三、相似变换阵 $\boldsymbol{P}$ 的计算

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形及所用的相似变换阵 $\boldsymbol{P}$ 。

解 已求得 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 3\end{pmatrix}$。

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$，即按列分块，则由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$， 即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$ 得

$$(\boldsymbol{Ap}_1,\boldsymbol{Ap}_2,\boldsymbol{Ap}_3,\boldsymbol{Ap}_4)=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3,\ 3\boldsymbol{p}_4)$$

即 $\boldsymbol{Ap}_1=\boldsymbol{p}_1$， $\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$， $\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$， $\boldsymbol{Ap}_4=3\boldsymbol{p}_4$

或 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0}$， $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_1$， $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_2$， $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_4=\boldsymbol{0}$

由上式可见 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_4$ 分别是特征值 1 和 3 对应的特征向量，而 $\boldsymbol{p}_2$ 可利用已求出的 $-\boldsymbol{p}_1$ 作为右端项，求解非齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_1$ 得到，而 $\boldsymbol{p}_3$ 又可由方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$ 得到。

取 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_1$，由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{p}_1)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}\xi_1=\frac{1}{3}\\ \xi_2=\frac{1}{3}+\xi_3\\ \xi_4=0\end{cases}$， 令 $\xi_3=0$ 得 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0)^{\mathrm{T}}$；

再求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$，由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & -1 & 1 & 1 & -\frac{1}{3}\\ -1 & -2 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & -3 & 3 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & -3 & 3 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}\xi_1=\frac{2}{9}\\ \xi_2=-\frac{1}{9}+\xi_3\\ \xi_4=0\end{cases}$ ， 令 $\xi_3=0$ 得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{2}{9},-\frac{1}{9},0,0)^{\mathrm{T}}$；

取 $\boldsymbol{p}_4$ 为对应特征值 3 的特征向量 $\boldsymbol{p}_4=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

故相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0\\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$ 。

注 称 $\boldsymbol{p}_2$， $\boldsymbol{p}_3$ 是特征值 1 的**广义特征向量**。它们不是唯一的。

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形和所用的相似变换阵 $\boldsymbol{P}$ 。

解 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -\lambda+1 & -(\lambda-1)(\lambda-2)\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-1 & -(\lambda-2)\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$。求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，同解方程组为 $\xi_1=-\xi_2+3\xi_3$，

基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 。若设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$，

则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$。

可见 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 应取对应特征值 $\lambda = 1$ 的两个线性无关的特征向量。但若取 $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2 = (3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，为求解 $\boldsymbol{p}_3$，求解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{p}_2$，即

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 2\xi_2 - 6\xi_3 = -3 \\ \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 = -1 \end{cases}$$，这是矛盾方程组。

遇到这种情况处理方法如下：

取定 $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，又令

$$\boldsymbol{p}_2 = k_1 (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2 (3, 0, 1)^{\mathrm{T}} = (-k_1 + 3k_2,\ k_1,\ k_2)^{\mathrm{T}}$$

只要 $\boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{p}_2$ 也是对应 $\lambda = 1$ 的特征向量，选择其中的系数 k_1，k_2，使 $\boldsymbol{p}_2$ 满足两点：

（1）与 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关；（2）使方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{p}_2$ 有解。

先求解后者，由于

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}, -\boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & k_1 - 3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 - 3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 - k_2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 - k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，当 $k_1 = k_2$ 时，方程组有解。取 $k_1 = k_2 = 1$，则

$$\boldsymbol{p}_2 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + (3, 0, 1)^{\mathrm{T}} = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

它与 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关，又同解方程组为 $\xi_1 = -\xi_2 + 3\xi_3$，令 $\xi_2 = \xi_3 = 0$ 得

$$\boldsymbol{p}_3 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$$

故相似变换阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$。

注 当一个重特征值对应 2 个及 2 个以上的 Jordan 块时，经常要作这样的处理，应加以注意。

四、 应用举例

1．证明一些结论

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}$。

证 根据 Jordan 标准形理论，存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}，其中*代表 0 或 1，$$

取行列式即得。

2．求方阵的幂

已知 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，要求出 $\boldsymbol{A}^k$，首先求相似变换阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}，其中 \boldsymbol{J}_i 为 Jordan 块 \boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$$

则
$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1{}^k & & & \\ & \boldsymbol{J}_2{}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s{}^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

可见求出 $\boldsymbol{A}^k$ 的关键是求出 $\boldsymbol{J}_i{}^k$。

引理
$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r\times r}^k=\begin{pmatrix}\lambda_i^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} & \mathrm{C}_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \mathrm{C}_k^{r-1}\lambda_i^{k-r+1} \\ & \lambda_i^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}_k^{r-2}\lambda_i^{k-r+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^k & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' & \frac{1}{2!}(\lambda^k)'' & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}(\lambda^k)^{(r-1)} \\ & \lambda^k & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}(\lambda^k)^{(r-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' \\ & & & & \lambda^k\end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

其中 $\mathrm{C}_k^t=\dfrac{k!}{t!(k-t)!}=\dfrac{k(k-1)\cdots(k-t+1)}{t!}$，且当 $t>k$ 时，规定 $\mathrm{C}_k^t=0$。

证 法 1 用数学归纳法。

法 2 $\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}$，其中 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}_{r\times r}$

易知 $\quad \boldsymbol{H}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{H}^{r-1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}^r=\boldsymbol{O}$。

注意 $\lambda\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的乘积可交换，于是

$$\boldsymbol{J}^k=(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^k=(\lambda\boldsymbol{I})^k+\mathrm{C}_k^1(\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}\boldsymbol{H}+\mathrm{C}_k^2(\lambda\boldsymbol{I})^{k-2}\boldsymbol{H}^2+\cdots+\mathrm{C}_k^{r-1}(\lambda\boldsymbol{I})^{k-r+1}\boldsymbol{H}^{r-1}$$

$$=\lambda^k\boldsymbol{I}+(\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1})\boldsymbol{H}+(\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2})\boldsymbol{H}^2+\cdots+(\mathrm{C}_k^{r-1}\lambda^{k-r+1})\boldsymbol{H}^{r-1}$$

右端写成矩阵形式即为所求。**证毕**

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$。

解 已求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

故 $\quad \boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 100 & \frac{100\times 99}{2} & \\ & 1 & 100 & \\ & & 1 & \\ & & & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}101 & -100 & 100 & -100 \\ 15050 & -14749 & 14750 & -3^{100}-14749 \\ 14950 & -14050 & 14051 & -14650 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{100}\end{pmatrix}$$

3．求解一阶常系数线性微分方程组

例 求解微分方程组 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1=-x_1-2x_2+6x_3 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2=-x_1+3x_3 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3=-x_1-x_2+4x_3\end{cases}$。

解 首先化为矩阵形式 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$，

可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，代入方程得 $\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$，写成分量形式为

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1=y_1,\quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2=y_2+y_3,\quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_3=y_3$$

由第 1,3 个方程解得 $y_1=c_1\mathrm{e}^t$，$y_3=c_3\mathrm{e}^t$，代入第 2 个方程得 $\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2=y_2+c_3\mathrm{e}^t$，

这是一阶线性微分方程，其解为 $y_2=(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t$，故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\mathrm{e}^t\\(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t\\c_3\mathrm{e}^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-c_1+2c_2-c_3+2c_3t)\mathrm{e}^t\\(c_1+c_2+c_3t)\mathrm{e}^t\\(c_2+c_3t)\mathrm{e}^t\end{pmatrix},\quad c_1,c_2,c_3\text{ 任意。}$$