§3 长方阵的范数

对于长方阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，相应的定义要做一些修改：

1) 矩阵范数定义中第 4 条公理相容性：$\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$，

其中 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times l}$，且上式左边是 $\mathbf{C}^{m\times l}$ 中的范数，右边第一项是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的范数，第二项是 $\mathbf{C}^{n\times l}$ 中的范数，且这三个范数应是同类的。

2） 与向量范数相容性的定义中，$\|\boldsymbol{Ax}\|_v\le\|\boldsymbol{A}\|_M\|\boldsymbol{x}\|_v$，

其中左边是 $\mathbf{C}^m$ 上的向量范数，右边是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，它们同类（但与矩阵范数不一定同类，因此矩阵范数中的相容性并未包含它）。

3） 导出范数定义中，$\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_v=1}\|\boldsymbol{Ax}\|_v$，

其中分子上是 $\mathbf{C}^m$ 中的向量范数，分母上是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，它们同类。

对于长方阵，常用的矩阵范数为如下七种：

（1）$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$　　**m_1-范数**　　与向量 1-范数相容

（2）$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})}$　　**F-范数**　　与向量 2-范数相容

（3）$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{M}}=\max\{m,n\}\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$　　**最大范数**　　与向量 1-，2-，∞-范数相容

（4）$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{G}}=\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$　　**G-范数（几何平均范数）**　　与向量 2-范数相容

（5）$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$　　**1-范数，列和范数**　　与向量 1-范数相容

（6）$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$　　**∞-范数，行和范数**　　与向量 ∞-范数相容

（7）$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\text{的最大特征值}}$　　**2-范数，谱范数**　　与向量 2-范数相容

其中 F-范数和 2-范数是酉不变的（注意 $\|\boldsymbol{UAV}\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$ 中，$\boldsymbol{U}$ 是 m 阶酉矩阵，$\boldsymbol{V}$ 是 n 阶酉矩阵）。

§4　范数的应用

一、范数在数值分析中的应用

1．病态与良态—扰动对解的影响

在工程实际问题中，要遇到大量的计算问题。对于这些计算问题，面临的一个重要现象是：问题中原始数据或参数的微小扰动或误差，对问题的解会产生什么样的影响。为了具体地说明这个问题，以矩阵求逆和线性方程组求解来说明。

例 1　如果n阶方阵$\boldsymbol{A}$为非奇异的，即$\det \boldsymbol{A} \neq 0$，给$\boldsymbol{A}$附加一个扰动（或摄动）$\delta\boldsymbol{A}$后（要求$\delta\boldsymbol{A}$的元素很小），矩阵$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$的情形怎样，即是否可逆？若可逆，则$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}$与$\boldsymbol{A}^{-1}$相差多少？看一个著名的例子：矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$的行列式为$\det \boldsymbol{A}=1$，逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

当对$\boldsymbol{A}$的第一行第一列元素稍加改变时，试看它的行列式与逆阵如何变化。

设$\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则　$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5+\varepsilon & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$。

可以求得$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=1+68\varepsilon$，由此可知，当取$\varepsilon=-\dfrac{1}{68}\approx-0.015$时，$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=0$，即矩阵变成奇异的了。如果取$\varepsilon=-0.01$，即有

$$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4.99 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

可求得$\det(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})=0.32$，即矩阵$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$非奇异，且

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix} 204.82 & -128.12 & -53.12 & 31.25 \\ -128.12 & 77.53 & 31.78 & -18.81 \\ -53.12 & 31.78 & 14.03 & -8.31 \\ 31.25 & -18.81 & -8.31 & 5.12 \end{pmatrix}$$

可见元素的微小变化，可能使矩阵发生质的变化（由非奇异到奇异），或逆矩阵的差别很大，这就说明该矩阵的可逆性与逆矩阵对于原矩阵元素的微小扰动（或摄动）十分敏感，称该矩阵关于求逆是**病态**的。

例 2　关于线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的求解问题。如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则该方程组的解是唯一的，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$。但是，如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有摄动 $\delta\boldsymbol{A}$，或右端向量 $\boldsymbol{b}$ 有摄动 $\delta\boldsymbol{b}$，或两者都有摄动，相应的方程组的解 $\boldsymbol{x}$ 也会有变化 $\delta\boldsymbol{x}$，即

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}，\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}，\quad (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$$

试看下例（R.S.Wilson）：考虑系数阵为 4 阶实对称阵的线性方程组

$$\begin{pmatrix}10&7&8&7\\7&5&6&5\\8&6&10&9\\7&5&9&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\23\\33\\31\end{pmatrix}，\text{其解为}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}。$$

如果把右端项作微小摄动 $\delta\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0.1\\-0.1\\0.1\\-0.1\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}10&7&8&7\\7&5&6&5\\8&6&10&9\\7&5&9&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32.1\\22.9\\33.1\\30.9\end{pmatrix}$，

它的解变为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.2\\-12.6\\4.5\\-1.1\end{pmatrix}$，与原解的差异较大。如果把系数矩阵微加摄动

$$\delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0.1&0.2\\0.08&0.04&0&0\\0&-0.02&-0.11&0\\-0.01&-0.01&0&-0.02\end{pmatrix}，\text{而右端向量不变，即}$$

$$\begin{pmatrix}10&7&8.1&7.2\\7.08&5.04&6&5\\8&5.98&9.89&9\\6.99&4.99&9&9.98\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\23\\33\\31\end{pmatrix}，\text{其解为}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-81\\137\\-34\\22\end{pmatrix}$$

与原解的差异更大。

这说明该方程的解对系数矩阵或右端向量的微小摄动十分敏感。我们说该方程组是**病态**的。

对于一个计算问题的病态程度如何度量？其解的误差如何估计？

2．近似逆矩阵的误差

引理　设 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\|\boldsymbol{P}\|<1$，则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ 可逆。

$det=0$

证 反证. 若 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ 奇异，则齐次方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$。设 $\|\bullet\|_v$ 是与 $\|\bullet\|$ 相容的向量范数，则 $\|\boldsymbol{x}_0\|_v=\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0\|_v\leq\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{x}_0\|_v$，从而 $\|\boldsymbol{P}\|\geq 1$。矛盾。**证毕**

定理 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵，$\delta\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是摄动矩阵，若对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|<1$，则

1） $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ 可逆； 2） $\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|\leq\dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}$；

3） $\dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\leq\dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}$；

4） 若进一步有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|<1$，则 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\leq\dfrac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1-\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}$。

证 1）因为 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})$，由引理知 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ 可逆。

2）由 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}$，左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1},$$

两边取范数得 $\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|+\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|$，解之得 2）。

3）因为 $\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}](\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}$

两边取范数，并利用 2）得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}$$

即得 3）。

4） 因为 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|<1$，所以 3）成立，由之得

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}\leq\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|}\leq\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|}=\frac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1-\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}$$

证毕

定义 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵，称 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**条件数**，记为 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$，即 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$。

因此，条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ 可作为矩阵求逆的病态程度的度量，条件数越大，则认为病态越严重。条件数与所取的范数有关，常用的有：

$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_2$，**谱条件数**　$\mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_F\|\boldsymbol{A}\|_F$，**F-条件数**

$\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{A}\|_\infty$，**最大条件数**

对例 1 中的矩阵有　$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})=\dfrac{30.28868}{0.01015005}\approx 2984$，$\mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A})\approx 3008$。

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的很小的相对误差（如 $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}=\dfrac{0.01}{30.28868}\approx 0.0003$）在求逆后被放大了近 3000 倍，因此病态严重。

3．线性方程组的解的误差

定理 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的摄动方程组为 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$，其中 $\delta\boldsymbol{A},\delta\boldsymbol{x},\delta\boldsymbol{b}$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{b}$ 的摄动。如果对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|<1$，则

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}\le\frac{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})}{1-\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_v}{\|\boldsymbol{b}\|_v}\right)$$

其中 $\|\bullet\|_v$ 是与 $\|\bullet\|$ 相容的向量范数。

证 将 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$ 展开，并利用 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 得

$$\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}+(\delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{b},$$

即　$\delta\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}(\delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{b}$，取范数得

$$\|\delta\boldsymbol{x}\|_v\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|_v+\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|\|\delta\boldsymbol{x}\|_v+\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{b}\|_v$$

也即

$$(1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|)\|\delta\boldsymbol{x}\|_v\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_v}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|_v}\right)\|\boldsymbol{x}\|_v$$

由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 得，$\|\boldsymbol{b}\|_v\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|_v$，代入上式并整理得

$$\frac{\|\delta x\|_v}{\|x\|_v} \le \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_v}{\|A\|\|x\|_v}\right) \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_v}{\|b\|_v}\right)$$ **证毕**

由上述定理可见，条件数 $\mathrm{cond}(A)$ 也可作为线性方程组 $Ax=b$ 的病态程度的度量。

可以求得，例 2 中矩阵 A 的谱条件数 $\mathrm{cond}_2(A)\approx 2984$，因此线性方程组是病态的。

有一类矩阵称为 **Hilbert 矩阵**，其定义为

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

该类矩阵在工程问题中常遇到，但它关于求逆与求方程组是典型的病态矩阵，其条件数随着 n 增大而迅速增大，见下表。

n	2	3	4	5	6	7	…
$\mathrm{cond}_1(H_n)$	65.3	748	21523	694086	22618622	741927127	…

该矩阵经常作为试验矩阵，以验证一些方法对病态问题的有效程度。

二、矩阵的谱半径及性质

1．谱半径的定义及性质

定义 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则称

$$\rho(A)=\max_i|\lambda_i|$$

为 A 的**谱半径**。

性质 1 $\rho(A^k)=\rho^k(A)$。

证 若 λ_i 是 A 的特征值，则 λ_i^k 是 A^k 的特征值，从而

$$\rho(A^k)=\max_i|\lambda_i^k|=\max_i|\lambda|^k=(\max_i|\lambda_i|)^k=\rho^k(A)$$ **证毕**

性质 2 $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^{\mathrm{H}}A)}=\sqrt{\rho(AA^{\mathrm{H}})}$，其中 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$。

证 $\|A\|_2=\sqrt{A^{\mathrm{H}}A\text{的最大特征值}}=\sqrt{\rho(A^{\mathrm{H}}A)}$

又由于 $A^{\mathrm{H}}A$ 与 AA^{H} 有相同的非零特征值，从而 $\|A\|_2=\sqrt{\rho(AA^{\mathrm{H}})}$。**证毕**

性质 3 若 A 是 Hermite 矩阵（或实对称阵），则 $\|A\|_2=\rho(A)$。

证 $\|A\|_2^2=\rho(A^{\mathrm{H}}A)=\rho(A^2)=\rho^2(A)$，故$\|A\|_2=\rho(A)$。**证毕**

2. 有关不等式

定理 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则对$\mathbf{C}^{n\times n}$上的任何一种矩阵范数$\|\bullet\|$都有 $\rho(A)\le\|A\|$。

证 设λ是A的特征值，x是对应λ的特征向量，即$Ax=\lambda x$，$x\neq\mathbf{0}$。两边取范数得（其中$\|\bullet\|_v$是与$\|\bullet\|$相容的向量范数）

$$|\lambda|\|x\|_v=\|\lambda x\|_v=\|Ax\|_v\le\|A\|\|x\|_v$$

从而 $|\lambda|\le\|A\|$，故$\rho(A)\le\|A\|$。**证毕**

推论 矩阵的特征值的模不超过其任一范数。

例 已知$A=\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0.1\\ -0.2 & 0 & 0.2\\ -0.1 & -0.2 & 0\end{pmatrix}$，试估计特征值的范围。

解 可求得

$\|A\|_1=\|A\|_\infty=0.4$，$\|A\|_{m_1}=1$，$\|A\|_F=\sqrt{0.18}\approx0.4243$，$\|A\|_{m_\infty}=0.6$，

于是A的任一特征值λ满足$|\lambda|\le0.4$。

实际计算可知A的特征值是 0，$-0.4\mathrm{i}, 0.4\mathrm{i}$，可见对此矩阵的特征值估计的较精确。但对多数矩阵来说，估计的结果可能偏保守。

定理 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在某一矩阵范数$\|\bullet\|_M$（与$A$有关），使得

$$\exists\quad \|A\|_M\le\rho(A)+\varepsilon\,。$$

证 因为存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad *\text{表示 1 或 0}$$

取对角阵$W(\varepsilon)=\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1})$，则可验证

$$W^{-1}(\varepsilon)(P^{-1}AP)W(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \frac{1}{\varepsilon} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \Delta & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \Delta \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ，　其中 Δ 表示 ε 或 0

于是　$$\left\|\boldsymbol{W}^{-1}(\varepsilon)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APW}(\varepsilon)\right\|_{\infty} \le \max_i(|\lambda_i|+|\varepsilon|) = \max_i|\lambda_i|+\varepsilon = \rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$$

对任意 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定　$$\|\boldsymbol{B}\|_M = \left\|\boldsymbol{W}^{-1}(\varepsilon)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BPW}(\varepsilon)\right\|_{\infty}$$

不难验证 $\|\bullet\|_M$ 是矩阵范数，且有 $\|\boldsymbol{A}\|_M \le \rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$。**证毕**