Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

механико-математический факультет

кафедра теории вероятностей

Сходимость и аппроксимация по модулю нормального и пуассоновского распределений

Mod-Gaussian and mod-Poisson convergence and approximation schemes

Курсовая работа
студента 4 курса 408 группы
Сорокина Александра Сергеевича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Кабанов Юрий Михайлович

Москва
2023

Аннотация

В работе рассмотрены новые виды сходимости: сходимость по модулю нормального распределения и сходимость по модулю пуассоновского распределения, введенные Ж. Жакодом, Э. Ковальски и А. Никегбали в статье [5]. В работе представлены доказательства предельных теорем, которые позволяют установить связь между видами сходимости, а также приведены конкретные примеры возникновения этих видов сходимости в различных областях математики. Отдельно рассматривается вопрос о подходах к общему определению сходимости по модулю распределения (параметризованного семейства распределений). Кроме того, представлена общая теория аппроксимации по модулю распределения, и, на примере суммы независимых случайных величин с распределением Бернулли и функций от этой суммы, иллюстрируется применение аппроксимации по модулю пуассоновского распределения.

The paper explores new types of convergence: mod-Gaussian and mod-Poisson convergences, introduced by J. Jacod, E. Kowalski, and A. Nikegbali in their article [5]. The paper provides proofs of limit theorems that establish the connection between convergence types, as well as particular examples of the occurrence of these convergence types in various areas of mathematics. The approaches to a general definition of mod-ϕ convergence are separately examined. Additionally, a general theory of mod-ϕ approximation is presented, and the application of mod-Poisson approximation is illustrated using the example of a sum of independent random variables with Bernoulli distribution and functions of this sum.

1 Введение

Аппарат сходимости по модулю распределения позволяет получить и точные локальные предельные теоремы, и теоремы, относящиеся к теории больших отклонений. Сходимость по модулю распределения встречается как в аналитической теории чисел, комбинаторике, теории графов и случайных процессах, так и при рассмотрении случайных матриц и дзета-функции Римана. В каждой из этих областей, ввиду своей специфики, данный вид сходимости рассматривается с разных точек зрения, что усложняет использование единой формулировки для определения.

В данной работе рассматривается два наиболее распространённых типа введенной сходимости: сходимость по модулю нормального и пуассоновского распределений. Название для данного вида сходимости выбрано неслучайно. Вместе с анализом примеров, раскрывающих введенное понятие, мы также рассмотрим явление перенормировки случайных величин при использовании классических предельных теорем с новым видом сходимости.

Кроме того, в работе исследуется аппроксимация по модулю распределения, которая находит применение, в том числе в финансовой математике. В частности, в статье [8] показано, что для факторных моделей наиболее точной и вычислительно эффективной является аппроксимация VaR и ES, основанная на сходимости по модулю пуассоновского распределения.

2 Сходимость по модулю нормального распределения

Рассмотрим случайные величины X_n, определенные в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, принимающие значения на вещественной прямой.

Определение 1. Последовательность X_n сходится по модулю нормального распределения с параметрами (β_n, γ_n), если $\forall u \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$e^{-iu\beta_n + u^2\gamma_n/2}\mathbb{E}e^{iuX_n} \to \Phi(u), \tag{1}$$

где $\beta_n \in \mathbb{R}$ и $\gamma_n \geq 0$ — две последовательности, а Φ — комплекснозначная непрерывная в нуле функция, называемая предельной.

Определение 2. Последовательность X_n сильно сходится по модулю нормального распределения, если сходимость (1) равномерна по u на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}$ (или, что эквивалентно, локально равномерна).

Чтобы понять смысл названия введенной сходимости, рассмотрим простой пример:

Пример 1. Пусть X_n — последовательность случайных величин со значениями на вещественной прямой, сходящаяся по распределению к X с характеристической функцией Φ, а G_n — последовательность такая, что $G_n \sim \mathcal{N}(\beta_n, \gamma_n)$, причем G_n и X_n являются независимыми. Рассмотрим сумму случайных величин:

$$Z_n := X_n + G_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предложение 1. *Последовательность Z_n сильно сходится по модулю нормального распределения:*

Доказательство. Воспользуемся независимостью случайных величин:

$$\mathbb{E}e^{iuZ_N} = e^{iu\beta_N - u^2\gamma_N/2}\mathbb{E}e^{iuX_N}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (1), сходимость по модулю нормального распределения с параметрами (β_n, γ_n) доказана.

Получим локально равномерную сходимость. Для этого оценим сверху выражение $|\phi_n - \phi|$, взятое в точке η из окрестности ξ:

$$|\phi_n(\eta) - \phi(\eta)| \le |\phi_n(\eta) - \phi_n(\xi)| + |\phi_n(\xi) - \phi(\xi)| + |\phi(\xi) - \phi(\eta)|.$$

1) Обозначим за μ_n — вероятностную меру, соответствующую X_n. Компактное множество K может быть выбрано так, что

$$\mu_n(K^c) \le \varepsilon,$$

где ε - произвольное фиксированное положительное число.

Возьмем $r > 0$ такое, что $\mu([0, r]^c) < \varepsilon$, и положим K равным $[0, 2r]$. Выберем непрерывную функцию χ, удовлетворяющую неравенствам $\mathbb{1}_{[0,r]} \le \chi \le \mathbb{1}_K$. Тогда $1 - \chi(x) = 1$ для $x \in K^c$ и $1 - \chi(x) = 0$ для $x \in [0, r]$. Поэтому,

$$\mu_n(K^c) \le \int (1 - \chi)\, d\mu_n \to \int (1 - \chi)\, d\mu \le \mu([0, r]^c) < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что существует $\tilde{n}$, что для $n > \tilde{n} : \mu_n(K^c) \le \varepsilon$. Расширив K (для выполнения неравенства для $n < \tilde{n}$), получим, что $\mu_n(K^c) \le \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2) Докажем равностепенную непрерывность $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Выберем $\delta_1 > 0$ такое, что

$$|1 - e^{ix(\xi-\eta)}| \le \varepsilon \quad \text{для } |\xi - \eta| \le \delta_1,$$

где $x \in K$ (ε и K определены в предыдущем подпункте). Тогда:

$$|\phi_n(\eta) - \phi_n(\xi) \le \int_K |e^{i\xi x} - e^{i\eta x}| d\mu_n(x) + \int_{K^c} |e^{i\xi x} - e^{i\eta x}| d\mu_n(x) \le \varepsilon + 2\mu_n(K^c) \le 3\varepsilon.$$

3) Выберем $\delta_2 > 0$ таким, чтобы из непрерывности следовало, что $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \le \varepsilon$, и $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|\phi(\xi) - \phi_n(\xi)| \le \varepsilon$ выполнено для $n \ge N$.

Таким образом, получаем $|\phi_n(\eta) - \phi(\eta)| \le 5\varepsilon$ для $n > N$ и $\eta \in B(\xi, \delta)$, где $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, то есть доказана локально равномерная сходимость, а следовательно и сильная сходимость по модулю нормального распределения. □

Для данного типа сходимости можно доказать аналог центральной предельной теоремы.

Рассмотрим схему серий $\{X_k^n\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, серии независимы и состоят из независимых нормализованных одинаково распределенных величин. Положим:

$$S_n := X_1^n + ... + X_n^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вместо последовательности $S_n/\sqrt{n}$, фигурирующей в ЦПТ, рассмотрим суммы вида:

$$Z_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(X_1^n + ... + X_n^n), \tag{2}$$

дисперсией которых являются гармонические числа, т.е.

$$\mathrm{Var}(Z_n) = H_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Для доказательства сходимости нам понадобится лемма о разложении характеристической функции:

Лемма 1 ([1], с. 180)**.** *Если X — случайная величина с $\mathbb{E}|X|^k < \infty$, тогда для характеристической функции справедливо разложение:*

$$\phi(u) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(iu)^j}{j!} \mathbb{E}X^j + \frac{(iu)^k}{k!} \left(\mathbb{E}X^k + \delta(u) \right),$$

где $\lim_{u \to 0} \delta(u) = 0$ *и* $|\delta(u)| \le 3\mathbb{E}|X|^k$.

Теорема 1. *Пусть $\{X_k^n\}_{k=1}^n$ — схема серий, каждая серия состоит из независимых нормализованных одинаково распределенных величин, и серии независимы между собой, причем для третьего абсолютного момента ν_3 : $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_3/n^2 < \infty$. Тогда последовательность случайных величин Z_n сильно сходится по модулю нормального распределения с параметрами $(0, H_N)$.*

Доказательство. Обозначим за $\phi_n(u)$ характеристическую функцию случайной величины n-ой серии и введем:

$$G_N(u) := e^{u^2 H_N/2} \mathbb{E} e^{iuZ_N} = e^{u^2 H_N/2} \prod_{n=1}^{N} \phi_n(u/n)^n.$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать локально равномерную сходимость G_N. Зафиксируем $A > 0$ и воспользуемся леммой 1 при $k = 2$. Для $|u| \le A$ и $n \ge 2A$ верна оценка:

$$|\phi_n(u/n) - 1| = \left| \frac{u^2}{2n^2}(1 + \delta(u)) \right| \le \frac{2u^2}{n^2} \le \frac{1}{2}.$$

Рассматривая главную ветвь логарифма на области $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \le 1/2\}$, для $N > M > 2A$ и $|u| \le A$ получим:

$$G_N(u) = G_M(u) e^{H_{M,N}(u)},$$

где

$$H_{M,N}(u) := \sum_{n=M+1}^{N} n \left(\log \phi_n(u/n) + \frac{u^2}{2n^2} \right).$$

Оценим $|H_{M,N}|$, воспользовавшись леммой 1 при $k = 3$ и неравенством $|\log(1+z) - z| \le 4|z|^2$ для $|z| \le 1/2$:

$$\left| \log \phi_n(u/n) + \frac{u^2}{2n^2} \right| \le |\log \phi_n(u/n) - \phi_n(u/n) + 1| + \left| \phi_n(u/n) - 1 + \frac{u^2}{2n^2} \right| \le$$
$$4|\phi_n(u/n) - 1| + \frac{2u^3}{3n^3}\nu_3 \le \frac{16u^4}{n^4} + \frac{2u^3}{3n^3}\nu_3.$$

Таким образом, $H_{M,N}(u)$ сходится равномерно на $[-A, A]$ к $\tilde{H}_M(u)$ для $M \ge 2A$ при $N \to \infty$. Отсюда следует, что $G_N(u)$ сходится к $G_M(u) e^{\tilde{H}_M(u)}$ равномерно на $u \in [-A, A]$. Теорема доказана, так как число A можно выбрать сколь угодно большим. □

3 Сходимость по модулю пуассоновского распределения

Несложно столкнуться с ситуацией, когда подобрать необходимую "перенормировку" с увеличивающейся дисперсией для получения сходимости по модулю нормального распределения невозможно. К примеру, рассмотрим теорему Эрдеша–Каца:

Теорема 2 ([3]). *Пусть $\omega(n)$ обозначает число различных простых делителей числа n. Тогда для любых фиксированных $a < b$ выполнено:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \left| \left\{ n \leq x \colon a \leq \frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \leq b \right\} \right| = \Phi(a,b),$$

где $\Phi(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-t^2/2}\, dt$.

Предложение 2. *Пусть Z_n — последовательность случайных величин, принимающих целочисленные значения. Тогда Z_n не сходится по модулю нормального распределения с неограниченной последовательностью параметров γ_n.*

Доказательство. Характеристическая функция случайных величин, принимающих целочисленные значения является 2π-периодической. Предположим, что Z_n сходится по модулю нормального распределения с параметрами (β_n, γ_n). Подставим в определение (4) $u = 2\pi$ и рассмотрим модуль выражения. Тогда получим, что

$$\lim_{N\to+\infty} e^{\gamma_n/2} = |\Phi(2\pi)|.$$

Из существования предела следует сходимость и ограниченность γ_n. Противоречие. □

Рассмотрим аналог введенной сходимости для дискретного распределения, а именно распределения Пуассона.

Определение 3. Последовательность X_n случайных величин сходится по модулю пуассоновского распределения с параметрами λ_n, если существует поточечный предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}e^{iuP_{\lambda_n}}\right)^{-1} \mathbb{E}e^{iuZ_n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\lambda_N \left(1 - e^{iu}\right)\right) \mathbb{E}e^{iuZ_n} = \Phi(u),$$

и сходимость локально равномерная.

Замечание. При определении данного типа сходимости в [6] понятие сильной сходимости отдельно не вводится.

Докажем, что в приведенном выше примере имеет место сходимость по модулю пуассоновского распределения. Вместо $\omega(n)$ будем рассматривать $\tilde{\omega}(n) = \omega(n) - 1$ для соответствия возможных значений рассматриемой функции и пуассоновской случайной величины. Для доказательства рассмотрим теорему из теории чисел на применение метода Сельберга–Деланжа:

Теорема 3 ([9], с. 201-202). *Для любого $A > 0$, существуют c_1 и c_2 такие, что равномерно для $x \geq 3, N \geq 0, \|z\| \leq A$ имеем:*

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O_A(R_N(x)) \right),$$

где

$$R_N(x) := e^{-c_1\sqrt{(\log x)}} + \left(\frac{c_2 N + 1}{\log x}\right)^{N+1},$$

$$\lambda_k(z) := \frac{1}{\Gamma(z-k)} \sum_{h+j=k} \frac{1}{h!j!} G_1^{(h)}(1;z)\gamma_j(z) \quad (\gamma_j \text{ определена в [9, с. 182]}),$$

$$G_1(s;z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^{\omega(n)} n^{-s} \zeta(s)^{-z} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z.$$

Предложение 3. *Для $u \in \mathbb{R}$ положим*

$$\Phi(u) := \frac{1}{\Gamma\left(e^{iu} + 1\right)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{e^{iu}} \left(1 + \frac{e^{iu}}{p-1}\right).$$

Произведение Эйлера (разложение ряда Дирихле в бесконечное произведение, индексируемое простыми числами) локально равномерно сходится. Кроме того, выполнено:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(\log N)^{\left(1-e^{iu}\right)}}{N} \sum_{2\le n\le N} e^{iu\tilde{\omega}(n)} = \Phi(u), \quad u\in\mathbb{R},$$

и сходимость локально равномерная.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3 с $N=0,\ z=e^{iu},\ A=1$ и $\lambda_0(z)=zG_1(1;z)/\Gamma(z+1)$ и тем фактом, что

$$\frac{1}{N-1}\sum_{2\le n\le N} e^{iu\omega'(n)} = \frac{1}{N}e^{-iu}\sum_{1\le n\le N} e^{iu\omega(n)} + O(1).$$

□

Теорема 4. *Рассмотрим случайные величины $M_N,\ N>2$, имеющие равномерное дискретное распределение на $2\le n\le N,\ n\in\mathbb{N}$, и положим $X_N=\tilde{\omega}(M_N)$. Тогда последовательность Z_N сходится по модулю пуассоновского распределения с параметрами $\lambda_N=\log\log N$.*

Доказательство. Воспользуемся результатом предложения 3. Заметим, что $\mathbb{E}e^{iuP_{\lambda_N}}=(\log N)^{1-e^{iu}}$. Отсюда по определению следует сходимость по модулю пуассоновского распределения. □

3.1 Предельные теоремы

Рассмотрим связь сходимости по модулю пуассоновского распределения с введенной ранее сходимостью.

Предложение 4. *Пусть X_n — последовательность случайных величин, сходящаяся по модулю пуассоновского распределения с параметрами λ_n такими, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\infty$. Тогда Y_n, определенные следующим образом:*

$$Y_n=\frac{X_n-\lambda_n}{\lambda_n^{1/3}},$$

сходятся по модулю нормального распределения с параметрами $(0,\lambda_n^{1/3})$ и предельной функцией

$$\Phi_u(t)=e^{-it^3/6}.$$

Доказательство. Вместо u рассмотрим $t=u/\lambda_n^{1/3}$. По определению сходимости по модулю пуассоновского распределения получим:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\lambda_n(1-e^{it})}\mathbb{E}e^{itX_n}=\Phi(0)=1.$$

Кроме того, имеем:

$$\exp(\lambda_n(e^{it}-1))=\exp\left(\lambda_n^{2/3}iu-\lambda_n^{1/3}\frac{u^2}{2}-\frac{iu^3}{6}+O\left(\frac{u^4}{\lambda_n^{1/3}}\right)\right).$$

Выразим характеристическую функцию для Y_n:

$$\mathbb{E}(e^{iuY_n})=e^{-iu\lambda_n^{2/3}}\mathbb{E}e^{iuX_n}.$$

Воспользуемся полученными выражениями, чтобы доказать сходимость.

$$\exp\left(\lambda_n^{1/3}\frac{u^2}{2}\right)\mathbb{E}e^{iuY_n}=\exp\left(\lambda_n^{1/3}\frac{u^2}{2}\exp(\lambda_n(e^{it}-1))\exp(\lambda_n(1-e^{it})\right)\mathbb{E}e^{iuX_n}=$$
$$\exp\left(\lambda_n^{1/3}\frac{u^2}{2}-\lambda_n^{1/3}\frac{u^2}{2}+i\frac{u^3}{6}+O\left(\frac{u^4}{\lambda_n^{1/3}}\right)\right)\to\Phi.$$

□

Помимо предельной теоремы Пуассона, в схеме Бернулли также имеет место сходимость по модулю пуассоновского распределения.

Предложение 5. *Пусть p_n последовательность из положительных чисел, не превосходящих единицы, такая, что:*

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = \sum_{n\geq 1} p_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sum_{n\geq 1} p_n^2 < +\infty,$$

B_n последовательность независимых случайных величин с

$$\mathbf{P}(B_n = 0) = 1 - p_n, \quad \mathbf{P}(B_n = 1) = p_n.$$

Тогда $X_n = B_1 + ... + B_n$ сходится по модулю пуассоновского распределения с параметрами λ_n и предельной функцией, заданной равномерно сходящимся бесконечным произведением вида:

$$\Phi(u) = \prod_{n\geq 1}(1 + p_n(e^{iu} - 1))e^{x_n(1-e^{iu})}.$$

Доказательство. Из независимости B_n имеем:

$$e^{\lambda_n(1-e^{iu})}\mathbb{E}e^{iuX_n} = \prod_{n\geq 1}^{N}(1 + p_n(e^{iu} - 1))e^{x_n(1-e^{iu})},$$

и, так как $p_n \to 0$, из сходимости σ_n получим:

$$(1 + p_n(e^{iu} - 1))e^{x_n(1-e^{iu})} = 1 + O(p_n^2),$$

то есть произведение сходится равномерно к $\Phi(u)$. $\square$

4 Общее определение

Первая попытка определить сходимость по модулю семейства распределений предпринята в [5].

Определение 4. Для семейства распределений $\mathcal{F} = (\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, параметризованных Λ, рассмотрим характеристические функции $\tilde{\mu}(\lambda, u)$ случайных величин, соответствующих этим распределениям. Тогда последовательность X_n сходится по модулю $\mathcal{F}$, если:

$$\lim_{N\to+\infty}\tilde{\mu}(\lambda, u)^{-1}\mathbb{E}e^{iuZ_N} = \Phi(u).$$

Для обобщения определения в многомерном случае в работе [2] введено три условия, определяющие сходимость. В рассмотренных выше примерах для получения сходимости необходимо было перенормировать последовательность случайных величин. В многомерном случае для подобной нормировки используется последовательность линейных автоморфизмов.

Рассмотрим вероятностную меру μ, определенную на $\mathbb{R}^d$ и последовательность случайных величин X_n, принимающих значения на $\mathbb{R}^d$, с характеристическими функциями φ_n.

H1. Характеристическая функция ϕ вероятностной меры μ интегрируема, μ имеет плотность $d\mu/dm$ относительно меры Лебега m.

H2. Существует последовательность линейных автоморфизмов $A_n \in \mathrm{GL}_d((R))$ с обратными $\Sigma_n = A_n^{-1}$ такими, что Σ_n сходится к 0 и $\varphi_n(\Sigma_n^T t)$ локально равномерно сходится к $\varphi(t)$. То есть перенормированные случайные величины $\Sigma_n(X_n)$ сходятся по распределению к μ.

H3. Для всех $k \geq 0$ последовательность

$$f_{n,k} = \phi_n(\Sigma_n^T t)\mathbb{1}_{\{\Sigma_n^T t\leq k\}}$$

равномерно интегрируема на $\mathbf{R}^d$; В других словах, так как $f_{n,k}$ равномерно ограничена в L^1 и L^∞ для фиксированного k, эквивалентным условием является выполнение для всех $k \geq 0$

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_{n\geq 1}\int_{|t|\geq a}\left|\varphi_n\left(\Sigma_n^T t\right)\right|\mathbb{1}_{|\Sigma_n^T t|\leq k}m(dt) = 0.$$

Определение 5. Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с характеристической функцией ϕ, X_n — последовательность случайных величин с характеристическими функциями ϕ_n. Если выполнены условия **H1, H2, H3**, то для последовательности X_n имеет место сходимость по модулю ϕ (мод-ϕ сходимость).

Данное определение исключает из рассмотрения сходимость по модулю Пуассоновского распределения. Для него предлагается рассмотрение первоначального определения. С другой стороны, такое определение позволяет обнаружить пример сходимости по модулю распределения Коши.

Теорема 5 ([2], с.13). *Рассмотрим процесс θ_u — "winding number", определенный из соотношения $W_u = |W_u| \exp i\theta_u$. Для любой последовательности u_n положительных вещественных чисел, стремящихся к бесконечности, последовательность $X_n = \theta_{u_n}$ сходится по модулю распределения Коши с $d = 1$, $\phi(t) = exp(-|t|)$, $A_n(t) = A_n^T(t) = (\log u_n)t/2$.*

В частности, для любых вещественных $a < b$ имеем:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\log u}{2} \mathbf{P}\left(a < \theta_u < b\right) = \frac{1}{\pi}(b - a).$$

Для получения дополнительных результатов в работе [4] при определении сходимости вместо использования характеристических функций на вещественной прямой рассматривается производящая функция моментов на полосе.

Определение 6. Пусть X_n — последовательность случайных величин и $\varphi_n(z) = e^{zX_n}$ — соответствующие производящие функции моментов, существующие на полосе:

$$S_{(c,d)} = \{z : c < \mathrm{Re}\ z < d\},$$

где $c < 0 < d$ из расширенной числовой прямой. Предположим, что существует не равное константе бесконечно делимое (представимое в виде произвольного количества независимых, одинаково распределённых слагаемых) распределение ϕ с производящей функцией моментов $e^{\eta(z)}$, определенной на $S_{(c,d)}$, и аналитическая функция $\psi(z)$, не обращающаяся в ноль на вещественной части $S_{(c,d)}$, так что локально равномерно для $z \in S_{(c,d)}$ выполнено:

$$e^{-t_n \eta(z)} \varphi_n(z) \to \psi(z),$$

где t_n — последовательность, стремящаяся к $+\infty$. Тогда X_n сходится по модулю распределения ϕ на $S_{(c,d)}$ с параметрами t_n и предельной функцией ψ.

Из данного определения следует сходимость по первоначальному определению, так как $0 \in (c, d)$. Рассмотрение данных условий обуславливается введением экспоненциальной замены меры и использованием непрерывности η и ψ на $S_{(c,d)}$ вплоть до третьей производной, а также локально равномерной сходимости производных ψ_n. При данном определении, однако, невозможно рассмотрение сходимости по модулю распределения Коши, и теорема 5 не имеет смысла, так как из выполнения условий данного определения следует существование для X_n моментов всех порядков.

5 Аппроксимация

Пусть X — случайная величина, принимающая целочисленные значения, с вероятностной мерой μ_X. Рассмотрим характеристическую функцию как преобразование Фурье:

$$\widehat{\mu}_X(\xi) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_X(\{k\}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}, \quad \xi \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

В случае, когда μ является бесконечно делимым распределением на $\mathbb{Z}$, преобразование Фурье можно представить в виде:

$$\widehat{\mu}(\xi) = e^{\phi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

где ϕ — 2π-периодическая функция, называемая характеристической экспонентой. (Данный факт использовался в определении 6).

Для пуассоновской случайной величины $\phi(\xi) = \lambda(e^{i\xi} - 1),\ \xi \in \mathbb{T}$. Переформулируем определение сходимости по модулю распределения ϕ с введенными обозначениями, которое будем использовать в дальнейшем:

Определение 7. Последовательность X_n сходится по модулю распределения ϕ с параметрами λ_n и предельной функцией ψ, если $\lambda_n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(\xi) = \psi(\xi),$$

где

$$\psi_n(\xi) = \widehat{\mu}_{X_n}(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_n\phi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Замечание. Это определение подчеркивает значение характеристической экспоненты бесконечно делимого распределения, поэтому вместо рассмотрения параметризованного семейства распределений достаточно сосредоточиться на одном распределении. Таким образом, данное определение представляет собой нечто среднее между определениями 4 и 6.

В случае, когда последовательность X_n сходится по модулю пуассоновского распределения, можно использовать ψ_n и ψ для получения информации о поведении μ_{X_n} и построить аппроксимацию с помощью соответствующего бесконечно делимого распределения.

Для этого рассмотрим Винеровскую алгебру $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ абсолютно сходящихся рядов Фурье на $\mathbb{T}$ с нормой:

$$\|\widehat{\mu}\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\widehat{\mu})|\,,$$

где $c_n(\widehat{\mu}) := \int\limits_{\mathbb{T}} \widehat{\mu}(\xi)e^{-in\xi}d\xi$ — n-ый коэффициент Фурье $\widehat{\mu}$.

Определение 8. Пусть X_n — последовательность случайных величин со значениями в $\mathbb{N}$, сходящаяся по модулю распределения ϕ с параметрами λ_n. Предположим, что в окрестности нуля ψ_n может быть разложено в ряд:

$$\psi_n(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n}(e^{i\xi} - 1)^k.$$

Тогда схемой аппроксимации по модулю распределения ϕ порядка r для X_n называется последовательность дискретных зарядов $\nu_n^{(r)}$ на $\mathbb{Z}$ такая, что:

$$\widehat{\nu}_n^{(r)}(\xi) = \chi_n^{(r)}(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_n\phi(\xi)}, \tag{3}$$

где $\chi_n^{(r)}$ — многочлен порядка r аппроксимирующий ψ_n в окрестности 0 до порядка r:

$$\chi_n^{(r)} = 1 + \sum_{k=1}^{r} b_{k,n}(e^{i\xi} - 1)^k.$$

Для исследования ошибки аппроксимации рассмотрим факториальные кумулянты.

Определение 9. Если X — случайная величина принимает значения из $\mathbb{N}$, тогда её факториальная кумулятивная производящая функция определяется как:

$$\log(\mathbb{E}(z+1)^X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\kappa_k(X)z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

где коэффициент $\kappa_k(X)$ — k-ый факториальный кумулянт (полуинвариант) X.

Пример 2. Для $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$:

$$\kappa_k(X) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложение 6. *Пусть X_n — последовательность случайных величин со значениями из $\mathbb{N}$, сходящаяся по модулю распределения ϕ с параметрами λ_n, и Y_n - соответствующее бесконечно делимое распределение с экспонентами $\lambda_n\phi$. Если $\nu_n^{(r)}$ — схема аппроксимации по модулю распределения ϕ порядка r для X_n и $\kappa_{k,n}^{(r)}$ — k-ый факториальный кумулянт $\nu_n^{(r)}$, то:*

$$\kappa_{k,n}^{(r)} = \begin{cases} \kappa_k\left(X_n\right) & \text{при } k = 1, \dots, r \\ \kappa_k\left(Y_n\right) & \text{при } k \geq r+1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим $z := e^{i\xi} - 1$. Коэффициенты в разложении в ряд $\widehat{\mu_n}(\xi)$ для случайной величины X_n являются ее факториальными кумулянтами. Поэтому, получим:

$$\psi_n(\xi) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(X_n\right) - \kappa_k\left(Y_n\right)\right) z^k\right)$$

Воспользуемся Теоремой C.6 из [8, с. 38-39], представим $\psi_n(\xi)$ в виде:

$$\psi_n(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \Pi(k)} \prod_{B \in \pi} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) z^k,$$

где $\Pi(k)$ — множество разбиений множества чисел от 1 до k. Отсюда из определения функции $\chi_n^{(r)}(\xi)$ следует, что

$$\log(\chi_n^{(r)}(\xi)) = \log\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \Pi(k)} \prod_{B \in \pi} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) z^k\right).$$

Обозначим за b_s — коэффициент при z^s в разложении $\chi_n^{(r)}$. Тогда, воспользовавшись Теоремой C.6, получим, что

$$\begin{aligned} s!\ b_s &= \sum_{\sigma \in \Pi(s)} \mu\left(\sigma, \widehat{1}_s\right) \prod_{D \in \sigma} \sum_{\pi \in \Pi(|D|)} \prod_{B \in \pi} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) \mathbb{1}_{|B| \leq r} \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi(s)} \mu\left(\sigma, \widehat{1}_s\right) \sum_{\tau \leq \sigma} \prod_{B \in \tau} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) \mathbb{1}_{|B| \leq r} \\ &= \sum_{\tau \in \Pi(s)} \sum_{\sigma \in \Pi(s)} \zeta(\tau, \sigma) \mu\left(\sigma, \widehat{1}_s\right) \prod_{B \in \tau} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) \mathbb{1}_{B| \leq r} \\ &= \sum_{\tau \in \Pi(s)} \delta\left(\tau, \widehat{1}_s\right) \prod_{B \in \tau} \left(\kappa_{|B|}\left(X_n\right) - \kappa_{|B|}\left(Y_n\right)\right) \mathbb{1}_{|B| \leq r} \\ &= \left(\kappa_s\left(X_n\right) - \kappa_s\left(Y_n\right)\right) \mathbb{1}_{s \leq r}, \end{aligned}$$

где $\widehat{1}_s = \{\{$ 1, ..., k$\}\}$ — максимальный элемент $(\Pi(s), \leq)$, δ — символ Кронекера, $\zeta(x, y) = \mathbb{1}_{x \leq y}$, а $\mu(x, y)$ — функция Мёбиуса, определенная на алгебре интервалов на $\Pi(s)$ с операцией свёртки.

Воспользовавшись формулой (3), для $\nu_n^{(r)}$ получим:

$$\begin{aligned} \log\left(\widehat{\nu}_n^{(r)}(\xi)\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(Y_n\right)\right) z^k + \log\left(\chi_n^{(r)}(\xi)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(Y_n\right)\right) z^k + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(X_n\right) - \kappa_k\left(Y_n\right)\right) z^k \\ &= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(X_n\right)\right) z^k + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\kappa_k\left(Y_n\right)\right) z^k, \end{aligned}$$

что доказывает равенство для факториальных кумулянтов. □

При аппроксимации по модулю пуассоновского распределения заряды $\nu_n^{(r)}$ имеют все факториальные кумулянты равные 0 за исключением первых r в соответствии с примером.

В общем случае, аппроксимации нулевого порядка соответствует аппроксимация суммой λ_n независимых одинаково распределенных случайных величин с соответствующим бесконечно делимым распределением, в то время при более высоком порядке аппроксимация заметно улучшается. Так, в работе [7] в рассмотренном выше примере с суммой величин с распределением Бернулли для соответствующей аппроксимации $\nu_n^{(r)}$ выполнено неравенство:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{P}\left(X_n=k\right)-\nu_n^{(r)}(k)\right|\le A\left(\frac{K\sigma_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^{r+1},$$

где A и K — константы. Кроме того, в данной работе получены формулы для коэффициентов $b_{k,n}$ [7, с.7].

Но даже располагая информацией о коэффициентах $(b_{k,n})_{k=1}^r$, довольно сложно вычислить заряды $\nu_n^{(r)}$. Тем не менее, получить математические ожидания от функций от этих зарядов не представляется сложным.

Предложение 7. *Пусть X_n — последовательность случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{N}$, сходится по модулю распределения ϕ с параметрами λ_n и $\nu_n^{(r)}$ её схема аппроксимации порядка r. Тогда, для любой ограниченной функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$:*

$$\nu_n^{(r)}(f)=\sum_{j\in\mathbb{N}}f(j)\nu_n^{(r)}(\{j\})=\mathbb{E}f\left(Y_n\right)+\mathbb{E}\Delta_n(r,f)\left(Y_n\right), \tag{4}$$

где Y_n имеет бесконечно делимое распределение с экспонентой $\lambda_n\phi$, и поправочный член задается как:

$$\Delta_n(r,f)(j)=\sum_{k=1}b_{k,n}\left(\Delta_+^k(f)\right)(j)=\sum_{k=1}b_{k,n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{l}{k}f(j+l).$$

Доказательство. Для $f,g\in\ell^2(\mathbb{N})$ выполнено равенство Парсеваля:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}f(j)g(j)=\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}.$$

Воспользуемся им и формулой (3) при $g=\nu_n^{(r)}$:

$$\nu_n^{(r)}(f)=\nu_n^{(0)}(f)+\sum_{k=1}^{r}b_{k,n}\left(\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{f}(\xi)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1\right)^k}\widehat{\nu}_n^{(0)}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}\right),$$

где $\nu_n^{(0)}(\xi)=e^{\lambda_n\phi(\xi)}$.

Рассмотрим выражение под интегралом. Для $f\in\ell^1(\mathbb{N})$ имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1\right)&=\sum_{j\in\mathbb{N}}f(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1\right)\\&=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\sum_{j\in\mathbb{N}}(f(j+1)-f(j))\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\xi}\\&=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\widehat{\Delta_+(f)}(\xi).\end{aligned}$$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{f}(\xi)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1\right)}\widehat{\nu}_n^{(0)}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}&=f(0)\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\widehat{\nu}_n^{(0)}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}+\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{\Delta_+(f)}(\xi)}\widehat{\nu}_n^{(0)}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}\\&=\nu_n^{(0)}\left(\Delta_+(f)\right),\end{aligned}$$

где первый интеграл сокращается, так как у $\widehat{\nu}_n^{(0)}$ есть только положительные коэффициенты Фурье. Отсюда, получаем, что:

$$\int_0^{2\pi}\overline{\widehat{f}(\xi)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1\right)^k}\widehat{\nu}_n^{(0)}(\xi)\frac{d\xi}{2\pi}=\nu_n^{(0)}\left(\Delta_+^k(f)\right),\quad k\ge1,$$

и для любой функции из $\ell^1(\mathbb{N})$ $\nu_n^{(r)}$ может быть представлен в виде:

$$\nu_n^{(r)} = \nu_n^{(0)} \circ \left(\mathrm{id} + \sum_{k=1}^{r} b_{k,n} \Delta_+^k \right).$$

Теперь рассмотрим произвольную ограниченную функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и последовательность $f_L(j) = \mathbb{1}_{\{j \leq L\}} f(j)$ функций, принадлежащих $\ell^1(\mathbb{N})$. Воспользуемся теоремой об ограниченной сходимости и получим:

$$\nu_n^{(r)}(f) = \lim_{L\to\infty} \nu_n^{(r)}(f_L) = \lim_{L\to\infty} \nu_n^{(0)} \left(f_L + \sum_{k=1}^{r} b_{k,n} \Delta_+^k (f_L) \right) = \nu_n^{(0)} \left(f + \sum_{k=1}^{r} b_{k,n} \Delta_+^k (f) \right).$$

□

Рассмотрим примеры аппроксимации по модулю пуассоновского распределения.

Предложение 8. *(1) Для функции $f(j) = \mathbb{1}_{\{j>x\}} = \mathbb{1}_{\{j>\lfloor x\rfloor\}}$ с фиксированным $x \in \mathbb{R}$ аппроксимация по модулю пуассоновского распределения порядка r задается как:*

$$\nu_n^{(r)}(f) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor!} \gamma\left(\lfloor x\rfloor + 1, \lambda_n\right) + \mathrm{e}^{-\lambda_n} \sum_{j=\lfloor x\rfloor - r+1}^{\lfloor x\rfloor} \frac{(\lambda_n)^j}{j!} \Delta_n(r,f)(j),$$

где $\Delta_n(r,f)$ поправочный член, определенный в предложении 7, а функция γ задается как:

$$\gamma(x,\lambda) = \int_0^\lambda t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

(2) Для $f(j) = (j-K)^+$ с $K \in \mathbb{R}$ аппроксимация по модулю пуассоновского распределения порядка r задается, как:

$$\begin{aligned}\nu_n^{(r)}(f) = &\frac{\lambda_n}{(\lceil K\rceil - 2)!} \gamma\left(\lceil K\rceil - 1, \lambda_n\right) - \frac{K}{(\lceil K\rceil - 1)!} \gamma\left(\lceil K\rceil, \lambda_n\right) \\ &+ \mathrm{e}^{-\lambda_n} \sum_{j=\lfloor K\rfloor - r+1}^{\lfloor K\rfloor} \frac{(\lambda_n)^j}{j!} \Delta_n(r,f)(j).\end{aligned}$$

Доказательство. (1) Воспользуемся предложением 7, так как функция является ограниченной. Для получения формулы отдельно вычислим два слагаемых из (4). $\mathbb{E} f(Y_n) = \mathbf{P}(X > x)$. Рассмотрим производную по параметру λ от $\mathbf{P}(X > x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathbf{P}(X > x) &= \sum_{j=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^j\right) \\ &= \sum_{j=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{(j)!} \\ &= \sum_{j=\lfloor x\rfloor}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} - \sum_{j=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{(j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}.\end{aligned}$$

Отсюда по определению γ получим:

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_0^\lambda \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!} dt = \frac{1}{\lfloor x\rfloor!} \gamma(\lfloor x\rfloor + 1, \lambda).$$

Для вычисления второго слагаемого рассмотрим поправочный член:

$$\Delta_n(r,f)(j) = \sum_{k=1}^{r} b_{k,n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{l}{k} \mathbb{1}_{\{j+l>[x]\}}.$$

Для $j \le \lfloor x \rfloor - r$ все члены в сумме зануляются. Для $j \ge \lfloor x \rfloor + 1$ получаем под знаком суммы $\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} = 0$. Таким образом, после раскрытия математического ожидания по определению равенство доказано.

(2) Воспользоваться предложением 7 также можно, так как функцию можно ограничить многочленом и применить теорему Лебега в доказательстве предложения. Рассмотрим первое слагаемое:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(Y_n - K)^+ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j-K)^+ \mathrm{e}^{-\lambda_n} \frac{(\lambda_n)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=\lceil K \rceil}^{\infty} (j-K) \mathrm{e}^{-\lambda_n} \frac{(\lambda_n)^j}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_n} \sum_{j=\lceil K \rceil}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^j}{(j-1)!} - K\mathbf{P}\,(Y_n > \lceil K \rceil - 1) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_n} \lambda_n \sum_{j=\lceil K \rceil - 1}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^j}{j!} - K\mathbf{P}\,(Y_n > \lceil K \rceil - 1) \\
&= \lambda_n \mathbf{P}\,(Y_n > \lceil K \rceil - 2) - K\mathbf{P}\,(Y_n > \lceil K \rceil - 1)\,.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся полученной в предыдущем подпункте связью между γ и хвостом распределения:

$$
\mathbb{E}\,(Y_n - K)^+ = \frac{\lambda_n}{(\lceil K \rceil - 2)!} \gamma\,(\lceil K \rceil - 1, \lambda_n) - \frac{K}{(\lceil K \rceil - 1)!} \gamma\,(\lceil K \rceil, \lambda_n)\,.
$$

Для поправочного члена:

$$
\Delta_n(r,f)(j) = \sum_{k=1}^{r} b_{k,n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} (j+l-K)^+.
$$

Аналогичным образом при $j \le \lfloor x \rfloor - r$ и $j \ge \lfloor x \rfloor + 1$ получаем 0, отсюда следует требуемое равенство. □

6 Заключение

В данной работе было рассмотрено понятие сходимости по модулю распределения, которое обладает широким спектром применений и значительным потенциалом. Результаты, полученные для сходимости по модулю нормального распределения и пуассоновского распределения, далеко не исчерпываются данной работой.

Одной из целей работ являлась демонстрация схемы аппроксимации по модулю пуассоновского распределения. Так, с помощью полученных в предложении 8 аппроксимаций функций, в модели “Bernoulli mixture” возможна наиболее эффективная аппроксимация Var и ES, как показано в [8].

Список литературы

[1] L. Breiman. *Probability*. SIAM, 1992.

[2] F. Delbaen, E. Kowalski, and A. Nikeghbali. Mod-ϕ convergence. *International Mathematics Research Notices*, 2015(11):3445–3485, 2014.

[3] P. Erdos and M. Kac. The gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *American Journal of Mathematics*, 62(1):738–742, 1940.

[4] V. Feray, P.-L. Meliot, and A. Nikeghbali. *Mod-phi convergence: Normality zones and precise deviations*. Springer, 2016.

[5] J. Jacod, E. Kowalski, and A. Nikeghbali. Mod-gaussian convergence: New limit theorems in probability and number theory. *Forum Mathematicum*, 23(4), 2008.

[6] E. Kowalski and A. Nukeghbali. Mod-poisson convergence in probability and number theory. *International Mathematics Research Notices*, 2010(18):3549–3587, 2009.

[7] P.-L. Meliot, A. Nikeghbali, and G. Visentin. Mod-poisson approximation schemes and higher-order chen-stein inequalities. preprint at `doi.org/10.48550/arXiv.2210.13818`, 2022.

[8] P.-L. Meliot, A. Nikeghbali, and G. Visentin. Mod-poisson approximation schemes: Applications to credit risk. preprint at `doi.org/10.48550/arXiv.2211.04436`, 2022.

[9] G. Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* American Mathematical Soc., 2015.