§2　相似对角化

定义　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可对角化**的。

定理　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

证　必要性。　设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则有　$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$ 。

令　$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，　即按列分块，代入上式并分块相乘得

$$(\boldsymbol{Ap}_1,\boldsymbol{Ap}_2\cdots,\boldsymbol{Ap}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

即 $\boldsymbol{Ap}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，可见 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量是 $\boldsymbol{p}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$。由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，故 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关，也即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

充分性。　设 $\boldsymbol{Ap}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$ 线性无关。按列排成矩阵 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。**证毕**

判定方法 1（充分条件）　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

判定方法 2（充要条件）　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的所有重特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其重数。

例　下列矩阵是否可对角化？若可以，试求出相似变换矩阵和相应的对角矩阵：

1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$；

解　可求得　$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，　$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,$ $\lambda_2=2,\ \ \lambda_3=3,$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。又对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

故相似变换阵　$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，　使得　$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$。

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；

解 可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$；对应三重特征值 2 有两个线性无关的特征向量 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化。

3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

解 可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda_4=-2$；对应三重特征值 2 有三个线性无关的特征向量

$$(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}，(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}，(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。又对应 $\lambda_4=-2$ 的特征向量为 $(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

故相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$。

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}^{100}$。

解 可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$。

于是
$$\boldsymbol{A}^{100}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{100} & & \\ & 2^{100} & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2^{100}+3^{100} & 1-2^{100} & -2^{100}+3^{100} \\ 2^{100}-3^{100} & 2^{100} & 2^{100}-3^{100} \\ -1+2^{100} & -1+2^{100} & 2^{100} \end{pmatrix}$$

例 求解一阶线性常系数微分方程组 $\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$ 。

解 令 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$， $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \\ \frac{d}{dt}x_3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

则微分方程组可写成矩阵形式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{Ax}$。令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$，其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\text{ 且 } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}$$

注意到 $\dfrac{d(\boldsymbol{Py})}{dt} = \boldsymbol{P}\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$，代人前一式得 $\boldsymbol{P}\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{APy}$，即 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda}\ \boldsymbol{y}$, 写成分量形式为

$$\frac{d}{dt}y_1 = y_1,\quad \frac{d}{dt}y_2 = 2y_2,\quad \frac{d}{dt}y_3 = 3y_3,$$

解之得 $y_1 = c_1 e^t$， $y_2 = c_2 e^{2t}$， $y_3 = c_3 e^{3t}$

故得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^t - c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$ （c_1, c_2, c_3 任意）。