SEMINAR 1

1. 4 copii aleg aleator câte un nr din mult {1, 2, 3 ... 10}. Care este probabilitatea ca cei 4 copii să aleagă nr diferite.

$$A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =$$

$$\frac{A_{10}^{4}}{10^{4}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^{4}}$$

2. Se aruncă simultan 6 zaruri să se det probabilitatea că: a) obținerii tuturor numerelor de la 1 la 6.

b) să nu se obțină fața 4

c) realizării cvadruplă

(apariția unui nr de exact 4 ori)

6^6 cazuri posibile

a) $\frac{6!}{6^6}$

b) $\frac{5^6}{6^6}$

$5^6 = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 15\,625$

c) $\frac{6 \cdot 5^2 \cdot C_6^4}{6^6}$

3. Din mult nr Nat $\{1, 2 \dots n\}$ se extrag pe rând k numere. Care este prob ca nr extrase să apară în ordine descrescătoare.

cazuri posibile A_n^k

$$p = \frac{C_n^k}{A_n^k} = \frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-k)!}\,k!}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-k)!}}} = \frac{1}{k!}$$

4. Din mult nr nat de 7 cifre distincte formate cu cifrele 1-7 se alege la întâmplare un nr, cu ce probabilitate acesta conține cifrele 3 și 4 în această ordine, a) consecutiv

b) nu neapărat consecutiv

cazuri posibile: $7!$

cazuri favorabile: a) $\frac{6 \cdot 5!}{7!} = \frac{6}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}$

b) $\frac{C_7^2}{7!}$

5. Se consideră urm joc: Jucătorii A și B extrag pe rând câte o bilă dintr-o urnă care conține a bile albe, 4 bile negre. Câștigă jucătorul care extrage primul o bilă albă. Știind că jucătorul A, extrage prima bilă, să se det probabilitatea ca acesta să câștige jocul dacă: a) bilele extrase nu se repun în urnă

b) bilele extrase se repun în urnă

a) $p = \frac{a}{a+4} + \frac{4 \cdot 3 \cdot a}{(a+4)(a+3)(a+2)} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a}{(a+4)(a+3)(a+2)(a+1)a}$

b) $p = \frac{a}{a+4} + \frac{4 \cdot 4\, a}{(a+4)^3} + \frac{4^4 a}{(a+4)^5} + \dots$

$= \left(\frac{a}{a+4}\right)\left(1 + \frac{4^2}{(a+4)^2} + \frac{4^4}{(a+4)^4} + \dots\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \cancel{r}^{\,b_1} \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{r}^{\,b_1} \frac{r^n-1}{r-1} = \cancel{r}^{\,b_1} \frac{-1}{r-1} = \cancel{r}^{\,b_1} \frac{1}{1-r}$$

$$\frac{1}{\frac{(a+4)^2-4^2}{(a+4)^2}} = \frac{1}{\frac{a^2+8a}{a^2+8a+16}} = \frac{1}{\frac{a(a+8)}{a(a+8)+16}} \cdot \frac{a}{a+4} =$$

$$= \frac{a}{\frac{a(a+8)}{a+4}} = \frac{a+4}{a+1} < 1$$

5.

5 Sumarato

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

~~$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$~~

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B)$
$- P(A \cap C) - P(B \cap C)$

$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \cancel{P(A \cup B}$
$P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \ldots (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Poin Caare

Es:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j} P(A_i \cup A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cup A_j \cup A_k) -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\boxed{\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} \quad\Big|\quad P(\bar{M}) = 1 - P(M)}$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) - \sum_{i<j} P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j) + \sum_{i<j<k} P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \bar{A}_k) -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) - \sum_{i<j} P(\overline{A_i \cup A_j}) +$$
$$+ \sum_{i<j<k}^{n} (1 - P(A_k)) - \sum_{i<j} (1 - P(A_i \cup A_j)) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} (1 - P(A_i \cup A_j \cup A_k)) - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\left(1-P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right)$$

$$1-\sum_{1}^{n} 1+\sum_{i<j} 1-\sum_{i<j<k} 1+\ldots(-1)^{n-1}\cdot 1$$

$$1-n+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^n$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^n\cdot C_n^n=(1-1)^n=0$$

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k}$$

SEMINAR 2 POINCARÉ

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Aplicație: 1.10 Studenți își uită câte un pix într-o sală. Pixurile sunt recuperate și împărțite aleator.

a) Det probabilitatea ca să existe studenți care își primesc pixul propriu.

b) –||– pt un nr foarte mare de studenți

Fie A_k evenimentul: "studentul k își primește pixul înapoi" unde k ia valori de la 1 la 10

Cazuri posibile: 10!

$P(A_k) = \frac{9!}{10!}$ (pt că 1 student primește un pix corect)

$\cancel{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_{10})}$

$$\sum_{1}^{10} \frac{9!}{10!} - \sum_{i<j} \frac{8!}{10!} + \sum_{i<j<k} \frac{7!}{10!} - \dots + (-1)^9 \cdot \frac{1}{10!}$$

$$= \sum_{1}^{10} \frac{1}{10} - \sum_{i<j} \frac{1}{10 \cdot 9} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} - \dots - \frac{1}{10!}$$

$$= \frac{10}{10} - \frac{1}{10 \cdot 9} \sum_{i<j} 1 + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \sum_{i<j<k} 1 - \dots - \frac{1}{10!}$$

$$= 1 - \frac{1}{10 \cdot 9} C_{10}^{2} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot C_{10}^{3} - \dots - \frac{1}{10!}$$

$$= 1 - \frac{1}{9 \cdot 10} \cdot \frac{10!}{8!\,2!} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{10(10-2)(10-1)}{3!} - \dots$$

$$- \frac{1}{10!}$$

$$= 1 - \frac{1}{\cancel{9\cdot 10}} \cdot \frac{\cancel{10\cdot 9}}{2!} + \frac{1}{\cancel{8\cdot 9\cdot 10}} \cdot \frac{\cancel{10\cdot 9\cdot 8}}{3!} \dots - \frac{1}{10!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{10!} = \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x = -1$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$e^{-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \quad + \frac{(-1)^n}{n!} \quad | (-1)$$

$$-e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

2. Se consideră evenimentele A și B independente a.î. probabilitatea $P(A) > P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Să se calc probabilitatea $P(B \setminus A) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A și B independente $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{2}{3} = P(A) + P(B) - \frac{1}{6}$

$\begin{cases} P(A) + P(B) = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) \end{cases}$

$\begin{cases} P(A) = \frac{5}{6} - P(B) \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \end{cases}$

$\left(\frac{5}{6} - P(\cancel{B})\right) P(B) = \frac{1}{6}$

$-P(B)^2 + \frac{5}{6} P(B) - \frac{1}{6} = 0 \mid \cdot 6$

$\cancel{\Delta = \frac{25}{36} - \frac{4}{6}}$ $\quad \Delta = \frac{25}{36} - \frac{4}{6}$

$\cancel{\frac{1}{36}}$ $\quad = \frac{1}{36}$

$\cancel{P(B)_{1,2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \frac{1}{36}}{-2}}$ $\cancel{\frac{-31}{36} \over -2}$ $\cancel{\frac{-\frac{29}{36}}{-2}}$ $\cancel{+\frac{31}{18}}$

$P(B)_{1,2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}}{-2}$ $\quad \frac{-\frac{4}{6}}{-2}$ $\quad \frac{-\frac{6}{6}}{-2}$

$= \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$

$\cancel{-6P(B)^2 + 5P(B) - 1 = 0}$

$\cancel{\Delta = 25 - 4 \cdot 6}$
$\cancel{= 1}$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}$$

3. La un ceai participă 3 fete, fiecare împreună cu prietenul ei. Dacă pt un dans perechile se formează prin tragere la sorți care este probabilitate ca fiecare fata să danseze cu prietenul ei.

Fie evenimentul A_k = fata k dansează cu prietenul ei, unde $1 \leq k \leq 3$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

4. Se consideră evenimentele independente A, B, C, D. Să se studieze independența evenimentelor $A \cup B$ și $C \cup D$

$$\underbrace{P[(A \cup B) \cap (C \cup D)]}_{MS} = \underbrace{P(A \cup B) \cdot P(C \cup D)}_{MD}$$

$MD = [P(A) + P(B) - P(A)P(B)][P(C) + P(D) - P(C)P(D)]$

$MD = P(A)P(C) + P(A) \cdot P(D) - P(A) \cdot P(C) \cdot P(D) +$
$P(B) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(D) - P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$
$- P(A) \cdot P(B) P(C) - P(A) P(B) P(D) +$
$+ P(A) P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$

$MS = P[(A+B) \cap (C+D)]$
$= P(AC + AD + BC + BD)$
$\cancel{= P(AC) \; P(AD)}$
$\cancel{= P(A) \cdot P(C) + P}$

$= P(A)P(C) + P(A)P(D) + P(B)P(C) + P(B)P(D)$

5. A, B

$P(A|B) = p$

$P(\bar{A}|\bar{B}) = q$

$P(A|\bar{B}) = r$

$p, q, r \in (0,1)$

$P(A), P(B) = ?$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$\boxed{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B}$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$\cancel{p, q, r \in}$

$P(A \cap B) = p\,P(B) \cancel{= P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$

$r\,P(B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - p\,P(B)$

$$\boxed{r(1 - P(B)) = P(A) - p\,P(B)}$$

$q(1 - P(B)) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$$\boxed{q(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + p\,P(B)}$$

Indicatorii unei mulțimi

$A \subset \Omega$

$I_A : \Omega \to \{0, 1\}$

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \Omega \setminus A \quad (x \notin A) \end{cases}$$

$I_\emptyset = 0, \quad I_\Omega = 1$

$I_{\bar{A}} = 1 - I_A$

$I_{A \cap B}, I_{A \cup B}, I_{A \setminus B}, I_{A \Delta B}$

$\cancel{I_{A \cap}}$ $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B$

$I_{A \Delta B} = I_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = I_{A \setminus B} + I_{B \setminus A} =$
$= I_A(1 - I_B) + I_B(1 - I_A)$

$= I_A - I_A I_B + I_B - I_B I_A = I_A^2 + I_B^2 - 2 I_A I_B =$

24.03.2022

SEMINAR 3

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

$P(A) = P(A \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(A \mid A_2) \cdot P(A_2) +$
$P(A \mid A_3) \cdot P(A_3)$

$$= \frac{3}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{1}{100}$$

~~Se consideră exp aruncării unui zar clasic~~

$\cancel{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}$

$\cancel{A=\{1,3,5\}}$

$\cancel{B=\{3,6\}}$

$P(A_2)=2P(A_1)$

$P(A_3)=2P(A_2)=4PA_1$

$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$

$P(A_1)+2P(A_1)+4P(A_1)=1$

$7P(A_1)=1 \Rightarrow P(A_1)=\frac{1}{7}$

$\frac{3}{100}+\frac{4}{100}+\frac{4}{100}=\frac{11}{100}$

2. De pe un submarin se lansează 4 torpile asupra unei nave inamice. Probabilitatea ca o navă să lovească nava, este p mic. Nava se scufundă cu probabilitatea r mic, dacă este lovită de o singură torpilă. Dar se scufundă garantat la a doua torpilă. În ipoteza că nava se scufundă, care este probabilitatea să fie lovită de exact 2 torpile

Fie evenimentele A - nava se scufundă

A_k - nava este lovită de exact k torpile

$$P(A_2 | A) = \frac{\overbrace{P(A|A_2)}^{1} \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|A_i) P(A_i)} \quad \text{„BAYES"}$$

$$= \frac{P(A_2)}{\underbrace{P(A|A_1)}_{r} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)}$$

$i = \overline{1,4}$

$P(A_i) = C_4^i p^i (1-p)^{4-i}$

$P(A_2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} p^2 (1-p)^2$

$= 2 \cdot 3$

$= 6 p^2 (1-p)^2$

$P(\bar{A}) = P[A_0 \cup (A_1 \cap \bar{A})]$

$= P(A_0) + P(A_1) \cdot \underbrace{P(\bar{A}|A_1)}_{1-r}$

$= C_4^0 \cdot p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 (1-r)$

$= (1-p)^4 + 4 \cdot p (1-p)^3 (1-r)$

$= q^4 - 4pq(r-1)$

3. Scheme de probabilitate

3 handbaliști coechipieri, învinc loviturile de la 7 metri cu probabilitățile $p_1 = 0,9$

$p_2 = 0,8$

$p_3 = 0,7$

Într-un meci fiecare handbalist execută câte o lovitură de la 7 metri. Care este probabilitatea ca ei să înscrie 2 goluri.

Poisson

$P_{2,3} = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3$

$= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7$

4. La un test cu 10 întrebări se acordă câte un punct la fiecare răspuns corect. Un candidat răspunde corect la oricare dintre întrebări cu probabilitatea $p = \frac{2}{3}$. Det probabilitatea ca respectivul candidat să obțină cel puțin 6 puncte.

$$\cancel{P_{\geq 6} = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^{k}\, p^{k} \cdot q^{n-k},\ p+q=1}$$

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k q^{n-k},\quad p+q=1$$

$$P_{\geq 6} = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}$$

5. Într-o ~~cla~~ clasă cu 30 de elevi, 24 studiază engleză, iar restul de 6 studiază spaniolă. Care este probabilitatea ca din 5 elevi ai clasei, exact 2 elevi să studieze spaniola.

$$\cancel{P(n,k) = C_a^k\, C}$$

$$P_{a,b}^{k,n-k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^{n}} =$$

30 elevi

24 eng = b

6 sp = a

din 5 b, 2 = sp

$n=5$

$k=2$

$$P_5(2) = P_{2,5} = \frac{C_6^2 \, C_{24}^3}{C_{30}^5}$$

~~în proporție de 51%~~

La un magazin sunt cămăși în proporție de 51 % talia 1 și 49% talia 2. ~~Care e prob ca un~~

Care este probabilitatea ca un cumpărător să nimerească talia 1 din a 4-a încercare.

Schema geometrică:

$$P_n = p\,q^{(n-1)} = 0{,}51 \cdot 0{,}49^3$$

CERINTA: ~~Prob~~ prob cu zaru de la tema cu schema

Schema ~~bino~~ multinomiala:

$$P(n; k_1 \dots k_1) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_1!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_1}$$

$$P(10; 2, 3, 5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5$$

Variabile aleatorii

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$p_k = P(X = x_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, & 1 \le x \le 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Variabile continue

$$X = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$f(x) \geq 0$

$(\forall) x \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

$f = F'$

07.04.2022

$$Z = \max\{X, Y\} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$Z : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) $X : \begin{pmatrix} k \\ \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix} \quad k = \overline{0, n} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots k \ldots n \\ \dfrac{C_a^0 \cdot C_b^n}{C_{a+b}^n} & \dfrac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \ldots \end{pmatrix}$

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \qquad \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n}$$

$$\boxed{M(X) = \sum_{k \in I} x_k p_k}$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \, \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \, \frac{\frac{a!}{k!(a-k)!} \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a! \cdot C_b^{n-k}}{(k-1)!(a-k)!} \cdot \frac{1}{C_{a+b}^n} = \frac{a!}{C_{a+b}^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_b^{n-k} \, (a-1)!}{(k-1)!(a-k)!}$$

$$= \frac{a}{C_{a+b}^n} \sum_{k=0}^{n} C_b^{n-k} \cdot C_{a-1}^{k-1}$$, k devine 1 pt că $k-1=-1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

$$\Rightarrow \frac{a}{C_{a+b}^n} \cdot C_{a+b-1}^{n-1}$$

$$\boxed{C_N^n = \frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$$

$$= \frac{a}{\frac{a+b}{n}} = \frac{n \cdot a}{a+b}$$

4) Să se calculeze dispersia unei variabile aleatoare de tip poisson.

$X = 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots$

$$X = \begin{pmatrix} n \\ \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a} \end{pmatrix}_{n \geq 0}, \quad a > 0$$

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n!} e^{-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \cdot e^{-a} =$$

$$= e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} = e^{-a} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= e^{-a} \cdot a \underbrace{\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots\right)}$$

$$= e^{-a} \cdot a \cdot e^{a} = a$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} n^2 \\ \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a} \end{pmatrix}$$

$$M(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

$$= e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot a^n}{(n-1)!} =$$

$$= e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n-1) \cdot a^n}{(n-1)!} + \frac{a^n}{(n-1)!} \right)$$

$$= e^{-a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \right)$$

$$= e^{-a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{(n-2)!} + \underbrace{e^{-a} \sum \frac{a^n}{(n-1)!}}_{a \text{ din subpunct a)}}$$

$$= e^{-a} a^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-2}}{(n-2)!}}_{a} + a$$

$= \cancel{a} \; a^2 + a$.

~~Dispersia lui X: a~~

~~Dispersia lui X^2: $a^2 + a$~~

$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ (Dispersia)

$D^2(X) = a^2 + a - a^2 = a$

5) Fie variabila aleatoare indep. X, Y distribuite astfel:

$X\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix} \quad Y\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-q & p \end{pmatrix}$

Să se det nr $\mathbb{R}$ a a.î. dispersia variabilei $X-Y$ să fie $\frac{4}{9}$

$D^2(X-Y) = \frac{4}{9}$

$a = ?$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + p + q = 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - q + p = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q = \frac{2}{3} \\ p - q = 0 \end{cases}$$

$2p = \frac{2}{3}$

$\boxed{p = \frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3} + q = \frac{2}{3}$

$\boxed{q = \frac{1}{3}}$

$D^2(X-Y) = D^2[1 \cdot X + (-1)Y]$

$\overset{X,Y \text{ ind}}{=} D^2(X) + D^2(-Y) =$

$= D^2(X) + D^2(Y)$

$= D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$D^2(Y) = M(\cancel{X}^2) - (M(Y))^2$

$M(Y) = \frac{(a+1)}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{a+4}{3}$

$M(Y^2) = \cancel{\frac{(a+1)^2}{3} + \frac{1}{9}} \frac{(a+1)^2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{(a+1)^2+5}{3}$

$D^2(Y) = \cancel{\frac{a+4}{3}} \cdot \frac{(a+1)^2+5}{3} - \frac{a^2+8a+16}{9}$

6) Să se indice o valoare aleat. discretă care să nu accepte medie

$$X:\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{f(n)} \end{pmatrix}_{n\geq 1}$$

$$X:\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{e^n} \end{pmatrix}_{n\geq 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \quad \frac{1}{\frac{e-1}{e}}$$

$= \frac{1}{e} \cdot \frac{e}{e-1} = \frac{1}{e-1} \neq 1$

$\cancel{X}$

$X: \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}_{n \geq 1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică)

$X: \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}_{n \geq 1}$

$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \right) = 1$

$M(x) = \sum$

14.04.2022

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} a = ? \in \mathbb{R} \text{ a.î.} \\ f \text{ den. de probabilitate} \end{array}$$

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^1 a \ln\frac{1}{x}\,dx = a\int_0^1 \ln x^{-1}\,dx$$

$$= -a\int_0^1 \ln x\,dx = -a\int_0^1 x' \ln x\,dx$$

$$= -a\left(x \ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x}\,dx\right.$$

$$= -a\left(0 - \lim_{x\to 0} x\ln x\right) - (1-0)$$

$$= -a(-0 - 1) = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = -\int_0^1 x \cdot \ln x\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \ln x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Temă: media și dispersia

a) $a = ?$

b) Fct de repartitie

a) $\int_{-1}^{1} \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a \cdot \arcsin x \Big|_{-1}^{1}$

$= a(\arcsin 1 - \arcsin(-1))$

$= a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$

b)

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Caz 1: $x \leq -1$ $F(x) = 0$

Caz 2: $x \geq$

$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt + \int_{-1}^{1} f(t)\, dt + \int_{1}^{x} f(t)\, dt$

$F(x) = 0 + 1 + 0 = 1$

c) $x \in (-1, 1)$

$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$= \frac{1}{\pi} (\arcsin t \Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{\pi} (\arcsin x - \arcsin(-1))$

$= \frac{1}{\pi}\left(\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right)$

3. Să se calculeze.

$f(x) = a \cdot e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$

Det a ai f(x) să fie den. de prob

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$$

$$= a\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\right) = a\left(e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}\right)$$

$$= a\left(1 - 0 - (0 - 1)\right) = a(1+1) = 2a = 1$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|} = 0 \text{ (fct impară)}$$

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(a) = \int_{0}^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x}\,dx, \ a > 0$$

$D^2(x) = 2 - 0 = 2$

Cazul 1: $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t} dt = \frac{1}{2}(e^{x} - 0) = \frac{e^{x}}{2}$$

Cazul 2: $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{-|t|} dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} \cdot e^{-|t|} dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-t} dt$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(1 + e^{x} - e^{0}) = \frac{e^{x}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(e^{-t}\Big|_{0}^{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - (e^{-x} - e^{0})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-x} + 1) = \frac{2 - e^{-x}}{2}$$

$F(x) = 1 - e^{-ax}$, $x \geq 0$

a.) $P(x \in [1, 2)) = P(x \in (-\infty, 2) - x \in (-\infty, 1))$
b) Fct de densitate

a) $P(x \in (-\infty, 2) - x \in (-\infty, 1)) = P((x < 2) \setminus (x < 1))$

$= F(2) - F(1) = 1 - e^{-2a} - 1 + e^{-a} = e^{-a} - e^{-2a}$

$f(x) = F'(x) = -e^{-ax} \cdot a$

4. Să se det nr $\mathbb{R}$ a, b, ai $F(x) = a + b \operatorname{arctg}(x)$
$x \in \mathbb{R}$

să fie fct de repartiție a unei variabile aleat X

$F'(x) = \frac{b}{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow b > 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} a + b \operatorname{arctg} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a + b \operatorname{arctg} x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \\ a - b \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{6em}} \; +$$

$2a = 1$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} + b \frac{\pi}{2} = 1$

$b \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{b = \cancel{0}\ \frac{1}{\pi}}$

c) Probabilitatea ca $|X| \geq 1$

$$P(|X| \geq 1) = 1 - P(|X| < 1)$$
$$= 1 - P(\cancel{0} -1 < X < 1)$$
$$= 1 - (F(1) - F(-1))$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 1}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{\pi}\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{\frac{\cancel{\pi}}{4}}{\cancel{\pi}} - \frac{-\frac{\cancel{\pi}}{4}}{\cancel{\pi}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

21.04.2022

$X;\ G(t) = M(e^{t\cdot X}),\ t \in \mathbb{R}$

$M(X^K) = G^{(K)}(0),\ K = 1, 2, \ldots$

Să se det valoarea medie a urm variabile aleat discrete:

$$X: \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{e \cdot n!} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e \cdot n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}\Big(\overbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots}^{e}\Big)$$

$$= \frac{1}{\cancel{e}} \cdot \cancel{e} = 1$$

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{1}{e \cdot n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

$$e^{t \cdot X}: \begin{pmatrix} e^{t \cdot n} \\ \frac{1}{e \cdot n!} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t\cdot n} \frac{1}{e\, n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t)^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot e^{e^t} = e^{e^t - 1}$$

$$G'(t) = \left(e^{e^t - 1}\right)' = e^{e^t-1} \cdot (e^t - 1)' =$$

$$= e^{e^t - 1} \cdot e^{t} = e^{e^t + t - 1}$$

$$M(X) = G'(0) = e^{1+0-1} = e^0 = 1$$

2. Să se det funcția de repartiție coresp urm fct generatoare

$$G(t) = \frac{2\cdot e^{t} + e^{-t} + 3}{6}$$

$$= \frac{2e^t}{6} + \frac{e^{-t}}{6} + \frac{3}{6}$$

$$\cancel{X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}}$$

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{6}, & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{6}+\frac{3}{6}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Funcția F(x) este suma probabilităților mai mici decât x

3. Să se determine valoarea medie pt urm variabilă de tip continuu, folosind fct generatoare de medie

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$G(t)=M(e^{t\cdot X})=\int_{-1}^{1} e^{t\cdot x}\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} e^{tx}\, x\,dx+$$

$$\int_{0}^{1} e^{tx}\cdot x\,dx=$$

$$I_1=-\frac{1}{t}\int_{-1}^{0}(e^{tx})'\,x\,dx=-\frac{1}{t}\left(e^{tx}\cdot x\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} e^{tx}\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{t}\left[0-e^{-t}(-1)-\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_{-1}^{0}\right]$$

$$= -\frac{1}{t}\left[e^{-t} - \frac{1}{t}(1-e^{-t})\right] = \frac{-e^{-t}}{t} + \frac{1}{t^2}(1-e^{-t})$$

$$J_2 = \int_0^1 e^{tx} x\,dx = \frac{1}{t}\left(e^{t}\cdot 1 - 0 - \int_0^1 e^{tx}\,dx\right)$$

$$= \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t^2} e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t^2}(e^t - 1) =$$

$$= \frac{e^t}{t} - \frac{e^t + 1}{t^2}$$

$$G(t) = -\frac{e^{-t}}{t} + \frac{1}{t^2}(1-e^{-t}) + \frac{e^t}{t} - \frac{e^t - 1}{t^2} =$$

$$= \frac{-e^{-t}}{t} + \frac{1-e^{-t}}{t^2} + \frac{e^t}{t} - \frac{e^t - 1}{t^2} = \frac{-e^{-t} + e^t}{t} +$$

$$\frac{1 - e^{-t} - e^t + 1}{t^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{t} + \frac{2 - e^{-t} - e}{t^2}$$

$$= \frac{t\cdot e^t - t e^{-t} + 2 - e^{-t} - e^t}{t^2}$$

$$G'(t) = \frac{[e^t(t-1) + e^{-t}(t+1)]t^2 -}{t^4}$$

$$f' = te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t = e^t(t-1) + e^{-t}(t+1)$$

$$\lim_{t\to 0} G'(t) = 0$$

$$M(x) = 0$$

4. $X\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$Y\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

X și Y sunt necorelate
nu sunt independente

$P(X=-2, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = P\begin{pmatrix} X=1 \\ Y=1 \end{pmatrix} = 0$

X \ Y	-1	1	
-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\boxed{r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)\,D^2(Y)}}}$$

$$\boxed{cov(X\cdot Y) = M(X\cdot Y) - M(X)\cdot M(Y)}$$

$cov(X,Y) =$

$M(X\cdot Y) = 0 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + 0 - \cancel{\frac{1}{4}} + 0 + 0 + \cancel{\frac{1}{2}} = 0$

5. Se dă funcția $f(x,y) = $ ~~$\{ax^2y,\ (x,y)$~~

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2];\ a \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) să se det constanta reală a ai f densitate de repartiție a unei v.a $(X,Y) = Z$

b) $F_Z(x,y) = ?$

c) $F(x), G(y) = ?$

$1 = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 ax^2y\,dx\,dy$

$= a\int_0^1\left(\int_0^2 x^2 y\,dy\right) dx$

$= x^2\int_0^2 y\,dy = 2x^2$

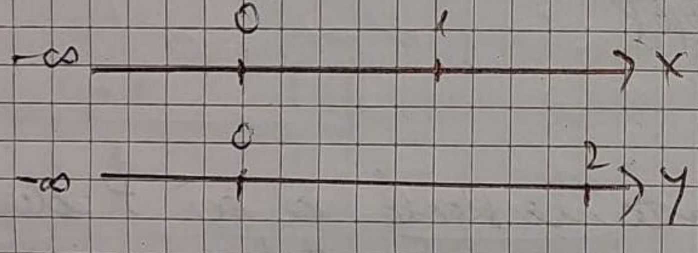
$= a \int_0^1 2x^2 \, dx$

$= 2a \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2a \frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3}a = 1$

$\boxed{a = \frac{3}{2}}$

b) $F_2(x,y)$



$F_2(x,y) \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ sau } y \le 0 \\ 1, & x \ge 1 \text{ și } y > 2 \\ \;\;, & x \in (0, 1] \text{ și } y \in (0, 2] \\ \;\;, & x \in (0, 1] \text{ și } y > 2 \\ \;\;, & x > 1 \text{ și } y \in (0, 2] \end{cases}$

Cazul 3 $F(x,y)$

$= \int_{-\infty}$

$$\boxed{F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x,y)\, dx\, dy}$$

Cazul 3 : $F(x,y) = \int_0^x \int_0^y \frac{3}{2} u^2 v \, du \, dv$

Cazul 4 $F(x,y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{3}{2} u^2 v \, du \, dv$

Cazul 5 = $F(x,y)$

03.05.2022

12.05.2022

SEMINAR 11

~~Caritatea~~ Calitatea unui produs este rezultanta actiunii a două grupări de factori U și V

$U = 2X + 3Y$
$V = 4X - Y$

cu X și Y factori ind.

$X \in N(3, 2)$
$Y \in Bi(10; 0,9)$

Să se determine:
a) coef de corelatie pt U și V (ρ)
b) $P\{7 \leq X < 13\} = ?$
c) min $P\{5 < Y < 13\}$

$$\boxed{r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}} \qquad cov(X,Y) = M(X,Y) - M(X)\cdot M(Y)}$$

$X \in N(m, \sigma)$

m – media

σ – abaterea pătratică medie

$m = M(X)$

$\sigma^2 = D^2(X)$

$M(X) = 3$

$D^2(X) = 4$

$Y \in Bi(n, p)$

$M(Y) = n \cdot p$

$D^2(Y) = n \cdot p \cdot q$, $q = 1 - p$

$M(Y) = 9$

$D^2(Y) = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9$

2b.

~~Repartiția teoretică a unei pop statistice de caracteristică X este normală de param 3 și 5. În urma unei selecții de volum $n = 100$ s-a obținut $\bar{x}$ (media de selecție) = 3. Să se verifice dacă media de selecție <u>diferă</u> med de media teoretică la un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$.~~

$M(U) = 2M(X) + 3M(Y) = 33$

$M(V) = 4M(X) - M(Y) = 3$

$$M(U \cdot V) = M((2X+3Y)(4X-Y)) =$$
$$= M(8X^2 + 10XY - 3Y^2)$$
$$= 8M(X^2) + 10M(X)M(Y) - 3M(Y^2) = 128{,}3$$

(se pot despărți pt că sunt independente)

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$M(X^2) = D^2(X) + M^2(X)$$

$$D^2(U) = 2^2 \cdot D^2(X) + 3^2 \cdot D^2(Y) = 24,1$$

$$D^2(V) = 4^2 \cdot D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y) = 64,9$$

b) v. a. $X \in N(m, \sigma) \Rightarrow Z \overset{not.}{=} \frac{X-m}{\sigma} \in N(0,1)$

$F_Z = \Phi$ - fc. Laplace

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

$$P\{7 \le X < 13\} = P\left\{\frac{7-3}{2} \le \frac{X-3}{2} < \frac{13-3}{2}\right\}$$

$$= P\{2 \le \underset{\in N(0,1)}{Z} < 5\} = \Phi(5) - \Phi(2) = \left(\Phi_0(5) + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) -$$

$$\left(\Phi_0(2) + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) = \Phi_0(5) - \Phi_0(2) = \Phi_0(5) - 0{,}47772 > 0$$

c) $1 - P\{|X - M(X)| \ge \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}, \ \varepsilon > 0$

$$\boxed{P\{|Y - M(Y)| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}, \ \varepsilon > 0}$$

$$P\{5 < Y < 13\} = P\{-4 < Y - M(Y) < 4\} =$$

$$= P\{|Y - M(Y)| < \underset{\varepsilon}{4} \ge 1 - \frac{0{,}9}{16}$$

min $P\{5 < Y < 13\} = 0{,}94$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

pt $z > 0$

$\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z)$

2. Dintr-o populatie normală de valoare medie 80 și dispersie 40 se extrage o selectie de volum 400 și dintr-o populatie normală de val medie 76 și dispersie 180 se extrage o selectie de volum 200. Să se găsească prob. ca:

a) Media primei selectii să fie mai mare decât celelalte cu cel mult 5 unități

b) Diferenta mediilor celor 2 selectii în valoare absolută să fie mai mare decât 6

$X \in N(m, \sigma)$

$\Downarrow$

$\overline{X} \in N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

a) $X \in N(80, \sqrt{40})$, $n_1 = 400$

$Y \in N(76, \sqrt{180})$, $n_2 = 200$

$X \in N(m_1, \sigma_1) \Rightarrow \overline{X} \in N\left(m_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right)$

$Y \in N(m_2, \sigma_2) \Rightarrow \overline{Y} \in N\left(m_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right)$

$\overline{X} - \overline{Y} \in N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

$P(\overline{X} - \overline{Y} \geq 5) = 1 - P(\overline{X} - \overline{Y} < 5) = 1 - P\left(\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right.$

$$< \frac{5-4}{\sqrt{1}} \Big) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}3413 - 0{,}5 = 0{,}1587$$

$$b)\ P(|\bar{x} - \bar{y}| \geq 6) = 1 - P(|\bar{x} - \bar{y}| < 6) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{(|\bar{x} - \bar{y}|) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) \in (-10, 2) \Big)$$

$$= 1 - (\Phi(2) - \Phi(-10)) = 1 - (\Phi(2) - (1 - \Phi(10)))$$

19.05.2022

SEMINAR 12

θ^* estimarea lui θ

$m = m^*$

$\cancel{f(x;\theta) = \left\{\frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}\right.}$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}, \quad \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

n – volumul selecției

$\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$

$$\frac{\theta}{1-\theta} \int_0^1 x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} dx = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}+1}}{\frac{2\theta-1}{1-\theta}+1} \Bigg|_0^1$$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$m = m^* \Leftrightarrow M(X) = \overline{x}$$

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) = \int_0^1 x \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot$$

$$\int_0^1 x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}+1} = \frac{\theta}{1-\theta}\int_0^1 x^{\frac{\theta}{1-\theta}}\,dx = \cancel{\frac{\theta}{1-\theta}} \left.\frac{x^{\frac{\theta}{1-\theta}+1}}{\frac{\theta}{\cancel{1-\theta}}+1}\right|_0^1$$

$$= \theta \cdot (1-0) = \theta$$

$$\theta^* = \overline{x}$$

$$\ln V = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{1-\theta} \cdot x_i^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\, x_i^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{\theta}{1-\theta} + \frac{2\theta-1}{1-\theta}\ln x_i\right) =$$

$$= n\cdot\ln\frac{\theta}{1-\theta} + \frac{2\theta-1}{1-\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$(\ln V)'_\theta = n \cdot \frac{1}{\frac{\theta}{1-\theta}} \cdot \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)' + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \frac{2(1-\theta)+(2\theta-1)}{(1-\theta)^2}$$

$$= n \cdot \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{(1-\cancel{\theta})+\cancel{\theta}}{\cancel{(1-\theta)^2}} + \sum \ln x_i \cdot \frac{+1}{\cancel{(1-\theta)^2}}$$

$$-\|- = 0$$

$$0 \Rightarrow n\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) + \sum \ln x_i \, ;$$

$$0 = n - n\theta + \theta \sum \ln x_i$$

$$n\theta - \theta \sum \ln x_i = n$$

$$\theta(n - \sum \ln x_i) = n \Rightarrow \theta^* = \frac{n}{n - \sum \ln x_i}$$

$$(\ln V)'_\theta = n \cdot \frac{1}{\theta - \theta^2} + \sum \ln x_i \cdot \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$(\ln V)''_\theta = n \cdot -\frac{1-2\theta}{(\theta-\theta^2)^2} + \sum \ln x_i \cdot -\frac{2(1-\theta)(-1)}{(1-\theta)^4}$$

$$= n \cdot \frac{2\theta-1}{(\theta-\theta^2)^2} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \, \frac{2\cancel{(1-\theta)}}{(1-\theta)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\boxed{\text{notăm } A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

$$\boxed{(\ln V)''_{\theta^2}\Big|_{\theta=\frac{1}{1-A}} < 0}$$

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow MAX$

- $x \in N(m, \sigma)$

$\underline{I}$ $m \in \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, σ - dat

$\underline{II}$ $m \in \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, σ?

$\underline{III}$ $\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right)$

2. Pentru estimarea mediei lungimilor unor piese s-au făcut măsurători asupra unui eșantion de $e=16$ piese, obținându-se $\bar{x}$ (media de selecție) de 15 mm. Se știe că lungimile pieselor au repartiție normală cu dispersia egală cu $2{,}56 mm^2$. Să se det un interval de încredere pentru media teoretică a lungimii pieselor cu un coeficient de încredere de 0,99.

$1-\alpha = 0{,}99$

$\alpha = 0{,}01$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}995$

$$m \in \left(15 - z_{0,995} \cdot \frac{1,6}{4} ; 15 + z_{0,995} \cdot \frac{1,6}{4}\right)$$

$\bar{X} = 15$

$n = 16$

$\sigma^2 = 2,56 \Rightarrow \sigma = 1,6$

$z_{0,995} = 2,58$

$$m \in (15 - 2,58 \cdot 0,4 ; 15 + 2,58 \cdot 0,4)$$

$$m \in (13,968 ; 16,032)$$

Seminar 13

26.05.2022

Repartiția teoretică a unei pop statistice de caracteristică X este normală de param 3 și 5. În urma unei selecții de volum $n=100$ s-a obținut $\bar{X}$ (media de selecție) ~~valoare~~ 3,3. Să se verifice dacă media de selecție diferă de media teoretică la un prag de semnificație $\alpha = 0,05$

Deoarece σ (abaterea pătratică medie este cunoscută, se va aplica testul Z bilateral. TZB

$m = 3$

$n = 100$

$\sigma = 5$

$\bar{X} = 3,3$

$\alpha = 0,05$

Se verifică ipoteza $H_0: m = m_0 = 3$

$H_1: m \neq m_0 = 3$

Să calculăm $\boxed{z_c = \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sqrt{n}}$

$z_c \in \left(-z_{\frac{1-\alpha}{2}}, z_{\frac{1-\alpha}{2}}\right)$

$\frac{0,95}{2} = 0,475$

$z_c = \frac{3,3 - 3}{5} \sqrt{100} = 0,6$

$z_c \in (-z_{0,475}, z_{0,475})$

~~$z_c \in$~~

$z_c = 0,6$

$0,6 = z_c \in (-1,96, 1,96)$ (A)

$\Rightarrow$ Se acceptă ipoteza H_0

În concluzie, cu o probabilitate de 95%, media de selecție nu diferă de media teoretică.

2. Pentru a testa productivitatea muncii culegătorilor de căpșuni s-au efectuat 25 de măsurători obținându-se o medie de 5,3 kg de căpșuni per culegător per oră, cu o abatere standard 0,5 kg căpșuni pe oră. Să se verifice ipoteza H_0: $m = 5,5$ kg/cul/h față de alternativa H_1: $m < 5,5$ kg/cul/h pt $\alpha = 0,01$.

$n = 25$

$\bar{x} = 5,3$

$s = 0,5$

Test unilateral stânga

$T_c = \frac{\bar{x} - m}{s}\sqrt{n} = \frac{5,3 - 5,5}{0,5} \cdot 5 = -2$

$T_{\alpha; n-1} = T_{0,01; 24} = 2,797$

$T_c \geq T_{\alpha; n-1}$

$-2 \geq 2,797$ (F)

$\boxed{T_{\alpha; n-1} = -t_{1-\alpha; n-1}}$

$-2 \geq -2,797$ (A)

În concluzie, H_0 la un nivel de probabilitate 99%, culegătorii de căpșuni, culeg aproximativ 5,5 Kg/cul/h.

3. Determină conținutul de azot dintr-o subst organică. Să se stabilească dacă, rezultatele găsite de analistul A sunt mai bune decât ale analistului B cu pragul de semnif 0,05 dacă se cunosc:

A:

$n_1 = 7$

$\bar{x}_1 = 12,56$

$s_1^2 = 0,0232$

B:

$n_2 = 7$

$\bar{x}_2 = 12,20$

$s_2^2 = 0,0332$

$\alpha = 0,05$

Se folosește testul T privind diferența mediilor. TTB

$H_0 : m_1 = m_2$

$H_1 : m_1 > m_2$

$$T_C = \frac{12{,}56 - 12{,}2}{\sqrt{6 \cdot 0{,}0232 + 6 \cdot 0{,}0332}} \sqrt{\frac{\cancel{49}^{7} \cdot \cancel{(12)}^{6}}{\cancel{14}_{2}}}$$

$$= \frac{0{,}36}{0{,}3384} \cdot \sqrt{42}$$

$$= \cancel{6{,}8944049981}\ 4{,}01$$

$T_C \leq T_{1-\alpha;\, n_1+n_2-2}$

$T_C \leq T_{0{,}95;\, 12}$

$\cancel{6{,}89} \leq 2{,}179$

$4{,}01 \leq 2{,}179$

$\Rightarrow$ Se accepta H_1

SEMINAR 15 (302) 02.06.2022

1. $X: \begin{pmatrix} n \\ p\,q^{n-1} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}^*}$ v. a geometrică

$P\{X=n\} = p \cdot q^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{\underbrace{1-q}_{p}} = 1$$

$P\{n < X \le 2n\} \le \frac{1}{4}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$P\{n < X \le 2n\} = P\{X \in \{n+1, n+2, n+3, \dots 2n\}\}$

$\cancel{P\{X \in \Sigma}$ $= \sum_{k=n+1}^{2n} P\{X=k\} = \sum_{k=n+1}^{2n} p \cdot q^{k-1}$

$= p \sum_{k=n+1}^{2n} q^{k-1} = \cancel{p} \cdot q^{n} \frac{1-q^{n}}{\cancel{1-q}} = q^{n} - (q^{n})^{2}$

Notăm $x = q^{n}$

$x - x^{2} \le \frac{1}{4}$

$x^{2} - x + \frac{1}{4} \ge 0$

$4x^{2} - 4x + 1 \ge 0$

$\Delta = 16 - 16$

$\Delta = 0 \Rightarrow \ge 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

~~Revenim la notație~~

2. Să se det a, $a>0$, a.î. $P\{X\leq a\} = P\{X\geq a\}$,

unde, X v.a. pozitivă și continuă, a.î.

$P\{X>t\} = e^{1-e^t}$, $(\forall)\ t\geq 0$

$P\{X\leq a\} = 1 - P\{X\leq a\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2P\{X\leq a\} = 1 \Leftrightarrow P\{X\leq a\} = \frac{1}{2}$

$\boxed{F_{(a)} = \frac{1}{2}}$ - funcția de repartiție

~~$P\{X>t\} = e^{1-e^t}$~~

$1 - P\{X>t\} = 1 - e^{1-e^t}$

$\Rightarrow P\{X\leq t\} = \boxed{F(t) = 1-e^{1-e^t},}\ (\forall)\ t>0$

OBS: Dacă X v.a. cont $P\{X=a\}=0$

$f(t) = F'(t) \Leftrightarrow \left(1-e^{1-e^t}\right)' = -e^{1-e^t}(1-e^t)' =$

$= e^{1-e^t}\cdot(-e^t) = e^{1-e^t+t}$

$F(a) = \frac{1}{2}$

$1-e^{1-e^a} = \frac{1}{2}$

$e^{1-e^a} = \frac{1}{2} \quad / \ln$

$1-e^a = \ln\frac{1}{2}$

$1-e^a = -\ln 2$

$e^a = \ln 2 + 1$

$\Rightarrow a = \ln(\ln 2 + 1) > 0$ (A)

3. Se extrag 5 numere fără repunere din mulțimea numerelor naturale {1, 2, 3 ... 30}.

a) Să se det probabilitatea ca printre nr extrase să existe exact 2 numere divizibile cu 3.

b) Să se calculeze valoarea medie a var aleatorii a variabilei X care indică numărul de multipli de 3 extrași

a) ~~$C_{10}^{2} \quad C_{20}^{3}$~~ 10 sunt divizibile cu 3

~~$C_{10}^{3} \quad C_{20}^{30-3}$~~ Schema hipergeometrică

$$P_{10,20}^{2,5-2} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{20}^{3}}{C_{30}^{5}}$$

b) ~~$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$~~

~~$P0 \Rightarrow \frac{C_{20}^{5} \cdot C_{10}^{0}}{C_{30}^{5}} =$~~

~~$X \begin{pmatrix} i \\ \frac{C_{20}^{5-i} \cdot C_{10}^{i}}{C_{30}^{5}} \end{pmatrix}$~~ $X \begin{pmatrix} i \\ \frac{C_{20}^{5-i} \cdot C_{10}^{i}}{C_{30}^{5}} \end{pmatrix}_{i \in \{0,1,2,3,4,5\}}$

$$M(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i p_i = \sum_{i=0}^{5} i \, \frac{C_{20}^{5-i} C_{10}^{i}}{C_{30}^{5}}$$

$$= \frac{1}{C_{30}^{5}} \sum_{i=0}^{5} i \, C_{20}^{5-i} C_{10}^{i}$$

$$= \frac{1}{C_{30}^{5}} \sum_{i=1}^{5} i \, C_{20}^{5-i} \left(\frac{10}{i} C_{9}^{i-1} \right)$$

$$= \frac{10}{C_{30}^{5}} \sum_{i=1}^{5} C_{20}^{5-i} C_{9}^{i-1} =$$

$$= \frac{10}{C_{30}^{5}} \left(C_{20}^{4} C_{9}^{0} + C_{20}^{3} C_{9}^{1} + C_{20}^{2} C_{9}^{2} + C_{20}^{1} C_{9}^{3} + C_{20}^{0} C_{9}^{4} \right)$$

$$= \frac{10}{C_{30}^{5}} C_{29}^{4} = \frac{10}{\frac{30}{5} \cancel{C_{29}^{4}}} \cancel{C_{29}^{4}} = \frac{5}{3}$$

4 Să se calc fct de repartiție și valoarea medie a unei variabile aleatoare având funcția de densitate
$$f = \begin{cases} a(1+\cos x), & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(1+\cos x)\,dx = 1$$

$$a\int_{-\pi}^{\pi} 1+\cos x\,dx = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\cancel{dx} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = \frac{1}{a}$$

$$x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{a}$$

$$\pi + \pi + 1 \quad \sin\pi - \sin -\pi = \frac{1}{a}$$

$$2\pi + = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} = a}$$