第四章　随机变量的数字特征

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

数学期望的性质和计算

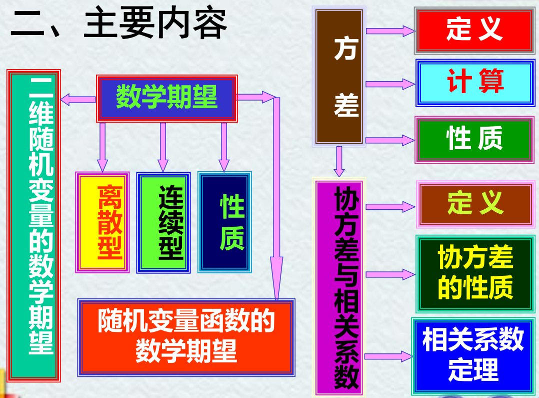
方差的性质和计算

相关系数的性质和计算

2.难点

数字特征的计算

二、主要内容



数学期望的概念

引例1　分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元,并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元.由于出现意外情况 ,在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析　假设继续赌两局,则结果有以下四种情况:

AA　　AB　　BA　　BB

把已赌过的三局(A 胜2局B 胜1局)与上述结果相结合,即 A、B 赌完五局,

前三局:　A 胜 2 局 B 胜 1 局

后二局:　$\boxed{AA \quad AB \quad BA}$　$\boxed{B}$

A 胜　　B 胜

故有, 在赌技相同的情况下, A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1$,

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能"期望"得到的数目应为

$$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}),$$

而B 能"期望"得到的数目, 则为

$$200\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}=50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为:在 A 胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: 200 $\quad 0$

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金即为X的 “**期望**” 值,

等于 $200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150$(元).

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.

引例2 射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\frac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}}=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\boxed{\frac{n_k}{n}}$

随机波动 频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值?

$$\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\sum_{k=0}^{5}k\cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛,

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 为随机变量 X的**数学期望**,

记为 $E(X)$, 即 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$.

分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X)=200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}).$$

射击问题

“平均射中环数”应为随机变量Y的数学期望

$E(Y)=$

$0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5$.

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\frac{1+2}{2}=1.5$,

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$

O 1 2 x

它从本质上体现了随机变量X取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时, X 的期望值与算术平均值相等.

实例 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个,奖金各 5 千元; 三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元.每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(元),$$

每张彩票平均可赚

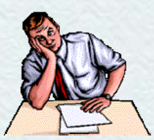
$$2-0.5-0.3=1.2(元),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000\times 1.2=120000(元).$$

实例 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元， 失败的机会为70%，将损失 2 万元．若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资?



解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X)=8\times 0.3-2\times 0.7=1$(万元),存入银行的利息:

$10\times 5\%=0.5$(万元), 故应选择投资.

几种重要随机变量的数学期望

1. 设 $X\sim$（0—1）分布， $EX=p$

2. 设 $X\sim\mathscr{B}(n,p)$， $E(X)=np$

3. 设 $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$， $E(X)=\lambda$

4. 设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，

$$EX=\frac{1}{p}$$

连续型随机变量的数学期望

X 是连续型随机变量,它的概率密度为 $f(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛,

则称此积分值为连续型 随机变量 X 的数学期望,

记为 $E(X)$,

即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x.$

实例 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间

X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\,\mathrm{d}x=5$(分钟).

因此, 顾客平均等待5分钟就可得到服务.

几种重要随机变量的数学期望

1. 设 X 服从$[a,b]$上的均匀分布,

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

2. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $E(X)=\mu$

3. $X\sim \exp(\lambda)$, $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

数学期望的性质

1. 设C是常数, 则有 $E(C)=C$.
2. 设X是一个随机变量, C是常数, 则有
   $E(CX)=CE(X)$.
3. 设X, Y 是两个随机变量, 则有
   $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
4. 设X, Y 是相互独立的随机变量, 则有
   $E(XY)=E(X)E(Y)$.

随机变量函数的数学期望

离散型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y=g(X)=X^2$,求 $E(Y)$.

解 先求 $Y=X^2$ 的分布律

$Y=X^2$	0	1	4
p	p_2	p_1+p_3	p_4

则有 $E(Y)=E(g(X))=E(X^2)$

$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_3)+4\cdot p_4$$

$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_3+2^2\cdot p_4$$

$$=\sum_{k=1}^{4} g(x_k)P\{X=x_k\}.$$

因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=g(X)$, 且 $P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\cdots$,

则有 $E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$

随机变量函数的数学期望

离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=g(X)$, 且 $P\{X=x_k\}=p_k$, $(k=1,2,\cdots)$

则有 $E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$.

若 X 是连续型的, 它的分布密度为 $f(x)$,

则有 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$.

二维随机变量的数学期望

设 (X,Y) 为二维随机变量, 若 $E(X), E(Y)$ 都存在, 则其期望值定义为

$$E(X)=\begin{cases}\sum_i\sum_j x_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

同理可得

$$E(Y)=\begin{cases}\sum_i\sum_j y_i p_{ij}, & (X,Y)\text{的概率分布为 } p_{ij};\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{的密度为} f(x,y).\end{cases}$$

1. 若 X,Y 为离散型随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数,

   则 $E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$,

   当 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

2. 若 X,Y 为连续型随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数,

   则 $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

   当 (X,Y) 的联合分布密度为 $f(x,y)$.

实例 设随机变量的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)$。

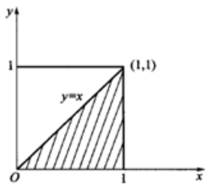
解 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$$

实例 设 (X,Y) 的分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X^2+Y^2)$。



解 $E(X^2+Y^2)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)12y^2\mathrm{d}y$$

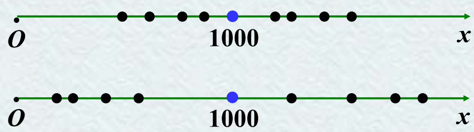
$$=\frac{16}{15}$$

随机变量方差的概念及性质

概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)$=1000小时.



方差的定义

设 X 是一个随机变量,若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$, 即⋯

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差 , 记为 $\sigma(X)$.

方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

方差的计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为概率密度.

方差的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0$.

2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有
$$D(CX)=C^2 D(X).$$

3. 设 X,Y 相互独立, $D(X), D(Y)$ 存在,则
$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

4. $D(X)=0$的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C, 即
$$P\{X=C\}=1.$$

重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2=pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n,p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

则有 $0<p<1$.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2-n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2-n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$,且分布律为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \quad \lambda > 0.$$

则有

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \cdot \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差 都等于参数 λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$,其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则有 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d} x = \int_a^b \frac{1}{b-a} x \mathrm{d} x$

$$= \frac{1}{2}(a+b).$$

结论　均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad 其中\ \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\ =1/\lambda.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=2\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}.$$

指数分布的期望和方差分别为$1/\lambda$和$1/\lambda^2$.

6. 正态分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t\Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

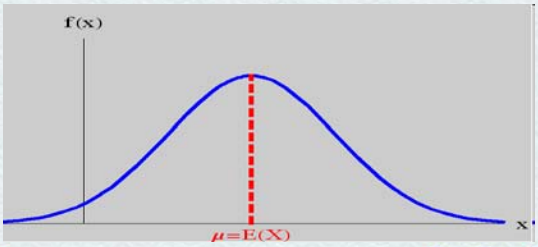
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1$, $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2

协方差与相关系数的概念及性质

1. 问题的提出

若随机变量 X 和 Y 相互独立,那么

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X+Y) = ?$$

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y) + 2\underbrace{\boxed{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}}_{\text{协方差}}.$$

2. 定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

而

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

3. 说明

(1) X 和 Y 的相关系数又称为标准 协方差,它是一个无量纲的量.

(2) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$= E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$$
$$= 0.$$

(3) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = D(X) + D(Y).$$

4. 协方差的计算公式

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;

(2) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

证明 (1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$
$$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$(2) D(X+Y)=E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\}$$

$$=E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y)]^2\}$$

$$=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}$$

$$+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

5. 性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$, a,b 为常数;

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

相关系数的定义

$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差,记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

称 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时，表明 X,Y 的线性关系联系较紧密.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时,X,Y 线性相关的程度较差.

当 $\rho_{XY}=0$ 时,称 X 和 Y 不相关.

相关系数定理

(1) $|\rho_{XY}|\le 1$.

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是：存在常数 a,b 使

$$P\{Y=a+bX\}=1.$$

注意

(1) 不相关与相互独立的关系

相互独立 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 不相关

(2) 不相关的充要条件

1° X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$;

2° X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

3° X,Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$.

例 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

解 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\quad u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi},$$

故有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

于是 $\quad\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

矩，协方差矩阵

设 X 和 Y 是随机变量,若 $E(X^k),\quad k=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k 阶原点矩,简称 k 阶矩.

若 $\quad E\{[X-E(X)]^k\},\quad k=2,3,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k 阶中心矩.

若 $\quad E(X^kY^l),\quad k,l=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

若 $\quad E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\ k,l=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$

$$i,j=1,2,\cdots,n$$

都存在,则称矩阵

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的协方差矩阵.

例如　二维随机变量 (X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

其中　$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\}$,

$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$,

$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\}$,

$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$.

由于 $c_{ij} = c_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵 .

协方差矩阵的应用

协方差矩阵可用来表示多维随机变量的概率密度，从而可通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究

以二维随机变量 (X_1, X_2) 为例.

由于

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

引入矩阵 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$.

及 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

由此可得

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu)$$

$$= \frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

于是 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

推广

n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度可表示为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ E(X_2)\\ \vdots\\ E(X_n)\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}.$$

二、n 维正态变量的性质

1. n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 都是正态变量;

反之,若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是正态变量,且相互独立,则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态变量.

2. n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$ 服从一维正态分布(其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 不全为零).

3.若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布,设 $Y_1,\cdots,Y_k$ 是 $X_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的线性函数,则 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$ 也服从多维正态分布. 线性变换不变性

4.设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布,则"$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立"与"$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关"是等价的.

三、典型例题

例1 设随机变量 X 取非负整数值 $n\ge 0$ 的概率为 $p_n=\dfrac{AB^n}{n!}$,已知 $E(X)=a$,求 A 与 B 的值.

解 因为 p_n 是 X 的分布列,

$$\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}A\cdot\frac{B^n}{n!}=Ae^B=1,\quad 得A=e^{-B},$$

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}nA\cdot\frac{B^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\cdot B^n}{(n-1)!}=ABe^B=a,$$

因此 $A=e^{-a}$, $B=a$.

例2 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,求 $E[\min(|X|,1)]$.

解 $E[\min(|X|,1)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{|x|<1}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\ge1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{|x|\ge1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln2+\frac{1}{2}.$$

例3 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & 其他\end{cases}$

且 $Z=\cos(X+Y)$,求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos2x-\cos(\pi+2x)]\mathrm{d}x=0,$$

$D(Z)=E(Z^2)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^3 x-\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}.$$

例4 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{1}{2}xy), & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 (X,Y) 的协方差矩阵及相关系数.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},$

因为 $E(Y)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{8}{7},$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

于是 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{23}{490} & -\frac{1}{147}\\ -\frac{1}{147} & \frac{46}{147}\end{pmatrix}.$

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{\sqrt{15}}{69}.$

备用例题

例 已知随机变量 X,Y 分别服从 $N(1,3^2),N(0,4^2)$, $\rho_{XY}=-1/2$, 设 $Z=X/3+Y/2$.

(1) 求 Z 的数学期望和方差.

(2) 求 X 与 Z 的相关系数.

解 (1)由 $E(X)=1, D(X)=9, E(Y)=0, D(Y)=16.$

得 $E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)$

$$=\frac{1}{3}.$$

$$D(Z)=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2\mathrm{Cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=1+4-2=3.$$

(2) $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3-3=0.$$

故 $\rho_{XY}=\mathrm{Cov}(X,Z)\big/(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)})=0.$