

第一章 概率论的基本概念

- 一、重点与难点
- 二、主要内容
- 三、典型例题



一、重点与难点

1. 重点

- 随机事件的概念
- 古典概型的概率计算方法
- 概率的加法公式
- 条件概率和乘法公式的应用
- 全概率公式和贝叶斯公式的应用

2. 难点

- 古典概型的概率计算
- 全概率公式的应用



二、主要内容



随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为**随机现象**。



随机试验

在概率论中，把具有以下三个特征的试验称为**随机试验**。

- 1° 可以在相同的条件下重复地进行；
- 2° 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；
- 3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。



随机事件

1° 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**，记为 S 。

2° 样本空间的元素，即试验 E 的每一个结果，称为**样本点**。

3° 随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**。



重要的随机事件

基本事件 由一个样本点组成的单点集.

必然事件 随机试验中必然会出现的结果.

不可能事件 随机试验中不可能出现的结果.

必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为**对立事件**.



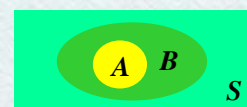
事件的关系和运算

设试验 E 的样本空间为 S ,而 $A, B, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 是 S 的子集.

(1) 包含关系

若事件 A 出现,必然导致事件 B 出现,则称事件 B 包含事件 A ,记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

图示 B 包含 A .



(2) A 等于 B

若事件 A 包含事件 B ,而且事件 B 包含事件 A ,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 事件 A 与 B 的并(和事件)

事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件.

图示事件 A 与 B 的并.

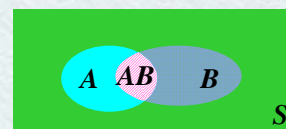


(4) 事件 A 与 B 的交(积事件)

事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件.

积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB .

图示事件 A 与 B 的积.



(5) 事件 A 与 B 互不相容 (互斥)

若事件 A 的出现必然导致事件 B 不出现, B 出现也必然导致 A 不出现,则称事件 A 与 B 互不相容,即 $A \cap B = AB = \emptyset$.

图示 A 与 B 互不相容(互斥).

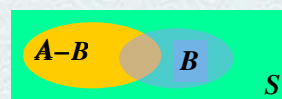


(6) 事件 A 与 B 的差

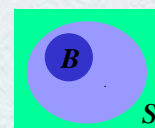
由事件 A 出现而事件 B 不出现所组成的事件称为事件 A 与 B 的差.记作 $A - B$.

图示 A 与 B 的差.

$B \not\subset A$



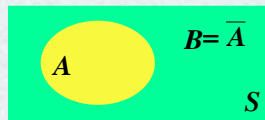
$B \subset A$



(7) 事件A的对立事件

设A表示“事件A出现”，则“事件A不出现”称为事件A的对立事件或逆事件.记作

图示 A 与 B 的对立.



若 A 与 B 互逆,则有 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = S$.



说明 对立事件与互斥事件的区别

A, B 互斥

A, B 对立



$$AB = \emptyset$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ 且 } A \cup B = S$$

互斥 \nrightarrow 对立



事件运算的性质

设 A, B, C 为事件, 则有

1° 交换律 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

2° 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(AB)C = A(BC).$

3° 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

4° 德·摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$



频率

(1) 频率的定义

在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.



(2) 频率的性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件, 则

1° $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

2° $f(S) = 1, f(\emptyset) = 0$;

3° 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是两两互不相容的事件, 则
 $f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$



概率的定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° 非负性: 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$;

2° 规范性: 对于必然事件 S, 有 $P(S) = 1$;

3° 可列可加性: 设 A_1, A_2, \dots 是两两互不相容的事件, 即对于 $i \neq j, A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

概率的可列可加性



概率的性质

1° $P(\emptyset) = 0$.

2° 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

概率的有限可加性

3° 设 A, B 为两个事件, 且 $A \subset B$, 则

$$P(A) \leq P(B), \quad P(B - A) = P(B) - P(A).$$

4° 对于任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

5° 设 \bar{A} 是 A 的对立事件, 则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

6° (加法公式) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

n 个事件和的情况

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

等可能概型 (古典概型)

定义

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型或古典概型.

古典概型中事件概率的计算公式

设试验 E 的样本空间由 n 个样本点构成, A 为 E 的任意一个事件, 且包含 m 个样本点, 则事件 A 出现的概率记为:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 所包含样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

称此为概率的古典定义.

几何概型

当随机试验的样本空间是某个区域, 并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的, 则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S}.$$

(其中 S 是样本空间的度量, S_A 是构成事件 A 的子区域的度量). 这样借助于几何上的度量来合理规定的概率称为几何概型.

条件概率

(1) 条件概率的定义

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

同理可得
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

(2) 条件概率的性质

1° 非负性: $P(B|A) \geq 0$;

2° 规范性: $P(S|B) = 1, P(\emptyset|B) = 0$;

3° $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$;

4° $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$;

5° 可加可列性: 设 B_1, B_2, \dots 是两两不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$



乘法定理

设 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

设 A, B, C 为事件, 且 $P(AB) > 0$, 则有

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

推广 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个事件, $n \geq 2$,

且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \times P(A_{n-1}|A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \times \cdots \times P(A_2|A_1)P(A_1).$$



全概率公式与贝叶斯公式

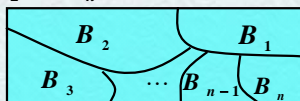
样本空间的划分

定义 设 S 为试验 E 的样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为 E 的一组事件, 若

1° $B_i B_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n$;

2° $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$.

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 S 的一个划分.

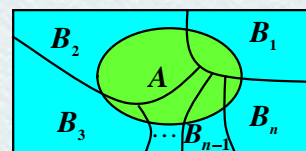


全概率公式

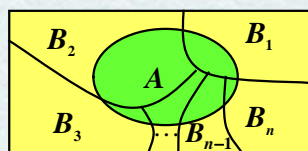
定理 设试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

称为全概率公式.



说明 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后应用概率的可加性求出最终结果.



贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S . A 为 E 的事件, B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

称此为**贝叶斯公式**.



事件的相互独立性

(1) 两事件相互独立

设 A, B 是两事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与 B 相互独立是指事件 A 的概率与事件 B 是否出现无关.

(2) 三事件两两相互独立

设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

(3) 三事件相互独立

设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意

三个事件相互独立 \nrightarrow 三个事件两两相互独立

推广 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件, 如果对于任意 k ($1 < k \leq n$), 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}),$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立 \nrightarrow n 个事件两两相互独立

重要定理及结论

定理一

设 A, B 是两事件, 且 $P(A) > 0$. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然.

定理二

若 A, B 是相互独立的两个事件, 则下列各对事件, \bar{A} 与 B, A 与 \bar{B}, \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立.

两个结论

(1) 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) 相互独立, 则其中任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件也是相互独立.

(2) 若 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) 相互独立, 则将 A_1, A_2, \dots, A_n 中任意多个事件换成它们的对立事件, 所得的 n 个事件仍相互独立.

三、典型例题

例1 一个工人生产了3个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 ($i = 1, 2, 3$), 试用 A_i ($i = 1, 2, 3$) 表示下列事件:

- (1) 只有第一个零件是合格品 (B_1);
- (2) 三个零件中只有一个零件是合格品 (B_2);
- (3) 第一个是合格品,但后两个零件中至少有一个次品 (B_3);



(4) 三个零件中最多只有两个合格品 (B_4);

(5) 三个零件都是次品 (B_5).

- 解
- (1) $B_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$;
 - (2) $B_2 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$;
 - (3) $B_3 = A_1 (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)$;
 - (4) $B_4 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, 或 $B_4 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$;
 - (5) $B_5 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, 或 $B_5 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$.

说明 一个事件往往有多个等价的表达方式.



例2 设随机事件 A, B, C 满足 $C \supset AB, \bar{C} \supset \bar{A}\bar{B}$.

证明: $AC = C\bar{B} \cup AB$.

证明 由于 $\bar{C} \supset \bar{A}\bar{B}$, 故 $C \subset A \cup B$,

从而 $C\bar{B} \subset (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B}$,

$CA\bar{B} \subset C\bar{B} \cap A\bar{B} = C\bar{B}$,

$ACB = C \cap AB = AB$,

故 $AC = AC(B \cup \bar{B}) = ACB \cup AC\bar{B}$

$= C\bar{B} \cup AB$.



例3 假设目标出现在射程之内的概率为0.7,这时射击命中目标的概率为0.6,试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率.

[思路] 引进事件

$A = \{\text{目标进入射程}\};$

$B_i = \{\text{第} i \text{次射击命中目标}\}, i = 1, 2.$

故所求概率为事件 $B = B_1 \cup B_2$ 的概率,由于目标不在射程之内是不可能命中目标的,因此,可利用全概率公式来求解.



解 由题意知

$$P(A) = 0.7, P(B_i|A) = 0.6, (i = 1, 2)$$

由于 $P(\bar{A}B) = 0$, 因为 \bar{A} 表示目标不在射程之内, 因此由全概率公式,有

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(AB)$$

$$= P(A)P(B|A)$$

$$= P(A)P(B_1 \cup B_2|A),$$

由题意知 B_1 与 B_2 相互独立,



$$\text{从而 } P(B_1 B_2|A) = P(B_1|A)P(B_2|A)$$

$$= 0.6 \times 0.6 = 0.36.$$

由加法公式得

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A)$$

$$= 0.6 + 0.6 - 0.36$$

$$= 0.84.$$

$$\text{故 } P(B) = P(A)P(B_1 \cup B_2|A)$$

$$= 0.7 \times 0.84 = 0.588.$$



例4 设有来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份,随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ;

(2) 已知后抽到的一份表是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 p .

[思路] 由于抽到的表与来自哪个地区有关,故此题要用全概率公式来讨论.



解 记 $H_i = \{\text{抽到地区考生的报名表}\}, i = 1, 2, 3;$

$A_j = \{\text{第 } j \text{ 次抽到报名表是男生的}\}, j = 1, 2,$

则有 $P(H_i) = \frac{1}{3} (i = 1, 2, 3); P(A_1|H_1) = \frac{7}{10};$

$P(A_1|H_2) = \frac{8}{15}; P(A_1|H_3) = \frac{20}{25}.$

(1) 由全概率公式知

$$p = P(\bar{A}_1) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i) \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25} \right) = \frac{29}{90}.$$



(2) $q = P(\bar{A}_1|A_2) = \frac{P(\bar{A}_1 A_2)}{P(A_2)}$, 由全概率公式得

$$P(\bar{A}_1 A_2) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(\bar{A}_1 A_2|H_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P(\bar{A}_1 A_2|H_i),$$

$$\text{又因为 } P(\bar{A}_1 A_2|H_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30},$$

$$P(\bar{A}_1 A_2|H_2) = \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} = \frac{8}{30},$$

$$P(\bar{A}_1 A_2|H_3) = \frac{5}{25} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{30}.$$



$$\text{所以 } P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{3} \left[\frac{7}{30} + \frac{8}{30} + \frac{5}{30} \right] = \frac{2}{9},$$

$$\text{而 } P(A_2) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A_2|H_i)$$

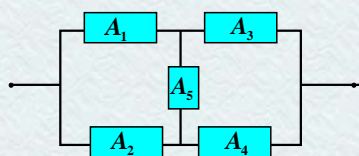
$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P(A_2|H_i)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25} \right) = \frac{61}{90},$$

$$\text{所以 } q = \frac{P(\bar{A}_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{2/9}{61/90} = \frac{20}{61}.$$



例5 桥式电路系统由5个元件组成(如图所示),设元件 A_i 的可靠性为 $p_i (i = 1, 2, \dots, 5)$, 求此系统的可靠性.



[思路] 为了求系统的可靠性,分两种情况讨论:

(1) 当 A_5 工作正常时,相当于 A_1, A_2 并联,与 A_3, A_4 并联电路再串联而得.



(2) 当 A_5 失效时,相当于 A_1, A_3 串联再与 A_2, A_4 串联电路进行并联而得.

解 记 $B_i = \{\text{元件 } A_i \text{ 正常工作}\}, i = 1, 2, \dots, 5,$

$C = \{\text{系统正常工作}\}.$

从而由全概率公式知

$$P(C) = P(B_5)P(C|B_5) + P(\bar{B}_5)P(C|\bar{B}_5).$$

而 $P(C|B_5) = P[(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4)]$

$$= [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)][1 - (1 - p_3)(1 - p_4)],$$



$$P(C|\overline{B_5}) = P(B_1B_3 \cup B_2B_4)$$

$$= 1 - (1 - p_1p_3)(1 - p_2p_4),$$

所以

$$P(C) = p_5[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)][1 - (1 - p_3)(1 - p_4)] \\ + (1 - p_5)[1 - (1 - p_1p_3)(1 - p_2p_4)].$$