系为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，故对应 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为

$$k_1(-1,0,1)^{\mathrm{T}} \quad （k_1\neq 0）；$$

对于 $\lambda_2=2$，求解 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}\xi_1=-\xi_3\\ \xi_2=\xi_3\end{cases}$，特征向量为 $(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_3=3$, 求解 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}\xi_1=-\xi_2\\ \xi_3=0\end{cases}$，特征向量为 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$。

2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$；

解 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$。求解 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

同解方程组为$\xi_1=-\xi_2+0\xi_3$，基础解系为 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

对应$\lambda=2$的所有特征向量为

$$k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}\quad（k_1,k_2\text{不全为 }0）。$$

3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

解 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$。特征值为$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$。

对于$\lambda_1=-2$, 由$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得

$$\xi_1=-\xi_4,\quad \xi_2=\xi_4,\quad \xi_3=\xi_4，\text{基础解系为}(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}，$$

对应$\lambda_1=-2$的全部特征向量为$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ （$k\neq 0$）。

对于$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$，由$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得$\xi_1=\xi_2+\xi_3+\xi_4$，即对应$\lambda=2$有3个线性无关的特征向量

$$(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad (1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}。$$

3．特征值与特征向量的性质

性质 1 设λ_0是方阵$\boldsymbol{A}$的r重$(r\geq 1)$特征值，对应λ_0有s个线性无关的特征向量，则

$$1\leq s\leq r$$

性质 2 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}，\qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$$

证 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=$

$$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+g_1(\lambda)$$

（其中$g_1(\lambda)$是λ的$n-2$次多项式）

$$=\lambda^n -（a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}）\lambda^{n-1}+g_2(\lambda)$$

（其中 $g_2(\lambda)$ 是 λ 的 $n-2$ 次多项式）

又因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的 n 个根，且后者是首一的，所以

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots$$

比较上面两式即得 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$。又在上式中令 $\lambda=0$ 得

$$\det(-\boldsymbol{A})=(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) \quad 即 \quad (-1)^n\det\boldsymbol{A}=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

故得 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$。**证毕**

性质 3　如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 是分别属于它们的特征向量，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 线性无关。

证　对特征值个数 s 用归纳法。$s=1$ 时，因 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关。设对 $s-1$ 个互异特征值结论成立，即 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{s-1}$ 线性无关。令

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0}$$

利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i\,(i=1,2,\cdots,s)$，对上式左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_s\lambda_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0}$$

前一式乘 λ_s 并与上式相减得　$k_1(\lambda_s-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})\boldsymbol{x}_{s-1}=\boldsymbol{0}$

由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{s-1}$ 线性无关得

$$k_1(\lambda_s-\lambda_1)=0,\quad\cdots,\quad k_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})=0$$

因 $\lambda_s\neq\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,s-1)$，所以 $k_1=\cdots=k_{s-1}=0$，代入第一式得 $k_s=0$。故 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 线性无关。**证毕**

性质 4　设 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{x}_{i1},\cdots,\boldsymbol{x}_{ir_i}\,(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ_i 的线性无关特征向量，则向量组

$$\boldsymbol{x}_{11},\cdots,\boldsymbol{x}_{1r_1},\quad \boldsymbol{x}_{21},\cdots,\boldsymbol{x}_{2r_2},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{x}_{s1},\cdots,\boldsymbol{x}_{sr_s}$$

线性无关。

性质 5　设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值， $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，则

1）$l\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $l\lambda$，对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{x}$；

证　由题设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是 $(l\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=l(\boldsymbol{Ax})=l(\lambda\boldsymbol{x})=(l\lambda)\boldsymbol{x}$。**证毕**

2） $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值是 λ^k，对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{x}$；

证　由题设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{A}^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=\cdots=\lambda^k\boldsymbol{x}$$　**证毕**

3）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{x}$；

证　当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\lambda\neq 0$（由性质 2），由题设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$。
证毕

4）设 $f(\mu)=c_m\mu^m+c_{m-1}\mu^{m-1}+\cdots+c_1\mu+c_0$ 是变量 μ 的多项式，则

$$f(\boldsymbol{A})=c_m\boldsymbol{A}^m+c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+c_1\boldsymbol{A}+c_0\boldsymbol{I}$$　（称为 $\boldsymbol{A}$ **的多项式**）

的特征值是 $f(\lambda)$，对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{x}$；

证　由题设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，于是

$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=c_m\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}+\cdots+c_1\boldsymbol{Ax}+c_0\boldsymbol{x}=(c_m\lambda^m+\cdots+c_1\lambda+c_0)\boldsymbol{x}=f(\lambda)\boldsymbol{x}$$　**证毕**

5） $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值仍是 λ， $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的特征值是 $\overline{\lambda}$。

证
$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det((\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}})=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0；$$

$$\det(\overline{\lambda}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=\det((\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}})=\overline{\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=0。$$　**证毕**

二、相似矩阵

定义　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ **相似于** $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**，或 $\boldsymbol{A}$ 经过相似变换化为 $\boldsymbol{B}$。称 $\boldsymbol{P}$ 为**相似变换矩阵**， $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$ 记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

性质 1　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$　（自反性）；

性质 2　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$　（对称性）；

性质 3　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$　（传递性）；

性质 4　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

证　因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\leq\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{PBP}^{-1})\leq\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$。**证毕**

性质 5　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$；

证　$\det \boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \det \boldsymbol{P}^{-1} \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{P} = \det \boldsymbol{A}$　**证毕**

性质 6　若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，且 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，则 λ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，对应的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$；

证　因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，所以

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$$　**证毕**

三、矩阵的迹

定义　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$，称 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**，记为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

性质 1　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

性质 2　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$k_1, k_2 \in \mathbf{C}$，则

$$\operatorname{tr}(k_1\boldsymbol{A} + k_2\boldsymbol{B}) = k_1 \operatorname{tr}\boldsymbol{A} + k_2 \operatorname{tr}\boldsymbol{B}$$

性质 3　$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}$，　$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}$；

性质 4　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$，则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$；

证　因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的对角元素为 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$　($i = 1,2,\cdots,n$)，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的对角元素为 $\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$　$(k = 1,2,\cdots,n)$，所以

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$　**证毕**

性质 5　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \operatorname{tr}\boldsymbol{B}$。

证　法 1. $\operatorname{tr}\boldsymbol{B} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}$；

法 2. 利用相似矩阵有相同的特征值。**证毕**