ESAIP

Rapport optimisation multicritère

Majeur IA

Mathis Herbreteau - Mathias Le Pottier - Samuel Pasquier
13/12/2025

Table des matières

Ce projet a été réalisé avec l'aide d'IA.

Contexte et objectifs

Dans un environnement financier moderne caractérisé par l'incertitude des marchés et la complexité des corrélations entre actifs, la gestion de portefeuille ne se résume plus à la simple maximisation des gains. Un investisseur rationnel doit arbitrer en permanence entre la recherche de performance et la maîtrise du risque.

Cependant, l'approche théorique classique se heurte souvent à la réalité opérationnelle. En pratique, la construction d'un portefeuille est soumise à des frictions de marché inévitables : les coûts de transaction qui érodent la rentabilité lors des réallocations, les contraintes de cardinalité limitant le nombre d'actifs gérables, et l'instabilité statistique des données historiques. Ces éléments transforment le problème d'allocation en un défi d'optimisation multicritère, souvent non linéaire et non convexe.

L'objectif principal de ce projet est de modéliser et de résoudre ce problème d'optimisation complexe en adoptant une démarche progressive. Il s'agit de développer un outil d'aide à la décision capable de proposer des allocations optimales en tenant compte de multiples dimensions antagonistes :

- Maximiser le rendement attendu du portefeuille.
- Minimiser le risque global, mesuré par la variance.
- Intégrer les contraintes réalistes liées aux coûts et à la structure du portefeuille.

Présentation globale de la méthode utilise

Partie 1 – Modèle classique

Dans le cadre de la première étape du projet, nous devons résoudre un problème d'optimisation bi-objectif de Markowitz. Pour ce faire, nous utilisons la descente de gradient projeté ainsi qu'une technique de scalarisation linéaire.

Notre objectif est de tracer la frontière efficiente de Pareto et donc d'avoir l'ensembles des portefeuilles optimaux.

Notre algorithme se divise en 4 parties :

- Nous utilisons dans un premier temps la scalarisation linéaire pour transformer notre problème multicritère en une suite de problème mono-objectif. Nous avons donc défini une fonction de perte globale L qui est une combinaison linéaire des 2 objectifs.

- La seconde partie est la descente de gradient. Pour un α donné nous minimisons la fonction L en suivant la direction opposée de son gradient. Les poids du portefeuille sont mis à jour à chaque itération

- La troisième partie est la projection sur le Simplexe. Cette partie est importante car nous avons la contrainte de l'interdiction de vente à découverts or après chaque pas du gradient cette contrainte n'est généralement plus respectée. Faire une projection sur le Simplexe permet de résoudre ce problème.

- La dernière partie est notre stratégie d'optimisation « Warm Start ». Cette stratégie nous permet de construire la frontière efficiente complète. Son fonctionnement est qu'à chaque étape, le portefeuille optimal trouver à l'étape précédente est utilisée comme point de départ au lieu de redémarrer à partir d'une allocation aléatoire. Comme la frontière est continue, la solution optimale pour une étape est généralement proche de la solution optimale de l'étape précédente. Cette technique réduit considérablement le nombre d'itérations nécessaires pour converger vers le minimum global à chaque pas.

Cette approche nous parait être la meilleure car on contrôle la dynamique d'optimisation comme le pas de gradient ou encore le nombre d'itération. Elle permet également une bonne gestion des contraintes avec la méthode de projection sur le Simplexe car elle garantit que nous respectons strictement les contraintes sans accumuler d'erreur.

Partie 2.1 – Monte Carlo

Pour résoudre le problème d'optimisation de portefeuille de "Niveau 2", nous avons opté pour une approche par Simulation de Monte Carlo. L'objectif est de construire une approximation du front de Pareto tridimensionnel en maximisant le rendement tout en minimisant le risque et les coûts de transaction, sous des contraintes opérationnelles strictes (notamment la cardinalité K).

Cette méthode stochastique repose sur l'exploration aléatoire de l'espace des solutions. Le processus itératif, implémenté en Python, suit les étapes suivantes pour chaque simulation :

- Génération aléatoire d'un vecteur poids.
- Application de la contrainte de cardinalité, qui ne conserve que les K actifs les plus significatifs et renormalise les poids pour que la somme soit égale à 1.
- Calcul simultané des trois fonctions objectives pour le portefeuille validé : le rendement attendu, la variance (risque) et les coûts de transaction par rapport au portefeuille initial.

Nous avons utilisé cette simulation car la nature du problème est non-convexe.

Partie 2.2 – Algorithme génétique NSGA2 :

Dans le cadre de la deuxième étape du projet, nous résolvons un problème d'optimisation tri-objectif intégrant des contraintes opérationnelles : on ajoute la cardinalité du portefeuille et les coûts de transaction. Pour ce faire, nous utilisons l'algorithme génétique NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II).

Notre objectif est de construire un front de Pareto tridimensionnel représentant l'ensemble des portefeuilles optimaux au sens de Pareto.

Architecture de l'algorithme NSGA-II

1. Initialisation de la population

Nous utilisons un échantillonnage respectant la contrainte de cardinalité. Pour chacun des 100 individus de la population : Nous sélectionnons aléatoirement un certain nombre d'actif, puis on génère des poids positifs pour ces actifs via une distribution de Dirichlet. Cette stratégie permet de démarrer l'optimisation dans la région réalisable du problème, accélérant ainsi la convergence.

2. Évaluation des objectifs

Pour chaque individu (portefeuille), nous calculons simultanément les trois objectifs : Le rendement espéré, la variance du portefeuille ainsi que les coûts de transaction par rapport au portefeuille actuel. Les contraintes sont également évaluées et on pénalise fortement les solutions non conformes.

3. Tri non-dominé et préservation de la diversité

NSGA-II classe les individus en plusieurs fronts de Pareto :

- **Front 1** : Solutions non dominées par aucune autre
- **Front 2** : Solutions dominées uniquement par celles du Front 1
- Et ainsi de suite pour les Front suivant.

Au sein de chaque front, un mécanisme de crowding distance privilégie les solutions situées dans les régions moins denses de l'espace des objectifs, garantissant une bonne distribution du front de Pareto final.

4. Opérateurs génétiques

L'évolution de la population repose sur deux opérateurs principaux :

- **Le Croisement (SBX - Simulated Binary Crossover)** combine deux parents pour créer des enfants, avec un paramètre contrôlant la dispersion et l'évolution est appliqué avec une probabilité de 90%.
- **La Mutation polynomiale (PM)** introduit des variations aléatoires dans les poids. Cela nous permet d'explorer de nouvelles régions de l'espace des solutions.

5. Sélection et itération

À chaque génération :

1. Une population enfant est créée via croisement et mutation
2. Les populations parent et enfant sont fusionnées
3. Le tri non-dominé est appliqué sur cette population combinée
4. Les meilleurs individus sont sélectionnés pour former la nouvelle génération

Ce processus est répété pendant le nombre de générations souhaités.

Sélection du portefeuille optimal

Une fois le front de Pareto construit, nous faisons la sélection en suivant les trois paramètres :

1. **Filtrage par contrainte de rendement** : Nous retenons uniquement les solutions satisfaisant le rendement minimal exigé par l'investisseur.
2. **Filtrage par tolérance au risque :** Parmi les solutions restantes, nous isolons un sous-ensemble de portefeuilles, on conserve toutes les solutions dont le risque est le plus proche d'un minimum (dans une marge de tolérance définie de 20%)

3. **Minimisation des coûts** : Au sein de ce groupe de solutions à risque quasi-équivalent, nous sélectionnons celle qui engendre les coûts de transaction les plus faibles.

Cette approche en "entonnoir" permet de garantir l'obtention d'un portefeuille respectant les exigences de rendement et de cardinalité, tout en réalisant un choix entre la protection du capital (risque) et l'économie de frais (coût).

Formalisation Mathématique du Problème

Dans cette partie de notre rapport, nous allons formaliser notre problème en comparant les différentes fonctions objectives ainsi que les conditions qu'elle doive respecter.

Partie 1 : Modèle Classique

Cette première étape correspond à l'optimisation bi-objectif standard rendement-risque sans contraintes opérationnelles complexes.

Fonctions Objectifs Actives

Le problème cherche à minimiser simultanément deux fonctions antagonistes :

1- **Maximisation du Rendement (Minimisation de l'opposé) :**

$$\boldsymbol{f_1(w) = -w^T \mu}$$

Où μ est le vecteur des rendements espérés.

2- **Minimisation du Risque (Variance) :**

$$\boldsymbol{f_2(w) = w^T \Sigma w}$$

Où ∑ est la matrice de covariance des rendements.

Contraintes Associées ou Contrainte de base :

1- **Contrainte de budget (Égalité linéaire) :**

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N} w_i = 1}$$

Le capital doit être entièrement investi.

2- **Contrainte de positivité (Inégalité linéaire) :**

$$\boldsymbol{w_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}}$$

Aucun poids ne peut être négatif.

Nature du problème Justification Mathématique :

Nature : Problème Convexe et Continu

Justification :

1- **Convexité de la fonction de rendement $\mathbf{f_1}$:**

La fonction $f_1(w)$ est linéaire. Sa matrice Hessienne est nulle :

$$\nabla^2 f_1(w) = 0$$

Une fonction linéaire est par définition à la fois convexe et concave.

2- **Convexité de la fonction de Risque $\mathbf{f_2}$:**

Pour prouver la convexité du risque, on calcule la Hessienne

$$\nabla f_2(w) = 2\sum w$$

$$\nabla^2 f_2(w) = 2\sum$$

La matrice de covariance $\sum$ est par définition symétrique et semi-définie positive (pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, la variance $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\sum \boldsymbol{v}$ est $\geq \mathbf{0}$). Par conséquent, la Hessienne est semi-définie positive, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que soit f_2 convexe sur $\mathbb{R}^N$.

3- **Convexité du domaine (Contraintes) :**

Les contraintes C_{Base} sont linéaires. L'intersection d'ensembles convexes étant convexe, l'ensemble des solutions admissibles sont donc convexe.

Conclusion pour la partie 1 : On minimise une somme de fonctions convexes sur un ensemble convexe. Le problème est Convexe. Un minimum local est donc forcément le minimum global (optimum absolu).

Partie 2 : Modèle avec Coûts et Cardinalité :

Cette étape introduit une troisième fonction objective et une contrainte de cardinalité

1- **Minimisation des Coûts de Transaction :**

$$\boldsymbol{f_3(w)} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{c_{prop}}|\boldsymbol{w_i} - \boldsymbol{w_{t,i}}|$$

Ou $\boldsymbol{w_t}$ est le portefeuille courant et $\boldsymbol{c_{prop}}$ le coût unitaire d'une transaction

2- **Contrainte de Cardinalité**

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \mathbb{I}(\boldsymbol{w_i} > \ \boldsymbol{\delta_{tol}}) = \boldsymbol{K}$$

Le nombre d'actifs actifs (dépassant le seuil $\boldsymbol{\delta_{tol}}$) doit être exactement égal à l'entier $\boldsymbol{K}$.

Nature du problème et Justification Mathématique

Nature : Problème Non-Convexe, Mixte.

Justification :

1- **Non-différentiabilité de $\boldsymbol{f_3}$** : La fonction valeur absolue utilisée dans $\boldsymbol{f_3}$ est convexe mais n'est pas dérivable en 0.

2- **Non-convexité de la contrainte de Cardinalité** : La fonction indicatrice introduit une discontinuité fondamentale. L'ensemble admissible défini par la cardinalité n'est pas convexe.

Supposons $N = 2$ actifs et on impose une cardinalité $K = 1$.

- Soit le portefeuille $A = (1, 0)^T$. Il respecte $K = 1$.
- Soit le portefeuille $B = (0, 1)^T$. Il respecte $K = 1$.
- Prenons une combinaison linéaire convexe (le milieu) : $A = 0.5A + 0.5B = (0.5, 0.5)^T$.
- Pour le portefeuille C, le nombre d'actifs actifs est de 2. Or, la contrainte impose $K = 1$.
- C n'est pas dans l'ensemble admissible. L'ensemble n'est donc pas convexe.

3- **Aspect "Mixte" (Variables entières)** : Pour résoudre la contrainte $\mathbb{I}(w_i > \delta_{tol})$, on doit mathématiquement introduire des variables binaires telles que $y_i \in \{0, 1\}$:

$$w_i \geq y_i \,\&\, w_i > \delta_{tol} * y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = K$$

Cela transforme le problème continu en un problème à variables mixtes (réelles pour les poids w_i, entières pour y_i).

Conclusion Partie 2 : L'ajout de la cardinalité rend le problème NP-difficile. Les méthodes classiques de descente de gradient ne fonctionnent plus directement (risque de blocage dans des optima locaux).

Comparaison des résultats

Afin d'évaluer nos deux approches de manière équivalente, nous avons commencé par figer des paramètres pour effectuer nos tests. Nous avons défini le nombre maximal d'actifs à K = 10 et le coût de transaction à 0.5%.

Nous avons décidé de relever six métriques pour comparer nos deux approches :

1- **Durée du calcul** : Le temps mis par chaque méthode pour calculer le front de Pareto est un bon indicateur pour évaluer la

2- **L'Hypervolume** : Métrique standard synthétisant à la fois la convergence (qualité) et la diversité des solutions du front de Pareto.
3- **Le Sharpe moyen :** Indique la qualité du portefeuille retenu par notre modèle.
4- **Le Rendement :** Indique le rendement optimal du portefeuille retenu satisfaisant la condition du rendement minimal.
5- **Le Risque :** Indique le risque du portefeuille retenu, représente la variance des actifs sur lesquels on investit.
6- **Le Coût :** Le coût nécessaire à l'obtention de ce portefeuille.

Montecarlo

Pour l'approche Monte Carlo, nous avons généré 20 000 portefeuilles aléatoires et affiché le front de Pareto en 3D sur l'application streamlit et en 2D afin de pouvoir le comparer au front de pareto obtenu avec l'approche NSGA-II.

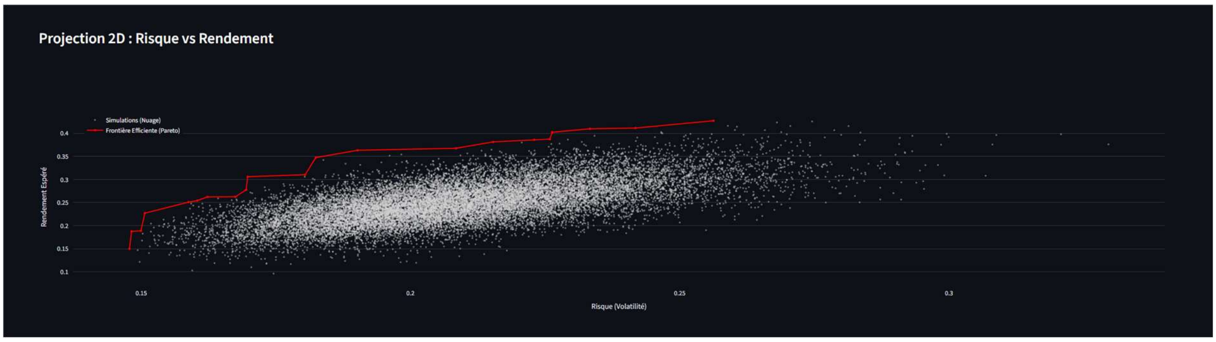

Figure 1 Front de Pareto (Montecarlo)

NSGA-II

Pour l'approche NGSA-II nous avons choisi de définir la taille de notre population à 400 individus et de les faire évoluer sur une durée de 500 générations. Voici le front de Pareto 2D obtenu :

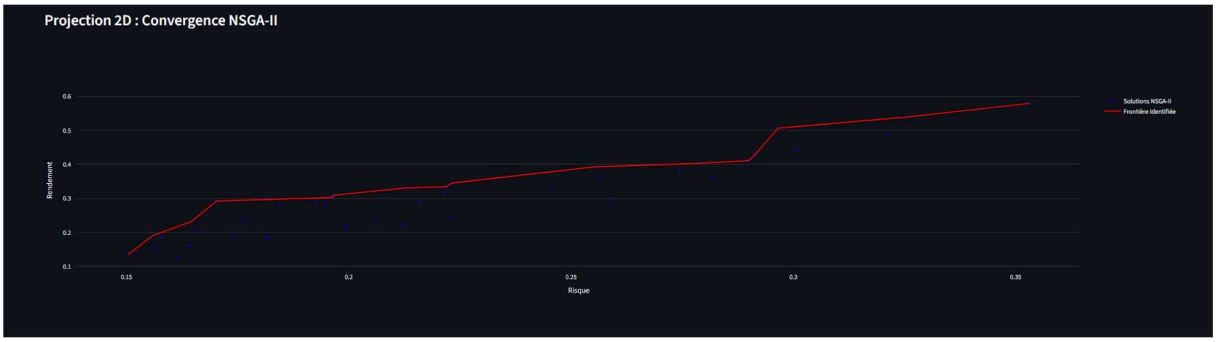

Figure 2 Front de Pareto (NSGA-II)

Tableau comparatif

	Montecarlo	NSGA-II
Durée du calcul	1.29 s	37.66 s
Hypervolume	1.1273	0.7434
Sharpe moyen	1.195	1.365
Rendement	30.56	39.24%
Risque	17.23	21.67%
Coût	0.95	0.95

Analyse

L'analyse révèle une différence notable entre les deux méthodes. Monte Carlo est meilleur par sa rapidité (1.29s) et sa capacité à explorer grossièrement l'espace des solutions, ce qui explique son Hypervolume élevé (1.12) dû à une grande dispersion des points. Cependant, NSGA-II, bien que plus lent (37.66s), démontre sa supériorité qualitative : son Ratio de Sharpe moyen plus élevé (1.365

contre 1.195) prouve qu'il converge vers des solutions plus efficientes. Là où Monte Carlo nous donne une "carte" globale du terrain, NSGA-II nous guide précisément vers les sommets les plus hauts (meilleurs rendements trouvés), justifiant son coût en temps de calcul pour un investisseur cherchant l'optimalité réelle.

Le meilleur portefeuille est donnée par NSGA-II car il offre un rendement plus élevé au cout d'un risque un peu plus élevé.

Limite de NSGA-II

La limite la plus visible est la lenteur de l'algorithme, il effectue des calculs complexes comme le tri non-domines ou encore le calcul de distance de foule à chaque génération. Par conséquent, bien que plus précis, il devient moins adapté si le client a besoin d'une réponse en temps réelle ou si le nombre d'actif augmente.

Une autre limite est que NSGA-II est conçu pour des problèmes bi-objectif ou tri-objectif, si le nombre d'objectif augmente NSGA-II devient obsolète.

NSGA-II dépend fortement de ses paramètres de base. Un mauvais réglage peut entrainer une mauvaise convergence. Par exemple, une population trop faible ne suffirait pas à couvrir la complexité du problème que l'on traite.

Conclusion

Ce projet a permis de développer un outil d'aide à la décision intégrant des contraintes réalistes (coûts, cardinalité) au modèle classique de Markowitz. Le traitement de ce problème devenu NP-difficile a validé la pertinence des méthodes heuristiques par rapport aux approches déterministes classiques.

L'analyse comparative met en évidence un arbitrage net : la simulation Monte Carlo brille par sa rapidité d'exécution (1,29s) et sa capacité d'exploration globale. À l'inverse, l'algorithme génétique NSGA-II, bien que plus lent (37,66s), prouve sa supériorité qualitative avec un Ratio de Sharpe moyen de 1,365 contre 1,195.

Malgré une sensibilité aux hyperparamètres et un coût de calcul plus élevé, NSGA-II s'impose comme la solution optimale, offrant à l'investisseur une meilleure performance ajustée au risque et une convergence plus précise vers la frontière efficiente.