

**1.1** 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是样本空间的事件, 把下列事件用  $A$ 、 $B$ 、 $C$  表示出来:

- (1)  $A$  发生; (2)  $A$  不发生, 但  $B$ 、 $C$  至少有一个发生;  
 (3) 三个事件恰有一个发生; (4) 三个事件中至少有两个发生;  
 (5) 三个事件都不发生; (6) 三个事件最多有一个发生;  
 (7) 三个事件不都发生。

**解** (1)  $A$ ;

$$(2) \overline{A}(BC + B\overline{C} + \overline{B}C) \text{ 或 } \overline{A}(B + C);$$

$$(3) A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C;$$

$$(4) ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC \text{ 或 } AB + AC + BC;$$

$$(5) \overline{A}\overline{B}\overline{C} \text{ 或 } \overline{A+B+C};$$

$$(6) A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} \text{ 或 } \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}\overline{B};$$

$$(7) \overline{ABC} \text{ 或 } \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}.$$

**1.2** 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去, 这 15 名新生中有 3 名是运动员, 问:

(1) 每个班级各分到 1 名运动员的概率是多少? (2) 3 名运动员被分到同一班级的概率是多少?

**解法一** 将 15 名新生平均分配到三个班级, 有  $C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$  种不同做法。

(1) 每个班级各有一名运动员, 相当于先将 3 个运动员分配到三个班级, 每班 1 个, 再将 12 个非运动员分配到三个班级, 每班 4 个, 有  $C_3^1 C_2^1 C_1^1 C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$  种不同做法, 所以,

$$P\{\text{每个班级各有一名运动员}\} = \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1 C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{3! C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{25}{91};$$

(2) 3 名运动员分到同一班级, 相当于先要确定分配到哪一个班级, 有 3 种不同选择, 然后将 3 个运动员分配到这个班级, 再从 12 个非运动员中任取 2 人分配到这个班级, 其余非运动员分配到其它两个班级, 每班 5 个, 有  $3C_3^3 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5$  种不同做法, 所以,

$$P\{3 \text{ 名运动员分到同一班级}\} = \frac{3C_3^3 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{6}{91}.$$

**解法二** 将 15 名新生平均分配到三个班级, 可以看作是有 15 个空位子, 每个班级各有 5 个空位子。从这 15 个空位子中任意选 3 个位子放运动员 (其余位子自然是放非运动员, 可不考虑), 共有  $C_{15}^3$  种不同做法。

(1) 每个班级各有一名运动员, 相当于从每个班级的 5 个空位子中任意选 1 个位子放运动员, 有  $C_5^1 C_5^1 C_5^1$  种不同做法, 所以,

$$P\{\text{每个班级各有一名运动员}\} = \frac{C_5^1 C_5^1 C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{25}{91};$$

(2) 3 名运动员分到同一班级, 相当于先要确定分配到哪一个班级, 有 3 种不同选择, 从这个班级的 5 个空位子中任意选 3 个位子放运动员, 有  $3C_5^3$  种不同做法, 所以,

$$P\{3 \text{ 名运动员分到同一班级}\} = \frac{3C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{6}{91}。$$

**1.3**  $A$ 、 $B$  是随机事件, 已知  $P(A) = a$ ,  $P(B) = b$ ,  $P(AB) = c$ , 求:

$$(1) P(\bar{A} + \bar{B}); \quad (2) P(\bar{A} \bar{B}); \quad (3) P(\bar{A}B); \quad (4) P(\bar{A} + B)。$$

**解** (1)  $P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - c$ ;

$$(2) P(\bar{A} \bar{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ = 1 - a - b + c;$$

$$(3) P(\bar{A}B) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = b - c;$$

$$(4) P(\bar{A} + B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = 1 - a + b - (b - c) = 1 - a + c。$$

**1.4** 向盛有  $n$  个球的器皿中投入一个白球, 如果器皿中原来的白球数从 0 到  $n$  是等可能的,, 现在再从器皿中取出一个球, 试问这个球为白球的概率是多少?

**解** 设  $A_i = \{\text{器皿中原来有 } i \text{ 个白球}\} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ , 因为已知器皿中原来的白球数从 0 到  $n$  是等可能的, 所以

$$P(A_i) = \frac{1}{n+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)。$$

设  $B = \{\text{取出一球, 恰好取到白球}\}$ 。当器皿中原来有  $i$  个白球时, 再投入 1 个白球, 器皿中就有  $i+1$  个白球, 这时取出一球, 恰好取到白球的概率是

$$P(B|A_i) = \frac{i+1}{n+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)。$$

由全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=0}^n P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i+1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n (i+1) \\ = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}。$$

**1.5** 无线通信中, 由于随机干扰, 当发出信号为“●”时, 收到信号为“●”、“不清”、“—”的概率分别为 0.7、0.2 和 0.1; 当发出信号为“—”时, 收到信号为“—”、“不清”、“●”的概率分别为 0.9、0.1 和 0. 如果整个发报过程中“●”、“—”出现的概率分别为 0.6 和 0.4, 当收到信号“不清”时, 原发信号是什么? 试加以推测.

**解** 设  $A = \{ \text{收到“不清”} \}$ ,  $B = \{ \text{发出“●”} \}$ ,  $\bar{B} = \{ \text{发出“—”} \}$ , 由题意可知,

$$P(B) = 0.6, \quad P(\bar{B}) = 0.4, \quad P(A|B) = 0.2, \quad P(A|\bar{B}) = 0.1, \quad \text{由贝叶斯公式, 得}$$

当原发信号为“●”时, 收到“不清”的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \frac{0.6 \times 0.2}{0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.1} = 0.75 ;$$

当原发信号为“—”时, 收到“不清”的概率为

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.75 = 0.25 .$$

因为  $P(B|A) = 0.75 > 0.25 = P(\bar{B}|A)$ , 所以收到“不清”时, 原发信号为“●”的可能性比较大。

**1.6** 设  $A, B, C$  相互独立, 试证  $A - B$  与  $C$  相互独立。

**证** 因为  $A, B, C$  相互独立, 有

$$\begin{aligned} P((A - B)C) &= P(AC - BC) = P(AC) - P(ABC) = P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= [P(A) - P(A)P(B)]P(C) = [P(A) - P(AB)]P(C) = P(A - B)P(C) , \end{aligned}$$

所以,  $A - B$  与  $C$  相互独立。

**1.7** 口袋中有 5 个球, 分别标有号码 1, 2, 3, 4, 5, 现从这口袋中任取 3 个球。

(1) 设  $\xi$  是取出球中号码的最大值, 求  $\xi$  的概率分布, 并求出  $\xi \leq 4$  的概率;

(2) 设  $\eta$  是取出球中号码的最小值, 求  $\eta$  的概率分布, 并求出  $\eta > 3$  的概率。

**解** (1) 从 5 个球中取 3 个球, 最大号码为  $k$ , 相当于先取 1 个号码为  $k$  的球, 再从号码小

于  $k$  的  $k - 1$  个球中取 2 个球, 所以  $P\{\xi = k\} = \frac{C_1^1 C_{k-1}^2}{C_5^3} = \frac{C_{k-1}^2}{10} \quad (k = 3, 4, 5) .$

由此求得  $\xi$  的概率分布为

$\xi$	3	4	5
$P\{\xi = x_i\}$	0.1	0.3	0.6

$$P\{\xi \leq 4\} = P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} = 0.1 + 0.3 = 0.4 ;$$

(2) 从 5 个球中取 3 个球, 最小号码为  $k$ , 相当于先取 1 个号码为  $k$  的球, 再从号码大于  $k$  的  $5-k$  个球中取 2 个球, 所以  $P\{\eta = k\} = \frac{C_1^1 C_{5-k}^2}{C_5^3} = \frac{C_{5-k}^2}{10} \quad (k=1, 2, 3)$ 。

由此求得  $\eta$  的概率分布为

$\eta$	1	2	3
$P\{\eta = y_j\}$	0.6	0.3	0.1

$P\{\eta > 3\} = 0$ 。

**1.8** 设随机变量  $\xi$ 、 $\eta$  都服从二项分布,  $\xi \sim b(2, p)$ ,  $\eta \sim b(3, p)$ 。已知  $P\{\xi \geq 1\} = \frac{5}{9}$ , 试求  $P\{\eta \geq 1\}$  的值。

**解** 由  $P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9}$  可解得  $1-p = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$ , 因为

$1-p > 0$ , 舍去负值, 得到  $1-p = \frac{2}{3}$ , 即有  $p = \frac{1}{3}$ 。

所以  $P\{\eta \geq 1\} = 1 - P\{\eta = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - (1-\frac{1}{3})^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ 。

**1.9** 某商店出售某种商品, 据以往经验, 月销售量服从普阿松分布  $P(3)$ 。问在月初进货时要库存多少此种商品, 才能以 99% 的概率充分满足顾客的需要。

**解** 设月初要进货  $a$  件,  $\xi$  是月销售量,  $\xi \sim P(3)$ 。要满足顾客需要, 必须有  $\xi \leq a$ , 根据题意, 要有

$$P\{\xi \leq a\} = \sum_{k=0}^a P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^a \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geq 0.99。$$

直接计算或查书后附录中普阿松分布的概率表, 可以求得:

$$\sum_{k=0}^7 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \approx 0.988 < 0.99, \quad \sum_{k=0}^8 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \approx 0.996 > 0.99。$$

由此可见, 月初至少要进货 8 件, 才能以 99% 以上的概率满足顾客的需要。

**1.10** 已知随机变量  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = Ae^{-|x|}$ ,  $(-\infty < x < +\infty)$ 。求:

(1) 系数  $A$ ; (2) 随机变量  $\xi$  落在区间  $(0, 1)$  内的概率; (3) 随机变量  $\xi$  的分布函数。

解 (1) 因为  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} A e^{-x} dx = 2A$ , 所以  $A = \frac{1}{2}$ ;

$$(2) P\{0 < \xi < 1\} = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-1}}{2} \approx 0.31606;$$

$$(3) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^x;$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-x}}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x};$$

即有

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$1.11 \text{ 设连续型变量 } \xi \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

求: (1) 系数  $A$ ; (2)  $\xi$  的概率密度  $\varphi(x)$ ; (3)  $P\{-0.3 < \xi < 0.7\}$ 。

解 (1) 因为  $\xi$  连续, 在  $x=1$ , 有  $F(1-0) = F(1)$ , 而  $F(1-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(1-\varepsilon)^2 = A$ ,

$F(1) = 1$ , 所以必有  $A = 1$ ;

$$(2) \varphi(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 0' = 0 & x < 0 \\ (x^2)' = 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1' = 0 & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 即有 } \varphi(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases};$$

$$(3) P\{-0.3 < \xi < 0.7\} = F(0.7) - F(-0.3) = 0.7^2 - 0 = 0.49.$$

1.12 修理某机器所需时间 (单位: 小时) 服从以  $\lambda = 1/2$  为参数的指数分布。试问:

(1) 修理时间超过 2 小时的概率是多少?

(2) 若已持续修理了 9 小时, 总共需要至少 10 小时才能修好的条件概率是什么?

解 设  $\xi$  是修理时间,  $\xi \sim E(\frac{1}{2})$ ,  $\xi$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$

$$(1) P\{\xi > 2\} = 1 - P\{\xi \leq 2\} = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-\frac{2}{2}}) = e^{-1} \approx 0.367879;$$

$$(2) P\{\xi > 10 | \xi > 9\} = \frac{P\{\xi > 10\}}{P\{\xi > 9\}} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{10}{2}})}{1 - (1 - e^{-\frac{9}{2}})} = \frac{e^{-\frac{10}{2}}}{e^{-\frac{9}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.606531.$$

**1.13** 某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩 (百分制) 近似服从正态分布  $N(72, \sigma^2)$ , 且 96 分以上占学生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 至 84 分之间的概率。

**解** 设  $\xi$  是学生外语成绩,  $\xi \sim N(72, \sigma^2)$ , 已知

$$P\{\xi > 96\} = 1 - \Phi\left(\frac{96 - 72}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.023,$$

即有  $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.977$ , 查表得  $\frac{24}{\sigma} = 1.9954$ ,  $\sigma = \frac{24}{1.9954} \approx 12$ , 于是有

$$\begin{aligned} P\{60 \leq \xi \leq 84\} &= \Phi\left(\frac{84 - 72}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 72}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{84 - 72}{12}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 72}{12}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - 1 + \Phi(1) = 0.8413 - 1 + 0.8413 = 0.6826. \end{aligned}$$

**1.14** 设  $\xi \sim N(0, 1)$ . 求: (1)  $\eta = 2\xi^2 + 1$  的概率密度; (2)  $\eta = |\xi|$  的概率密度.

**解** 因为  $\xi \sim N(0, 1)$ ,  $\xi$  的概率密度为  $\varphi_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

(1) 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $y = f(x) = 2x^2 + 1$  严格单调下降, 反函数为  $x = f_1^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$ ,

$$y \in (1, +\infty), \quad \frac{d}{dy} f_1^{-1}(y) = \left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{2(y-1)}}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \begin{cases} \varphi_{\xi}(f_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} f_1^{-1}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y-1}{2}})^2}{2}} \left| \frac{-1}{2\sqrt{2(y-1)}} \right| & y \in (1, +\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \leq 1 \end{cases}; \end{aligned}$$

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y = f(x) = 2x^2 + 1$  严格单调上升, 反函数为  $x = f_2^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$ ,

$$y \in (1, +\infty), \quad \frac{d}{dy} f_2^{-1}(y) = \left( \sqrt{\frac{y-1}{2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{2(y-1)}}.$$

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} f_2^{-1}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y-1}{2}})^2}{2}} \left| \frac{1}{2\sqrt{2(y-1)}} \right| & y \in (1, +\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \leq 1 \end{cases};$$

$$\varphi_\eta(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \leq 1 \end{cases};$$

(2) 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $y = f(x) = |x|$  严格单调下降, 反函数为  $x = f_1^{-1}(y) = -y$ ,

$$y \in (0, +\infty), \quad \frac{d}{dy} f_1^{-1}(y) = (-y)' = -1.$$

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} f_1^{-1}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y)^2}{2}} |-1| & y \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases};$$

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y = f(x) = |x|$  严格单调上升, 反函数为  $x = f_2^{-1}(y) = y$ ,

$$y \in (0, +\infty), \quad \frac{d}{dy} f_2^{-1}(y) = y' = 1.$$

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \varphi_\xi(f_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} f_2^{-1}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} |1| & y \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases};$$

$$\varphi_{\eta}(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

**1.15** 袋中有 5 只乒乓球，编号为 1, 2, 3, 4, 5。现从中任取 3 只乒乓球，乒乓球的最大编号的数学期望。

**解** 从 5 个球中任取 3 个球，共有  $C_5^3$  种取法。取到球的最大号码为  $i$ ，最小号码为  $j$ ，

相当于先取 1 个号码为  $i$  的球和 1 个号码为  $j$  的球，再从号码小于  $i$  大于  $j$  的  $i-j-1$  个球中

取 1 个球，有  $C_1^1 C_{i-j-1}^1 C_1^1$  种取法。所以  $(\xi, \eta)$  的联合概率分布为

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = \frac{C_1^1 C_{i-j-1}^1 C_1^1}{C_5^3} = \frac{C_{i-j-1}^1}{10} \quad (i = 3, 4, 5; \quad j = 1, 2, 3).$$

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
3	$\frac{1}{10}$	0	0
4	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	0
5	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

**1.16** 设二维随机变量  $(\xi, \eta)$  的联合分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C + \arctan \frac{y}{3})$$

求: (1)  $A, B, C$  的值; (2)  $(\xi, \eta)$  的联合概率密度函数; (3) 边缘分布函数及边缘概率密度函数.

**解** (1) 由二维随机变量分布函数的性质可知

$$\begin{cases} 0 = F(-\infty, +\infty) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) & (1) \\ 0 = F(+\infty, -\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2}) & (2) \\ 1 = F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) & (3) \end{cases}$$

$$\text{由 (3) 得} \quad A = \frac{1}{(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})} \quad (4)$$



$$(4) \text{ 代入 (1) 得 } 0 = \frac{(B - \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})}{(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})} = \frac{B - \frac{\pi}{2}}{B + \frac{\pi}{2}}, \text{ 解得 } B = \frac{\pi}{2};$$

$$(4) \text{ 代入 (2) 得 } 0 = \frac{(B + \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2})}{(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})} = \frac{C - \frac{\pi}{2}}{C + \frac{\pi}{2}}, \text{ 解得 } C = \frac{\pi}{2};$$

再将  $B = \frac{\pi}{2}$  和  $C = \frac{\pi}{2}$  代入 (4), 求得  $A = \frac{1}{\pi^2}$ 。

$(\xi, \eta)$  的联合分布函数为  $F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2}) (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3})$ 。

(2)  $(\xi, \eta)$  的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 + (\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{y}{3})^2} = \frac{6}{\pi^2 (x^2 + 4)(y^2 + 9)}。$$

(3)  $\xi, \eta$  的边缘分布函数为

$$F_{\xi}(x) = F(x, +\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2}, \quad F_{\eta}(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{3};$$

$\xi, \eta$  的边缘概率密度为

$$\varphi_{\xi}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)}, \quad \varphi_{\eta}(y) = \frac{d}{dy} F_{\eta}(y) = \frac{3}{\pi(y^2 + 9)}。$$

**1.17** 设随机变量  $\xi$  与  $\eta$  独立,  $\xi$  服从  $[0, 2]$  上的均匀分布,  $\eta$  服从指数分布  $E(2)$ , 求: (1)

二维随机变量  $(\xi, \eta)$  的联合密度函数; (2)  $P\{\xi \leq \eta\}$  的值。

**解** (1) 由  $\xi \sim U(0, 2)$ , 可知  $\varphi_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases};$

由  $\eta \sim E(2)$ , 可知  $\varphi_{\eta}(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases};$

因为  $\xi, \eta$  相互独立, 所以  $(\xi, \eta)$  的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \varphi_{\xi}(x)\varphi_{\eta}(y) = \begin{cases} e^{-2y} & 0 \leq x < 2, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases};$$

$$(2) \quad P\{\xi \leq \eta\} = \iint_{x \leq y} \varphi(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_x^{+\infty} e^{-2y} dy dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-2y} dx = \frac{1 - e^{-4}}{4}$$

**1.18** 已知  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的分布分别为

$\xi_1$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\xi_2$	0	1
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且  $P\{\xi_1 \xi_2 = 0\} = 1$ . (1) 求  $\xi_1$  与  $\xi_2$  的联合概率分布; (2) 问  $\xi_1$  与  $\xi_2$  是否独立;

(3) 求  $\max(\xi_1, \xi_2)$  的概率分布.

**解** (1) 由  $P\{\xi_1 \xi_2 = 0\} = 1$  可知  $P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} = P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} = 0$ .

得到  $(\xi_1, \xi_2)$  的联合概率分布如下:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	$P\{\xi_1 = x_i\}$
-1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
$P\{\xi_2 = y_j\}$	1/2	1/2	1

(2) 因为  $P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P\{\xi_1 = -1\}P\{\xi_2 = 0\}$ , 所以  $\xi_1, \xi_2$  不独立;

(3) 因为  $P\{\zeta = 0\} = P\{\max(\xi_1, \xi_2) = 0\} = P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 0\}$

$$= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, \quad P\{\zeta = 1\} = 1 - P\{\zeta = 0\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

所以  $\zeta = \max(\xi_1, \xi_2)$  的概率分布为

$\zeta$	0	1
$P\{\zeta = z_k\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

**1.19** 某工厂生产的一种产品，其寿命  $\xi$ （以年为单位）服从指数分布  $E\left(\frac{1}{4}\right)$ 。工厂规定售出产品在一年内损坏可以调换。已知售出一个产品若在一 年内不损坏，工厂可获利 100 元，若在一 年内损坏，调换一个产品，工厂净损失 300 元。试求该厂售出一个产品平均可获利多少元？

**解法一** 设  $\eta$  为该厂售出一个产品的获利。

$$\eta = f(\xi) = \begin{cases} -300 & \text{当 } \xi \leq 1 \text{ 时} \\ 100 & \text{当 } \xi > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

因为  $\xi \sim E\left(\frac{1}{4}\right)$ ，所以  $\xi$  的概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 。

$$\begin{aligned} E\eta &= Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 (-300) \times \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx + \int_1^{+\infty} 100 \times \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx \\ &= -300(1 - e^{-\frac{1}{4}}) + 100e^{-\frac{1}{4}} = -300 + 400e^{-\frac{1}{4}} \approx 11.52 \end{aligned}$$

**解法二** 设  $\eta$  为该厂售出一个产品的获利。

$$P\{\eta = -300\} = P\{\xi \leq 1\} = \int_{-\infty}^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = 1 - e^{-\frac{1}{4}},$$

$$P\{\eta = 100\} = P\{\xi > 1\} = \int_1^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx = e^{-\frac{1}{4}},$$

$\eta$  的概率分布为

$\eta$	-300	100
$P\{\eta = y_j\}$	$1 - e^{-\frac{1}{4}}$	$e^{-\frac{1}{4}}$

$$\text{所以 } E\eta = \sum_{j=1}^2 y_j P\{\eta = y_j\} = -300(1 - e^{-\frac{1}{4}}) + 100e^{-\frac{1}{4}} = -300 + 400e^{-\frac{1}{4}} \approx 11.52 \text{。}$$

1.20 设随机变量  $\xi$  的分布为

$\xi$	-2	0	2
$P$	0.4	0.3	0.3

求  $E\xi$ ;  $D\xi$ ;  $E(\xi^2 + 2)$  的值.

解

$$E\xi = -2 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2$$

$$E\xi^2 = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2.8 - (-0.2)^2 = 2.76$$

$$E(\xi^2 + 2) = E\xi^2 + 2 = 4.8$$

1.21 已知二维随机变量的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

求  $E\xi$ ,  $E\eta$ ,  $E(\xi\eta)$ 。

$$\text{解 } E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 x \frac{1}{8}(x+y) dy = \int_0^2 \frac{x}{8}(2x+2) dx = \frac{7}{6};$$

$$\text{同理可得 } E\eta = \frac{7}{6};$$

$$E(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 xy \frac{1}{8}(x+y) dy = \int_0^2 \frac{x}{8}(2x + \frac{8}{3}) dx = \frac{4}{3}.$$

1.22 设  $(\xi, \eta)$  的联合分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

(1) 求  $E\xi$ ;  $E\eta$ ;  $Cov(\xi, \eta)$ ;  $\rho_{\xi\eta}$  的值;

(2) 问  $\xi$  与  $\eta$  是否独立?

**解** (1) 因为  $\xi, \eta$  的联合概率分布和边缘概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	$P\{\xi = x_i\}$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$P\{\eta = y_j\}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

所以

$$E\xi = \sum_{i=1}^2 x_i P\{\xi = x_i\} = 1 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$E\eta = \sum_{j=1}^4 y_j P\{\eta = y_j\} = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(\xi \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 x_i y_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

$$= 1 \times (0 \times 0 + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times 0) + 3 \times (0 \times \frac{1}{8} + 1 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{8}) = \frac{9}{4},$$

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi \eta) - E\xi E\eta = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 0,$$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} = \frac{0}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} = 0.$$

(2) 因为

$$P\{\xi = 1\}P\{\eta = 0\} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} \neq 0 = P\{\xi = 1, \eta = 0\},$$

所以,  $\xi$  与  $\eta$  并不相互独立。

**1.23** 设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  为独立随机变量, 且  $\xi_1 \sim U(0, 6)$ ,  $\xi_2 \sim N(0, 4)$ ,  $\xi_3 \sim E(3)$ , 求  $\eta = \xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3$  的数学期望与方差。

**解** 因为  $\xi_1 \sim U(0, 6)$ , 所以  $E\xi_1 = \frac{0+6}{2} = 3$ ,  $D\xi_1 = \frac{(6-0)^2}{12} = 3$ ;

因为  $\xi_2 \sim N(0, 4)$ , 所以  $E\xi_2 = 0$ ,  $D\xi_2 = 4$  ;

因为  $\xi_3 \sim E(3)$ , 所以  $E\xi_3 = \frac{1}{3}$ ,  $D\xi_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$  。

所以有

$$E(\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3) = E\xi_1 - 2E\xi_2 + 3E\xi_3 = 3 - 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{3} = 4 ;$$

又因为  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  相互独立, 所以有

$$D(\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3) = D\xi_1 + 2^2 D\xi_2 + 3^2 D\xi_3 = 3 + 4 \times 4 + 9 \times \frac{1}{9} = 20 。$$

**1.24** 设  $\{\xi_n\}$  是独立同分布序列,  $P\{\xi_k = \pm \log k\} = \frac{1}{2}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $k$  为大于零的常数, 试

证明  $\{\xi_n\}$  满足大数定理。

**解**  $\{\xi_n\}$  是独立同分布随机变量序列,  $E\xi_k = \frac{1}{2} \log k + \frac{1}{2}(-\log k) = 0$ , 数学期望有限, 满足辛钦大数定理的条件, 可应用辛钦大数定理。

**1.2.5** 一复杂系统, 由多个相互独立作用的部件组成, 在运行期间, 每个部件损坏的概率都是 0.1, 为了使整个系统可靠地工作, 必须至少有 88% 的部件起作用。

(1) 已知系统中共有 900 个部件, 求整个系统的可靠性 (即整个系统能可靠地工作的概率)。

(2) 为了使整个系统的可靠性达到 0.99, 整个系统至少需要由多少个部件组成?

**解** 设  $\xi$  是起作用的部件数,  $\xi \sim b(n, p)$ , 当  $n$  比较大时, 近似有  $\xi \sim N(np, npq)$ 。

(1)  $n = 900$ ,  $p = 0.9$ ,  $q = 1 - p = 0.1$ ,  $np = 810$ ,  $npq = 81$ 。

整个系统要能可靠地工作, 至少要有  $n \times 88\% = 900 \times 88\% = 792$  个部件起作用, 所以, 这时系统能可靠地工作的概率等于

$$P\{792 \leq \xi \leq 900\} \approx \Phi\left(\frac{900 - 792}{\sqrt{81}}\right) - \Phi\left(\frac{792 - 810}{\sqrt{81}}\right) = \Phi(12) - \Phi(-2) \approx 0.9772 ;$$

(2) 设至少需要  $n$  个部件,  $np = 0.9n$ ,  $npq = 0.09n$ 。

这时系统能可靠地工作的概率等于

$$\begin{aligned} P\{0.88n \leq \xi \leq n\} &\approx \Phi\left(\frac{n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) - \Phi\left(\frac{0.88n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \end{aligned}$$

( 因为本题中  $n$  很大,  $\frac{\sqrt{n}}{3}$  的值远远超过了 4, 所以可以认为  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \approx 1$  ) 。

要  $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{15}) \geq 0.99$  , 查表可得  $\frac{\sqrt{n}}{15} \geq 2.3263$  , 即  $n \geq (2.3263 \times 15)^2 \approx 1218$  ,

即如果整个系统可靠性要达到 0.99 , 它至少需要由 1218 个部件组成。

**1.26** 保险公司接受多种项目的保险, 其中有一项是老年人寿保险, 若一年中有 100000 人参加这项保险, 每人每年需付保险费 20 元, 在此类保险者里, 每个人死亡的概率是 0.002 , 死亡后家属立即向保险公司领得 8000 元。若不计保险公司支出的管理费, 试求:

- (1) 保险公司在此项保险中亏本的概率;
- (2) 保险公司在此项保险中获益 80000 元以上的概率。

**解** 设  $\xi$  是死亡的人数,  $\xi \sim b(n, p)$  ,  $n = 100000$  ,  $p = 0.002$  ,  $q = 1 - p = 0.998$  。近

似有  $\xi \sim N(np, npq)$  ,  $np = 100000 \times 0.002 = 200$  ,  $npq = 200 \times 0.998 = 199.6$  。

保险公司的净获益为  $20 \times 100000 - 8000\xi$  。

(1) 当  $20 \times 100000 - 8000\xi < 0$  , 即  $\xi > 250$  时, 保险公司在此项保险中亏本, 其概率为

$$P\{\xi > 250\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 200}{\sqrt{199.6}}\right) \approx 1 - \Phi(3.539) \approx 0.0002 ;$$

(2) 若要  $20 \times 100000 - 8000\xi > 80000$  , 必须有  $\xi < 240$  , 这时, 概率为

$$P\{\xi < 240\} \approx \Phi\left(\frac{240 - 200}{\sqrt{199.6}}\right) \approx \Phi(2.831) \approx 0.9977 。$$