§3　满秩分解

一、Hermite 标准形

定义　设 $\boldsymbol{H}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{H}$ 满足：

1）前 r 行中每行至少含一个非零元素，且第一个非零元素是 1，而后 $m-r$ 行只含零元素；

2）各列中，如果含某行的第一个非零元 1，则其余各元素均为 0；

3）若第 i 行的第一个非零元 1 位于第 j_i 列（$i=1,2,\cdots,r$），则

$$j_1<j_2<\cdots<j_r$$

则称 $\boldsymbol{H}$ 为 **Hermite 标准形**或**行最简形**。

一般地，$\boldsymbol{C}_r^{m\times n}$ 中 Hermite 标准形具有如下的形式：

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} & & & j_1\text{列} & & & & j_2\text{列} & & \cdots & j_r\text{列} & & \end{array} \\
\boldsymbol{H}= & \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r\text{行} \\ \\ \\ \\ m\times n \end{array}
\end{array}$$

特别地，$\mathbf{C}_n^{n\times n}$ 中的 Hermite 标准形就是 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$。

定理　任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$ 都可通过初等行变换化为 Hermite 标准形 $\boldsymbol{H}$，或采用矩阵说法为：存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{SA}=\boldsymbol{H}$。

注 1）可以证明，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 标准形是唯一的，但等价变换阵 $\boldsymbol{S}$ 不是唯一的；

2）在求 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 标准形时，不需事先知道的秩，在用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 标准形后，自然就求得 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

3）为了求出 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 标准形 $\boldsymbol{H}$ 和等价变换阵 $\boldsymbol{S}$，可采用如下方法：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}_m)\xrightarrow{\text{行变换}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S})$$

这是因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}_m)=(\boldsymbol{SA},\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S})$。

例　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2 & -1 & -6\end{pmatrix}$ 的 Hermite 标准形 $\boldsymbol{H}$ 和变换阵 $\boldsymbol{S}$。

解 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3&\vdots&1&0&0&0\\0&-1&0&-1&0&\vdots&0&1&0&0\\0&0&-1&1&3&\vdots&0&0&1&0\\0&2&2&-1&-6&\vdots&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{r_2+r_1\\r_4-2r_1}}$

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3&\vdots&1&0&0&0\\0&0&-1&1&3&\vdots&1&1&0&0\\0&0&-1&1&3&\vdots&0&0&1&0\\0&0&4&-5&-12&\vdots&-2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_3-r_2\\r_4+4r_2}}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&\vdots&0&-1&0&0\\0&0&1&-1&-3&\vdots&-1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&\vdots&-1&-1&1&0\\0&0&0&-1&0&\vdots&2&4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4\times(-1)\\r_3\leftrightarrow r_4}]{\substack{r_1+r_4\\r_2-r_4}}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&\vdots&2&3&0&1\\0&0&1&0&-3&\vdots&-3&-5&0&-1\\0&0&0&1&0&\vdots&-2&-4&0&-1\\0&0&0&0&0&\vdots&-1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，变换阵 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-3&-5&0&-1\\-2&-4&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}$ 使 $\boldsymbol{SA}=\boldsymbol{H}$ 。

当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵时，上面方法即是求逆阵的初等变换法，且 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 。

定义 以 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$， $\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为列作成的 n 阶方阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n})$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，称为**置换矩阵**（或**排列矩阵**）。

如 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 是一个四阶置换矩阵。

关于置换矩阵有如下性质：

性质 1 置换矩阵的转置仍是置换矩阵。

性质 2 置换矩阵是正交矩阵。

性质 3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$， $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n})$，则 $\boldsymbol{AP}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 按 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列的次序重新排列所得到的矩阵。

定理 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{S}$ 和 n 阶置换阵 $\boldsymbol{P}$， 使

$$\boldsymbol{SAP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}\in\mathbf{C}^{r\times(m-r)}$$

证　存在m阶可逆阵$\boldsymbol{S}$，使$\boldsymbol{SA}=\boldsymbol{H}$，取置换阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_r},\cdots)$，则$\boldsymbol{SAP}$即有所需的形状。**证毕**

在上例中如取$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_5)$，则$\boldsymbol{SAP}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)$。

如果继续做初等列变换，则有

定理　设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在$m$阶可逆阵$\boldsymbol{S}$和$n$阶可逆阵$\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{SAT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

称后者为$\boldsymbol{A}$的**等价标准形**。

注　如果需要求矩阵$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{T}$使得$\boldsymbol{SAT}$为等价标准形，可采用如下两种方法：

法 1. $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}_m)\xrightarrow{\text{行变换}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{S})$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{T}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{SAT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$；

法 2. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{前}n\text{列做列变换}]{\text{前}m\text{行做行变换}}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{T} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。

对于上例的矩阵$\boldsymbol{A}$，已求得$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{T}$，又

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{I}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\leftrightarrow c_4]{\substack{c_5+3c_3\\ c_1\leftrightarrow c_2\\ c_2\leftrightarrow c_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

故　$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$使$\boldsymbol{SAT}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

二、满秩分解

定义　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$（$r>0$），如果存在矩阵 $\boldsymbol{F}\in\mathbf{C}_r^{m\times r}$ 和 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{C}_r^{r\times n}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$$

则称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**满秩分解**或**最大秩分解**。

定理　矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$（$r>0$）的满秩分解总是存在的。

证　若 $r=m$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}$ 是一个满秩分解；若 $r=n$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n$ 是一个满秩分解。

下设 $0<r<\min\{m,n\}$，则存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{S}$ 和 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{SAT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$$

其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\in\mathbf{C}_r^{m\times r}$（即取 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 的前 r 列），$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\in\mathbf{C}_r^{r\times n}$（即取 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的前 r 行）。**证毕**

定理　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$（$r>0$）的 Hermite 标准形为 $\boldsymbol{H}$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$ 中，可取 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列（前 r 个非零行中第 1 个非零元 1 所在的列）所构成的 $m\times r$ 矩阵，$\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的前 r 行构成的 $r\times n$ 矩阵。

证　取 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_r},\cdots)$，则由 $\boldsymbol{G}$ 的取法知

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{K}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K}\in\mathbf{C}_r^{r\times(n-r)}$$

令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_r})\in\mathbf{C}^{n\times r}$，则有 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{I}_r$。给 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$ 两边右乘 $\boldsymbol{P}_1$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{F}$，可见 $\boldsymbol{F}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列构成的。**证毕**

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&1&3\\0&2&2&-1&-6\end{pmatrix}$ 的满秩分解。

解 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&0&-1&1&3\\0&0&-1&1&3\\0&0&4&-5&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+4r_2\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_1-r_2\\r_3-r_2}}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4\times(-1)\\r_3\leftrightarrow r_4}]{\substack{r_1+r_4\\r_2-r_4}}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}\qquad（ j_1=2, j_2=3, j_3=4 ）$$

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$