*四、复方阵的 QR 分解（酉-三角分解）

1．初等反射阵： $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{C}^n$ 且 $\|\boldsymbol{u}\|_2=1$。

$\boldsymbol{H}$ 满足：$\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{H}$（Hermite 阵），$\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$（酉矩阵），$\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{H}$（自逆），$\det\boldsymbol{H}=-1$。

定理 给定单位向量 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^n$，即 $\|\boldsymbol{z}\|_2=1$。则对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，存在初等反射阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{Hx}=\alpha\boldsymbol{z}$，其中 $|\alpha|=\|\boldsymbol{x}\|_2$ 且 $\alpha\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}$ 为实数。

证 取 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z}\|_2}$，则 $\boldsymbol{Hx}=\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-2\dfrac{(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\overline{\alpha}\,\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z}\|_2^2}(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z})$。因为

$$\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z}\|_2^2=(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\overline{\alpha}\,\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}+|\alpha|^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}$$

$$=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\mathrm{Re}(\alpha\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}))\;\;=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}-\overline{\alpha}\,\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x})$$

（**注：**$\alpha\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}=\overline{\alpha}\,\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}$ 为实数）代入上一式即得 $\boldsymbol{Hx}=\alpha\boldsymbol{z}$。**证毕**

推论 对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，存在初等反射阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{Hx}=\alpha\boldsymbol{e}_1$，其中 $|\alpha|=\|\boldsymbol{x}\|_2$，且 $\alpha\overline{\xi_1}$ 为实数，这里 ξ_1 是 $\boldsymbol{x}$ 的第 1 个分量。

例 试用 Householder 变换化向量 $\boldsymbol{x}=(\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 同方向。

解 $\|\boldsymbol{x}\|_2=3$，取 $\alpha=3\mathrm{i}$（或 $\alpha=-3\mathrm{i}$，因 $\xi_1=\mathrm{i}$，$\alpha\overline{\xi_1}$ 为实数），则

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}-3\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{x}-3\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{12}}(-2\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathrm{i},-\mathrm{i},0,1)^{\mathrm{T}}$$

从而 $$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&0&2\mathrm{i}\\-2&1&0&2\mathrm{i}\\0&0&3&0\\-2\mathrm{i}&2\mathrm{i}&0&1\end{pmatrix}$$，且 $\boldsymbol{Hx}=3\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_1$。

2．初等旋转阵：

$$
\begin{array}{cc}
\boldsymbol{T}_{pq}=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos\theta &&&& \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sin\theta &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\sin\theta &&&& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\cos\theta &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ q \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&& p &&&& q &&& \end{array} &
\end{array}
$$

或

$$
\boldsymbol{T}_{pq}=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \bar{c} &&&& \bar{s} &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& -s &&&& c &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \\ q \\ \\ \\ \\ \end{array}，且 |c|^2+|s|^2=1
$$

$\boldsymbol{T}_{pq}$ 是酉矩阵，且 $\det\boldsymbol{T}_{pq}=1$。

定 理　设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，则存在初等旋转阵 $\boldsymbol{T}_{pq}$，其中 $c=\dfrac{\xi_p}{\sqrt{|\xi_p|^2+|\xi_q|^2}}$，$s=\dfrac{\xi_q}{\sqrt{|\xi_p|^2+|\xi_q|^2}}$，使 $\boldsymbol{T}_{pq}\boldsymbol{x}$ 的第 p 个分量为 $\sqrt{|\xi_p|^2+|\xi_q|^2}\ge 0$，而 $\boldsymbol{T}_{pq}\boldsymbol{x}$ 的第 q 个分量为 0。（这里假设 $|\xi_p|^2+|\xi_q|^2\ne 0$。若 $\xi_p=\xi_q=0$，则取 $\boldsymbol{T}_{pq}=\boldsymbol{I}$）。

推论　设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，则存在初等旋转阵 $\boldsymbol{T}_{12},\cdots,\boldsymbol{T}_{1n}$，使得

$$
\boldsymbol{T}_{1n}\cdots\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1
$$

例 试用 Givens 变换化向量 $\boldsymbol{x}=(\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 同方向。

解 取 $c_1=\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}},\ s_1=\dfrac{-2\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$，$\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{x}=(\sqrt{5},0,0,2)^{\mathrm{T}}$。

又取 $c_2=\dfrac{\sqrt{5}}{3},s_2=\dfrac{2}{3}$，$\boldsymbol{T}_{14}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$，且有 $\boldsymbol{T}_{14}\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{e}_1$。

3．进行 QR 分解仍可采用 Householder 变换，Givens 变换和 Schmidt 正交化方法。

*五、实方阵正交相似于 Hessenberg 矩阵

定义 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}=0$（$i>j+1$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上 Hessenberg 矩阵**；若满足 $a_{ij}=0$（$j>i+1$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下 Hessenberg 矩阵**；若的元素满足 $a_{ij}=0$（$|i-j|>1$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为**三对角矩阵**。

定理 实方阵必可正交相似于上 Hessenberg 矩阵。

证 将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{b}_{n-1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_{n-1} & \boldsymbol{A}_{n-1}\end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{b}_{n-1}\in\mathbf{R}^{n-1}，\ \boldsymbol{A}_{n-1}\in\mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

设 $\boldsymbol{a}_{n-1}\neq\boldsymbol{0}$，选择 $n-1$ 阶初等反射阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}_1$，使 $\tilde{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{a}_{n-1}=\alpha_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1$，$\tilde{\boldsymbol{e}}_1\in\mathbf{R}^{n-1}$。

令 $\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{H}}_1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{H}_1$ 是 n 阶初等反射阵，且

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{b}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{H}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{a}_{n-1} & \tilde{\boldsymbol{H}}_1\boldsymbol{A}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{H}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & * & \cdots & *\\ \alpha_1 & * & \cdots & *\\ 0 & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & * & \cdots & *\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c}a_{11} & * & \boldsymbol{B}_2\\ \alpha_1 & * & \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_{n-2} & \boldsymbol{A}_{n-2}\end{array}\right),$$

其中 $\boldsymbol{a}_{n-2}\in\mathbf{R}^{n-2}$，$\boldsymbol{B}_2\in\mathbf{R}^{2\times(n-2)}$，$\boldsymbol{A}_{n-2}\in\mathbf{R}^{(n-2)\times(n-2)}$。若 $\boldsymbol{a}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，则取 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}$，则上式仍成立。

设 $\boldsymbol{a}_{n-2}\neq\boldsymbol{0}$，选择 $n-2$ 阶初等反射阵 $\hat{\boldsymbol{H}}_2$，使 $\hat{\boldsymbol{H}}_2\boldsymbol{a}_{n-2}=\alpha_2\hat{\boldsymbol{e}}_1$，$\hat{\boldsymbol{e}}_1\in\mathbf{R}^{n-2}$。

令 $\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \hat{\boldsymbol{H}}_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{H}_2$ 是 n 阶初等反射阵，且

$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{H}_2=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & * & \\ \alpha_1 & * & \boldsymbol{B}_2\hat{\boldsymbol{H}}_2\\ \hline \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{H}}_2\boldsymbol{a}_{n-2} & \hat{\boldsymbol{H}}_2\boldsymbol{A}_{n-2}\hat{\boldsymbol{H}}_2\end{array}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & *\\ \alpha_1 & * & \vdots & & \vdots\\ 0 & \alpha_2 & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & * & \cdots & *\end{pmatrix}。$$

继续这一步骤，最多 $n-2$ 次，即可得到上 Hessenberg 矩阵 $\boldsymbol{H}$，即

$$\boldsymbol{H}_{n-2}\cdots\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1\cdots\boldsymbol{H}_{n-2}=\boldsymbol{H}$$

令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_1\cdots\boldsymbol{H}_{n-2}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}$。

该定理的证明过程给出了用 Householder 变换化矩阵与 Hessenberg 矩阵正交相似的方法。同样，用 Givens 变换也能完成这一过程：

$$\boldsymbol{T}_{n-1,n}\cdots\boldsymbol{T}_{3n}\cdots\boldsymbol{T}_{34}\boldsymbol{T}_{2n}\cdots\boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{2n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{34}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{3n}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{n-1,n}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$$

正交阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{2n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{34}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{3n}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{T}_{n-1,n}^{\mathrm{T}}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}$。

例　化矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 正交相似于 Hessenberg 矩阵。

解　法 1. 利用 Householder 变换

对 $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，取 $\alpha_1=\|\boldsymbol{a}_2\|_2=5$，则 $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{a}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，于是

$\tilde{\boldsymbol{H}}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{H}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ 5 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}。$$

法 2. 利用 Givens 变换

取 $c=\dfrac{3}{5},s=\dfrac{4}{5}$，则 $\boldsymbol{T}_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$。

推论　实对称阵必可正交相似于三对角阵。

证　存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{H}$ 为 Hessenberg 阵。又

$$H^{\mathrm{T}}=(Q^{\mathrm{T}}AQ)^{\mathrm{T}}=Q^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Q=Q^{\mathrm{T}}AQ=H$$

故 $\boldsymbol{H}$ 为三对角阵。**证毕**

例　化矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&-1&-2&4\\0&-2&1&3\\1&4&3&1\end{pmatrix}$ 正交相似于三对角阵。

解　法 1. 用 Householder 变换

对 $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，取 $\alpha_1=\|\boldsymbol{a}_3\|_2=1$，则 $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_3-\tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{a}_3-\tilde{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。从而

$\tilde{\boldsymbol{H}}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0}&\tilde{\boldsymbol{H}}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&3&4\\0&3&1&-2\\0&4&-2&-1\end{pmatrix}$。对 $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，取 $\alpha_1=\|\boldsymbol{a}_2\|_2=5$，则

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{a}_2-5\hat{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{a}_2-5\hat{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}，从而\ \hat{\boldsymbol{H}}_2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\hat{\boldsymbol{H}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}$。

故正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}$。

法 2. 利用 Givens 变换

取 $c_1=0,\ s_1=1$，则 $\boldsymbol{T}_{24}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{T}_{24}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{24}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&3&-4\\0&3&1&2\\0&-4&2&1\end{pmatrix}$。

又取$c_2=\dfrac{3}{5}, s_2=-\dfrac{4}{5}$，则 $\boldsymbol{T}_{34}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$，且

$$\boldsymbol{T}_{34}\boldsymbol{T}_{24}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{24}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}$$

故正交矩阵$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}_{24}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&0\end{pmatrix}$使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&5&0\\0&5&-\frac{11}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}\end{pmatrix}$。

六、QR 分解的应用

1．求行列式： $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{Q}\det\boldsymbol{R}=\pm\det\boldsymbol{R}$；

2．求逆矩阵： $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$；

3．求方程组： $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$；

4．求方阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值的 **QR** 方法：

设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，构造

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1,\quad \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{R}_2,\quad \boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{R}_3,\cdots,$$

一般地
$$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{R}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{R}_k\qquad(k=1,2,\cdots)$$

可以证明，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,$均是相似的，且在一定的条件下，$\boldsymbol{A}_k\to\boldsymbol{T}$（$k\to+\infty$），其中$\boldsymbol{T}$是一个上三角矩阵，从而$\boldsymbol{T}$的对角元就是$\boldsymbol{A}$的全部特征值。

如果在进行 QR 方法之前，首先使$\boldsymbol{A}$正交相似于 Hessenberg 矩阵$\boldsymbol{H}$，即$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}$。再对$\boldsymbol{H}$用 QR 方法求解：$\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\cdots,$则可证明$\boldsymbol{H}_i$均是 Hessenberg 矩阵，且$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{T}$。这样计算工作量将大大减少，QR 方法仍是目前求全部特征值的有效方法之一。