

设 Y_n 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,

伯努利大数定理给出了当n很大时,A发生的频率 $\frac{Y_n}{n}$

依概率收敛于A的概率这一结论,证明了频率的稳定性。

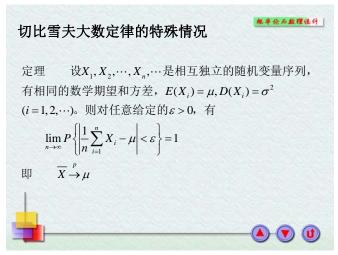
p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数

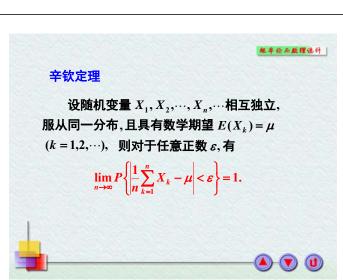
伯努利大数定律

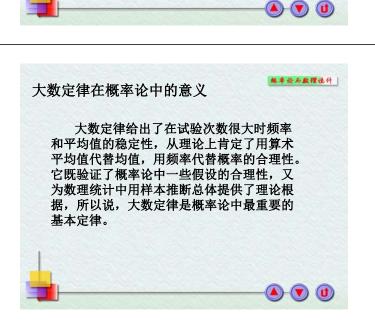
 $\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{Y_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$

 $\varepsilon > 0$, 有

概率论与数理统计







中心极限定理



实例: 考察射击命中点与靶心距离的偏差.

这种偏差是大量微小的偶然因素造成的微 小误差的总和,这些因素包括:瞄准误差、测量 误差、子弹制造过程方面 (如外形、重量等) 的 误差以及射击时武器的振动、气象因素(如风速、 风向、能见度、温度等)的作用,所有这些不同 因素所引起的微小误差是相互独立的,并且它们 中每一个对总和产生的影响不大.

问题: 某个随机变量是由大量相互独立且均匀 小的随机变量相加而成的,研究其概率分布情况.





概率论与数理说针

概率伦马数理统件 基本定理 定理一: 独立同分布的中心极限定理 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 服从 同一分布,且具有数学期望和方差: $E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 则随机变量之和的 标准化变量 $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma}$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \le x \right\}$$
$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

定理表明:

当 $n \to \infty$,随机变量序列 Y_n 的分布函数收敛于 标准正态分布的分布函 数.





概率伦马数理统计



规单论与数理说针 定理二(李雅普诺夫定理) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立,它 们具有数学期望和方差: $E(X_k) = \mu_k$, $D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0 \ (k = 1, 2, \dots)$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 ,$ 若存在正数 δ , 使得当 $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{B_{-}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E\{|X_{k} - \mu_{k}|^{2+\delta}\} \to 0,$

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{k} - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k}\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k}\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_{k} - \sum_{k=1}^{n} \mu_{k}}{B_{n}}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lim_{n \to \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \le x \right\}$$
$$= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mathcal{D}(x).$$





定理二表明:

无论各个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 服从什么 分布,只要满足定理的条件,那么它们的和 $\sum_{k=1}^{n} X_{k}$ 当n很大时,近似地服从正态分布.

(如实例中射击偏差服从正态分布)

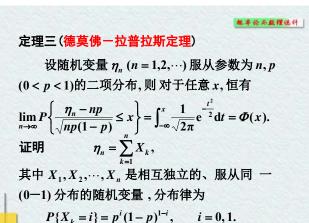
下面介绍的定理三是定理一的特殊情况.





概率伦马数理统计





(A)-(V) (II)

