第一章　矩阵的相似变换

§1　基本概念

例　求下列矩阵的特征值与特征向量：

1)　$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

解　$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal[\mathrm{r}_2+\mathrm{r}_3]{\mathrm{r}_1+(\lambda-2)\mathrm{r}_3}$$

上页　下页　返回

$$
= \begin{vmatrix} 0 & -\lambda+3 & (\lambda-2)^2-1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}
$$

$$
= -(\lambda-3)\begin{vmatrix} -1 & \lambda^2-4\lambda+3 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

对于$\lambda_1 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由于

$$
\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，基础解系为

$$(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

故对应 $\lambda_1 = 1$ 的所有特征向量为

$$k_1(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}} \quad (k_1 \neq 0)$$

对于 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由于

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，特征向量为 $(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$;

对于 $\lambda_3 = 3$, 求解 $(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由于

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, 特征向量为 $(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$。

上页 下页 返回

2） $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

解 $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^3$$

A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$

求解 $(2I-A)x=0$, 由于

上页 下页 返回

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\quad x_1=-x_2+0x_3$

基础解系为 $\quad (-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ (0,0,1)^{\mathrm{T}}$

对应 $\lambda=2$ 的所有特征向量为

$$k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}\quad (k_1,k_2\ \text{不全为}0)$$

上页 下页 返回

3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

解 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_4]{r_2-r_4}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0 & -\lambda+2\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -\lambda+2\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4+c_3]{c_4+c_2}\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

上页 下页 返回

对于 $\lambda_1=-2$, 求解 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由于

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-1\\-1&-3&1&1\\-1&1&-3&1\\-1&1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1=-x_4,\quad x_2=x_4,\quad x_3=x_4$

基础解系为 $(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$

对应 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为

$$k_1(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1\neq 0)$$

上页 下页 返回

对于 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$, 求解 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由于

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1=x_2+x_3+x_4$

即对应 $\lambda=2$ 有3个线性无关的特征向量

$$(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad (1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

全部特征向量为

$$k_2(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_3(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$(k_2,k_3,k_4$ 不全为0)

§2 相似对角化

例 下列矩阵是否可对角化？若可以，试求出相似变换矩阵和相应的对角矩阵：

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

解 可求得 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=3$

因为$\boldsymbol{A}$的特征值互异，所以$\boldsymbol{A}$可对角化。

又对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

故相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$

2） $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

解 可求得 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$

对应三重特征值2有两个线性无关的特征向量

$$(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故$\boldsymbol{A}$不可对角化。

上页 下页 返回

3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

解 可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\quad \lambda_4=-2$

对应三重特征值2有三个线性无关的特征向量

$$(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ (1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故$\boldsymbol{A}$可对角化。

又对应 $\lambda_4=-2$ 的特征向量为 $(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,

故相似变换阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

使得 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，试求 A^{100}。

解 可求得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

于是

$$A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$
=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^{100} & & \\ & 2^{100} & \\ & & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1-2^{100}+3^{100} & 1-2^{100} & -2^{100}+3^{100}\\ 2^{100}-3^{100} & 2^{100} & 2^{100}-3^{100}\\ -1+2^{100} & -1+2^{100} & 2^{100}\end{pmatrix}
$$

上页 下页 返回

例 求解一阶线性常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

解 令

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则微分方程组可写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

可求得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$。

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}$, 代人前一式得

$$\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y},\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{y},$$

写成分量形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1 = y_1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2 = 2y_2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_3 = 3y_3$$

解之得

$$y_1 = c_1\mathrm{e}^{t}, \quad y_2 = c_2\mathrm{e}^{2t}, \quad y_3 = c_3\mathrm{e}^{3t}$$

故得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\mathrm{e}^{t} - c_2\mathrm{e}^{2t} - c_3\mathrm{e}^{3t} \\ c_2\mathrm{e}^{2t} + c_3\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

$(c_1, c_2, c_3$任意$)$

§3　Jordan 标准形介绍

例　求下列矩阵的Jordan标准形：

1)　$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$;

解　可求得　$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

所以A的特征值为　$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$

又对应 $\lambda=2$ 有2个线性无关的特征向量

$$(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{或}\ J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix})$$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

解 可求得 $\det(\lambda I - A)=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\quad \lambda_4=3$

又对应 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量

$$(0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

故$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ \hdashline & & & 3\end{array}\right) \quad \left(\text{或 } \boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c:ccc}3 & & & \\ \hdashline & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1\end{array}\right)\right)$$

上述方法的缺点是，当$\boldsymbol{A}$的某个特征值的重数为4或大于4时，其对应的Jordan块可能无法确定。

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&2&1\end{pmatrix}$ 的Jordan标准形。

注 可求得 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^5$ 且 $\operatorname{rank}(I-A)=2$，此时$A$对应5重特征值1有3个线性无关的特征向量，直接按特征向量法无法确定A的Jordan标准形。

解 设

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\text{ 则 } A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}。$$

可求得 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)=(\lambda-1)^3$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1)=1$,

$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)=(\lambda-1)^2$ 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2)=1$,

所以$\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{A}_2$的Jordan标准形分别为

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_2=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ & 1\end{pmatrix}$$

故$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \boldsymbol{J}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

例 已知多项式

$$f(\lambda)=\lambda^8-9\lambda^6+\lambda^4-3\lambda^3+4\lambda^2+1$$

$$g(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3$$

求用 $g(\lambda)$除 $f(\lambda)$ 所得的商式和余式。

解 可求得

$$f(\lambda)=(\lambda^5+5\lambda^4+9\lambda^3+13\lambda^2+18\lambda+23)g(\lambda)+$$

$$+32\lambda^2-107\lambda+70$$

故以 $g(\lambda)$除 $f(\lambda)$ 所得的商式为

$$q(\lambda)=(\lambda^5+5\lambda^4+9\lambda^3+13\lambda^2+18\lambda+23)$$

余式为

$$r(\lambda)=32\lambda^2-107\lambda+70$$

例 求下列矩阵的Jordan标准形：

1） $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

解 第一步：对 $\lambda I-A$ 用初等变换化为Smith标准形：

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-(\lambda-1)c_1}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-3 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-(\lambda-3)r_2}$$

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\quad]{\substack{c_2+c_3 \\ r_1\times(-1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2\leftrightarrow r_3 \\ c_2\leftrightarrow c_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

从而A的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\lambda-2,\quad d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$$

第二步：再把A的每个次数大于零的不变因子(此处是$d_2(\lambda)$和$d_3(\lambda)$)分解成关于λ的不同的一次因式方幂的乘积，并分别写出这些方幂(相同的按出现的次数计数)，称之为A的**初等因子**，本题中A的初等因子为

$$\lambda-2 \quad 和 \quad (\lambda-2)^2$$

第三步：对每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$作出$r_i$阶Jordan块

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$$

所有初等因子对应的Jordan块构成的Jordan矩阵 $\boldsymbol{J}$ 即是$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形。本题中$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right)$$

2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$。

解 $$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-2\\-3&\lambda+3&-6\\-2&2&\lambda-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{c_1-(\lambda-1)c_2\\ c_3+2c_2}}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-\lambda(\lambda+2)&\lambda+3&2\lambda\\-2\lambda&2&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-(\lambda+3)r_1\\ r_3-2r\\ c_1\leftrightarrow c_2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\lambda(\lambda+2)&2\lambda\\0&-2\lambda&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+2c_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2-2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_3]{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的不变因子为 $d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=\lambda,\ d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

$\boldsymbol{A}$的初等因子为 $\quad\lambda,\quad\lambda,\quad\lambda-2$

$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为 $\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

上页 下页 返回

例 已知一个12阶矩阵的不变因子是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9},\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+2)(\lambda^2+3)^2$$

求$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形。

解 $\boldsymbol{A}$的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+2),\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+2)$$

$$(\lambda-\sqrt{3}\mathrm{i})^2,\ (\lambda+\sqrt{3}\mathrm{i})^2$$

故$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为：

$$
\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|c|cc|cc}
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & -2 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & -2 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \sqrt{3}\mathrm{i} & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \sqrt{3}\mathrm{i} & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & -\sqrt{3}\mathrm{i} & 1 \\
 & & & & & & & & & & & -\sqrt{3}\mathrm{i}
\end{array}\right)
$$

例 求下列矩阵的Jordan标准形：

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

解 $$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

一阶子式共有9个， 显然 $D_1(\lambda)=1$;

上页 下页 返回

二阶子式共有 $C_3^2 \cdot C_3^2 = 9$ 个：

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2, \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2),$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda-2, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = -(\lambda-2),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2), \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda-2,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

所以 $$D_2(\lambda)=\lambda-2$$

又 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$, 故

$$D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$$

从而$\boldsymbol{A}$的不变因子为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, \quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda-2,$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)^2$$

$\boldsymbol{A}$的初等因子为 $\lambda-2, \quad (\lambda-2)^2$

$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为 $$\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right)$$

2) $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

解 $$\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

其中三阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,\quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-(\lambda-3)(2\lambda-5)$$

故 $D_3(\lambda)=1$，从而 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$。

又有 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$

所以 $D_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$

$\boldsymbol{A}$的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$$

$\boldsymbol{A}$的初等因子为 $(\lambda-1)^3$, $\lambda-3$

$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 3 \end{array}\right)$$

3) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

解 $$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 6 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

中有一个5阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \lambda & -1 & \\ & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5$$

所以 $$D_1(\lambda) = \cdots = D_5(\lambda) = 1$$

又 $$D_6(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$\boldsymbol{A}$的不变因子为

$$d_1(\lambda) = \cdots = d_5(\lambda) = 1, \quad d_6(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$\boldsymbol{A}$的初等因子为 $(\lambda - 1)^3, \quad (\lambda - 2), \quad (\lambda + 1)^2$

$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$
\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{ccc|c|cc}
1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & & & 2 & & \\
\hline
 & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & -1
\end{array}\right)
$$

上页 下页 返回

例 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

的Jordan标准形。

解 $$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$D_4(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$$

$\lambda I-A$ 中3阶子式

上页 下页 返回

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{vmatrix} = -4\lambda(\lambda+1)$$

因为 $D_3(\lambda)$整除所有3阶子式，且 $D_3(\lambda) \mid D_4(\lambda)$, 所以

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = D_3(\lambda) = 1$$

$\boldsymbol{A}$的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1, \quad d_4(\lambda) = (\lambda-1)^4$$

故$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

例 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

的Jordan标准形 $\boldsymbol{J}$ 及所用的相似变换阵 $\boldsymbol{P}$。

解 已求得A的Jordan标准形为

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 3\end{array}\right)$$

上页 下页 返回

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$，即按列分块，则由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$ 得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_4)=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3,3\boldsymbol{p}_4)$$

即 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_4=3\boldsymbol{p}_4\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_1\\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_2\\ (3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}_3=0\end{cases}$

由上式可见，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_4$分别是特征值1和3对应的特征向量，而$\boldsymbol{p}_2$可利用已求出的 $-\boldsymbol{p}_1$作为右端项，求解非齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_1$得到，而 $\boldsymbol{p}_3$又可由求解非齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$ 得到。

可求得特征值1对应的特征向量为

$$(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

取 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_1$, 由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{p}_1)=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\ x_2=\frac{1}{3}+x_3,\\ x_4=0\end{cases}$ 令 $x_3=0$ 得

$$\boldsymbol{p}_2=(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,0)^{\mathrm{T}}$$

上页 下页 返回

再求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$，由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{p}_2)=\left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=\frac{2}{9} \\ x_2=-\frac{1}{9}+x_3, \\ x_4=0 \end{cases}$ 令 $x_3=0$ 得

$$\boldsymbol{p}_3=(\tfrac{2}{9},-\tfrac{1}{9},0,0)^{\mathrm{T}}$$

取 $\boldsymbol{p}_4$ 为对应特征值3的特征向量

$$\boldsymbol{p}_4=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故相似变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$。

注　称 $\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 是特征值1的广义特征向量。它们不是唯一的。

例　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

的Jordan标准形和所用的相似变换阵。

解

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -\lambda+1 & -(\lambda-1)(\lambda-2)\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-1 & -(\lambda-2)\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

求解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由于

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1=-x_2+3x_3$

基础解系为 $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(3,0,1)^{\mathrm{T}}$

从而$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

若设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$, 则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_2,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$$

可见 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 应取对应特征值 $\lambda=1$的两个线性无关的特征向量。

(注 若取 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$

为得到 $\boldsymbol{p}_3$, 求解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$, 即

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-6x_3=-3\\ x_1+x_2-3x_3=0\\ x_1+x_2-3x_3=-1\end{cases}$$

这是矛盾方程组。)

处理方法如下:

上页 下页 返回

取定 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 又令

$$\boldsymbol{p}_2=k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(3,0,1)^{\mathrm{T}}=(-k_1+3k_2,-k_1,-k_2)^{\mathrm{T}}$$

只要 $\boldsymbol{p}_2\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{p}_2$ 也是对应 $\lambda=1$ 的特征向量，选择其中的系数 k_1，k_2 使 $\boldsymbol{p}_2$ 满足两点:

（1）与 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关;

（2）使方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_2$ 有解。

由于

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},-\boldsymbol{p}_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -6 & k_1-3k_2\\ 1 & 1 & -3 & -k_1\\ 1 & 1 & -3 & -k_2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & 0 & 3k_1-3k_2\\ 1 & 1 & -3 & -k_1\\ 0 & 0 & 0 & k_1-k_2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -3 & -k_1\\ 0 & 0 & 0 & k_1-k_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可见，当 $k_1=k_2$时，方程组有解。取$k_1=k_2=1,$则

$$\boldsymbol{p}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+(3,0,1)^{\mathrm{T}}=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$$

它与 $\boldsymbol{p}_1$ 线性无关。又同解方程组为

$$x_1=-1-x_2+3x_3$$

令 $x_2=x_3=0$ 得 $\qquad \boldsymbol{p}_3=(-1,0,0)^{\mathrm{T}}$

上页 下页 返回

故相似变换阵 $$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

使 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{c:cc} 1 & & \\ \hdashline & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

注 当一个重特征值对应2个及2个以上的Jordan块时，经常要作这样的处理，应加以注意。

例 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的n个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,证明

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det \boldsymbol{A}$$

证 根据Jordan标准形理论，存在n阶可逆阵$\boldsymbol{P}$使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

（其中*代表0或1）

取行列式即得。

例　已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。

解　可求得 $P^{-1}AP=J$，其中

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 3 \end{array}\right),\qquad P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{100} = PJ^{100}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 100 & \frac{100\times 99}{2} & \\ & 1 & 100 & \\ & & 1 & \\ & & & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 101 & -100 & 100 & -100 \\ 15050 & -14749 & 14750 & -3^{100}-14749 \\ 14950 & -14050 & 14051 & -14650 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

例 求解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 = -x_1 \qquad\quad + 3x_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3 = -x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

解 首先化为矩阵形式 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$, 其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c:cc}1 & & \\ \hdashline & 1 & 1\\ & & 1\end{array}\right)$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，代入方程得

$$\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y},\ \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$$

写成分量形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1=y_1,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2=y_2+y_3,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_3=y_3$$

由第1,3个方程解得

$$y_1=c_1\,\mathrm{e}^t,\ \ y_3=c_3\,\mathrm{e}^t$$

代入第2个方程得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2 = y_2 + c_3\,\mathrm{e}^t$

这是一阶线性微分方程，其解为

$$y_2 = (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1\,\mathrm{e}^t \\ (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t \\ c_3\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-c_1 + 2c_2 - c_3 + 2c_3 t)\mathrm{e}^t \\ (c_1 + c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t \\ (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3\text{任意})$$

§4 Hamilton-Cayley定理

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求

1）$A^8-9A^6+A^4-3A^3+4A^2+I$;

2） A^{100}。

解 1）用带余除法

$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3$$

设 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-9\boldsymbol{A}^6+\boldsymbol{A}^4-3\boldsymbol{A}^3+4\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}$

其中 $g(\lambda)=\lambda^8-9\lambda^6+\lambda^4-3\lambda^3+4\lambda^2+1$

用 $\varphi(\lambda)$ 除 $g(\lambda)$ 可得

$$g(\lambda)=(\lambda^5+5\lambda^4+9\lambda^3+13\lambda^2+18\lambda+23)\varphi(\lambda)+$$
$$+32\lambda^2-107\lambda+68$$

由于$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，所以

$$g(\boldsymbol{A})=32\boldsymbol{A}^2-107\boldsymbol{A}+68\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}14 & -21 & -42\\ -21 & 14 & 42\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

2) 用待定系数法

设 $$\lambda^{100}=q(\lambda)\varphi(\lambda)+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0 \qquad (*)$$

需求出 b_2,b_1,b_0。注意 $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$ 满足

$$\varphi(1)=\varphi'(1)=\varphi(3)=0 \qquad (**)$$

又对 $(*)$ 式求导得

$$100\lambda^{99}=q'(\lambda)\varphi(\lambda)+q(\lambda)\varphi'(\lambda)+2b_2\lambda+b_1$$

将 $\lambda=3$ 和 $\lambda=1$ 代入 $(*)$ 式和上式并利用 $(**)$ 式得

$$\begin{cases}3^{100}=9b_2+3b_1+b_0\\ 1=b_2+b_1+b_0\\ 100=2b_2+b_1\end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases}b_0=\frac{1}{4}(3^{100}-597)\\ b_1=\frac{1}{2}(401-3^{100})\\ b_2=\frac{1}{4}(3^{100}-201)\end{cases}$$

故

$$A^{100}=b_2A^2+b_1A+b_0I$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{100}+1) & -\frac{1}{2}(3^{100}-1) & -(3^{100}-1) \\ -\frac{1}{2}(3^{100}-1) & \frac{1}{2}(3^{100}+1) & 3^{100}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 设3阶方阵A的特征值为1，–1，2，试将A^{2n}表为A的二次多项式。

解 A的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

令 $$\lambda^{2n}=q(\lambda)\varphi(\lambda)+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0$$

将 $\lambda=1,\ \lambda=-1,\ \lambda=2$ 依次代入上式得

$$\begin{cases} 1 = b_2 + b_1 + b_0 \\ 1 = b_2 - b_1 + b_0 \\ 2^{2n} = 4b_2 + 2b_1 + b_0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} b_0 = \frac{1}{3}(4 - 2^{2n}) \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{3}(2^{2n} - 1) \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{2n} &= q(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{A}) + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\boldsymbol{I} \\ &= \frac{1}{3}(2^{2n} - 1)\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3}(4 - 2^{2n})\boldsymbol{I} \end{aligned}$$

例 试求下列矩阵的最小多项式

1） $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

解 A的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

$\varphi(\lambda)$的因式有

$\lambda-2,\ \lambda-4,\ (\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)(\lambda-4),\ (\lambda-2)^2(\lambda-4)$

由性质2，只需验证第4个因式。可知

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$$

故 $$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

2） $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ 。

解 $\boldsymbol{B}$的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\lambda^n$$

所以$\varphi(\lambda)$的因式为 $\lambda=\lambda^2=\cdots=\lambda^{n-1}=\lambda^n$

因为 $\boldsymbol{B}^i\neq\boldsymbol{O}\ (i=1,2,\cdots,n-1),\ \ \boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$

故$\boldsymbol{B}$的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=\varphi(\lambda)=\lambda^n$

例　求下列矩阵的最小多项式

1） $A=\left(\begin{array}{cc|ccc|c|cc} 2 & 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ \hline & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 2 & & & \\ \hline & & & & & 3 & & \\ \hline & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & 3 \end{array}\right)$

解　$m_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$

2） $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$。

解 因为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=4$

对应 $\lambda=2$有两个线性无关的特征向量

$$(3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (-2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

从而$\boldsymbol{A}$的Jordan标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

故 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$

例　求下列矩阵的最小多项式

1） $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$；

解　$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n$

但　$\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

中右上角的 $n-1$ 阶子式

上页　下页　返回

$$\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \neq 0$$

故 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 从而

$$m_A(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=\varphi(\lambda)=\lambda^n$$

2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

但在 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

中1，3行、1，2列的二阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

所以 $D_2(\lambda)=1$, 从而 $m_A(\lambda)=\varphi(\lambda)$。

这一方法的缺点是，求 $D_{n-1}(\lambda)$ 可能比较麻烦。

§5 酉(正交)相似下的标准形

例 已知 $\boldsymbol{x}=(3,4,5\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(2\mathrm{i},0,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, 求 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$。

解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=3\times(-2\mathrm{i})+4\times 0+5\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})=5-6\mathrm{i}$

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=3\times 3+4\times 4+5\mathrm{i}\times(-5\mathrm{i})=50$

例 已知向量 $\boldsymbol{x}=(3+\mathrm{i},-\mathrm{i},2,1-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, 试将其单位化。

解 因为

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{|3+\mathrm{i}|^2+|-\mathrm{i}|^2+2^2+|1-\mathrm{i}|^2}=\sqrt{17}$$

所以

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}=\left(\frac{3+\mathrm{i}}{\sqrt{17}},\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}}$$

例 试把向量组

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

正交化。

解 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1)}{(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} y_1 - \frac{-\mathrm{i}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

则 y_1, y_2, y_3 是正交向量组。

例 矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$是否酉矩阵？ 若不是，试利用其列向量构造一个酉矩阵。

解 法1. 因为

$$A^{\mathrm{H}}A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\neq I$$

所以A不是酉矩阵。

法2. 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

上页 下页 返回

因为$\|\boldsymbol{a}_1\|_2=\sqrt{2}$，所以$\boldsymbol{A}$不是酉矩阵。

利用Gram−Schmidt正交化过程构造正交向量组

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\\ \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

故$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$是一个酉矩阵。

例 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 是否正规矩阵？ 若是，试将其酉相似对角化。

解 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{A}$是实反对称阵，所以$\boldsymbol{A}$是正规矩阵。又因为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 1 & \lambda & -1\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+2)$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\sqrt{2}\mathrm{i},\quad \lambda_3=-\sqrt{2}\mathrm{i}$$

可求得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\,\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}$$

它们已正交；单位化得

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故酉矩阵 $$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

使 $$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(0,\sqrt{2}\,\mathrm{i},-\sqrt{2}\,\mathrm{i})$$

上页 下页 返回

例 已知实对称阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵。

解 $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-5)$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 5$

对应 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$$

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量为

$$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

它们已正交，单位化得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

对应于$\lambda_4 = 5$的特征向量为$(1, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$，单位化得

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

故正交矩阵 $$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

使 $$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$