

习题四

4.1 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{16})$ 是取自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本, 设 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$.

分别求以下列集合为拒绝域的检验犯第一类错误的概率.

$$(1) \{(X_1, X_2, \dots, X_{16}) | 4\bar{X} < -1.6449\};$$

$$(2) \{(X_1, X_2, \dots, X_{16}) | 2.08 < 4\bar{X} < 2.21\}.$$

(1) **解** 犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned} P\{\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}\} &= P\left\{4\bar{X} < -1.6449 \mid \mu = 0\right\} = P\left\{\bar{X} < \frac{-1.6449}{4} \mid \mu = 0\right\} \\ &= P\left\{\frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} < \frac{-1.6449}{4\sqrt{\frac{1^2}{16}}}\right\} = \Phi(-1.6449) = 1 - \Phi(1.6449) \\ &= 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

(2) 犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned} P\{\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}\} &= P\left\{2.08 < 4\bar{X} < 2.21 \mid \mu = 0\right\} = P\left\{\frac{2.08}{4} < \bar{X} < \frac{2.21}{4} \mid \mu = 0\right\} \\ &= P\left\{\frac{2.08}{4\sqrt{\frac{1^2}{16}}} < \frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} < \frac{2.21}{4\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \mid \mu = 0\right\} = \Phi(2.21) - \Phi(2.08) \\ &= 0.9864 - 0.9812 = 0.0052 \end{aligned}$$

4.2 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{16})$ 是取自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检

验 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$. 若正态总体的期望的真值为 $\mu = 0.08$, 求该检验犯第二类错误的概率.

解 犯第二类错误的概率为

$$\begin{aligned} \beta &= P\{\text{接受}H_0 | H_0\text{为假}\} = P\{\text{统计量观测值落入接受域} \mid \mu = 0.08\} \\ &= P\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} \in \omega_0 \mid \mu = 0.08\right\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 0}{1} \sqrt{16}\right| \leq \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid \mu = 0.08\right\} \\ &= P\left\{-1.96 \leq 4\bar{X} \leq 1.96 \mid \mu = 0.08\right\} = P\left\{\frac{-1.96}{4} \leq \bar{X} \leq \frac{1.96}{4} \mid \mu = 0.08\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P \left\{ \frac{-1.96}{4} - 0.08 \leq \bar{x} - 0.08 \leq \frac{1.96}{4} - 0.08 \middle| \mu = 0.08 \right\} \\
&= P \left\{ \frac{\frac{-1.96}{4} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \leq \frac{\bar{x} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \leq \frac{\frac{1.96}{4} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \middle| \mu = 0.08 \right\} \\
&= P \left\{ -1.96 - 0.32 \leq \frac{\bar{x} - 0.08}{\sqrt{\frac{1^2}{16}}} \leq 1.96 - 0.32 \middle| \mu = 0.08 \right\} \\
&= \Phi(1.64) - \Phi(-2.28) = \Phi(1.64) - [1 - \Phi(2.28)] = \Phi(1.64) + \Phi(2.28) - 1 \\
&= 0.9495 + 0.9887 - 1 = 0.9382
\end{aligned}$$

4.3 设总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 已知其中 $\sigma = \sigma_0$, (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 ξ 的样本, μ 的置

信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, 其中 $\underline{\theta}, \bar{\theta} = \bar{X} \mp u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$; 检验 $H_0: \mu = \mu_0$ 的

统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$ 。证明: 在显著水平 α 下, 拒绝假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 的充分必要条件是

$\mu_0 \notin [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 。这说明参数的区间估计与参数的假设检验有着一一对应的关系, 可以用参数的区间估计代替参数的假设检验。

证 在显著水平 α 下, 拒绝假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 的充分必要条件是

$$|U| > u_{1-\alpha/2}, \text{ 其中 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n},$$

即

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} \right| > u_{1-\alpha/2},$$

也就是

$$|\bar{X} - \mu_0| > u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

它等价于

$$\mu_0 < \bar{X} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \text{ 或 } \mu_0 > \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

即

$$\mu_0 \notin [\underline{\theta}, \bar{\theta}] , \quad \text{其中 } \underline{\theta} = \bar{X} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} , \quad \bar{\theta} = \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} .$$

4.4 某车间加工的钢轴直径 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，根据长期积累的资料，已知其中 $\sigma = 0.012$ (cm)。按照设计要求，钢轴直径的均值应该是 $\mu = 0.150$ (cm)。现从一批钢轴中抽查 75 件，测得它们直径的样本均值为 0.154 (cm)，问：这批钢轴的直径是否符合设计要求？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 问题相当于要检验 $H_0: \mu = 0.150$ 。 $n = 75$ ， $\bar{X} = 0.154$ ， 已知 $\sigma = 0.012$ 。

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} = \frac{0.154 - 0.150}{0.012} \sqrt{75} = 2.8868 .$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 $N(0,1)$ 分布表可得 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.9600$ 。

因为 $|U| = |2.8868| > 1.9600$ ，所以拒绝 $H_0: \mu = 0.150$ ，这批钢轴的直径不符合设计要求。

4.5 某厂生产的一种保险丝，其熔化时间（单位：ms） $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，在正常情况下，标准差 $\sigma = 20$ 。现从某天生产的保险丝中抽取 25 个样品，测量熔化时间，计算得到样本均值为 $\bar{X} = 62.24$ ，修正样本方差为 $S^{*2} = 404.77$ ，问：这批保险丝熔化时间的标准差，与正常情况相比，是否有显著的差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 问题相当于要检验 $H_0: \sigma = 20$ 。 $n = 25$ ， $S^{*2} = 404.77$ 。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1) \times 404.77}{20^2} = 24.286 .$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 χ^2 分布表可得

$$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(24) = 12.401 ,$$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(24) = 39.364 ,$$

因为 $12.401 < \chi^2 = 24.286 < 39.364$ ，所以接受 $H_0: \sigma = 20$ ，这批保险丝熔化时间的标准差，与正常情况相比，没有显著的差异。

4.6 从切割机切割所得的金属棒中, 随机抽取 15 根, 测得长度 (单位: cm) 为:

10.5, 10.6, 10.1, 10.4, 10.5, 10.3, 10.3, 10.2,
10.9, 10.6, 10.8, 10.5, 10.7, 10.2, 10.7。

设金属棒长度 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。问:

(1) 是否可以认为金属棒长度的平均值 $\mu = 10.5$? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

(2) 是否可以认为金属棒长度的标准差 $\sigma = 0.15$? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 $n = 15$, $\bar{X} = 10.4867$, $S^* = 0.235635$ 。

(1) 问题相当于要检验 $H_0: \mu = 10.5$ 。

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S^*} \sqrt{n} = \frac{10.4867 - 10.5}{0.235635} \times \sqrt{15} = -0.2192。$$

对 $\alpha = 0.05$, 查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(14) = 2.1448$ 。

因为 $|T| = |-0.2192| < 2.1448$, 所以接受 $H_0: \mu = 10.5$;

(2) 问题相当于要检验 $H_0: \sigma = 0.15$ 。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1) \times 0.235635^2}{0.15^2} = 34.548。$$

对 $\alpha = 0.05$, 查 χ^2 分布表可得

$$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(14) = 5.629, \quad \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(14) = 26.119,$$

因为 $\chi^2 = 34.548 > 26.119$, 所以拒绝 $H_0: \sigma = 0.15$ 。

4.7 某化工产品的含硫量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 、 $\sigma > 0$ 都未知, 取 5 个样品, 测得含硫量为:

4.28, 4.40, 4.42, 4.35, 4.37。

(1) 检验假设 $H_0: \mu = 4.50$ (显著水平 $\alpha = 0.05$);

(2) 检验假设 $H_0: \sigma = 0.04$ (显著水平 $\alpha = 0.05$)。

解 $n = 5$, $\bar{X} = 4.364$, $S^* = 0.054129$ 。

$$(1) \quad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S^*} \sqrt{n} = \frac{4.364 - 4.50}{0.054129} \times \sqrt{5} = -5.618。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.7764$ 。

因为 $|T| = |-5.618| = 5.618 > 2.7764$ ，所以拒绝 $H_0: \mu = 4.50$ ；

$$(2) \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(5-1) \times 0.054129^2}{0.04^2} = 7.325。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 χ^2 分布表可得

$$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(4) = 0.484, \quad \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(4) = 11.143,$$

因为 $0.484 < \chi^2 = 7.325 < 11.143$ ，所以接受 $H_0: \sigma = 0.04$ 。

4.8 甲、乙两台机床生产同一种型号的滚珠。从甲机床生产的滚珠中抽取 8 颗，测得滚珠直径的样本均值为 $\bar{X} = 15.012$ ，修正样本标准差为 $S_x^* = 0.309$ ；从乙机床生产的滚珠中抽取 9 颗，测得滚珠直径的样本均值为 $\bar{Y} = 14.989$ ，修正样本标准差为 $S_y^* = 0.162$ 。设两台机床生产的滚珠直径都服从正态分布，而且方差相等。问：这两台机床生产滚珠直径的平均值是否有显著的差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设甲、乙两台机床生产的滚珠直径分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，其中 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。问题相当于要检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

$$m = 8, \quad \bar{X} = 15.012, \quad S_x^* = 0.309, \quad n = 9, \quad \bar{Y} = 14.989, \quad S_y^* = 0.162。$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(8-1) \times 0.309^2 + (9-1) \times 0.162^2}{8+9-2}} = 0.24198,$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{15.012 - 14.989}{0.24198 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}} = 0.1956。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(15) = 2.1314$ 。

因为 $|T| = |0.1956| = 0.1956 < 2.1314$ ，所以接受 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ，这两台机床生产滚珠直径的平均值没有显著的差异。

4.9 甲、乙两台机床加工同一种零件，从这两台机床加工的零件中，随机抽取一些样品，测得它们的外径（单位：mm）如下：

机床甲	20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9
机床乙	19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

假定零件的外径服从正态分布，问：

- (1) 是否可以认为两台机床加工零件外径的方差相等？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）
- (2) 是否可以认为两台机床加工零件外径的均值相等？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设甲、乙两台机床加工零件的外径分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

$$m = 8, \quad \bar{X} = 19.925, \quad S_x^* = 0.46522, \quad S_x^{*2} = 0.21643;$$

$$n = 7, \quad \bar{Y} = 20.000, \quad S_y^* = 0.62981, \quad S_y^{*2} = 0.39667。$$

(1) 问题相当于要检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 。

$$F = \frac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}} = \frac{0.21643}{0.39667} = 0.5456。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.975}(7, 6) = 5.70，$$

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{0.975}(6, 7)} = \frac{1}{5.12} = 0.195，$$

因为 $0.195 < F = 0.5456 < 5.70$ ，所以接受 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，可以认为两台机床加工零件的外径的方差相等。

(2) 问题相当于要检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(8-1) \times 0.21643 + (7-1) \times 0.39667}{8+7-2}} = 0.54737，$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{19.925 - 20.000}{0.54737 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{7}}} = -0.2647。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(13) = 2.1604$ 。

因为 $|T| = |-0.2647| = 0.2647 < 2.1604$ ，所以接受 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ，可以认为两台机床加工零件外径的均值相等。

4.10 按两种不同的配方生产橡胶，测得橡胶伸长率（单位：%）如下：

配方一	540, 533, 525, 520, 544, 531, 536, 529, 534
配方二	565, 577, 580, 575, 556, 542, 560, 532, 570, 561

如果橡胶的伸长率服从正态分布，两种配方生产的橡胶伸长率的标准差是否有显著差异？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设两种配方生产的橡胶伸长率分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。问题相

当于要检验 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 。

$$m = 9, \quad S_x^{*2} = 53.7778; \quad n = 10, \quad S_y^{*2} = 236.844。$$

$$F = \frac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}} = \frac{53.7778}{236.844} = 0.227。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布表，可得

$$F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.975}(8,9) = 4.10，$$

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{1}{F_{0.975}(9,8)} = \frac{1}{4.36} = 0.229，$$

因为 $F = 0.227 < 0.229$ ，所以拒绝 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ ，两种配方生产的橡胶伸长率的标准差有显著差异。

4.11 设一种元件的寿命服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，如果平均寿命不低于 1000 小时则为合格品，现从这批元件中随机地抽取了 25 件，测得样本的平均寿命为 966 小时。

(1) 如果已知 $\sigma = 100$ 小时，问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，能否认为这批元件是合格的？

(2) 假如 σ 未知，但已知所抽取的样本的修正标准差 $S^* = 100$ 小时，结论又是什么？

解 问题相当于要检验 $H_0: \mu \geq 1000$ （备选假设 $H_1: \mu < 1000$ ）。

(1) 已知 $\sigma = 100$ ， $n = 25$ ， $\bar{X} = 966$ ，

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} = \frac{966 - 1000}{100} \times \sqrt{25} = -1.70。$$

对 $\alpha = 0.05$ ， $1 - \alpha = 0.95$ ，查 $N(0, 1)$ 分布表，可得分位数 $u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$ ，

因为 $U = -1.70 < -1.645 = -u_{1-\alpha}$ ，所以拒绝 $H_0: \mu \geq 1000$ ，不能认为这批元件是合格的。

(2) σ 未知，但已知 $S^* = 100$ ，

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S^*} \sqrt{n} = \frac{966 - 1000}{100} \times \sqrt{25} = -1.70。$$

对 $\alpha = 0.05$ ， $1 - \alpha = 0.95$ ，自由度 $n - 1 = 25 - 1 = 24$ ，查 t 分布表，可得分位数 $t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(24) = 1.7109$ ，因为 $T = -1.70 > -1.7109 = -t_{1-\alpha}(n-1)$ ，所以接受

$H_0: \mu \geq 1000$ ，可以认为这批元件是合格的。

4.12 设锰的熔点(单位: °C)服从正态分布。进行 5 次试验, 测得锰的熔点如下:

1269 , 1271 , 1256 , 1265 , 1254 。

是否可以认为锰的熔点显著高于 1250°C ? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 设锰的熔点 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问题相当于要检验 $H_0: \mu \leq 1250$ ($H_1: \mu > 1250$)。

$$n = 5, \quad \bar{X} = 1263, \quad S^* = 7.64853, \quad T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S^*} \sqrt{n} = \frac{1263 - 1250}{7.64853} \sqrt{5} = 3.8006。$$

对 $\alpha = 0.05$, 查 t 分布表, 可得 $t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(4) = 2.1318$ 。

因为 $T = 3.8006 > 2.1318$, 所以拒绝 $H_0: \mu \leq 1250$, 接受 $H_1: \mu > 1250$ 。

可认为锰的熔点显著高于 1250°C。

4.13 某种导线的电阻(单位: Ω)服从正态分布, 按照规定, 电阻的标准差不得超过 0.005 。

今在一批导线中任取 9 根, 测得修正样本标准差 $S^* = 0.007$, 这批导线的电阻的标准差, 比起规定的电阻的标准差来, 是否显著地偏大? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 设导线电阻 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问题相当于要检验 $H_0: \sigma \leq 0.005$ ($H_1: \sigma > 0.005$)。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} = \frac{(9-1) \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68。$$

对 $\alpha = 0.05$, 查 χ^2 分布表, 可得 $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(8) = 15.507$ 。

因为 $\chi^2 = 15.68 > 15.507$, 所以拒绝 $H_0: \sigma \leq 0.005$, 接受 $H_1: \sigma > 0.005$ 。

这批导线的电阻的标准差, 比起规定的电阻的标准差来, 显著地偏大。

4.14 某厂从用旧工艺和新工艺生产的灯泡中, 各取 10 只进行寿命试验, 测得旧工艺生产的灯泡寿命的样本均值为 2460 小时, 修正样本标准差为 56 小时; 新工艺生产的灯泡寿命的样本均值为 2550 小时, 修正样本标准差为 48 小时。设新、旧工艺生产的灯泡寿命都服从正态分布, 而且方差相等。问: 能否认为采用新工艺后, 灯泡的平均寿命有显著的提高? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 设旧工艺生产的灯泡寿命和新工艺生产的灯泡寿命分别为总体 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和

$\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 其中 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。问题相当于要检验 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ ($H_1: \mu_1 < \mu_2$)。

$$m = 10, \quad \bar{X} = 2460, \quad S_x^* = 56, \quad n = 10, \quad \bar{Y} = 2550, \quad S_y^* = 48,$$

$$S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^{*2} + (n-1)S_y^{*2}}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(10-1) \times 56^2 + (10-1) \times 48^2}{10+10-2}} = 52.1536,$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{2460 - 2550}{52.1536 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -3.859。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表可得 $t_{1-\alpha}(m+n-2) = t_{0.95}(18) = 1.7341$ 。

因为 $T = -3.859 < -1.7341$ ，所以拒绝 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ ，接受 $H_1: \mu_1 < \mu_2$ 。可以认为采用新工艺后，灯泡的平均寿命有显著的提高。

4.15 某厂从用新、旧工艺生产的灯泡中各取 n 只测试其寿命，设新、旧工艺生产的灯泡寿命分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，其样本分别记为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 。令 $Z_i = X_i - Y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)； Z_i 的均值为 \bar{Z} ；样本修正方差记为 S_z^{*2} 。(1) 证明 $\frac{\bar{Z} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_z^*} \sqrt{n} \sim t(n-1)$ ；(2) 求显著性水平 α 下， $H_0: \mu_1 = \mu_2$

的拒绝域。

(1) **证明** 因新旧工艺生产的灯泡寿命可以认为相互独立，即 ξ 与 η 独立。

$Z_i = X_i - Y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 可以视为 $Z = \xi - \eta$ 的样本。

$$EZ = E\xi - E\eta = \mu_1 - \mu_2。$$

于是根据定理 6 有 $\frac{\bar{Z} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_z^*} \sim t(n-1)$ 。

(2) 根据 (1) 的结论有

$$\frac{\bar{Z} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_z^*} \sim t(n-1)$$

若 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 成立，选取检验统计量为 $T = \frac{\bar{Z} - 0}{S_z^*} \sim t(n-1)$ ，显著性水平 α 下， H_0

的拒绝域为 $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 。

4.16 甲、乙两台车床生产的滚珠的直径（单位：mm）都服从正态分布，现从两台车床生产的滚珠中分别抽取 8 个和 9 个，测得直径如下：

甲车床生产的滚珠	15.0, 14.5, 15.2, 15.5, 14.8, 15.1, 15.2, 14.8
乙车床生产的滚珠	15.2, 15.0, 14.8, 15.2, 15.0, 15.0, 14.8, 15.1, 14.8

问：乙车床产品的方差是否显著地小于甲车床产品的方差？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设甲乙两台车床生产的滚珠的直径分别为 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

问题相当于要检验 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ($H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$)。

$$m = 8, \quad S_x^{*2} = 0.0955357; \quad n = 9, \quad S_y^{*2} = 0.0261111。$$

$$F = \frac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}} = \frac{0.0955357}{0.0261111} = 3.66。$$

对 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布表，可得 $F_{1-\alpha}(m-1, n-1) = F_{0.95}(7, 8) = 3.50$ 。

因为 $F = 3.66 > 3.50$ ，拒绝 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ，接受 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 。可认为乙车床产品的方差显著地小于甲车床产品的方差。

4.17 一颗六面体的骰子掷了 300 次，出现各种点数的频数统计如下：

点数	1	2	3	4	5	6
频数	43	49	56	45	66	41

是否可以认为这颗骰子是均匀的？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 骰子掷出的点数可以看作是一个总体 ξ ，问题相当于要检验假设

$$H_0: \xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6。$$

作分点 $0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5 < 5.5 < 6.5$ ，把 ξ 的取值范围分成下列 6 个区间

$$(k - 0.5, k + 0.5], \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6。$$

H_0 为真时， ξ 落在各区间中的概率为

$$p_k = P\{k - 0.5 < \xi \leq k + 0.5\} = P\{\xi = k\} = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6。$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{300} \left(\frac{43^2}{1/6} + \frac{49^2}{1/6} + \frac{56^2}{1/6} + \frac{45^2}{1/6} + \frac{66^2}{1/6} + \frac{41^2}{1/6} \right) - 300 = 8.96。$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ， $1 - \alpha = 0.95$ ，自由度 $r - 1 = 6 - 1 = 5$ ，查 χ^2 分布表，可得

$$\chi_{1-\alpha}^2(r-1) = \chi_{0.95}^2(5) = 11.070。$$

因为 $\chi^2 = 8.96 < 11.070$ ，所以接受 H_0 ，可以认为这颗骰子是均匀的。

4.18 在圆周率 $\pi = 3.1415926535 \dots$ 的前 800 位小数中，数字 0, 1, 2, \dots , 9 出现的频数统计如下：

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频数	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

是否可以认为各种数字出现的可能性是相同的？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设 ξ 是在圆周率小数中出现的数字，问题相当于要检验

$$H_0: \xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{1}{10}, \quad k = 0, 1, \dots, 9.$$

作分点 $-0.5 < 0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5 < 5.5 < 6.5 < 7.5 < 8.5 < 9.5$ ，把 ξ 的取值范围分成 10 个区间： $(k - 0.5, k + 0.5]$ ， $k = 0, 1, \dots, 9$ 。

H_0 为真时， ξ 落在各区间中的概率为：

$$p_k = P\{k - 0.5 < \xi \leq k + 0.5\} = P\{\xi = k\} = \frac{1}{10}, \quad k = 0, 1, \dots, 9.$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^9 \frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{800} \left(\frac{74^2}{1/10} + \frac{92^2}{1/10} + \frac{83^2}{1/10} + \dots + \frac{91^2}{1/10} \right) - 800 = 5.125.$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ， $1 - \alpha = 0.95$ ，自由度 $r - 1 = 10 - 1 = 9$ ，查 χ^2 分布表，可得 $\chi_{1-\alpha}^2(r-1) = \chi_{0.95}^2(9) = 16.919$ 。

因为 $\chi^2 = 5.125 < 16.919$ ，所以接受 H_0 ，可以认为各种数字出现的可能性是相同的。

4.19 某电话总机在一天中各个时间段内接到的电话数统计如下：

时间段	0:00~9:00	9:00~12:00	12:00~15:00	15:00~24:00
电话数	189	132	121	198

问：是否可以认为电话的来到时刻 ξ 服从 $[0, 24]$ 上的均匀分布？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 问题相当于要检验假设 $H_0: \xi \sim U(0, 24)$ 。

作分点 $0 < 9 < 12 < 15 < 24$ ，把 ξ 的取值范围分成下列 4 个区间

$$(0, 9], (9, 12], (12, 15], (15, 24]。$$

$H_0: \xi \sim U(0, 24)$ 为真时， ξ 落在各区间中的概率为

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{0 < \xi \leq 9\} = \frac{9-0}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}, \\ p_2 &= P\{9 < \xi \leq 12\} = \frac{12-9}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}, \\ p_3 &= P\{12 < \xi \leq 15\} = \frac{15-12}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}, \\ p_4 &= P\{15 < \xi \leq 24\} = \frac{24-15}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{640} \times \left(\frac{189^2}{3/8} + \frac{132^2}{1/8} + \frac{121^2}{1/8} + \frac{198^2}{3/8} \right) - 640 = 73 \quad .$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$, $r - 1 = 3$, 查 χ^2 分布表, 可得 $\chi_{1-\alpha}^2(r-1) = \chi_{0.95}^2(3) = 7.815$ 。

因为 $\chi^2 = 73 > 7.815$, 所以拒绝 H_0 : $\xi \sim U(0, 24)$, 不能认为电话的来到时刻服从 $[0, 24]$ 上的均匀分布。

4.20 一个四面体的骰子, 四面分别涂上红、黄、蓝、白四种颜色, 任意抛掷, 直到白色一面朝下为止, 记录下所需的抛掷次数, 做这样的试验 200 次, 得到结果如下:

到白色一面朝下为止所需的抛掷次数	1	2	3	4	≥ 5
出现这种结果的频数	56	48	32	28	36

问: 是否可以认为这颗四面体骰子是均匀的? (显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 如果四面体骰子是均匀的, 则每次抛掷, 得到白色一面朝下的概率为 $p = \frac{1}{4}$ 。设 ξ 是连续抛掷, 直到白色一面朝下为止, 记录下的抛掷次数, 则 ξ 应该服从几何分布 $g(\frac{1}{4})$:

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

所以, 问题相当于要检验假设 H_0 : $\xi \sim g(\frac{1}{4})$ 。

作分点 $0.5 < 1.5 < 2.5 < 3.5 < 4.5 < +\infty$, 把 ξ 的取值范围分成下列 5 个区间

$$(0.5, 1.5], (1.5, 2.5], (2.5, 3.5], (3.5, 4.5], (4.5, +\infty)。$$

H_0 : $\xi \sim P\{\xi = k\} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 为真时, ξ 落在各区间中的概率为

$$p_1 = P\{0.5 < \xi \leq 1.5\} = P\{\xi = 1\} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P\{1.5 < \xi \leq 2.5\} = P\{\xi = 2\} = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$p_3 = P\{2.5 < \xi \leq 3.5\} = P\{\xi = 3\} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64},$$

$$p_4 = P\{3.5 < \xi \leq 4.5\} = P\{\xi = 4\} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{256},$$

$$p_5 = P\{4.5 < \xi < +\infty\} = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \frac{9}{64} - \frac{27}{256} = \frac{81}{256}。$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \frac{n_k^2}{p_k} - n = \frac{1}{200} \times \left(\frac{56^2}{1/4} + \frac{48^2}{3/16} + \frac{32^2}{9/64} + \frac{28^2}{27/256} + \frac{36^2}{81/256} \right) - 200 = 18.216。$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$, $r - 1 = 4$, 查 χ^2 分布表, 可得 $\chi_{1-\alpha}^2(r-1) = \chi_{0.95}^2(4) = 9.488$ 。

因为 $\chi^2 = 18.216 > 9.488$ ，所以拒绝 $H_0: \xi \sim g(\frac{1}{4})$ ，不能认为这颗四面体骰子是均匀的。

4.21 从某厂生产的布匹中抽查 50 匹，查得布匹上的疵点数如下：

疵点数	0	1	2	3	≥ 4
频数	20	16	8	6	0

问：是否可以认为每匹布上的疵点数 ξ 服从 Poisson(普阿松)分布？(显著水平 $\alpha = 0.05$)

解 问题相当于要检验 $H_0: \xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$ ，其中含有一个未知参数 λ 。

先求 λ 的极大似然估计。在习题三的 3.3 题中，我们已经推导出，当总体服从 Poisson 分布时， λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 。所以有

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r n_k x_k = \frac{1}{50} \times (20 \times 0 + 16 \times 1 + 8 \times 2 + 6 \times 3) = 1。$$

作分点 $-0.5 < 0.5 < 1.5 < 2.5 < +\infty$ ，把 ξ 的取值范围分成 4 个区间：

$$(-0.5, 0.5], (0.5, 1.5], (1.5, 2.5], (2.5, +\infty)。$$

H_0 为真时， ξ 落在各区间中的概率的估计值为：

$$\hat{p}_1 = \hat{P}\{-0.5 < \xi \leq 0.5\} = \hat{P}\{\xi = 0\} = \frac{\hat{\lambda}^0}{0!} e^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0.36788，$$

$$\hat{p}_2 = \hat{P}\{0.5 < \xi \leq 1.5\} = \hat{P}\{\xi = 1\} = \frac{\hat{\lambda}^1}{1!} e^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 0.36788，$$

$$\hat{p}_3 = \hat{P}\{1.5 < \xi \leq 2.5\} = \hat{P}\{\xi = 2\} = \frac{\hat{\lambda}^2}{2!} e^{-\hat{\lambda}} = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0.18394，$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_4 &= \hat{P}\{2.5 < \xi < +\infty\} = 1 - \hat{P}\{\xi \leq 2.5\} = 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{p}_3 \\ &= 1 - 0.36788 - 0.36788 - 0.18394 = 0.08030。 \end{aligned}$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^4 \frac{n_k^2}{\hat{p}_k} - n = \frac{1}{50} \times \left(\frac{20^2}{0.36788} + \frac{16^2}{0.36788} + \frac{8^2}{0.18394} + \frac{6^2}{0.08030} \right) - 50 = 1.589。$$

对 $\alpha = 0.05$ ， $1 - \alpha = 0.95$ ，自由度 $r - m - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ ，查 χ^2 分布表，可得

$$\chi_{1-\alpha}^2(r - m - 1) = \chi_{0.95}^2(2) = 5.991。$$

由于 $\chi^2 = 1.589 < 5.991$ ，因此接受 $H_0: \xi \sim P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$ ，

可以认为每匹布上的疵点数服从 Poisson 分布。

4.22 从某车床生产的滚珠中，抽取 50 颗，测得它们的直径（单位：mm）落在各区间中的频数为：

区间	(14.14, 14.51]	(14.51, 14.88]	(14.88, 15.25]	(15.25, 15.62]	(15.62, 15.99]
频数	6	8	20	11	5

已知滚珠直径的样本均值为 $\bar{X} = 15.078$ ，样本标准差为 $S = 0.428154$ 。

问：滚珠的直径 ξ 是否服从正态分布？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 问题相当于要检验 $H_0: \xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中，参数 μ, σ 都未知。

在 3.1 节的例 5 中，我们已经推导出，当 ξ 服从正态分布时， μ, σ 的极大似然估计

分别是 \bar{X} 和 S ，所以有

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 15.078, \quad \hat{\sigma} = S = 0.428154。$$

作分点 $-\infty < 14.51 < 14.88 < 15.25 < 15.62 < +\infty$ ，把 ξ 的取值范围分成 5 个区间。

总体 ξ 落在各个区间 $(a_{k-1}, a_k]$ 中的概率的估计值 \hat{p}_k 可由下式求出：

$$\hat{p}_k = \hat{P}\{a_{k-1} < \xi \leq a_k\} = \Phi\left(\frac{a_k - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{k-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)。$$

用本题的数据代入，得计算结果如下：

$(a_{k-1}, a_k]$	$(-\infty, 14.51]$	$(14.51, 14.88]$	$(14.88, 15.25]$	$(15.25, 15.62]$	$(15.62, +\infty)$
n_k	6	8	20	11	5
\hat{p}_k	0.11682	0.18778	0.26234	0.23495	0.19811

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^r \frac{n_k^2}{\hat{p}_k} - n$$

$$= \frac{1}{50} \times \left(\frac{6^2}{0.09232} + \frac{8^2}{0.22956} + \frac{20^2}{0.33418} + \frac{11^2}{0.24117} + \frac{5^2}{0.10277} \right) - 50 = 2.214。$$

对 $\alpha = 0.05$ ， $r - m - 1 = 2$ ，查 χ^2 分布表，可得 $\chi_{1-\alpha}^2(r - m - 1) = \chi_{0.95}^2(2) = 5.991$ 。

因为 $\chi^2 = 2.214 < 5.991$ ，所以接受 $H_0: \xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，可以认为滚珠的直径服从正态分布。

4.23 为研究色盲与性别的关系，对 1000 人作统计，得到结果如下：

	男	女
色盲	38	6
正常	442	514

问：色盲是否与性别有关？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设 ξ 为患色盲的状况， η 为性别，问题相当于要检验 $H_0: \xi$ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	男	女	总和
色盲	38	6	44
正常	442	514	956
总和	480	520	1000

$$\begin{aligned}\chi^2 &= n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}} - 1 \right) \\ &= 1000 \times \left(\frac{38^2}{44 \times 480} + \frac{6^2}{44 \times 520} + \frac{442^2}{956 \times 480} + \frac{514^2}{956 \times 520} - 1 \right) = 27.139 \quad .\end{aligned}$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1) \times (2-1) = 1$ ，查 χ^2 分布表，

可得分位数 $\chi_{1-\alpha}^2((r-1)(s-1)) = \chi_{0.95}^2(1) = 3.841$ 。

因为 $\chi^2 = 27.139 > 3.841$ ，所以拒绝 $H_0: \xi$ 与 η 独立，可以认为色盲与性别有关。

4.24 为研究青少年犯罪与家庭状况的关系，对 1154 名青少年进行调查，得到统计结果如下：

	无犯罪记录	有犯罪记录
双亲完整家庭	973	88
单亲残缺家庭	70	23

问：青少年犯罪是否与家庭状况有关？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设 ξ 为家庭状况， η 为有无犯罪记录，问题相当于要检验 $H_0: \xi$ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	无犯罪记录	有犯罪记录	总和
双亲完整家庭	973	88	1061
单亲残缺家庭	70	23	93
总和	1043	111	1154

$$\chi^2 = n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}} - 1 \right)$$

$$= 1154 \times \left(\frac{973^2}{1061 \times 1043} + \frac{88^2}{1061 \times 111} + \frac{70^2}{93 \times 1043} + \frac{23^2}{93 \times 111} - 1 \right) = 26.573。$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1) \times (2-1) = 1$ ，查 χ^2 分布表，

可得分位数 $\chi_{1-\alpha}^2((r-1)(s-1)) = \chi_{0.95}^2(1) = 3.841$ 。

因为 $\chi^2 = 26.573 > 3.841$ ，所以拒绝 H_0 ： ξ 与 η 独立，可以认为犯罪与家庭状况有关。

4.25 为研究地下水位变化与地震的关系，某地震观测站收集了如下 1700 个观测结果：

	有地震	无地震
水位有变化	98	902
水位无变化	82	618

问：地下水位变化是否与地震有关？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设 ξ 为地下水位是否有变化， η 为地震是否发生。

问题相当于要检验 H_0 ： ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	有地震	无地震	总和
水位有变化	98	902	1000
水位无变化	82	618	700
总和	180	1520	1700

$$\chi^2 = n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}} - 1 \right)$$

$$= 1700 \times \left(\frac{98^2}{1000 \times 180} + \frac{902^2}{1000 \times 1520} + \frac{82^2}{700 \times 180} + \frac{618^2}{700 \times 1520} - 1 \right) = 1.5938。$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1) \times (2-1) = 1$ ，查 χ^2 分布

表，可得分位数 $\chi_{1-\alpha}^2((r-1)(s-1)) = \chi_{0.95}^2(1) = 3.841$ 。

因为 $\chi^2 = 1.5938 < 3.841$ ，所以接受假设 H_0 ： ξ 与 η 独立，地下水位变化与发生地震无关。

4.26 为研究儿童智力发展与营养的关系，抽查了 950 名小学生，得到统计数据如下：

	智商			
	<80	80~89	90~99	≥100
营养良好	245	228	177	219
营养不良	31	27	13	10

问：儿童的智力发展是否与营养状况有关？（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解 设 ξ 为营养状况， η 为智商情况，问题相当于要检验 H_0 ： ξ 与 η 独立。

首先，求出联立表中各行、各列的总和：

	智商				总和
	<80	80~89	90~99	≥100	
营养良好	245	228	177	219	869
营养不良	31	27	13	10	81
总和	276	255	190	229	950

$$\begin{aligned}
 \chi^2 &= n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}} - 1 \right) \\
 &= 950 \times \left(\frac{245^2}{869 \times 276} + \frac{228^2}{869 \times 255} + \frac{177^2}{869 \times 190} + \frac{219^2}{869 \times 229} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{31^2}{81 \times 276} + \frac{27^2}{81 \times 255} + \frac{13^2}{81 \times 190} + \frac{10^2}{81 \times 229} - 1 \right) = 9.751。
 \end{aligned}$$

对显著水平 $\alpha = 0.05$ ，自由度 $(r-1)(s-1) = (2-1) \times (4-1) = 3$ ，查 χ^2 分布表，

可得分位数 $\chi_{1-\alpha}^2((r-1)(s-1)) = \chi_{0.95}^2(3) = 7.815$ 。

因为 $\chi^2 = 9.751 > 7.815$ ，所以拒绝 H_0 ： ξ 与 η 独立，可以认为智力发展与营养状况有关。