



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...و

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

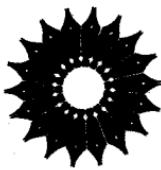
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزوی

ترجمه جمشید فرشیدی



جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزو

ترجمه جمشید فرشیدی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار مؤلفین	۱
فصل ۱. معادلات خطی	۵
۱۰۱. هیئت‌ها	۵
۱۰۲. دستگاه‌های معادلات خطی	۷
۱۰۳. ماتریسها و اعمال سطربال مقدماتی	۱۰
۱۰۴. ماتریس‌های تحویل شده سطربال پلکانی	۱۸
۱۰۵. ضرب ماتریسی	۲۵
۱۰۶. ماتریس‌های معکوس پذیر	۳۱
فصل ۲. فضاهای برداری	۴۱
۲۰۱. فضاهای برداری	۴۱
۲۰۲. زیرفضاهای	۴۸
۲۰۳. پایه و بعد	۵۶
۲۰۴. مختصات	۶۷
۲۰۵. خلاصه همارزی سطربال	۷۵
۲۰۶. محاسبات مربوط به زیرفضاهای	۷۸

عنوان

صفحه

۹۱	فصل ۳. تبدیلهای خطی
۹۱	۱۰۳. تبدیلهای خطی
۱۰۰	۲۰۳. جبر تبدیلهای خطی
۱۱۲	۳۰۳. یکریختی
۱۱۵	۴۰۳. نمایش ماتریسی تبدیلهای
۱۲۹	۵۰۳. تابعکپای خطی
۱۴۱	۶۰۳. دوگان مضاعف
۱۴۷	۷۰۳. ترانهاده تبدیل خطی
۱۵۳	فصل ۴. چند جمله‌ایها
۱۵۳	۱۰۴. جبرها
۱۵۶	۲۰۴. جبر چند جمله‌ایها
۱۶۱	۳۰۴. درون یابی لاگرانژ
۱۶۶	۴۰۴. ایدآل‌های چند جمله‌ایها
۱۷۵	۵۰۴. تجزیه چند جمله‌ایها به سازه‌های اول
۱۸۳	فصل ۵. دترمینان
۱۸۳	۱۰۵. حلقه‌های جا بجا
۱۸۴	۲۰۵. تابع دترمینان
۱۹۶	۳۰۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان
۲۰۴	۴۰۵. چند خاصیت دیگر دترمینان
۲۱۴	۵۰۵. مدول
۲۱۶	۶۰۵. تابع چند خطی
۲۲۶	۷۰۵. حلقة‌گر اسماں
۲۲۷	فصل ۶. فرمهای متعارف مقدماتی
۲۲۷	۱۰۶. مقدمه
۲۳۸	۲۰۶. مقادیر سرشت نما
۲۴۹	۳۰۶. چند جمله‌ایهای پوچساز
۲۶۰	۴۰۶. زیرفضاهای پایا

عنوان

صفحه

۲۶۹

۲۷۲

۲۷۸

۲۷۶

۲۹۷

۲۹۷

۳۰۲

۳۱۸

۳۲۸

۳۴۱

۳۵۱

۳۵۱

۳۵۹

۳۷۶

۳۸۸

۴۰۳

۴۱۳

۴۱۴

۴۱۵

۴۲۰

۴۲۹

۴۳۳

۴۴۹

۴۶۱

۴۶۱

۴۷۱

- ۵.۶. مثیل بندی همزمان با قطری سازی همزمان
۶.۶. تجزیه به مجموع مستقیم
۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا
۸.۶. قضیه تجزیه اولیه

فصل ۷. فرمهای گویا و ژوردان

۱۰. زیرفضاهای دوری و پوچساز
۲۰. تجزیه‌های دوری و فرم گویا
۳۰. فرم ژوردان
۴۰. محاسبه سازه‌های پایا
۵۰. خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

فصل ۸. فضاهای ضرب داخلی

۱۰. ضربهای داخلی
۲۰. فضاهای ضرب داخلی
۳۰. تابعکهای خطی و الحاقیه
۴۰. عملگرهای یکانی
۵۰. عملگرهای نرمال

فصل ۹. عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی

۱۰. مقدمه
۲۰. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی
۳۰. فرمهای مثبت
۴۰. چند مطلب دیگر درباره فرمها
۵۰. نظریه طیفی
۶۰. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

فصل ۱۰. فرمهای دو خطی

- ۱۰.۱۰. فرمهای دوخطی
۲۰.۱۰. فرمهای دو خطی متقارن

۴۸۲	۳۰۱۵. فرمهای دو خطی متقاضن کج
۴۸۷	۴۰۱۰. گروههای حافظ فرمهای دو خطی
۴۹۵	پیوستها
۴۹۶	پ.۱. مجموعه
۴۹۷	پ.۲. تابع
۵۰۱	پ.۳. رابطه هم‌ارزی
۵۰۵	پ.۴. فضاهای خارج قسمت
۵۰۸	پ.۵. روابط هم‌ارزی در جبر خطی
۵۰۹	پ.۶. اصل موضوع انتخاب
۵۱۱	واژه‌نامه انگلیسی به‌فارسی
۵۲۷	واژه‌نامه فارسی به‌انگلیسی
۵۳۳	فهرست راهنمای

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

پیشگفتار مَقْلُوفین

هدف اصلی ما از نوشتمن این کتاب تهیه کتابی درسی برای درس جبر خطی دوره لیسانس در انسیتو تکنولوژی ماساچوست (M. I. T.) بوده است. این درس برای دانشجویان بامهاد ریاضی در سطح سال سوم طرح ریزی شده بود؛ با این وجود سه‌چهارم دانشجویان از سایر رشته‌های علمی و فنی، از دانشجویان سال اول گرفته تا دانشجویان بعد از لیسانس، جلب این درس می‌شدند. چنین توصیفی امروزه هم درمورد مستمعین این درس در M. I. T. عموماً درست است. در ده‌سالی که از چاپ اول این کتاب می‌گذرد، دوره‌های جبر خطی در سراسر کشور رشد نموده و بهیکی از مؤلفین فرصتی دست داده است تامطالب بنیانی این کتاب را برای گروههای مختلفی در دانشگاههای براندازی^۱، واشنگتن^۲ (سینت-لوئیس^۳)، و کالیفرنیا (ایروین^۴) تدریس کند.

منظور اصلی ما از تجدیدنظر در کتاب جبر خطی افزایش تنوع درس‌های بوده است که بسهولت بتواند از روی آن تدریس شود. ازیک طرف، فصلها، بخصوص فصلهای مشکل را طوری می‌ریزی کرده‌ایم که در طول راه ایستگاههای طبیعی متعددی وجود داشته باشد تا دست مدرس در انتخاب موضوع برای یک دوره سه‌ماهه یا نیمساله بهمیزان قابل توجهی باز نگه داشته شود. از طرف دیگر، مقدار مطالب کتاب را افزایش داده‌ایم، تا بتواند برای یک دوره یکساله نسبتاً جامع در جبر خطی به کار رود و حتی به عنوان کتابی مرجع مورد استفاده ریاضیدانان قرار گیرد.

تفصیرات عمده، در نحوه برخورد ما با فرمهای متعارف و فضاهای ضرب داخلی صورت گرفته است. دیگر آنکه فصل ۶ را همچون گذشته با نظریه فضایی عمومی که زمینه نظریه فرمهای متعارف است آغاز نمی‌کنیم. ابتدا مقادیر سرشت نمایم را در ارتباط با قضایای قطری کردن و مثلى کردن مطرح می‌کنیم و سپس راه خود را به سوی نظریه عمومی می‌گشاییم. فصل ۸ را بهدو نیمه شکسته‌ایم تا بدنیال مطالب اساسی درمورد فضاهای ضرب داخلی

وقطري کردن يکاني، فصل ۹ را يياوريم که در باره فرمهاي يك و نيم خطى است و در باره خواص پيچيده تر عملگرهاي نرمال از جمله عملگرهاي نرمال روی فضاهاي ضرب داخلی حقيقی به بحث می پردازد.

بعلاوه، نسبت به چاپ اول چند تغيير کوچك هم داده و اصلاحاتي نيز در آن به عمل آورده ايم. اما فلسفة بنيانی متن را همچنان حفظ کرده ايم.

ما برای اين واقعیت که ممکن است اکثر دانشجویان عمدتاً به ریاضیات علاقه مند باشند امتیاز خاصی قایل نشده ايم. زیرا اعتقاد داريم که دروس ریاضی نباید تکنیکهاي درهم و برهم به دانشجویان رشته های علوم، مهندسي، یا علوم اجتماعي یاموزند، بلکه باید وسیله ای جهت درک مقاهیم بنيانی ریاضی برای آنان فراهم آورند.

از طرف ديگر، ما از گونا گونی زمينه های تحصياني دانشجویان و بخصوص از اين واقعیت که دانشجویان ممکن است دراستدلال ریاضی مجرد تجربه بسیار اندکی داشته باشند، بخوبی آگاه بوده ايم. بهمین دليل در ابتداي کتاب از معرفی ييش از حد ايده های مجرد خودداری کرده ايم. ضمناً پيوستی را که متضمن مقاهیمي اساسی چون مجموعه، تابع، و رابطه هم ارزی است به کتاب افزوده ايم. به تجریبه در یافته ايم که روی اين مقاهیم زیاده مکث نکنیم، بلکه به دانشجویان توصیه نماییم که هنگام مواجهه با این مقاهیم به پيوست مراجعه کنند. در سراسر کتاب مثالهای متنوع بسیاری برای مقاهیم مهمی که در متن ظاهر می شوند گنجانیده ايم. مطالعه چنین مثالهایی واجد اهمیتی اساسی است و به کسم شدن تعداد دانشجویانی منجر می شود که می توانند تعاریف، قضایا، و اثباتها را به ترتیب منطقی ولی بدون درک معانی مقاهیم مجرد تکرار کنند. کتاب همچنین شامل انسواع بسیاری تمرين طبقه بندی شده (در حدود شصت درجه) است که مسائل سر داست را دربرمی گیرد تاماسائی را که مخصوص دانشجویان خیلی زده است. هدف این بوده است که تمرين بخش مهمی از کتاب را تشکیل بدهد.

فصل يك با دستگاههای معادلات خطی و یافتن جواب آنها از طریق عملهای سطری مقدماتی روی ماتریسها سروکار دارد. کار ما این بوده است که حدود شش ساعت درسی روی این مطالب وقت صرف کنیم. این فصل برای دانشجویان تصویری از خاستگاههای جبر خطی را فراهم می کند، و نیز شیوه محاسباتی لازم جهت فهم مثالهایی از مقاهیم مجرد تری را که در فصلهای بعد پیش می آیند به آنان می آموزد. فصل ۲ فضاهاي برداري، زيرفضها، پايهها، و بعد را مورد بحث قرار می دهد. فصل ۳ درباره تبدیلهای خطی، جبر آنها، نمایش آنها توسط ماتریسها، و نیز درباره یکریختیها، تابعکهای خطی، و فضاهاي دو گان گفتگو می کند. فصل ۴ به تعریف جبر چندجمله ایهای بر روی يك هیأت، يك الهای در آن جبر، و تجزیه چندجمله ایها به سازه های اول می پردازد. این فصل همچنین ریشه ها، فرمول تیلور، و فرمول درون یا بی لانگرانژ را مورد بحث قرار می دهد. فصل ۵ در مینان ماتریسهاي مرعي را عرضه می کند - در مینان به عنوان تابع «خطی» متوابی از سطرهای ماتریس در نظر گرفته می شود - و سپس به توابع چندخطی روی مدولها و نیز به حلقة گر اسمان می پردازد.

مطلب مر بوط به مدولها، مفهوم دترمینان را در مقامی گسترده‌تر و فراگیر نده تر از آنچه که معمولاً در کتب درسی مقدماتی یافت می‌شود، قرار می‌دهد. فصلهای ۶ و ۷ در برگیرنده بحثی است در مورد مفاهیمی که برای تحلیل یک تبدیل خطی تنها روی یک فضای برداری با بعد متنه‌ی، تحلیل مقادیر سرشت‌نمای (ویژه)، تبدیلهای مثلثی شونده و قطری شدنی، و نیز برای تحلیل مفاهیم اجزای قطری شدنی و پوچ توان تبدیلهای عمومیتر و فرمهای متعارف گویا و ژردان بنیانی هستند. قضایای تجزیه اولیه و تجزیه دوری، که قضیه دوم ضمن مطالعه زیرفضاهای مجاز پیش می‌آید، نقشی اساسی به عهده داردند. فصل ۷ شامل مبحثی است در مورد ماتریس‌های برروی یک میدان چند جمله‌ایها، محاسبه سازه‌های پایا و مقسوم-علیه‌های مقدماتی ماتریسها، و نیز شامل پروراندن فرم متعارف اسمیت است. این فصل با بحثی راجع به عملگرهای نیم‌ساده، جهت تکمیل تحلیل یک عملگر، پایان می‌پذیرد. فصل ۸ بتفصیل درباره فضاهای ضرب داخلی با بعد متنه‌ی گفته‌گویی کند. این فصل هندسه‌پایه را، جهت ربط متعامدسازی با ایده «بهترین تقریب یک بردار»، شامل می‌شود و راهش را به مفاهیم تصویر متعامد یک بردار برروی یک زیرفضا و مکمل متعامد یک زیرفضا می‌گشاید. همچنین این فصل عملگرهای یکانی را مورد بحث قرار می‌دهد، و به قدری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال منتهی می‌شود. فصل ۹ پس از معرفی فرمهای یک‌و نیم خطی، آنها را به عملگرهای مثبت و خودالحاق روی فضاهای ضرب داخلی مربوط می‌سازد و به سمت نظریه طیفی عملگرهای نرمال و سپس به سمت نتایج ظریف تر درباره عملگرهای نرمال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط به پیش می‌رود. فصل ۱۰ ضمن بحث درباره فرمهای دوخطی، بر فرمهای متعارف برای فرمهای متقارن و متنقارن کج و نیز برگرهای حافظ فرمهای نابهنجون، بدرویژه برگرهای متعامد، یکانی، شبهمتعامد و لورنس تأکید می‌کند.

به گمان ما هر درسی که این کتاب را مورد استفاده قرار دهد باید فصلهای ۱، ۲ و ۳، بجز احتمالاً بخشهای ۶.۰.۳ و ۷.۰.۳ را که با دوگان مضاعف و ترانهاده تبدیل خطی سروکار دارند تماماً شامل شود. فصلهای ۴ و ۵ درباره چند جمله‌ایها و دترمینانها را می‌توان با درجات متفاوتی از دقت تدریس کرد. در حقیقت، اید آلهای چند جمله‌ایها و خواص بنیانی دترمینانها را می‌توان کاملاً بهطور خلاصه و بدون خدشة جدی به سیر منطقی متّه؛ در پن داد؛ با این وجود، تمايل ما این است که این فصلها (با استثنای نتایج مربوط به مدولها) با کمال دقت مورد بحث قرار گیرند، چراکه این مطالب به نحو بسیار بارزی تمايانگر ایده‌های اساسی جبر خطی هستند. بالاخره یک درس مقدماتی می‌تواند بهطور مطلوبی با چهار بخش نیز مدنظر باشند، پوشش جامع تری از فصل ۶ الزامی است.

هنوز هم مدیون کسانی هستیم که ما را در چاپ اول یاری داده‌اند، بویژه به استادانی چون هری فورستنر گک، لویس هوارد، دانیل کن، ادوارد ترپ، و بهخانم جودیت بوورز، خانم بتی آن (سادرجنت) رز و دوشیزه فیلیس روئی. بعلاوه، علاقهمندیم از بسیاری از

دانشجویان و همکارانی که نظر تیز بینشان سبب این تجدیدچاپ شده است و نیز از کارکنان پرنتیس-هال به خاطر برداشتن در سروکله زدن با دموئلف گرفتار در عذاب مدیریت دانشگاهی تشکر کیم. در پایان، تشکر خاص خود را به خانم سوفیا کولوراس، هم به خاطر مهارت و هم به لحاظ کوششهای خستگی ناپذیرش در ماشین کردن نسخه خطی تجدیدنظر شده تقدیم می کیم.

ک. م. ه. / ر. ا. ک.

معادلات خطی

دانلود از سایت (یاضر سرا)
www.riazisara.ir

۱.۱ هیئت‌نها

فرض می‌کنیم خواننده با جبر مقدماتی اعداد حقیقی و اعداد مختلط آشنا باشد. خواص جبری اعدادی که در بخش عمده‌ای از این کتاب به کار خواهند رفت، از فهرست مختصر خواص جمع و ضرب مذکور در زیر بهره‌ولت قابل استخراج‌اند. فرض کنیم F نمایشگر مجموعه اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد مختلط باشد.

۱. جمع جابجایی است؛ یعنی بهازای هر x و y در F ،

$$x+y=y+x.$$

۲. جمع شرکت‌پذیر است؛ یعنی بهازای هر x ، y ، و z در F ،

$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$

۳. عنصر یکتایی مانند 0 (صفر) در F وجود دارد، به طوری که بهازای هر x در

$$x+0=x, F$$

۴. به هر x در F عنصر یکتای $(-x)$ در F متناظر است به طوری که

$$x+(-x)=0$$

۵. ضرب جابجایی است؛ یعنی بهازای هر x و y در F ،

۶. عنصر راگاهی عضو هم نامند... .

$$xy = yx.$$

۶. ضرب شرکت پذیر است؛ یعنی به ازای هر x ، y ، و z در F ،

$$x(yz) = (xy)z.$$

۷. عنصر غیر صفر یکتا بی مانند ۱ (یک) در F وجود دارد به طوری که به ازای هر x

$$\text{در } F, x \cdot 1 = x$$

۸. بهر x غیر صفر در F ، عنصر یکتا بی x^{-1} (یا $1/x$) در F متاظر است به طوری که $1 = x^{-1} \cdot x$.

۹. ضرب بر روی جمع پخش پذیر است؛ بدین معنی که، به ازای هر x ، y ، و z در

$$\text{در } F, x(y+z) = xy + xz$$

فرض کنیم مجموعه F مشکل از اشیاء x ، y ، z ، \dots و دو عمل، به صورت زیر، روی عناصر آن در دست باشند. عمل اول، که جمع نام دارد، به رجت عنصر x و y در F ، عنصر $(x+y)$ در F را مبوط می‌سازد؛ عمل دوم، که ضرب نامیله می‌شود، به رجت xy و y ، عنصر xy در F را وابسته می‌سازد؛ بعلاوه، این دو عمل شرایط $(1)-(9)$ فوق الذکر را بر می‌آورند. در این صورت، مجموعه F همراه با این دو عمل یک هیأت نامیله می‌شود. به صورت تاریخی، یک هیأت عبارت است از مجموعه‌ای همراه با چند عمل روی اشیاء آن که رفتاری شبیه به اعمال جمع، ضرب، تفکیق، و تقسیم معمولی در اعداد دارند؛ بدین معنی که از نه قاعده جبری مذکور در بالا تبعیت می‌کنند. C ، مجموعه اعداد مختلط، همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی یک هیأت است، و همچنین است R مجموعه اعداد حقیقی.

در پخش اعظم این کتاب «اعداد»ی را که به کار می‌بریم می‌توانند عناصر یک هیأت دلخواه مانند F باشند. برای تثیت این عمومیت، به جای «عدد»، واژه «اسکالر» را به کار خواهیم برد. هرگاه خواننده هیأت اسکالرهای همواره زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط فرض کند، چیزی زیادی را از دست نداده است. یک زیرهیأت از هیأت C ، مجموعه‌ای است مانند F از اعداد مختلط که خود تحت اعمال معمولی جمع و ضرب اعداد مختلط، یک هیأت باشد. منظور این است که 0 در مجموعه F قرارداشته باشند، و اگر x و y عناصر F باشند، $(x+y)$ ، xy ، $-x$ ، $y-x$ ، و x^{-1} (هرگاه $x \neq 0$) نیز در F باشند. مثالی از این گونه زیرهیأتها، هیأت اعداد حقیقی R است. زیرا، اگر اعداد حقیقی را با اعداد مختلط $a+bi$ که در آنها $b=0$ یکی بگیریم، 0 و 1 هیأت اعداد مختلط، اعدادی حقیقی محاسب می‌شوند، و اگر x و y حقیقی باشند، $(y+x)$ ، xy ، $-x$ ، $y-x$ ، و x^{-1} (هرگاه $x \neq 0$) نیز حقیقی خواهند بود. مثالهای دیگری نیز در زیر آورده خواهد شد. نکته بحثمان در مورد زیرهیأتها اساساً این است که: اگر با اسکالرهای زیرهیأت معینی از C کار کنیم، انجام اعمال جمع، تفکیق، ضرب، و تقسیم روی این اسکالرهای ما را از زیرهیأت مفروض خارج نخواهد ساخت.

مثال ۱. مجموعه اعداد صحیح و مثبت: $1, 2, 3, \dots, 1000$ ، بدلاً یک مختلف زیر هیأتی از C نیست. مثلاً، عددی صحیح و مثبت نیست؛ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n — عددی صحیح و مثبت نمی باشد؛ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، بجز $1, n/2$ عددی صحیح و مثبت نیست.

مثال ۲. مجموعه اعداد صحیح: $1, 2, \dots, 1000, 20, 1, 5, \dots, 1, -2, 0, \dots, 1, -1$ ، زیر هیأتی از C نیست، چرا که به ازای هر عدد صحیح n ، عدد صحیحی نیست مگر آنکه n برابر ۱ یا -1 باشد. مجموعه اعداد صحیح همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی همان‌شایط $(1)-(9)$ ، بجز شرط (8) را بر می‌آورد.

مثال ۳. مجموعه اعداد گویا، یعنی اعدادی به صورت p/q که در آنها p و q اعدادی صحیح‌اند و $q \neq 0$ ، زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلف است. عمل تقسیم، که در مجموعه اعداد صحیح ممکن نیست، در مجموعه اعداد گویا امکان‌پذیر است. مناسب است که خواستنده علاقه‌مند تحقیق کند که هر زیر هیأت دلخواه C باید شامل همه اعداد گویا باشد.

مثال ۴. مجموعه همه اعداد مختلف به صورت $\sqrt{y} + z$ ، که در آنها y و z گویا هستند، زیر هیأتی از C است. تحقیق این مطلب را به خواستنده وامی گذاریم.

در مثال‌ها و تمرینات این کتاب خواستنده بهتر است یا می‌باشد فرض کند که هیأت در گیر در بحث زیر هیأت از هیأت اعداد مختلف است، مگر آنکه صریحاً قید شده باشد که هیأت کلی تری منظور شده است. در اینجا قصد آن را نداریم که در مورد این نکته به بحث مفصلی پردازیم؛ اما، به هر تقدیر بهتر است که علت قبول چنین فرادرادی را بیان کنیم. در هیأت F ممکن است بتوان یکتا ۱ را چندین بار با خودش جمع کرد و به ۰ دست یافت (ر. ک. تمرین ۵ بخش ۲۰.۱) :

$$1 + 1 + \dots + 1 = 0.$$

این وضع در هیأت اعداد مختلف (یا در زیر هیأت دلخواهی از آن) رخ نمی‌دهد. هرگاه چنین وضعی در F روی دهد، آنگاه کوچکترین n که مجموع n تا ۱ برابر ۰ شود، سرشت نمای هیأت F نامیده می‌شود. اگر چنین وضعی در هیأت F رخ ندهد، آنگاه (بدلیلی کم و بیش عجیب) F را هیأتی با سرشت نمای صفر می‌نامند. اغلب، در مواردی که F را زیر هیأتی از C فرض می‌کنیم، آنچه را که می‌خواهیم تضمین بشود، این است که F هیأتی باشد با سرشت نمای صفر؛ اما، معمولاً بهتر است در نخستین بروخورد با جبرخطی خیلی نگران سرشت نمای هیأت‌ها نباشیم.

۲۰.۱ دستگاههای معادلات خطی

گیریم F یک هیأت باشد. حال مسئله یافتن n اسکالر (عنصر F) x_1, x_2, \dots, x_n که در شرایط

$$\begin{aligned}
 A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\
 A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\
 \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
 A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

صدق می‌کنند، را مورد توجه قرار می‌دهیم. در اینجا y_1, \dots, y_m و x_i ‌ها، به ازای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ عناصر مفروضی از F هستند. (۱-۱) را یک دستگاه m معادلات خطی n مجهولی می‌نامیم. هر n تابی (x_1, \dots, x_n) از عناصر F که در هر یک از معادلات (۱-۱) صدق کند، یک جواب دستگاه نامیده می‌شود. هرگاه $y_1 = y_2 = \cdots = y_m$ گریم دستگاه همگن است، یا آنکه هر یک از معادلات همگن می‌باشد. شاید اساسی‌ترین روش یافتن جوابهای یک دستگاه معادلات خطی، روش «حذف» باشد. این روش را می‌توان روی دستگاه همگن

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

نشان داد. اگر (۲) — برابر معادله دوم را به معادله اول بیفراییم، معادله

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

یا $x_2 = -x_3$ را بدست می‌آوریم. اگر (۳) برابر معادله اول را به معادله دوم بیفراییم، معادله

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

یا $x_1 = -x_3$ حاصل می‌شود. لذا، نتیجه می‌گیریم که اگر (x_1, x_2, x_3) یک جواب باشد، آنگاه $x_1 = -x_3$. عکس، باسانی می‌توان دید که هر سه تابی ازین نوع یک جواب است. بنابراین، مجموعه جوابها مشکل است از همه سه تابیهای $(-a, -a, a)$. جوابهای این دستگاه معادلات را با «حذف مجهولها» یا فیلم؛ بدین معنی که با ضرب معادلات در اسکالرها و سپس افزودن آنها به هم معادلاتی بدست آوریم که در آنها بعضی از x_j ‌ها ظاهر نشوند. می‌خواهیم این فرایند را اندکی رسمیت بخشیم تا عمل درست بودنش را در یا بیم و نیز بتوانیم محاسبات لازم برای حل یک دستگاه را با روشی منظم انجام بدهیم.

فرض کنیم برای دستگاه عمومی (۱-۱)، m اسکالر c_1, c_2, \dots, c_m را انتخاب، معادله $\sum c_i A_{ij}$ را در x_j ضرب، و سپس آنها را با هم جمع کرده باشیم. بدین نحو، معادله $(c_1 A_{11} + \cdots + c_m A_{m1})x_1 + \cdots + (c_1 A_{1n} + \cdots + c_m A_{mn})x_n = c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$

را به دست می آوریم. چنین معادله‌ای را یک ترکیب خطی از معادلات (۱-۱) می‌نامیم. بدینهی است که هر جواب کل دستگاه معادلات (۱-۱)، یک جواب این معادله جدید نیز خواهد بود. این مطلب، ایده اساسی فرایند حذف است. اگر دستگاه معادلات خطی دیگر

$$\begin{array}{l} B_{11}x_1 + \cdots + B_{1n}x_n = z_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ B_{k1}x_1 + \cdots + B_{kn}x_n = z_k \end{array} \quad (2-1)$$

را داشته باشیم، که در آن هر یک از این k معادله ترکیبی خطی از معادلات دستگاه (۱-۱) باشد، آنگاه هر جواب (۱-۱) یک جواب دستگاه جدید نیز هست. البته، این امکان وجود دارد که برخی از جوابهای (۱-۱) جواب (۲-۱) نباشند. واضح است که اگر هر معادله دستگاه اصلی ترکیبی خطی از معادلات دستگاه جدید باشد، این وضع پیش نخواهد آمد. دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نماییم، هرگاه هر معادله یک دستگاه ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد. بدین نحو، می‌توانیم مشاهدات خود را رسماً به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه ۱. جوابهای دستگاههای معادلات خطی هم‌اوزن یکی هستند.

هرگاه فرایند حذف در یافتن جوابهای دستگاهی نظری (۱-۱) مؤثر باشد، در این صورت باید دید چگونه می‌توان با تشکیل ترکیبات خطی معادلات داده شده، دستگاه معادلات هم‌ارزی به دست آورده که حل آن ساده‌تر باشد. در بخش بعد، درباره یک روش انجام این کار بحث خواهیم کرد.

تمرین

۱. تحقیق کنید مجموعه‌ای از اعداد مختلط که در مثال ۴ توصیف شده زیرهیأتی از است.

۲. فرض کنید f هیأت اعداد مختلط باشد. آیا دو دستگاه معادلات خطی زیر هم‌ارزند؟ اگر چنین است، هر معادله این دو دستگاه را به صورت ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر بیان کنید.

$$x_1 - x_2 = 0 \quad 3x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 0$$

۳. دستگاههای معادلات زیر را همانند تمرین ۲ بررسی کنید.

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \quad x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 + \frac{5}{\sqrt{2}}x_3 = 0$$

۴. دستگاههای زیر را همانند تمرین ۲ مورد بررسی فراردهید.

$$2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 0 \quad \left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2ix_3 + 5x_4 = 0 \quad \frac{2}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + x_3 + 7x_4 = 0$$

۵. فرض کنید F مجموعه مشکل از تها دو عنصره و ۱ باشد. اعمال جمع و ضرب را با جدولهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

تحقیق کنید که F همراه با این دو عمل یک هیأت است.

۶. ثابت کنید که اگر جوابهای دو دستگاه معادلات خطی هسگن یکی باشند، آنگاه آن دو دستگاه هم ارزند.

۷. ثابت کنید که هر زیرهیأت از هیأت اعداد مختلط شامل همه اعداد گویاست.

۸. ثابت کنید که هر هیأت با سرشت نمای صفر شامل نسخه‌ای از هیأت اعداد گویاست.

۳.۱ ماتریسها و اعمال سطرنی مقدماتی

در تشکیل ترکیبات خطی از معادلات خطی نمی‌توان بدون توجه به این نکه گذشت که نیازی به ادامه نوشتن «جهولهای» x_1, x_2, \dots, x_n نیست، چراکه محاسبات عملاً فقط در ضرایب A_{ij} و اسکالرهای y صورت می‌گیرند. دستگاه $(A-1)$ را اکنون به صورت

$$AX = Y$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

خلاصه می کنیم. A را ماتریس ضرایب این دستگاه می نامیم. در اصل باید بگوییم که آرایه مستطیلی نموده شده در بالا یک ماتریس نیست، بلکه نمایشی از یک ماتریس است. یک ماتریس $m \times n$ بروی هیأت F عبارت است از یک تابع A از مجموعه جفت‌های (j, i) از اعداد صحیح، $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ، در هیأت F . داده‌های ماتریس A عبارتند از اسکالرهای $a_{ij} = A(i, j)$ ، و اغلب بسیار راحت تراست که، همچون بالا، این ماتریس را با نمایش در اینها یش در یک آرایه مستطیلی $m \times n$ و مستوی تو صیف کنیم. بدین نحو، X (در بالا) یک ماتریس $1 \times n$ است، یا یک ماتریس $n \times 1$ را تعریف می کنند، و Y یک ماتریس $1 \times m$ می باشد. در حال حاضر، $AX = Y$ چیزی جزئیادی خلاصه نوبی برای دستگاه معادلات خطی ما نیست. بعدها، که ضرب ماتریسها را تعریف کردیم، Y به معنی حاصل ضرب دوماتریس A و X نیز خواهد بود.

اکنون می خواهیم آن دسته از اعمال روی سطرهای ماتریس A را، که متناظر به تشکیل ترکیبات خطی معادلات در دستگاه $AX = Y$ هستند، مورد توجه قرار بدهیم. ابتدا، توجه خود را به سه عمل سطري مقدماتی روی یک ماتریس $n \times n$ ، مانند A ، بروی هیأت F محدود می سازیم:

۱. ضرب یک سطر A در یک اسکالر غیر صفر c :

۲. گذاشتن به جای سطر r سطر $r + c$ بعلاوه c بر این سطر s ، که در آن c یک اسکالر

است و $r \neq s$.

۳. تعویض دوسطر A .

بدین نحو، یک عمل سطري مقدماتی عبارت است از نوعی تابع (قاعده) خاص مانند e که بهر ماتریس A ، مانند $m \times n$ ، ماتریس $e(A)$ را که $m \times n$ است متناظر می سازد. e را بطور دقیق می توان در این سه حالت، به صورت زیر تو صیف کرد:

۱. $e(A)_{r,i} = cA_{r,i}$ هرگاه $i \neq r$ و $e(A)_{i,i} = A_{i,i}$

۲. $e(A)_{r,j} = A_{r,j} + cA_{s,j}$ هرگاه $j \neq r$ و $e(A)_{i,j} = A_{i,j}$

۳. $e(A)_{r,j} = A_{s,j}$ هرگاه j مخالف با r و مخالف با s باشد، و $e(A)_{r,r} = e(A)_{s,s}$

$e(A)_{r,j} = A_{r,j}$ در تعریف $e(A)$ در واقع این مهم نیست که ماتریس A چندستون دارد، اما تعداد سطرهای آن کاملاً حائز اهمیت است. مثلاً، در تصمیم گیری راجع به این که معنی تعویض سطرهای r و s در یک ماتریس $m \times n$ چیست، باید کمی نگران بود. برای اجتناب از این گونه پیچیدگیها، توافق می کنیم که عمل سطري مقدماتی e روی رده همسه ماتریسهای $m \times n$ بروی هیأت F ، به ازای یک m ثابت اما هر n دلخواه، تعریف می شود. به بیان دیگر،

یک e بخصوص روی رده همه ماتریس‌های $m \times n$ سطّری بر روی F تعریف می‌شود.
یک دلیل این که ما خود را به این سه نوع ساده از اعمال سطّری محدود می‌سازیم
این است که پس از انجام یک چنین عمل e روی یک ماتریس A ، می‌توانیم با انجام عملی
مشابه روی (A) ماتریس A را دوباره به دست بیاوریم.

قضیّه ۳. به هر عمل سطّری مقدماتی e یک عمل سطّری مقدماتی e_1 از همان
نوع e ، متناظر است، به طوری که به ازای هر ماتریس A ، $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$
به بیان دیگر، عمل (تابع) مذکوم هر عمل سطّری مقدماتی وجود دارد، و خود یک عمل
سطّری مقدماتی از همان نوع است.

اثبات. (۱) فرض کنیم e عملی باشد که سطر m یک ماتریس را در اسکالر غیر صفر c
ضرب می‌کند. e را عملی بگیرید که سطر m را در اسکالر $-c$ ضرب می‌کند. (۲) فرض
کنید e عملی باشد که سطر m را با سطر r بعلاوه s برابر سطّری c ، $j \neq r, s$ ، جایگزین می‌کند.
در این حالت، e را عملی بگیرید که سطر m را با سطر r بعلاوه $(-c)$ برابر سطر s
جایگزین می‌سازد. (۳) اگر e عمل تعویض سطّرهای m و n باشد، e را همان e بگیرید.
در هر یک از این سه حالت، به ازای هر ماتریس A ، بوضوح داریم
 $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$. \square

تعریف. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ بروی هیأت F باشند، گوییم B هم ارز سطّری
است، هرگاه بتوان B را با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطّری مقدماتی از A به دست
آورد.

با استفاده از قضیّه ۲ خواسته بر احتی می‌تواند مطالب زیر را تحقیق کند. هر ماتریس
هم ارز سطّری خودش است؛ اگر B هم ارز سطّری A باشد، آنگاه A هم ارز سطّری B
است؛ اگر B هم ارز سطّری A و C هم ارز سطّری B باشد، آنگاه C هم ارز سطّری A
است، به بیان دیگر، هم ارزی سطّری یک رابطه هم ارزی است (ر. ک. ضمیمه).

قضیّه ۴. اگر دو ماتریس $m \times n$ ، A و B هم ارز سطّری باشند، آنگاه جوابهای
دو دستگاه معادلات خطی همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ یکی هستند.

اثبات. فرض کنیم با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطّری مقدماتی، از A به B برسیم:

$$A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_k = B.$$

کافی است ثابت کنیم جوابهای دو دستگاه $AX = 0$ و $BX = 0$ یکسانی هستند؛ یعنی، اعمال سطّری مقدماتی مجموعه جوابها را تغییر نمی‌دهند.

لذا، فرض کنیم B با یک تک عمل سطّری مقدماتی از A به دست آید. صرف نظر از
نوع این عمل، اعم از (۱)، (۲)، یا (۳)، هر معادله دستگاه $BX = 0$ ترکیبی خطی از

معادلات دستگاه $AX = 0$ است. چون معکوس يك عمل سطري مقدماتي خود يك عمل سطري مقدماتي است، هر معادله دستگاه $AX = 0$ نيز ترکيبي خطوي از معادلات دستگاه $BX = 0$ می باشد. از اين رو، اين دو دستگاه هم ارزند، و بنا بر قضيه ۱ جوابها يشان يكى است. \square

مثال ۵. فرض كنيم A هيأت اعداد گويا باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

دباهاتي متنه ای از اعمال سطري مقدماتي روی ماتریس A انجام می دهيم، و با اعدادي در پرانتز نوع عمل انجام شده را مشخص می کنيم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

هم ارزی سطّری ماتریس A با ماتریس آخر دنباله بالا، علی الخصوص برای ما روش می‌سازد که جوابهای

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_2 + 5x_4 = 0$$

و

$$x_2 - \frac{11}{3}x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{17}{3}x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{5}{3}x_4 = 0$$

یکی هستند. در دستگاه دوم، روش است که هرگاه مقدار دلخواه گویای c را به x_4 نسبت بدهیم، جواب $(c, \frac{11}{3}c, \frac{5}{3}c, c)$ را بدست می‌آوریم، و نیز روش است که همه جوابها به همین صورت می‌باشند.

مثال ۶. فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

در انجام اعمال سطّری غالباً راحت‌تر است که چند عمل از نوع (۲) را توانماً انجام دهیم. با در نظرداشتن این مطلب،

بر

$$\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 0 & 2+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، دستگاه معادلات

$$-x_1 + ix_2 = 0$$

$$-ix_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است.

در مثالهای ۵ و ۶، بدیهی است که اعمال سطري را به طور تصادفي انجام نداده‌ایم. گزینش مازاعمال سطري تحت تأثیر تمايلی برای ساده کردن ماتریس ضرایب، به گونه‌ای شبیه به «حذف مجهولها» در دستگاه معادلات خطی، صورت می‌گیرد. اکنون، اجازه بدهید تعریفی رسمی از نوع ماتریسی را که سعی داشتیم بدان دست پاییم، ارائه کنیم.

تعریف. ماتریسی $m \times n$ ، ماتریس R ، تحويل شده سطري نامیده می‌شود، هرگاه:

(الف) اولین دایه غیر صفر ده سطر غیر صفر R پر ایز باشد؛

(ب) همه دایه‌های دیگر هرستونی اذ R که شامل دایه غیر صفر مقدم یک سطر است، ۰ باشند.

مثال ۷. یک مثال از ماتریسهای تحويل شده سطري، ماتریس همانی $n \times n$ (مربعی) است. این ماتریس، ماتریسی $n \times n$ است که با

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

تعریف می‌شود. این اولین کاربرد دلخواهی کرونکر (8) است که کرارا به کار خواهد رفت.

در مثالهای ۵ و ۶، آخرین ماتریسها در دنبالهای نمایش داده شده، ماتریسهاي

تحویل شده سطری هستند. دو مثال از ماتریسها بی که تحویل شده سطری نیستند، ماتریسها زیرند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ذوین ماتریس در شرط (الف) صدق نمی کند، زیرا درایه غیر صفر مقدم اولین سطر آن ۱ نیست. اولین ماتریس شرط (الف) را بر می آورد، اما ستون ۳ آن حایز شرط (ب) نیست. اکنون ثابت می کنیم که می توان از هر ماتریس داده شده، با تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی، به يك ماتریس تحویل شده سطری رسید. ترکیب این مطلب با قضیه ۳ از این مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی به دست می دهد.

قضیه ۴. هر ماتریس $m \times n$ بودی هیأت F ، هم اذ سطری یك ماتریس تحویل شده سطری است.

اثبات. گیریم A یك ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. اگر همه درایهای سطراول A برابر ۰ باشند، آنگاه تا آنجایی که به سطر اول مربوط است، شرط (الف) برقرار است. اگر سطراول دارای یك درایه غیر صفر باشد، k را کوچکترین عدد صحیح مثبت ز می گیریم که به ازای آن $\neq_{\text{ز}} A$. سطر اول را در $\overset{k}{A}$ ضرب می کنیم تا بدین ترتیب شرط (الف) در سطراول برقرار باشد. اکنون به ازای هر $2 \geqslant i$ ، $(A_{ii} - A_{ii})$ برابر سطراول را به سطر i می افزاییم. بدین نحو، درایه غیر صفر مقدم سطراول درستون k قرار می گیرد؛ این درایه ۱ است، و هر درایه دیگرستون k برابر ۰ است.

اکنون ماتریس حاصل از اعمال فوق را در نظر می گیریم. هر گاه همه درایهای سطر دوم ۰ باشند، روی آن هیچ عملی انجام نمی دهیم. اما، اگر درایهای در سطر دوم مخالف ۰ باشد، این سطر را در اسکالر مناسی ضرب می کنیم تا درایه غیر صفر مقدم آن ۱ بشود. در حالتی که سطراول، درایه غیر صفر مقدمی درستون k داشته باشد، این درایه غیر صفر مقدم سطراول دوم نمی تواند درستون k قرار گیرد. لذا، فرض کنید درایه اخیر درستون k باشد. با افزودن مضربهای مناسبی از سطراول بسطور دیگر، می توان ترتیبی داد که تمامی درایهای ستون k ، بجز ۱ موجود در سطر دوم، ۰ گردند. نکته مهم قابل توجه این است که ضمن انجام اعمال اخیر، نه تنها درایهای سطر ۱ در ستونهای ۱، \dots ، k تغییر نمی کنند، بلکه همه درایهای ستون k نیز بدون تغییر می مانند. البته، اگر همه درایهای سطراول صفر باشند، اعمال روی سطر دوم تأثیری بر سطراول نخواهند داشت.

هر گاه روش فوق الذکر را هر بار روی یك سطر به کار بندیم، روش است که پس از طی مراحلی متناهی به يك ماتریس تحویل شده سطری دست خواهیم یافت. □

تمرین

۱. همه جوابهای دستگاه معادلات

$$(1-i)x_1 - ix_2 = 0$$

$$2x_1 + (1-i)x_2 = 0$$

را به دست آورید.

۱۰۲

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

با تحویل سطري کردن A ، همه جوابهای $AX = 0$ را به دست آورید.

۱۰۳

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

همه جوابهای دستگاههای $AX = 2X$ و $AX = 3X$ را به دست آورید. (علامت c نشانگر ماتریسی است که هر درایه آن c برابر درایه متناظر در ماتریس X است.)

۱۰. یک ماتریس تحویل شده سطري بیاورد که هم ارز سطري ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

باشد.

۱۱. ثابت کنید که دوماتریس زیر هم ارز سطري نیستند:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

۱۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- ماتریسی 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید A تحویل شده سطروی باشد، و $a+b+c+d=0$. ثابت کنید که دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.
۷. ثابت کنید که عمل تعویض دو سطر یک ماتریس را می‌توان با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطروی مقدماتی از دو نوع دیگر انجام داد.

۸. دستگاه معادلات $0 = AX$ را که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس 2×2 بروی هیأت F است، در نظر بگیرید. ثابت کنید که:

(الف) اگر همه درایه‌های A صفر باشند، آنگاه هر جفت (x_1, x_2) جوابی برای $AX = 0$ است.

(ب) اگر $ad - bc \neq 0$ ، آنگاه دستگاه $0 = AX$ فقط دارای جواب بدیهی است. $x_1 = x_2 = 0$

(پ) اگر $ad - bc = 0$ و درایه‌ای از A مخالف ۰ باشد. آنگاه جوابی چون (x_1^0, x_2^0) وجود دارد به طوری که (x_1^0, x_2^0) یک جواب دستگاه است اگر و تنها اگر اسکالری چون y با شرایط $x_1^0 = yx_2^0$ و $x_2^0 = yx_1^0$ وجود داشته باشد.

۴. ماتریسهای تحویل شده سطروی پلکانی

تا به حال، کار ما روى دستگاههای معادلات خطی از کوششی جهت یافتن جوابهای این دستگاهها نشأت می‌گرفت. در بخش ۳.۰.۱ روئی متعارفی برای یافتن این جوابها بنیاد نهادیم. اکنون می‌خواهیم اطلاعاتی به دست آوریم که اندکی بیشتر جنبه نظری دارند، و برای این منظور، مناسب است از ماتریسهای تحویل شده سطروی پلکانی فراتر نهیم.

تعریف. ماتریس $n \times m$ مسند R ، تحویل شده سطروی پلکانی نامیده می‌شود هرگاه:

(الف) R تحویل شده سطروی باشد؛

(ب) هر سطر R که همه درایه‌هایش صفر باشد، ذیر همه سطودی که دادای درایه‌ای غیر صفرند واقع بشود؛

(پ) اگر سطرهای $1, 2, \dots, r$ سطرهای غیر صفر ماتریس R باشند و دایای غیر صفر مقدم سطر i دستون k_i باشند، آنگاه $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

هر ماتریس تحویل شده سطري پلکانی $m \times n$ مانند R را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد. یا هر درایه R برابر ۰ است، یا عدد صحیح مثبتی مانند $m, r \leqslant r \leqslant n$ و عدد صحیح مثبت k_1, k_2, \dots, k_r با شرط $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots \leqslant k_r \leqslant n$ وجود دارند به طوری که

(الف) به ازای i, j : $R_{ij} = 0$; و اگر $i < k_j$ و $j < k_i$ آنگاه $R_{ij} = 0$.

(ب) $1 \leqslant i \leqslant r, R_{ikj} = \delta_{ij}$.

(ب) $k_1 < \dots < k_r$.

مثال A. ماتریس همانی $n \times n$ و ماتریس صفر $n \times n$ که با $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$ نشان داده می‌شود و همه درایه‌ها یک است، دو مثال از ماتریسهای تحویل شده سطري پلکانی اند. هر چند، خواننده در ساختن مثالهای دیگر باید مشکل چندانی داشته باشد، با این حال، علاقمندیم مثالی غیربدیهی هم ارائه کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قضیه ۵. هر ماتریس $m \times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شده سطري پلکانی هم‌آخذ سطري است.

اميلات. می‌دانیم که A هم‌آخذ سطري با یک ماتریس تحویل شده سطري است. تنها چيزی که باید ثابت کنیم این است که با انجام تعدادی متناهي عمل تعويض سطري روی یک ماتریس تحویل شده سطري می‌توان آن را به شکل تحویل شده سطري پلکانی درآورد. \square

در مثالهای ۵ و ۶ اهمیت ماتریسهای تحویل شده سطري را در حل دستگاههای معادلات خطی همگن دیدیم. اکنون به طور خلاصه دستگاه $RX = 0$ را، که در آن R یک ماتریس تحویل شده سطري پلکانی است، مطرح می‌کنیم. فرض کنیم سطرهای $1, 2, \dots, m$ سطرهای غیرصفر R و درایه غیرصفر مقدم سطر i آن در ستون x_k باشد. در این صورت، دستگاه $RX = 0$ مركب از m معادله غیربدیهی است. بعلاوه، مجھول x_k فقط در m معادله (با ضریب غیرصفر) ظاهر می‌شود. اگر u_1, u_2, \dots, u_{m-r} را $(n-r)$ مجھول غیراز x_k, \dots, x_m فرض کنیم، آنگاه m معادله غیربدیهی در $RX = 0$ به صورت

$$x_k + \sum_{j=1}^{m-r} c_{kj} u_j = 0 \quad (3-1)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_k + \sum_{j=1}^{m-r} c_{kj} u_j = 0$$

هستند. همه جوابهای دستگاه معادلات $RX = 0$ با تخصیص مقادیری دلخواه به x_1, x_2, \dots, x_n و سپس محاسبه مقادیر متناظر x_1, x_2, \dots, x_n از $(1-3)$ بدست می‌آیند. مثلاً، اگر R ماتریس نشان داده شده در مثال ۸ باشد، آنگاه $k_1 = 4, k_2 = 2, r = 2, n = 5$ ، و دو معادله غیربدیهی در دستگاه $RX = 0$ عبارتند از

$$x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5 \quad \text{یا} \quad x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0$$

$$x_4 = -2x_5 \quad \text{یا} \quad x_4 + 2x_5 = 0$$

لذا، می‌توان هر مقداری به x_3, x_4 ، و x_5 تخصیص داد، مثلاً $x_3 = a, x_4 = b, x_5 = c$ ، و $x_1 = x_2 = 0$ را بدست آورد.

حال درمورد دستگاه معادلات $RX = 0$ مطلب دیگری را بررسی می‌کنیم. اگر $r < n$ ، تعداد سطرهای غیرصفر ماتریس R ، کمتر از n باشد، آنگاه دستگاه $RX = 0$ دارای یک جواب غیربدیهی، یعنی یک جواب (x_1, x_2, \dots, x_n) است که در آن همه x_i ها صفر نیستند. زیرا، بدلیل اینکه $n > r$ ، می‌توانیم r جواب را انتخاب کنیم که در بین r مجھول x_1, x_2, \dots, x_r نباشد، و در این صورت می‌توانیم جوابی همچون جواب بالا را که در آن این x_i برای $i = 1, 2, \dots, r$ باشد، بازیم. این مطلب ما را به یکی از بنیادینترین واقعیتهای در باره دستگاههای معادلات خطی همگن می‌رساند.

قضیه ۶. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه دستگاه معادلات خطی همگن $AX = 0$ یک جواب غیربدیهی دارد.

اثبات. فرض کنیم R یک ماتریس تحويل شده سط्रی پلکانی باشد که با A هم ارز سط्रی است. بنابر قضیه ۳، جوابهای دستگاههای $AX = 0$ و $RX = 0$ یکی هستند. اگر r تعداد سطرهای غیرصفر R باشد، آنگاه یقیناً $m \leq r$ ، و چون $m < n$ ، داریم $r < n$. از ملاحظات فوق بیدرنگ نتیجه می‌شود که $AX = 0$ یک جواب غیربدیهی دارد. \square

قضیه ۷. اگر A یک ماتریس $n \times n$ (مربعی) باشد، آنگاه A هم ارز سطري ماتریس همانی $n \times n$ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات $AX = 0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

اثبات. اگر A هم ارز سطري I باشد، آنگاه جوابهای $AX = 0$ و $IX = 0$ یکی هستند. بعکس، فرض کنیم $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $X = 0$ باشد. R را ماتریس تحويل شده سطري پلکانی $n \times n$ می‌گیریم که هم ارز سطري A است. فرض کنیم r تعداد سطرهای غیرصفر R باشد. در این صورت، $RX = 0$ هیچ جواب غیربدیهی ندارد. بنابراین، $r \geq n$. از طرفی، چون R دارای n سطرات است، روشی است که $n \leq r$ و بنابراین $r = n$. چون مطلب اخیر به این معنی است که R عالملاً در هر یک از n سطرش یک درایه غیرصفر مقدم ۱ دارد، و نیز اینها هر یک در یکی از n ستون مختلف قرار دارند، R

می‌باید ماتریس همانی $n \times n$ باشد. \square

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که اثر اعمال سطري مقدماتی در جریان حل یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن $AX = Y$ چیست؟ در بدو امر، تفاوتی اساسی بین این حالت و حالت همگن مشاهده می‌شود، و آن این است که علی‌رغم این‌که دستگاه همگن همواره دارای جواب بدینهی $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ است، لازم نیست یک دستگاه ناهمگن اصلاً جوابی داشته باشد.

A' ، ماتریس افزوده دستگاه $AX = Y$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس، ماتریسی $(n+1) \times m$ است که n ستون اولش ستونهای ماتریس A و ستون آخرش Y است. به طور دقیقتر،

$$A'_{ij} = A_{ij}, \quad \text{اگر } n \leq j,$$

$$A'_{i(n+1)} = y_i.$$

فرض کنیم دنباله‌ای از اعمال سطري مقدماتی روی A انجام داده‌ایم تا به یک ماتریس تحویل شده سطري پلکانی R برسیم. اگر همین دنباله از اعمال سطري را روی ماتریس افزوده A' انجام دهیم، به ماتریسی چون R' می‌رسیم که n ستون اولش ستونهای R ، و ستون آخرش مشکل از اسکالرهاي معين z_1, z_2, \dots, z_m است. اسکالرهاي z_1, z_2, \dots, z_m در ابههاي ماتریس $m \times 1$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

هستند که از بدکار بستن دنباله اعمال سطري فوق روی ماتریس Z حاصل می‌شوند. برای خواننده می‌باید روشن باشد که، درست شبيه اثبات قضيه ۳، دستگاههای $AX = Y$ و $RX = Z$ هم ارزند، و از این‌رو، جوابهايشان يكی است. تعیین این‌که آیا دستگاه $RX = Z$ دارای جوابی هست یا نه، و نيز تعیین همه جوابهاي اين دستگاه، در صورت وجود، کار بسیار آسانی است. زیرا، اگر R دارای r سطر غیر صفر باشد، و درایه غیر صفر مقدم سطر i در ستون k ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، $k = 1, 2, \dots, m$ باشد، آنگاه r معادله اول $RX = Z$ عملاء، x_1, x_2, \dots, x_r را بر حسب $(n-r)$ مجھول باقيمانده $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$ و اسکالرهاي z_1, z_2, \dots, z_m بیان می‌کنند. ($r-m$) معادله آخر عبارتند از

$$0 = z_{r+1}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$0 = z_m$$

و بنابراین، شرط وجود جواب برای دستگاه این است که به ازای $i > r$, $z_i = 0$. اگر این شرط برقرار نباشد، همه جوابهای دستگاه، دقیقاً مانند حالت همگن، با تخصیص مقادیر دلخواه به $(r-n)$ مجهول x_i , وسیں محاسبه، x_i از n مین معادله بدست می‌آیند.

مثال ۹. گیریم F هیأت اعداد گویا و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد، و بخواهیم دستگاه $AX = Y$ را، به ازای مقادیر y_1 , y_2 , و y_3 حل کنیم. روی ماتریس افزوده A^T دنباله‌ای از اعمال سطری که A را تحويل شده سطحی می‌سازد، انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 5 & -1 & y_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & (y_2 - 2y_1) \\ 0 & 5 & -1 & y_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & (y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{bmatrix}.$$

از این رو، شرطی که تحت آن دستگاه $AX = Y$ دارای جواب باشد، عبارت است از $y_1 + 2y_2 = 0$, $y_2 - 2y_1 = 0$, $y_3 - y_2 + 2y_1 = 0$.

هرگاه اسکالرهای داده شده y_i این شرط را برآورند، همه جوابها با تخصیص یک مقدار

دلخواه c به x_3 ، و سپس محاسبه

$$x_1 = -\frac{3}{5}c + \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1)$$

به دست می‌آیند.

اکنون به مشاهده آخرین مطلب در باره دستگاه $AX = Y$ می‌پردازیم. فرض کنیم بر حسب تفاوت درایه‌های ماتریس A و اسکالرها y_1, \dots, y_m در زیر هیأت F_1 از هیأت F قرار نگیرند. اگر دستگاه معادلات $AX = Y$ دارای جوابی با x_1, \dots, x_n در F باشد، این دستگاه دارای جوابی با x_1, \dots, x_n در F_1 است؛ زیرا، بر روی هر یک از این دو هیأت، شرط وجود جواب برای دستگاه عبارت است از برقراری روابط معینی بین y_1, \dots, y_m در F_1 ($y_i = F_1 z_i$ ، به ازای $i > r$)، که قبل ذکر شد. به عنوان مثال، فرض کنیم $AX = Y$ دستگاهی از معادلات خطی باشد که در آن اسکالرها y_1, \dots, y_m همچنین A_{ij} ها همه حقیقی‌اند. اگر جوابی برای این دستگاه موجود باشد که در آن x_1, \dots, x_n مختلط باشند، آنگاه این دستگاه دارای جوابی است که در آن x_1, \dots, x_n حقیقی‌اند.

تمرین

۱. همه جوابهای دستگاه معادلات زیر را با تحویل سطری کسردن ماتریس ضرایب آن به دست آورید:

$$\frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$-4x_1 + 5x_2 = 0$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 13x_3 = 0$$

$$-\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 = 0.$$

۲. ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ای بیاید که هم از سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

باشد. جوابهای $AX = 0$ را بدست آورید.

۳. همه ماتریس‌های 2×2 تحولی شده سطحی پلکانی را به طور صحیح توصیف کنید.

۴. دستگاه معادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2$$

را در نظر بگیرید. آیا این دستگاه جواب دارد؟ اگر چنین است، همه این جوابها را صریح توصیف کنید.

۵. مثالی از یک دستگاه دو معادله خطی دو مجهولی بیاورید که جواب نداشته باشد.

۶. نشان دهید دستگاه

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3$$

جواب ندارد

۷. همه جوابهای دستگاه

$$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_4 + x_5 = 3$$

$$x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 = -4$$

را باید.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

به ازای کدام سه تابیهای (y_1, y_2, y_3) دستگاه $AX = Y$ جواب دارد؟

۹. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به ازای کدام (y_1, y_2, y_3, y_4) دستگاه $AX = y$ جواب دارد؟

۱۰. فرض کنید R و R' دو ماتریس تحویل شده سطحی پلکانی 3×2 باشند و جوابهای دستگاههای $RX = 0$ و $R'X = 0$ بکی باشند. ثابت کنید $R' = R$.

۵.۱. ضرب ماتریسی

واضح است که فرایند تشکیل ترکیبات خطی از سطوحهای یک ماتریس، فرایندی بنیانی است (یا به هر حال، باید چنین باشد). بدین دلیل، ارائه طرحی با نظام برای بیان این نکته که دقیقاً چه اعمالی باید انجام شوند، ارجح است. به صورت مشخصتر، فرض کنیم B ماتریسی $n \times p$ بر روی هیأت F ، با سطوحهای $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ باشد، و نیز فرض کنیم از B ماتریس C با سطوحهای $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ را با تشکیل ترکیبات خطی معین

$$\gamma_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \dots + A_{ip}\beta_p \quad (4-1)$$

ساخته‌ایم. سطوحهای C با mn اسکالر A_{ij} که خود درایه‌های ماتریسی $m \times n$ مانند A هستند تعیین می‌شوند. اگر (۴-۱) را به صورت

$$(C_{i1} \dots C_{ip}) = \sum_{r=1}^n (A_{ir}B_{r1} \dots A_{ir}B_{rp})$$

بسط دهیم، می‌بینیم که درایه‌های C با رابطه زیر مشخص می‌شوند:

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}B_{rj}.$$

تعريف. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ بر روی هیأت F ، و B ماتریسی $p \times n$ بر روی همین هیأت باشد. حاصل ضرب AB ، ماتریسی $m \times p$ مانند C است که درایه $(j \text{ و } i)$ آن عبارت است از

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}B_{rj}.$$

مثال ۱۰ در این مثال، چند حاصل ضرب از ماتریس‌های با درایه‌های گویا آمده است.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

دراینجا

$$\gamma_1 = (5 \quad -1 \quad 2) = 1 \cdot (5 \quad -1 \quad 2) + 0 \cdot (15 \quad 4 \quad 8)$$

$$\gamma_2 = (0 \quad 2 \quad 2) = -2 \cdot (5 \quad -1 \quad 2) + 1 \cdot (15 \quad 4 \quad 8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

دراینجا

$$\gamma_1 = (9 \quad 12 \quad -8) = -2(0 \quad 6 \quad 1) + 3(3 \quad 8 \quad -2)$$

$$\gamma_2 = (12 \quad 62 \quad -2) = 5(0 \quad 6 \quad 1) + 4(3 \quad 8 \quad -2)$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [2 \quad 4]. \quad (\text{ت})$$

دراینجا

$$\gamma_1 = (6 \quad 12) = 3(2 \quad 4)$$

$$[2 \quad 4] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [10] \quad (\text{ث})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

توجه به این نکته مهم است که ضرب دو ماتریس همواره قابل تعریف نیست؛ ضرب دو ماتریس زمانی، و تنها زمانی، تعریف می شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد. لذا، تعویض ترتیب سازه ها در بندهای (الف)، (ب)، و (پ) مثال فوق بی معنی است. غالباً، ضربهایی مانند AB را بدون ذکر صریح انسداده سازهای آن می نویسیم؛ در چنین حالاتی استنباط این است که ضرب تعریف می شود. از (ت)، (ث)، (ج)، و (ج) در می بایم که حتی اگر ضربهای AB و BA هر دو تعریف بشوند، نزد ما $AB = BA$ درست نیست؛ به بیان دیگر، ضرب ماتریسی جابجا نیست.

مثال ۱۱

- (الف) اگر I ماتریس همانی $m \times m$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $IA = A$.
- (ب) اگر I ماتریس همانی $n \times n$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $AI = A$.
- (پ) اگر $o^{k,m}$ ماتریس صفر $k \times m$ باشد، آنگاه $o^{k,m}A = o^{k,m}$. به طور مشابه $Ao^{n,p} = o^{m,p}$.

مثال ۱۲. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. نماد اختصاری پیشین برای دستگاههای معادلات خطی، یعنی $AX = Y$ ، با تعریف ضرب ماتریسی سازگار است. زیرا، اگر

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و x_i ها در F باشند، آنگاه AX ماتریس $m \times 1$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

است که در آن $y_i = A_{i,1}x_1 + A_{i,2}x_2 + \dots + A_{i,n}x_n$

استفاده از ماتریسهای ستونی نمادی را پیشنهاد می کند که غالباً مفید است. اگر B

ماتریسی $n \times p$ باشد، ستونهای B ماتریسهای $1 \times n$ ، B_1, \dots, B_p خواهد بود که به صورت

$$B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq p$$

تعریف می‌شوند، و ماتریس B توالی این ستونهاست:

$$B = [B_1, \dots, B_p].$$

درایه (j) ماتریس حاصل ضرب AB از سطر i A و ستون j B شکل می‌گیرد. خواننده خود تحقیق خواهد کرد که ستون j ماتریس AB برابر AB_j است:

$$AB = [AB_1, \dots, AB_p].$$

علی‌رغم این‌که ضرب ماتریسهای به ترتیب نوشتن سازه‌هایش بستگی دارد، اما همان‌طور که قضیه بعدی نشان می‌دهد از نحوه شرکت آنها مستقل است.

قضیه ۸. اگر A, B, C ماتریسهایی بودی هیأت F باشند که ضربهای D BC $A(BC)$ تعریف بشوند، آنگاه ضربهای $(AB)C$ و $AB(C)$ نیز تعریف می‌شوند و

$$A(BC) = (AB)C.$$

البته. فرض کنیم B ماتریسی $n \times p$ باشد. چون BC تعریف می‌شود، C ماتریسی است با p سطر، ولذا $n \times BC$ سطر دارد. حال، بدلیل اینکه $A(BC)$ هم تعریف می‌شود می‌توانیم فرض کنیم که A ماتریسی است $m \times n$. بنا بر این، حاصل ضرب AB وجود دارد و ماتریسی $m \times p$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که حاصل ضرب $(AB)C$ وجود دارد. برای نشان دادن تساوی $(AB)C = A(BC)$ ، کافی است نشان دهیم که به ازای هر i و j ،

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}.$$

طبق تعریف

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir} (BC)_{rj} \\ &= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs} C_{sj} \\ &= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\ &= \sum_s (\sum_r A_{ir} B_{rs}) C_{sj} \\ &= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\ &= [(AB)C]_{ij}. \quad \square \end{aligned}$$

اگر A ماتریسی $n \times n$ (مربعی) باشد، ضرب AA تعریف می‌شود. این ماتریس را با A^2 نشان می‌دهیم. بنا بر قضیه $A(AA) = (AA)A$ ، یا $A^2A = AA^2$ ، از این رو، ضرب AAA بدون ابهام تعریف می‌شود. این حاصل ضرب را با A^3 نشان می‌دهیم. در حالت عمومی، ضرب $A \cdots A$ (k بار) بدون ابهام تعریف می‌شود، و این حاصل ضرب را با A^k نشان می‌دهیم.

توجه کنید که از جمله نتایجی که رابطه $A(BC) = (AB)C$ ایجاب می‌کند، یکی این است که ترکیبایی خطی از ترکیبایی خطی سطرهای C ، مجدداً ترکیبایی خطی از سطرهای C استند.

اگر B ماتریس مفروضی باشد و C به وسیله یک عمل سطری مقدماتی از B حاصل شده باشد، آنگاه هر سطر C ترکیبی خطی از سطرهای B است؛ و از این رو، ماتریسی چون A وجود دارد به طوری که $AB = C$. معمولاً ماتریسهاي با اين خاصيت زيادند، و لذا مناسبت دارد و نيز ممکن است درين آنها يكى را كه داراي خواص ويژه اي است انتخاب کنیم. قبل از آنکه به اين بحث وارد شویم، نياز داریم که با ردهای از ماتریسها آشناشویم.

تعريف. يك ماتریس $m \times m$ يك ماتریس مقدماتی خوانده می‌شود هرگاه بتوان آن از ماتریس همانی $m \times m$ با تنها يك عمل سطری مقدماتی به دست آورد.

مثال ۱۳. يك ماتریس مقدماتی 2×2 لزوماً يك از ماتریسهاي زير است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0.$$

قضیه ۹. فرض کنیم c يك عمل سطری مقدماتی و E ماتریس مقدماتی $m \times m$ باشد. داین صورت، به ازای هر ماتریس $m \times n$ مانند A ، دادیم $E = e(I)$

$$e(A) = EA.$$

اثبات. نکته مهم این است که درایه واقع در سطر i و ستون j ماتریس حاصل ضرب EA از سطر i ماتریس E و ستون j ماتریس A شکل می‌گیرد. لذا، لازم است هر يك از سه نوع عمل سطری مقدماتی را جداگانه بررسی کنیم. در اینجا اثبات مفصلی برای عملی از نوع (۲) خواهیم آورد. بررسی دو حالت دیگر، حتی از این يكى هم ساده‌تر است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. فرض کنیم $s \neq r$ ، و «عمل «جایگزینی سطر r با سطر s بعلاوه c برای سطر s » باشد. در این صورت

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk}, & i = r. \end{cases}$$

بنابراین،

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} A_{ik}, & i \neq r \\ A_{ij} + c A_{rj}, & i = r. \end{cases}$$

و به بیان دیگر، $\square \cdot EA = e(A)$

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ پردوی هیأت F باشند. در این صورت، B هم ارزسطری A است اگر و قضاها اگر $B = PA$ و P حاصل خوبی از ماتریسهای مقدماتی $E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_m$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $B = PA$ ، که در آن $P = E_1 \cdots E_r E_{r+1} \cdots E_m$ هم ارزسطری A است. در این صورت، $E_r A$ هم ارز سطری A و $E_r(E_r A) = E_r A$ هم ارز سطری $E_r A$ است؛ با ادامه این راه می‌بینیم که $(E_r \cdots E_1)A$ هم ارز سطری A است.

حال فرض کنیم B هم ارز سطری A باشد، و $E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_m$ ماتریسهای مقدماتی متناظر به دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی باشند که A را به B تبدیل می‌کنند.

 $\square \cdot B = (E_m \cdots E_1)A$

تمرین

۱. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1].$$

ماتریسهای CAB و ABC را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

مستقیماً تحقیق کنید که $A(AB) = A^2 B$.۳. دو ماتریس مختلف 2×2 مانند A باید به طوری که $A^2 = 0$ ولی $A \neq 0$.

۴. برای ماتریس A در تصرین ۲، ماتریسهای مقدماتی E_1, E_2, \dots, E_k را بیاید که

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

آیا ماتریسی چون C با خاصیت $CA = B$ وجود دارد؟

۶. فرض کنید A ماتریسی $m \times k$ و B ماتریسی $n \times k$ باشد. نشان دهید که ستونهای $C = AB$ ترکیبی خطي از ستونهای A هستند. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ستونهای ماتریس A باشند، آنگاه $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ستونهای ماتریس C باشند، آنگاه

$$\gamma_j = \sum_{r=1}^m B_{rj} \alpha_r.$$

۷. فرض کنید A و B دو ماتریس 2×2 باشند که $AB = I$. ثابت کنید $BA = I$.

۸. فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ماتریسی 2×2 باشد. می خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است ماتریسهایی 2×2 مانند A و B یافت به طوری که $C = AB - BA$. ثابت کنید چنین ماتریسهایی را می توان یافت اگر و تنها اگر $C_{11} + C_{22} = 0$.

۹. ماتریسهای معکوس پذیر

فرض کنیم ماتریس P مانند $m \times m$ حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی باشد. به ازای هر ماتریس A مانند $m \times n$ ، ماتریس $B = PA$ هم ارز سطری A است؛ از این رو، A نیز هم ارز سطری B است و حاصل ضربی چون Q از ماتریسهای مقدماتی وجود دارد به طوری که $A = QB$. این امر، بخصوص، هنگامی که A ماتریس همانی $m \times m$ باشد، درست است. به بیان دیگر، ماتریس $m \times m$ چون Q که خود حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی است، وجود دارد به طوری که $QP = I$. بروزی خواهیم دید که وجود ماتریسی مانند Q

با خاصیت $QP = I$ ، هم ارز این مطلب است که P حاصل ضربی از ماتریس‌های مقدماتی است.

تعزیف. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ (مربعي) بروزی هیأت F باشد. یک ماتریس $n \times n$ مانند B ، به طوری که $BA = I$ ، یک معکوس چپ A نامیده می‌شود؛ یک ماتریس $n \times n$ مانند B با این شرط که $AB = I$ یک معکوس راست A نام دارد. اگر $AB = BA = I$ نگاه B به پل معکوس دو طرفه A مرسوم است، A معکوس پذیر نامیده می‌شود.

لم. اگر A دارای یک معکوس چپ B و یک معکوس راست C باشد، آنگاه $B = C$

اثبات. فرض کنیم $I = BA$ و $AC = I$. در این صورت

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \quad \square$$

بنابراین، اگر A یک معکوس چپ و یک معکوس راست داشته باشد، آنگاه A معکوس پذیر است و دارای معکوس دو طرفه یکتا بی است. این معکوس را که با A^{-1} نشان می‌دهیم، به طور ساده معکوس A می‌نامیم.

قضیة ۱۰ فرض کنیم A دو ماتریس $n \times n$ بروزی هیأت F باشد.

(۱) اگر A معکوس پذیر باشد، $A^{-1} A^{-1} = A^{-1}$.

(۲) اگر A دو B هر دو معکوس پذیر باشند، AB نیز معکوس پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

اثبات. کزاره اول از تقارن تعریف بسادگی نتیجه می‌شود. کزاره دوم، از تحقیق صحت روابط

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

به دست می‌آید. \square

نتیجه. هر حاصل ضربی از ماتریس‌های معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر.

قضیة ۱۱. هر ماتریس مقدماتی معکوس پذیر است.

اثبات. فرض کنیم E ماتریس مقدماتی متناظر به عمل سطری مقدماتی e باشد. اگر e عمل معکوس e باشد (قضیة ۲) و $(I), E_1 = e(I)$ ، آنگاه

$$EE_1 = e(E_1) = e(e(I)) = I$$

و

$$E_1 E = e_1(E) = e_1(e(I)) = I.$$

از این رو، E معکوس پذیر است و $E_1 = E^{-1}$. \square

مثال ۱۶

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

(ت) اگر $c \neq 0$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

قضیه ۱۲. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، گزارهای ذیور هم ارزند: A معکوس پذیر است.

(۱) A هم ارز سطري ماتریس همانی $n \times n$ است.

(۲) A حاصل ضربی است از ماتریسهای مقدماتی.

اثبات. گیریم R ماتریس تحويل شده سطري پلکانی ای باشد که همارز سطري A است. طبق قضیه ۹ (با نتیجه آن)،

$$R = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

که در آن E_1, \dots, E_k ماتریسهای مقدماتی هستند. همه E_i ها معکوس پذیرند، و از این رو،

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

چون حاصل ضرب ماتریسهای معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر، می بینیم که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر R معکوس پذیر باشد. ازطرفی چون R یک ماتریس تحويل شده سطري پلکانی (مربعی) است، R معکوس پذیر است اگر و تنها اگر هر سطر R شامل یک درایه غیر صفر باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر $R = I$. تا اینجا نشان داده ایم که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $R = I$ ؛ و اگر $R = I$ آنگاه $A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} R$. اکنون، باید روش باشد که (۱)، (۲)، و (۳) گزاره های همارزی درباره ماتریس A هستند. \square

نتیجه. اگر A یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر باشد و دنباله ای از اعمال سطري مقدماتی، A (۱) به ماتریس همانی تحولیل کند، آنگاه همان دنباله اعمال هنگامی که به کار بسته شود، A^{-1} (۱) به دست می دهد.

نتیجه، فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند. در این صورت، B هم از سطربالی است اگر و تنها اگر $P = PA$ ، $B = P$ یک ماتریس $m \times m$ معکوس پذیر باشد.

قضیه ۱۳. برای ماتریسی $n \times n$ مانند A ، اگر ادلهای ذیر هم ارزند:

(۱) A معکوس پذیر است.

(۲) دستگاه همگن $AX = 0$ فقط جواب بدیهی $X = 0$ دارد.

(۳) دستگاه معادلات $AX = Y$ ، به ازای هر ماتریس $1 \times n$ مانند Y ، لااقل یک جواب دارد.

اثبات. بنا بر قضیه ۷، شرط (۲) هم ارز این مطلب است که A هم ارز سطربالی ماتریس همانی است. از این‌رو، بنا بر قضیه ۱۲، (۱) و (۲) هم ارزند. اگر A معکوس پذیر باشد، جواب دستگاه $AX = Y$ عبارت است از $Y^{-1}A$. بعکس، فرض کنیم $AX = Y$ مفروض دارای یک جواب باشد. گیریم R ماتریس تحویل-شده سطربالی پلکانی ای باشد که هم ارز سطربالی A است. می‌خواهیم نشان بدهیم که $R = I$. بدین صورت، کافی است نشان دهیم که همه درایه‌های آخرین سطر R برابر 0 نیستند. فرض کنیم

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

اگر دستگاه $RX = E$ برای X قابل حل باشد، سطر آخر R هیچ‌گاه 0 نیست. می‌دانیم $R = PA$ ماتریسی معکوس پذیر است. بنا بر این، $RX = E$ اگر و تنها اگر $AX = P^{-1}E$; و بنا بر (۳) دستگاه اخیر لااقل یک جواب دارد. \square

نتیجه. ماتریسی مربوطی که دادای یک معکوس چپ یا یک معکوس (است باشد، معکوس پذیر است).

اثبات. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و دارای یک معکوس چپ باشد؛ یعنی، یک ماتریس B وجود داشته باشد به‌طوری که $BA = I$. در این صورت، $BA = I$ ، $BA = I$ دستگاه $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی است. بنا بر این، A معکوس پذیر است. از طرف دیگر، فرض کنیم A دارای یک معکوس راست باشد؛ یعنی، ماتریسی چون C یافت شود به‌طوری که $AC = I$. آنگاه C دارای یک معکوس چپ است و بنا بر این معکوس پذیر. پس $A = C^{-1}$ ، و از این‌رو A معکوس پذیر و دارای

معکوس C است. \square

نتیجه، فرض کنیم $A_k \in A_{k \times n}$ و $A = A_1 A_2 \cdots A_k \cdots A_n$ ماتریس‌های $n \times n$ (مربعی) باشند. در این صورت، A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر هر A_j معکوس پذیر باشد.

اثبات. قبل از نشان دادیم که حاصل ضرب دو ماتریس معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر. از این مطلب بسادگی مشهود است که اگر هر A_j معکوس پذیر باشد، آنگاه A نیز معکوس پذیر است.

حال فرض کنیم A معکوس پذیر باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم A_k معکوس پذیر است. فرض کنیم X ماتریسی $n \times n$ باشد و $A_k X = A$ ، در این صورت $A_k X = 0$. بنابراین، دستگاه معادلات $A_k X = 0$ هیچ جواب نا بدینه ندارد. لذا، A_k معکوس پذیر است. حال، $A_1 \cdots A_{k-1} = AA_k^{-1}$ معکوس پذیر است. با استدلال قبل، A_{k-1} نیز معکوس پذیر است، با ادامه این راه بدین نتیجه می‌رسیم که هر A_j معکوس پذیر است. \square

اکنون می‌خواهیم به آخرین نکته درباره حل معادلات خطی پردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ باشد و بخواهیم دستگاه معادلات $AX = Y$ را حل کنیم. اگر R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی همارز سطری باشد، آنگاه $R = PA$ که در آن P ماتریسی $m \times m$ و معکوس پذیر است. جوابهای دستگاه $AX = Y$ دقیقاً همان جوابهای دستگاه $RX = PY (= Z)$ هستند. در عمل، یافتن ماتریس P خیلی مشکلتراز تحویل کردن A به R نیست. زیرا، فرض کنیم ماتریس افزوده A' از دستگاه $AX = Y$ را که در آن اسکالرهاي دلخواه y_1, y_2, \dots, y_m در آخرین ستون قرار می‌گیرند، تشکیل داده باشیم. در این صورت، اگر روی A' دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به کار بندیم که A را به سوق می‌دهد، آنگاه روش خواهد شد که ماتریس P چیست. (بهتر است خواننده به مثال ۹ که در آن این فرایند به طور اساسی به کار بسته شده است، رجوع کند). در حالت خاص، اگر A ماتریسی مرتبی باشد، این فرایند روش می‌سازد که A معکوس پذیر است یا نه، و اگر معکوس پذیر باشد، P ، معکوس آن چیست. چون قبل از مثالی از چنین محاسبه‌ای را ارائه کرده‌ایم، اینک به یک مثال 2×2 اکتفا می‌کنیم.

مثال ۱۵. فرض کنیم F هیئت اعدادگویا باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 2 & -1 & y_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & -2 & y_1 - 2y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \quad \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\gamma}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\gamma}(y_2 + 3y_1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\gamma}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix}.$$

حال واضح است که A معکوس پذیر است و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{2}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ -\frac{1}{\gamma} & \frac{2}{\gamma} \end{bmatrix}.$$

ممکن است چنین به نظر آید که در محاسبه معکوسها ادame نوشتن اسکالرهای دلخواه y_1, y_2, \dots, y_n پر زحمت باشد. عده‌ای حمل دو دنباله از ماتریسها را، یکی برای توصیف تحویل کردن A به ماتریس همانی، و دیگری برای ثبت اثر همان دنباله اعمال روی ماتریس همانی، ترجیح می‌دهند. خواننده خود قضاوت خواهد کرد که کدام روش از نظر ثبت مطابق و نوشتن روش بهتری است.

مثال ۱۶. می‌خواهیم معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

را بیابیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 60 & -60 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

این مطلب باید از نظر خوانندگان دور مانده باشد که تاکنون در مورد سطرهای ماتریسها به طور مفصل بحث کرده ایم ولی مطلب چندانی درباره ستونها تأثیر نداشته ایم. بدین جهت توجه خود را روی سطرهای متغیر کرده ایم که از دیدگاه معادلات خطی این امر طبیعیتر به نظر می آمد. چون سلماً هیچ نکته خاصی در مورد سطرهای وجود ندارد، بحث انجام شده در بخش‌های قبل می‌توانست به جای سطرهای روی ستونها هم انجام بگیرد.

روشن است که اگر یک عمل ستونی مقدماتی، و نیز هم ارزی ستونی به طریقه تعریف عمل سطری مقدماتی و هم ارزی سطری تعریف شود، هر ماتریس $m \times n$ هم ارز ستونی یک ماتریس «تحویل شده ستونی پلکانی» است. بعلاوه، هر عمل ستونی مقدماتی به شکل $A \rightarrow AE$ است که در آن E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ است - و الی آخر.

تمرین

۱. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R که هم ارز سطری A باشد، و نیز یک ماتریس 3×3 معکوس پذیر P باید که $R = PA$ باشد.

۲. تمرین ۱ را با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

انجام دهید.

۳. در مورد هر یک از دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

با به کار بردن اعمال سطری مقدماتی، معکوس پذیر بودن یا نبودن آنها را معلوم کنید؛ در صورت معکوس پذیر بودن، معکوس آنها را باید.

۴. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

به ازای کدام X یک اسکالر c وجود دارد به طوری که $AX = cX$

۵. معلوم کنید که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است یا نه و A^{-1} را در صورت وجود بیاورد.

۶. فرض کنید A یک ماتریس 1×2 ، و B ماتریسی 2×1 باشد. ثابت کنید که $C = AB$ معکوس پذیر نیست.

۷. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ (مربعی) باشد. دو گزاره زیر را ثابت کنید:
 (الف) اگر A معکوس پذیر باشد، و به ازای یک ماتریس $n \times n$ مانند B ، $AB = 0$ آنگاه $B = 0$.

(ب) اگر A معکوس پذیر نباشد، آنگاه ماتریسی $m \times n$ مانند B وجود دارد که $AB = 0$ ولی $B \neq 0$.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

با به کار گیری اعمال سطري مقدماتی ثابت کنید که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $(ad - bc) \neq 0$.

۹. ماتریس $n \times n$ مانند A بالا مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای $j < i$ ، $A_{ij} = 0$ یعنی، هرگاه همه درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی آن 0 باشند. ثابت کنید یک ماتریس (مربعی) بالا مثلثی معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن مخالف صفر باشند.

۱۰. تعمیم زیر از تمرین ۶ را ثابت کنید: اگر A ماتریسی $n \times m$ و B ماتریسی $m \times m$ باشد و $\langle m < n \rangle$ آنگاه AB معکوس پذیر نیست.

۱۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. نشان دهید که با تعدادی متناهی عمل سطري

و/یا ستونی مقدماتی می‌توان از A به یک ماتریس R رسید که هم «تحویل شده سطیری پلکانی» و هم «تحویل شده ستونی پلکانی» باشد؛ یعنی، $R_{ii} = 1$ ، $i \neq j$ هرگاه $R_{ij} = 0$ بازای $i < r$ ، $R_{ii} = 0$ هرگاه $i > r$. نشان دهید $R = PAQ$ که در آن P و Q بترتیب ماتریسها بیان $n \times n$ و $m \times m$ معکوس پذیر هستند.

۱۳. نتیجه مثال ۱۶ این مطلب را تداعی می‌کند که شاید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر و معکوس آن A^{-1} دارای درایه‌های صحیح باشد. آیا می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟

فضاهای برداری

۱.۰۳. فضاهای برداری

در بخشهای مختلف ریاضیات با مجموعه‌هایی روبرو می‌شویم که مطالعه «ترکیبات خطی» عناصر آنها، هم با معنی و هم جالب است. مثلاً، هنگام مطالعه معادلات خطی کاملاً طبیعی به نظر رسید که ترکیبات خطی سطرهای یک ماتریس را مورد توجه قرار بدهیم. احتمال دارد که خواننده، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کرده و در آنجا با ترکیبات خطی توابع روبرو شده باشد؛ واگر درس معادلات دیفرانسیل را گرفته باشد، قطعاً این مفهوم را دیده است. همچنین، احتمالاً خواننده بردارهای در فضای اقلیدسی سه بعدی، بزیوژه ترکیبات خطی چنین بردارهایی را تجربه کرده است.

به بیان نادقيق، جبر خطی آن شاخه از ریاضیات است که درباره خواص عام دستگاههایی جبری مشکل از یک مجموعه همراه با مفهومی مناسب از نوعی «ترکیب خطی» از عناصر آن به بحث می‌پردازد. در این بخش ما به تعریف شیوه‌ی ریاضی می‌پردازیم که بنا بر تجربه مفید‌ترین تجربه از این نوع دستگاههای جبری است.

تعریف. یک فضای برداری (یا فضای خطی) مشکل است اذ:

۱. یک هیأت F از اسکالرها؛
۲. یک مجموعه V از اشیائی به نام بردارها؛
۳. یک قاعده (یا عمل) به نام جمع بردادی که هر جفت از بردادهای α و β اذ

برداد $\beta + \alpha$ از V (اکه مجموع α و β نامیده می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که

(الف) جمع جا بجاگی است؛ یعنی $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ؛

(ب) جمع شوکت‌پذیر است؛ یعنی $\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$ ؛

(پ) برداد یکتایی 0 به نام برداد صفر در V موجود است به طوری که به ازای

$$\text{هر } \alpha \in V \quad \alpha + 0 = \alpha$$

(ت) به ازای هر برداد α در V ، برداد یکتایی $-\alpha$ در V موجود است به طوری

$$\text{که } 0 = \alpha + (-\alpha)$$

۴. یک قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر برداد

α از V برداد $c\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط که

(الف) به ازای هر α در V ، $1\alpha = \alpha$ ؛

$$(b) (c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2 \alpha)$$

$$(c) c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$$

$$(d) (c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$$

توجه به این نکته مهم است که طبق تعریف، یک فضای برداری شیئی است مرکب، متشكل از یک هیأت، یک مجموعه از بردارها، و دو عمل با خواص ویژه معین. مجموعه مفروضی از بردارها می‌تواند بخشی از چند فضای برداری متمایز باشد (ر. ک. مثال ۵ زیر). هر گاه هیچ امکان اشتباہی نباشد، فضای برداری را به طور ساده با V نشان می‌دهیم، و هنگامی که مشخص کردن هیأت نیز لازم باشد، خواهیم گفت که V فضایی برداری برروی هیأت F است. نام «بردار» عمدتاً به جهت سهولت به عنانصر مجموعه V اطلاق می‌شود. منشأ این نامگذاری را می‌توان از مثال ۱ که در زیر آمده است دریافت؛ اما، به این نام نباید بیش از اندازه اهمیت داد، زیرا چیزهای متنوعی که به عنوان بردار در V قرار می‌گیرند ممکن است شباهت چندانی با هیچ یک از مقاهم بردار که خواننده در ذهن دارد نداشته باشند. می‌کوشیم این تنوع را با چند مثال روشن کنیم؛ حین مطالعه فضاهای برداری بر تعداد این مثال‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای خواهیم افزود.

مثال ۱. فضای n -تایی F^n . فرض کنیم F هیأتی دلخواه و V مجموعه همه n -تایی‌های

$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اسکالرهای x_i در F باشد. با فرض $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ و y_i ‌ها در F ، مجموع α و β با

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (1-2)$$

و حاصل ضرب اسکالر c و بردار α با

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \quad (2-2)$$

تعریف می‌شود. بررسی این حکم که جمع برداری و ضرب اسکالری اخیر در شرایط (۳) و (۴) صدق می‌کنند با استفاده از خواص مشابه جمع و ضرب عناصر F آسان است.

مثال ۲. فضای ماتریسهای $m \times n$ ، $F^{m \times n}$. گیریم F هیأتی دلخواه و nm اعدادی صحیح و مثبت باشند. فرض کنیم $F^{m \times n}$ مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. مجموع دو بردار A و B از $F^{m \times n}$ با

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (۴-۲)$$

و حاصل ضرب اسکالر c و ماتریس A با

$$(cA)_{ij} = cA_{ij} \quad (۴-۲)$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $F^{1 \times n} = F^n$

مثال ۳. فضای توابع از یک مجموعه به یک هیأت. گیریم F هیأتی دلخواه و مجموعه‌ای غیر تهی باشد. فرض کنیم V مجموعه همه توابع از مجموعه S در مجموعه F باشد. مجموع دو بردار f و g از V بردار $f+g$ است؛ یعنی، تابعی از S در F است که با

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad (۵-۲)$$

تعریف می‌شود. حاصل ضرب اسکالر c و تابع f ، تابع cf است که با

$$(cf)(s) = cf(s) \quad (۶-۲)$$

تعریف می‌شود. مثالهای قبل حالات خاصی از این مثال هستند. زیرا هر n تایی از عناصر F ممکن است به عنوان تابعی از مجموعه S متشکل از اعداد صحیح $1, 2, 0, 0, 0, \dots, n$ در F محاسب شود. به طور مشابه، هر ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F تابعی است از مجموعه S متشکل از جفت اعداد صحیح (j, i) با شرایط $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ در هیأت F . حال برای این مثال، چگونگی بررسی صدق شرایط (۳) و (۴) توسط اعمال تعریف شده را نشان می‌دهیم. برای جمع برداری:

(الف) چون عمل جمع در F جابجایی است، به ازای هر s در S

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

و از این رو، دو تابع $g+f$ و $f+g$ یکی هستند.

(ب) چون عمل جمع در F شرکت‌پذیر است، به ازای هر s در S

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

و بنا بر این، تابع $f+(g+h)$ همان تابع $(f+g)+h$ است.

(پ) برداریکتای صفر، همان تابع صفر است که به هر عنصر S اسکالر 0 از F را تخصیص می‌دهد.

(ت) به ازای هر f در V ، $(f) -$ تابعی است که با

$$(-f)(s) = -f(s)$$

تعریف می‌شود.

اکنون خواسته می‌باشد به آسانی بتواند با برهانی شبیه به آنچه که در مورد جمع
برداری آورده‌یم، نشان دهد که ضرب اسکالری در شرایط مذکور در (۴) صدق می‌کند.

مثال ۴. فضای توابع چند جمله‌ای بروی هیأت F . فرض کنیم F یک هیأت، و V
مجموعه همه توابع f ، از F در F ، با قاعده‌ای به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \quad (7-2)$$

باشد. در اینجا c_0, c_1, \dots, c_n اسکالرهای ثابتی متعلق به F (مستقل از x) هستند. چنین
تابعی یک تابع چند جمله‌ای بروی F نامیده می‌شود. فرض کنیم جمع و ضرب اسکالری
طبق مثال ۳ تعریف بشوند. در اینجا باید توجه داشت که اگر f و g دوتابع چندجمله‌ای
و c در F باشد، آنگاه $f + g$ و cf هم توابعی چندجمله‌ای هستند.

مثال ۵. هیأت اعداد مختلط C می‌تواند به عنوان فضایی بروی هیأت اعداد
حقیقی R محسوب شود. در حالت کلی‌تر، فرض کنیم F هیأت اعداد حقیقی باشد و V
مجموعه n تایی‌های x_1, x_2, \dots, x_n که در آن x_1, x_2, \dots, x_n اعدادی مختلط
هستند. جمع بردارها و ضرب اسکالری را طبق (۱-۲) و (۲-۲) در مثال ۱ تعریف می‌کنیم.
بدین طریق به یک فضای برداری بروی هیأت R دست می‌یابیم که با فضاهای C^n و R^n
اختلاف بسیار دارد.

اینک به استخراج چند حکم ساده که تقریباً بلافاصله از تعریف فضای برداری
نتیجه می‌شوند، می‌پردازیم. اگر c یک اسکالر و α بردار صفر باشد، آنگاه بنابر ۳ (پ)
و ۴ (پ)

$$c_0 = c(0+0) = c_0 + c_0.$$

با افزودن $(c_0) -$ به دو طرف این تساوی و استفاده از ۳ (ت) داریم

$$c_0 = 0. \quad (8-2)$$

به طور مشابه، به ازای اسکالر α و هر بردار α داریم

$$0\alpha = 0. \quad (9-2)$$

اگر c یک اسکالر غیر صفر و α برداری باشد که $c\alpha = 0$ ، آنگاه بنابر (۸-۲)

$$c^{-1}(c\alpha) = 0. \text{اما}$$

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

و از اینجا، $\alpha = 0$. بنابراین، می‌بینیم که اگر c یک اسکالر و α یک بردار باشد و $c\alpha = 0$ آنگاه یا c اسکالر صفر است و یا α بردار صفر. اگر α برداری دلخواه در V باشد، آنگاه

$$0 = 0\alpha = (1 - 1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

و از آن نتیجه می‌شود که

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (10.2)$$

سرانجام، از خواص شرکت پذیری و جابجایی عمل جمع برداری نتیجه می‌شود که حاصل جمع چند بردار نیز مستقل از نحوه ترکیب و شرکت این بردارها در جمع است. مثلاً، اگر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بردارهایی در V باشند، آنگاه

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

و چنین مجموعی می‌تواند بدون ابهام به صورت

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

نوشته شود.

تعريف. برداد β از V یک ترکیب خطی بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از V نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهایی چون c_1, c_2, \dots, c_n در وجود داشته باشند به طوری که

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i.$$

تعییمهای دیگر خاصیت شرکت پذیری جمع برداری و خواص پخش پذیری ۱۰(ب) و ۱۰(ث) ضرب اسکالری، در ترکیبات خطی نیز به کار می‌روند:

$$\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^m d_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n+m} (c_i + d_i)\alpha_i$$

$$c \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n (cc_i)\alpha_i.$$

بخشهای معینی از جبر خطی با هندسه ارتباطی نزدیک دارد. خود واژه «فضا» مفهومی هندسی را تداعی می‌کند. همچنین است واژه «بردار» نزد بیشتر مردم. ضمن ادامه مطالعه فضاهای برداری، خواننده مشاهده خواهد کرد که بسیاری از اصطلاحات به طور ضمنی معنی هندسی دارند. قبل از آنکه این بخش مقدماتی درمورد فضاهای برداری را

پایان دهیم، به بررسی رابطه این فضاهای با هندسه، تسا آنجایی که اقلام «فضای برداری» روشن شود، می‌پردازیم. این بررسی بحثی شهودی و خلاصه است. فضای برداری R^3 را در نظرمی‌گیریم. در هندسه تحلیلی، سه تابی‌های (x_1, x_2, x_3) از اعداد حقیقی با نقاط فضای سه بعدی اقلیدسی یکی گرفته می‌شوند. با این زمینه، یک بردار معمولاً به صورت یک پاره خط جهت دار PQ ، از یک نقطه P واقع در فضای به نقطه دیگر Q تعریف می‌شود. این مطلب به فرمولیندی دقیق ایده «پیکان» از نقطه P به نقطه Q می‌انجامد. از نحوه به کار رفتن بردارها چنین برمی‌آید که بردار باید با طول و جهتش مشخص شود. بنابراین، دو پاره خط جهت دار با طول برابر و جهت یکسان را باید یکی گرفت.

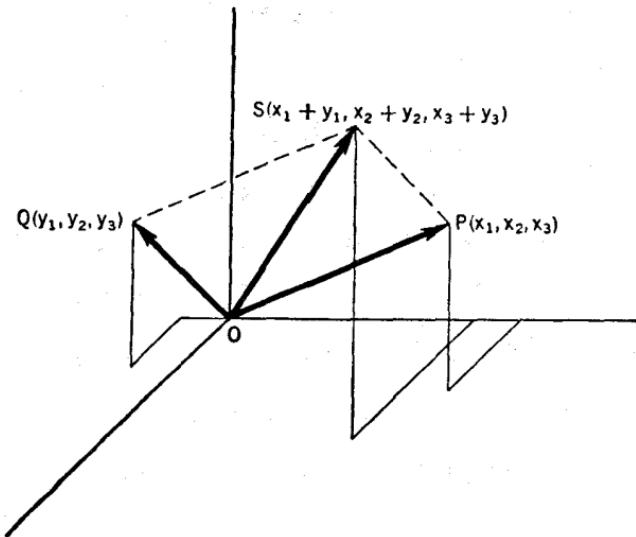
پاره خط جهت دار PQ ، از نقطه $P = (x_1, x_2, x_3)$ به نقطه $Q = (y_1, y_2, y_3)$ و پاره خط جهت دار از مبدأ $O = (0, 0, 0)$ به نقطه $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ دارای یک طول و یک جهت هستند. بعلاوه، این تنها پاره خط جهت داری است که از مبدأ آغاز می‌شود و دارای طول و جهتی مساوی PQ است. بنابراین، اگر توافق شود که تنها بردارهایی را مطرح کنیم که از مبدأ آغاز می‌شوند، به هر طول و هر جهت داده شده‌ای دقیقاً یک بردار مربوط می‌شود.

بردار OP ، از مبدأ به نقطه $(x_1, x_2, x_3) = P$ ، کاملاً با نقطه P معین می‌شود؛ از این‌رو، می‌توان این بردار را با نقطه P یکی دانست. بهمین دلیل، در تعریف فضای برداری R^3 بردارها را بدطور ساده با سه تابی‌های (x_1, x_2, x_3) تعریف کردیم.

با مفروض بودن دو نقطه $P = (x_1, x_2, x_3)$ و $Q = (y_1, y_2, y_3)$ تعریف مجموع بردارهای OP و OQ را می‌توان به طور هندسی بیان کرد. اگر این بردارها موازی نباشند، آنگاه پاره خط‌های OP و OQ یک صفحه را مشخص می‌کنند و این دو پاره خط دو ضلع متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که در این صفحه قرار دارد (ر. ک. شکل ۱). یکی از قطرهای این متوازی‌الاضلاع از O به یک نقطه S امتداد می‌یابد و مجموع دو بردار OP و OQ بنابر تعریف بردار OS گرفته می‌شود. مختصات نقطه S عبارتند از $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ ؛ و از این‌رو، تعریف هندسی جمع برداری با تعریف جبری ارائه شده در مثال ۱ هم ارز است.

ضرب اسکالری تعبیر هندسی ساده‌تری دارد. اگر عددی حقیقی باشد، آنگاه حاصل ضرب c و بردار OP ، برداری است از مبدأ با طول $|c|$ برابر طول OP و جهتی موافق با جهت OP هرگاه $c > 0$ و مخالف با جهت OP هرگاه $c < 0$. حاصل این ضرب اسکالری، دقیقاً بردار OT است که در آن $T = (cx_1, cx_2, cx_3) = (c x_1, c x_2, c x_3)$ ؛ و بنابراین، با تعریف جبری ارائه شده برای R^3 سازگار است.

ممکن است گاهی خواسته شده مفید بداند که در باره فضاهای برداری «به طور هندسی بیندیشند»؛ بدین معنی که برای خود و به جهت تصور بهتر و نیز برانگیختن برخی از ایده‌ها به ترسیم شکل پردازد. در واقع، او باید چنین کند؛ اما، هنگام رسم چنین تصاویری باید به خاطر داشته باشد که چون برخورد ما با فضاهای برداری به صورت دستگاه‌های جبری



شکل ۱

است، تمام اثباتهای هم که ارائه می کنیم طبیعتی جبری خواهند داشت.

تمرین

۱. هر گاه F یک هیأت باشد، تحقیق کنید که " F " به صورتی که در مثال ۱ تعریف شد فضایی برداری بروی هیأت F است.
۲. هر گاه V یک فضای برداری بروی هیأت F باشد، به ازای همه بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_4 در V رابطه $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$ برقرار است.
۳. اگر C هیأت اعداد مختلط باشد، چه بردارهایی از C^3 ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ و $(-1, 1, 1)$ هستند؟
۴. فرض کنید V مجموعه همه جفت‌های (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا V با دو عمل تعریف شده زیر

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x+x_1, y+y_1)$$

$$c(x, y) = (cx, y)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی هست؟

۵. روی R^n دو عمل

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \odot \alpha = -c\alpha$$

را تعریف می‌کنیم. اعمال سمت راست همان اعمال معمولی هستند. چه اصولی از فضاهای برداری توسط (R^n, \oplus, \odot) برآورده می‌شوند؟

۶. فرض کنید \mathcal{V} مجموعه همه توابع (با مقدار) مختلط f روی خط اعداد حقیقی بافرض

$$f(-t) = \overline{f(t)}$$

بهازای هر t در R باشد. در اینجا خط زیر نشانگر مزدوج عددی مختلط است. نشان دهید که \mathcal{V} با دو عمل

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(cf)(t) = cf(t)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. تابعی در \mathcal{V} مثال بزنید که (بامقدار) حقیقی نباشد.

۷. فرض کنید \mathcal{V} مجموعه جفت‌های (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا \mathcal{V} با اعمال تعریف شده زیر

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x+x_1, 0)$$

$$c(x, y) = (cx, 0)$$

یک فضای برداری است؟

۳.۰. زیرفضاهای

در این بخش به معرفی برخی از مفاهیم بنیادی مبحث فضاهای برداری می‌پردازیم.

تعریف. گوییم \mathcal{V} فضایی برداری بر روی هیأت F باشد. یک زیرفضای \mathcal{V} عبارت است از یک زیرمجموعه \mathcal{W} از \mathcal{V} که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی \mathcal{V} ، یک فضای برداری بر روی F باشد.

بررسی مستقیم اصول فضاهای برداری نشان می‌دهد که زیرمجموعه W از V یک زیرفضاست هرگاه بهازای هر α و β در W بردار $\alpha + \beta$ نیز در W باشد؛ بردار α در W باشد؛ بهازای هر α در W بردار $(-\alpha)$ در W باشد؛ و بالاخره بهازای هر α در W هر اسکالر c بردار $c\alpha$ نیز در W باشد. بررسی خواص جابجایی و شرکت پذیری جمع برداری و خواص ۴ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) ضرب اسکالری لزومی ندارد؛ زیرا این خواص همان خواص اعمال روی V هستند. هنوز هم امکان ساده‌تر کردن مطالب هست.

قضیه ۱. یک زیرمجموعه غیرتنهی W از V زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر بهازای هردو بردار α و β در W و هر اسکالر c بردار $c\alpha + \beta$ در W باشد.

اثبات. فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای غیرتنهی از V باشد که بهازای همه بردارهای α و β از W و همه اسکالرهای c از F بردار $c\alpha + \beta$ متعلق به W باشد. چون W غیرتنهی است، برداری مانند ρ در W موجود است، و از این‌رو، $\rho + \rho = \rho$ (۱) به W تعلق دارد. در این صورت، اگر α برداری دلخواه از W و $c\alpha$ اسکالری دلخواه باشد، بردار $c\alpha = c\alpha + \alpha - \alpha = (-\alpha) - \alpha = -\alpha$ در W است. سرانجام، اگر α و β در W باشند، آنگاه $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta = 1\alpha + \beta - \alpha + \alpha = (\alpha + \beta) - \alpha + \alpha = \alpha$ در W است. بنابراین، W یک زیرفضای V است. بعکس، اگر W زیرفضایی از V ، α و β دو بردار از W ، و c یک اسکالر باشد،
یقیناً $c\alpha + \beta$ در W قرار دارد. \square

بعضی ترجیح می‌دهند که خاصیت $c\alpha + \beta$ از قضیه ۱ را به عنوان تعریف یک زیرفضا به کار بینند، که البته با اصل آن اندکی تفاوت دارد. نکته مهم در این است که اگر W زیرمجموعه‌ای غیرتنهی از V باشد و بهازای همه α و β های در W و همه اسکالرهای c در F ، بردار $c\alpha + \beta$ در W قرار بگیرد، آنگاه W (با اعمالی که از V بهارتی بود) یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. این مطلب چندین مثال جدید از فضاهای برداری برای ما تدارک می‌بیند.

مثال ۶

- (الف) اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، آنگاه V زیرفضایی از V است؛ زیرمجموعه مشکل از بردار صفر تنهای، زیرفضایی از V است که زیرفضای صفر V نامیده می‌شود.
- (ب) در F^n ، بهازای $n \geq 2$ ، مجموعه همه n تایی‌های (x_1, x_2, \dots, x_n) با شرط $x_1 = 1 + x_2$ یک زیرفضا نیست.
- (پ) فضای توابع چندجمله‌ای بر روی هیأت F ، زیرفضایی از فضای همه توابع از F در F است.

(ت) یک ماتریس $n \times n$ (مربعی) A بر روی هیأت F متقارن است هرگاه بهازای هر i و j ، $A_{ij} = A_{ji}$. ماتریسهای متقارن زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی

F را تشکیل می‌دهند.

(ث) یک ماتریس $n \times n$ (مربعی) A بر روی هیأت اعداد مختلط C هرمیتی (یا خودالحقیقی) است، هرگاه به ازای هر j و k

$$A_{jk} = \overline{A_{kj}}.$$

در اینجا خط زیر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است. یک ماتریس 2×2 هرمیتی است اگر و تنها اگر به شکل

$$\begin{bmatrix} z & x+iy \\ x-iy & w \end{bmatrix}$$

باشد که در آن x, y, z ، و w اعدادی حقیقی اند. مجموعه همه ماتریسهای هرمیتی، زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C نیست. زیرا، اگر A هرمیتی باشد درایه‌های قطری آن $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ همگی حقیقی خواهند بود؛ اما، در حالت عمومی، درایه‌های قطری iA حقیقی نیستند. از طرف دیگر، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموعه ماتریسهای هرمیتی مختلط $n \times n$ فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی R (باعمال معمولی) است.

مثال ۷. فضای جواب یک دستگاه معادلات خطی همگن. گیریم A یک ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. در این صورت، مجموعه همه ماتریسهای $1 \times n$ (ستونی) مانند X بر روی F به طوری که $AX = 0$ ، زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بر روی F است. برای اثبات این موضوع، باید نشان دهیم وقتی که $AY = 0$ ، $AX = 0$ ، $AY = 0$ ، $AX = 0$ و c اسکالری دلخواه از F باشد، $A(cX + Y) = 0$. این مطلب بیدرنگ از مطلب کلی زیر نتیجه می‌شود.

لم. اگر A ماتریسی $m \times n$ بر روی F باشد، D B و C دو ماتریس $n \times p$ بر روی F باشند، آنگاه به ازای هر اسکالر d دو اثبات.

$$A(dB + C) = d(AB) + AC. \quad (11-2)$$

$$\begin{aligned} [A(dB + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(dB + C)_{kj} \\ &= \sum_k (dA_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) \\ &= d \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= d(AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= [d(AB) + AC]_{ij}. \square \end{aligned}$$

به طور مشابه، می‌توان نشان داد که به شرط تعریف شدن حاصل جمعها و حاصل ضربهای ماتریسی، $(dB+C)A=d(BA)+CA$ است.

قضیه ۳. گیریم V فضایی بودای برداری هیأت F باشد. اشتراک هر دسته از زیرفضاهای V زیرفضایی از V است.

اثبات. فرض کنیم $\{W_i\}$ دسته‌ای از زیرفضاهای V ، و $W = \bigcap W_i$ اشتراک آنها باشد. توجه دارید که W به عنوان مجموعه همه عناصر متعلق به همه W_i ‌ها تعریف می‌شود (ر. ل. ضمیمه). چون هر W_i زیرفضاست، شامل بردار صفرهم هست. بنا بر این، بردار صفر در W است، و از این رو W غیرتھی است. گیریم α و β دو بردار در W و c یک اسکالر باشد. بنا بر تعریف W ، هم α و هم β به همه W_i ‌ها تعلق دارند، و چون هر W_i زیرفضاست، بردار $(c\alpha + \beta)$ در همه W_i ‌ها قرار دارد. بنا بر این، $(c\alpha + \beta)$ نیز در W است و بنا بر قضیه ۱، W یک زیرفضای V است. \square

از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که اگر S مجموعه‌ای دلخواه از بردارهای V باشد، آنگاه کوچکترین زیرفضایی از S که شامل S باشد هم وجود دارد؛ یعنی زیرفضایی از V وجود دارد که شامل S است و خود مشمول هر زیرفضای دیگر در بردارنده S باشد.

تعریف. گیریم S مجموعه‌ای از بردارهای فضای بودای V باشد. زیرفضای پدیده آمده توسط S ، بنا بر تعریف، عبارت است اذ اشتراک W از همه زیرفضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه‌ای متناهی از بردارهای باشد، یعنی $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ، W را زیرفضای پدیده آمده توسط بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ نیز می‌نامیم.

قضیه ۴. زیرفضای پدیده آمده توسط یک نیزمجموعه غیرتھی S از فضای بودای V عبارت است اذ مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای S .

اثبات. گیریم W زیرفضای پدیده آمده توسط S باشد. در این صورت، هر ترکیب خطی

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$$

از بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در S ، مسلماً در W است. بنا بر این، W شامل L ، مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای واقع در S ، است. از طرف دیگر، مجموعه L شامل S و غیرتھی است. اگر α و β متعلق به L باشند، آنگاه α یک ترکیب خطی

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

از بردارهای α_i در S ، و β یک ترکیب خطی

$$\beta = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$$

از بردارهای β_j در S است. حال، به ازای هر اسکالر c

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^m (c x_i) \alpha_i + \sum_{j=1}^n y_j \beta_j.$$

از این رو، $c\alpha + \beta$ به L تعلق دارد و L یک زیرفضای V است.

تا اینجا نشان داده ایم که L زیرفضایی است از V شامل S و همچنین نشان داده ایم هر زیرفضایی که شامل S باشد شامل L نیز هست. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که L اشتراک همه زیرفضاهای شامل S است؛ یعنی L زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه S است. \square

تعریف. اگر S_1, S_2, \dots, S_k ذیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند، مجموعه همه حاصل جمعهای

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

از بردارهای α_i در S_i ، مجموع ذیرمجموعه‌های S_1, S_2, \dots, S_k نام دارد و با

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k$$

یا

$$\sum_{i=1}^k S_i$$

نشان داده می‌شود.

اگر W_1, W_2, \dots, W_k زیرفضاهایی از V باشند، بسادگی دیده می‌شود که مجموع

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_k$$

یک زیرفضای V است که شامل هر یک از زیرفضاهای W_i است. همچنان که در اثبات قضیه ۳ آمده است، از این مطلب نتیجه می‌شود که W زیرفضای پدید آمده توسط اجتماع W_1, W_2, \dots, W_k است.

مثال ۸. گیریم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد و

$$\alpha_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, 0, 1, 4, 0)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

بنابر قضیه ۳ بردار α در زیرفضای W پدید آمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_4 از فضای F^5 قرار دارد اگر و تنها اگر اسکالرهایی مانند c_1, c_2, c_3 و c_4 در F وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3.$$

از این رو، W متشکل است از همه بردارهای به صورت

$$\alpha = (c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$$

که در آن c_1, c_2, c_3 اسکالرها بی دلخواه از F می باشند. به عبارت دیگر، می توان W را به عنوان مجموعه همه ۵ تابیهای

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

که در آن x_i ها در F هستند و

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_4 = 3x_1 + 4x_2$$

توصیف کرد. بدین نحو $(2, -5, 1, -3, -6)$ در W قرار دارد، لیکن $(2, 4, 6, 7, 8)$ در W نیست.

مثال ۹. گیریم F زیرهیاتی از هیأت اعداد مختلط C و V فضای برداری همه ماتریسهای 2×2 بر روی F باشد. فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای است از V متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن x, y و z اسکالرها بی دلخواه از F هستند. سرانجام، فرض کنیم W_1 زیرفضای از V باشد متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

که در آن x و y اسکالرها بی دلخواهی از F هستند. W_1 و W_2 دو زیرفضای از V هستند. همچنین

$$V = W_1 + W_2.$$

زیرا،

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

زیرفضای $W_1 \cap W_2$ متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است.

مثال ۱۰. گیریم A ماتریسی $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. بردارهای سط्रی ماتریس A بردارهایی در F^n هستند که با $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ ، $\alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})$ به دست می‌آیند. زیرفضایی از F^n که توسط بردارهای سطری A پدیدمی‌آید فضای سطری ماتریس A نامیده می‌شود. زیرفضایی که در مثال ۸ در نظر گرفته شد، فضای سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. این زیرفضا، فضای سطری ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

نیز هست.

مثال ۱۱. فرض کنیم \mathcal{V} فضای همه توابع چندجمله‌ای بر روی هیأت F باشد. گیریم S زیرمجموعه‌ای از \mathcal{V} مشتمل از توابع چندجمله‌ای f_1, f_2, f_3, \dots با تعریف

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

باشد. در این صورت، \mathcal{V} زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه S است.

تمرین

۱. کدامیک از مجموعه‌های زیرمشتمل از بردارهای (a_1, \dots, a_n) در R^n زیرفضایی از R^n ($n \geq 3$) است؟

(الف) مجموعه همه a ها به طوری که $a_1 \geq 0$

(ب) مجموعه همه a ها با شرط $a_1 + 3a_2 = a_3$

(پ) مجموعه همه a ها به طوری که $a_1^2 = a_2$

(ت) مجموعه همه a ها با شرط $a_1 a_2 = 0$

(ث) مجموعه همه a ها به طوری که a_2 گویا باشد.

۳. گیریم V فضای برداری (حقیقی) همه توابع f از R^3 در V باشد. کدامیک از مجموعه‌های توابع زیر، زیرفضایی از V است؟

(الف) همه f هایی که برای آنها $f(x^3) = f(x)$ ؛

(ب) همه f هایی با شرط $f(1) = f(0)$ ؛

(پ) همه f هایی که برای آنها $f(3) = 1 + f(-5)$ ؛

(ت) همه f هایی با شرط $f(-1) = 0$ ؛

(ث) همه f هایی که پیوسته هستند.

۴. آیا بردار $(1, -1, 0, -1, 3, -1)$ در زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $(2, -1, 1, 1, -2)$ ، $(5, -1, 1, 1, -2)$ ، $(1, 1, 9, -2)$ از فضای R^5 قرار دارد؟

۵. گیریم W مجموعه همه $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ها در R^5 باشد که در دستگاه

$$2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - x_3 - x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0$$

صدق می‌کنند. مجموعه‌ای مشکل از چند بردار یا باید که W را پدید آورد.

۶. فرض کنید f یک هیأت و n عدد صحیح مثبتی باشد ($n \geq 2$). گیریم V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. کدامیک از مجموعه‌های زیرین از ماتریسهای A در V زیرفضایی از V است؟

(الف) همه ماتریسهای معکوس پذیری؛

(ب) همه ماتریسهای معکوس ناپذیری؛

(پ) همه A ها با شرط $AB = BA$ ؛ که در اینجا B یک ماتریس ثابت در V است؛

(ت) همه ماتریسهای A به طوری که $A^2 = A$.

۷. (الف) ثابت کنید که زیرفضاهای R^1 و زیرفضای صفر هستند.

(ب) ثابت کنید که هر زیرفضای R^2 یا خود R^2 است یا زیرفضای صفر است و یا مشکل از همه مضریهای اسکالری یک بردار ثابت در R^2 است. (زیرفضای نوع آخر، به طور شهودی، خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد).

(پ) آیا می‌توانید زیرفضاهای R^3 را توصیف کنید؟

۸. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضا از یک فضای برداری V ، و نیز اجتماع (دومجموعه)

W_1 و W_2 یک زیرفضای آن باشد. ثابت کنید که یکی از دو زیرفضای W شامل دیگری است.

۸. فرض کنید V فضای برداری همه توابع از R در R باشد. فرض کنید $f \in V$ زیرمجموعه توابع زوج باشد، یعنی توابعی مانند f به قسمی که $f(-x) = f(x)$ ؛ و V زیرمجموعه توابع فرد باشد، یعنی توابعی مانند f به قسمی که $f(-x) = -f(x)$.

(الف) ثابت کنید V و V زیرفضاهای V هستند؛

(ب) ثابت کنید $V + V = V$ ؛

(پ) ثابت کنید $\{0\} \cap V = \{0\}$.

۹. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضای یک فضای برداری V با شرایط $W_1 + W_2 = V$ و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ باشند. ثابت کنید به ازای هر بردار α در V ، برداریکتای α_1 در W_1 و بردار یکتای α_2 در W_2 وجود دارد به طوری که $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

۳.۳ پایه و بعد

اکنون، به امر مهم تخصیص بعد به فضاهای برداری معینی می‌پردازیم. هرچند معمولاً «بعد» را مقوله‌ای هندسی تلقی می‌کنیم، با این وجود باید تعریف جبری مناسبی برای بعد یک فضای برداری بیاییم. این مهم از طریق مفهوم پایه برای انجام می‌گیرد.

تعریف. گوییم V فضایی برداری بودی F باشد. یک زیرمجموعه S از V وابسته خطی (یا به طور ماده وابسته) نامیده می‌شود هرگاه بردادهایی متمایز مانند $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در S و اسکالرهایی مانند c_1, c_2, \dots, c_n که همگی صفرنباشد در F یافت شود، به طوری که

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0.$$

مجموعه‌ای که وابسته خطی نباشد مستقل خطی (یا دادای استقلال خطی) نام دارد. اگر مجموعه S تنها شامل تعدادی متناهی بردادهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ باشد، گاهی به جای اینکه بگوییم S مستقل (یا مستقل) خطی است می‌گوییم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ دابسته (یا مستقل) خطی هستند.

نکات زیر بی‌آمدگاهی ساده این تعریف هستند.

۱. هر مجموعه که شامل یک مجموعه وابسته خطی باشد خود وابسته خطی است.

۲. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی، مجموعه‌ای است مستقل خطی.

۳. هر مجموعه‌ای که شامل بردار 0 باشد وابسته خطی است؛ زیرا $0 = 0 \cdot 0$.

۴. مجموعه S از بردارها، مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر به ازای هر چند بردار متمایز $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از

S ، تساوی $c_0 + c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$ ایجاب کند که همه c_i ها صفر هستند.

تعریف. گیریم V فضایی بوداری باشد. یک پایه برای V مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای V است که فضای V را پدیدآورد. فضای V دارای V دارای (یا با) بعد متناهی است هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد.

مثال ۱۲. فرض کنیم F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. بردارهای

$$\alpha_1 = (3, 0, -3)$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2)$$

$$\alpha_3 = (4, 2, -2)$$

$$\alpha_4 = (2, 1, 1)$$

از F^3 وابسته خطی هستند؛ زیرا

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0.$$

بردارهای

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0)$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, 0)$$

$$\epsilon_3 = (0, 0, 1)$$

مستقل خطی هستند.

مثال ۱۳. فرض کنیم F یک هیأت و S زیرمجموعه‌ای از F^n مشکل از بردارهای $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ با تعریف

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

...

$$\epsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

باشد. x_1, x_2, \dots, x_n را اسکالرهاي در F می‌گيريم و قرار می‌دهيم

$$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \dots + x_n\epsilon_n.$$

در این صورت،

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (12-2)$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ فضای F^n را پدید می‌آورند. چون $\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ باشد. $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ مستقل خطی هستند.

در نتیجه، مجموعه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه‌ای برای F^n است. این پایه خاص را پایه استاندی F^n می‌نامیم.

مثال ۱۴. گیریم P یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر بروی هیئت F باشد. در این صورت، ستونهای P ؛ یعنی P_1, P_2, \dots, P_n پایه‌ای برای فضاهای ماتریسهای ستونی $F^{n \times 1}$ تشکیل می‌دهند. دلیل این مطلب به شرح ذیراست. اگر X ماتریسی ستونی باشد، آنگاه

$$PX = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n.$$

حال چون $PX = 0$ تنها دارای جواب بدیهی است، نتیجه می‌گیریم که مجموعه $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ مستقل خطی است. اما، چرا این مجموعه $F^{n \times 1}$ را پدید می‌آورد؟ فرض کنیم Y ماتریس ستونی دلخواهی باشد. اگر بگیریم $X = P^{-1}Y$ ، آنگاه $Y = PX$ باشد.

$$Y = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n.$$

از این رو، $\{P_1, \dots, P_n\}$ پایه‌ای برای $F^{n \times 1}$ است.

مثال ۱۵. گیریم A ماتریسی $m \times n$ و S فضای جواب دستگاه همگن $AX = 0$ باشد (مثال ۷). فرض کنیم R یک ماتریس تحویل شده سط्रی پلکانی هم ارز با A باشد. در این صورت، S فضای جواب دستگاه $RX = 0$ نیز هست. اگر R دارای r سطر غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه معادلات $RX = 0$ بوضوح r تا از مجهولهای x_1, \dots, x_n را بحسب $(n-r)$ مجهول باقیمانده x_r بیان می‌کند. فرض کنیم در اینهای غیر صفر مقدم سطرهای غیر صفر در ستونهای k_1, \dots, k_r قرار گیرند. اگر j مجموعه متشکل از $(n-r)$ نمایه غیر از k_1, \dots, k_r باشد:

$$J = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_r\}$$

آنگاه، دستگاه $RX = 0$ به صورت

$$x_{k_1} + \sum_j c_{1j} x_j = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{k_r} + \sum_j c_{rj} x_j = 0$$

است که در آن c_{ij} ها اسکالرهاي معينی هستند. همه جوابها با تخصیص مقادیری (دلخواه) به x_r هایی که نمایه J آنها در J قرار دارد، و سپس محاسبه مقادیر متناظر x_{k_1}, \dots, x_{k_r} به دست می‌آیند. به ازای هر j در J ، گیریم E_j جوابی باشد که از قرار دادن $x_i = 0$ و $x_j = 1$ به ازای همه i های دیگر واقع در J ، به دست می‌آید. ادعا می‌کیم که $(n-r)$ بردار E_j ، j در J ، پایه‌ای برای فضای جواب تشکیل می‌دهند.

چون ماتریس ستونی E_j در سطر j دارای درایه ۱ و در سطرهای نمایه گذاری شده توسط عناصر دیگر J دارای درایه صفر است، استدلال مثال ۱۳ نشان می‌دهد که مجموعه این بردارها مستقل خطی است. به دلیل ذیر، این مجموعه فضای جواب را پدیدارد. اگر ماتریس ستونی T با درایه‌های t_{ij} در فضای جواب باشد، ماتریس

$$N = \sum_j t_j E_j$$

نیز در فضای جواب قرارداد و جوابی است که به ازای هر x در J ، $t_1 = x$. جوابی با این خاصیت، یکنانت؛ از این رو، $N = T$ در فضای پدیدآمده توسط بردارهای E_j قراردادارد.

مثال ۱۶. اگر n مثالی از یک پایه نامتناهی می‌آوریم. گیریم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و V فضای توابع چندجمله‌ای بر روی F باشد. یادآوری می‌کنیم که این توابع، توابعی از F در F هستند که قاعده‌ای به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

دارند. فرض کنیم $f(x) = x^k$ و $f = f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ مجموعه (نامتناهی) $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای V است. این مجموعه بوضوح V را پدیدارد می‌آورد؛ زیرا تابع f (بالا) عبارت است از

$$f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n.$$

خواننده باید متوجه باشد که این فرمول در واقع تکراری از تعریف تابع چند جمله‌ای است؛ یعنی، تابع f از F در F ، یک تابع چند جمله‌ای است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح n و اسکالرها ای مانند c_0, c_1, \dots, c_n وجود داشته باشند به طوری که $f = c_0 f_0 + \dots + c_n f_n$ متنقل خطی است به معنی نشان دادن اینکه مجموعه متناهی آن متنقل خطی است. پس، کافی است نشان دهیم به ازای هر n مجموعه $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ متنقل خطی است. فرض کنیم

$$c_0 f_0 + \dots + c_n f_n = 0.$$

این بدان معنی است که به ازای هر x در F

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0;$$

بهیان دیگر، هر x در F یک ریشه چند جمله‌ای $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ است. فرض می‌کنیم خواننده بداند که یک چند جمله‌ای از درجه n با ضرایب مختلط نمی‌تواند بیش از n ریشه متمایز داشته باشد. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

تا اینجا یک پایه نامتناهی برای V ارائه کرده‌ایم. آیا این بدان معنی است که V دارای بعد متناهی نیست؟ در واقع این طور است؛ ولی، این نتیجه‌ای فوری از تعریف نیست؛ زیرا، تا جایی که ما می‌دانیم ممکن است V دارای پایه متناهی نیز باشد. این امکان بسادگی قابل رفع است. (در قضیه بعد این مطلب را در حالت عمومی مرتفع می‌کنیم). فرض کنیم تعدادی متناهی تابع چند جمله‌ای g_1, g_2, \dots, g_n داشته باشیم. مسلماً بین توانهایی از x که در $(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ (با ضرب غیرصفر) ظاهر می‌شوند، بزرگترین وجود دارد. اگر این توان k باشد، به طور قطع $x^{k+1} = g_{n+1}(x)$ در پدیده آمده خطی g_1, g_2, \dots, g_n قرار ندارد. بنابراین، V با بعد متناهی نیست. اینک پردازیم به آخرین نکته در مورد این مثال. پایه‌های نامتناهی ربطی به «ترکیبات خطی نامتناهی» ندارند. خواسته‌ای که قویاً احساس کند بین رشته توافق

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

و این مثال ربطی وجود دارد، بهتر است مجدداً و با دقت این مثال را مطالعه کند. اگر این توصیه گشاشی ایجاد نکرد بهتر است از این پس در می‌حدود کردن توجه خود به فضاهای با بعد متناهی باشد.

قضیه ۴. فرض کنید V فضای برداری پدیدآمده توسط مجموعه متناهی مشکل از بردارهای $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ باشد. در این صورت، هر مجموعه مستقل از بردارهای V متناهی است و بیش از m عنصر ندارد. اثبات. برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که هر زیرمجموعه S از V که شامل بیش از m بردار باشد، وابسته خطی است. گیریم S چنین مجموعه‌ای باشد. پس، در S بردار متمایز $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ با شرط $n > m$ وجود دارد. چون $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ فضای V را پدید می‌آورند، اسکالرهایی مانند A_{ij} در F یافت می‌شوند به طوری که

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} \beta_j.$$

به ازای هر n اسکالر دلخواه x_1, x_2, \dots, x_n داریم:

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + \cdots + x_n \alpha_n &= \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m A_{ij} x_i \right) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i. \end{aligned}$$

چون $n > m$ ، قضیه ۴ از فصل ۱ ایجاب می‌کند که اسکالرها بای مانند $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ که همگی ۰ نیستند، وجود داشته باشند به طوری که

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

از این رو، $0 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$. این نشان می‌دهد که مجموعه \mathcal{S} وابسته خطی است. \square

نتیجه ۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو پایه از V به تعداد مساوی (و متناهی) عضو دارند.

المبادله. چون V با بعد متناهی است، دارای یک پایه متناهی

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

است. بنابر قضیه ۴، هر پایه V ، متناهی است و بیش از m عضو ندارد. پس، اگر $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه باشد، آنگاه $n \leq m$. با برهانی مشابه، $n \geq m$ و بنابراین، $m = n$. \square

این نتیجه بهما اجازه می‌دهد که بعد یک فضای برداری با بعد متناهی را به عنوان تعداد اعضای هر یک از پایه‌های آن تعریف کنیم. بعد یک فضای برداری با بعد متناهی V را با $\dim(V)$ یا بعد (V) نشان می‌دهیم. بنابراین مطلب قضیه ۴ را به صورت زیر بازگو می‌کنیم.

نتیجه ۲. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، و بعد $(V) = n$. در این صورت

(الف) هر ذیر مجموعه V که شامل بیش از n بردار باشد وابسته خطی است.

(ب) هیچ ذیر مجموعه‌ای از V که کمتر از n بردار داشته باشد نمی‌تواند V را پدید آورد.

مثال ۱۷. اگر F یک هیأت باشد، بعد F^n برای n است؛ زیرا، پایه استاندۀ F^n شامل n بردار است. بعد فضای ماتریسی $F^{m \times m}$ برای mn است. این مطلب در مقایسه با حالت F^n باید روشن باشد، چراکه mn ماتریسی که در مکان i, j خود درایه ۱ و در مکانهای دیگر درایه صفر دارند، تشکیل پایه‌ای برای $F^{m \times n}$ می‌دهند. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه بعد فضای جواب A برای $n - r$ است؛ که در آن r تعداد سطرهای غیر صفر یک ماتریس تحويل شده سطري پلکانی است که هم ارز سطري A باشد. به مثال ۱۵ رجوع شود.

اگر V فضای برداری دلخواهی بر روی F باشد زیرفضای صفر V توسط برداره

پدید می‌آید، ولی مجموعه $\{\alpha_i\}$ یک پایه نیست، زیرا وابسته خطی است. بدین دلیل، تراویح می‌کنیم که زیرفضای صفر دارای بعد n باشد. همچنین با اثبات این مطلب که مجموعه تهی یک پایه برای زیرفضای صفر است، می‌توانیم بهمان نتیجه برسیم. مجموعه تهی، فضای $\{\alpha_i\}$ را پدید می‌آورد؛ زیرا اشتراک همه زیرفضاهای شامل مجموعه تهی برابر است، و بعلاوه مجموعه تهی مستقل خطی است، چرا که شامل هیچ برداری نیست.

لم. فرض کنیم S یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد و بردار β از V در زیرفضای پدید آمده توسط S نباشد. در این صورت، مجموعه حاصل از الحاق β به S مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ بردارهای متمایزی از S باشند و

$$C_1\alpha_1 + \dots + C_m\alpha_m + b\beta = 0$$

آنگاه $b = 0$ ؛ زیرا در غیر این صورت

$$\beta = \left(-\frac{c_1}{b}\right)\alpha_1 + \dots + \left(-\frac{c_m}{b}\right)\alpha_m.$$

و β در زیرفضای پدید آمده توسط S قرار می‌گیرد. از این رو، $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ و چون S مستقل خطی است همه β ‌ها صفرند. \square

قضیه ۵. اگر W زیرفضایی از یک فضای با بعد متناهی V باشد، هر زیرمجموعه مستقل خطی از W متناهی است و قسمتی از یک پایه (متناهی) W است.

اثبات. فرض کنیم S یک زیرمجموعه مستقل خطی W باشد. اگر زیرمجموعه مستقل خطی S از W شامل باشد، آنگاه S نیز یک زیرمجموعه مستقل خطی V است؛ حال چون V با بعد متناهی است، S شامل بیش از $\dim V$ عنصر نیست.

به طریق زیر، S را به پایه‌ای برای W گسترش می‌دهیم. اگر S فضای W را پدید آورد، آنگاه S یک پایه W است و کار تمام است. هرگاه S فضای W را پدید نیاورد، لم قبل را برای یافتن یک بردار β در W به طوری که مجموعه $S \cup \{\beta\}$ مستقل خطی باشد به کار می‌گیریم. اگر $S \cup \{\beta\}$ فضای W را پدید آورد، مراد حاصل است. در غیر این صورت، لم را برای دست یافتن یک بردار β در W به طوری که $S \cup \{\beta\}$ مستقل خطی باشد به کار می‌بندیم. اگر به همین طریق ادامه دهیم، آنگاه (طی حداکثر $\dim V$ مرحله) به مجموعه

$$S_m = S \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

می‌رسیم که پایه‌ای برای W است. \square

نتیجه ۱. اگر W زیرفضایی سه از فضای برداری V با بعد متناهی باشد، آنگاه

$\dim W < \dim V$ با بعد متناهی است و $\dim W$

اثبات. می توانیم فرض کنیم W شامل بردار $\alpha \neq 0$ باشد. بنابر قضیه ۵ و اثبات آن، پایه ای برای W شامل α وجود دارد که حاوی بیش از $\dim V$ عنصر نیست؛ از این رو، W با بعد متناهی است و $\dim W \leq \dim V$. چون W زیرفضای سرهای از V است، یک بردار β در V وجود دارد که در W نیست. با الحاق β بهر پایه W ، یک زیرمجموعه مستقل خطی از V به دست می آوریم. پس، $\dim W < \dim V$. \square

نتیجه ۳. در هر فضای بوداری با بعد متناهی، هر مجموعه غیرتنهی مستقل خطی از بردارها بخشی از یک پایه است.

نتیجه ۴. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بود و هیأت F باشد و بردارهای سطحی A یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای F تشکیل دهند. داین صورت، A معکوس پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بردارهای سطحی A و W زیرفضای پذیرد. آمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از فضای F باشد. چون $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مستقل هستند، بعد W برابر n است. حال، نتیجه ۱ نشان می دهد که $W = F$ ، از این رو، در اسکالرها یی چون B_{ij} وجود دارند که

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

در اینجا $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ پایه استاندۀ F است. از این رو، برای ماتریس B با درایه های B_{ij} داریم

$$BA = I. \quad \square$$

قضیه ۶. اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای با بعد متناهی از فضای بوداری V باشند، آنگاه $W_1 + W_2$ با بعد متناهی است و

$$\text{بعد } (W_1 + W_2) = (\text{بعد } (W_1 \cap W_2) + (\text{بعد } (W_1 + W_2))$$

اثبات. بنابر قضیه ۵ و نتیجه های آن، فضای $W_1 \cap W_2$ یک پایه متناهی دارد که خود بخشی از یک پایه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$$

برای W_1 و نیز بخشی از یک پایه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

برای W_2 است. زیرفضای $W_1 + W_2$ توسط بردارهای

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n$$

پدید می‌آید و این بردارها یک مجموعه مستقل خطی تشکیل می‌دهند. زیرا، فرض کنیم

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \gamma_r = 0.$$

آنگاه،

$$-\sum z_r \gamma_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j$$

که نشان می‌دهد $\sum z_r \gamma_r$ تعلق دارد. چون $\sum z_r \gamma_r$ متعلق به W_2 نیز هست، نتیجه می‌گیریم که به ازای اسکالرها ممیز c_1, \dots, c_k ،

$$\sum z_r \gamma_r = \sum c_i \alpha_i.$$

چون مجموعه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

مستقل است، هر یک از اسکالرهای z برابر صفر است. بنابراین،

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$$

وچون

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$$

نیز مجموعه‌ای مستقل است، هر x و نیز هر y برابر صفر است. از این رو،

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

باشد برای $W_1 + W_2$ است. سرانجام

$$(W_1 + (W_2 + \dots)) = (k+m) + (k+n)$$

$$= k + (m+k+n)$$

$$= (W_1 \cap W_2) + (W_1 + W_2). \quad \square$$

این بخش را با تذکری درباره استقلال و وابستگی خطی به پایان می‌بریم. این مفاهیم را مخصوصاً برای مجموعه‌ای از بردارها تعریف کردیم. لازم است که آنها را برای دنباله‌های متناهی (n تایی‌های مرتب) نیز تعریف کنیم. گوییم بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی هستند هرگاه اسکالرهایی مانند c_1, \dots, c_n ، که همگی ۰ نباشند، یاف شوند به طوری که $c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = 0$. کلاً این اصطلاح چنان طبیعی به نظر می‌رسد که خواندنده ممکن است گمان کند که تا به حال نیز آن را به کار بردé است. تفاوت بین دنباله متناهی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ و مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ چیست؟ دو تفاوت هست، یکی همانندی و دیگری ترتیب.

هرگاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مورد بحث باشد، معمولاً فرض براین است که هیچ دو برداری در میان $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ یکی نیستند. در حالی که در دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ممکن است همه آنها یکی باشند. اگر به ازای $i \neq j$ ، $\alpha_i = \alpha_j$ آنگاه دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی است:

$$\alpha_i + (-1)\alpha_j = 0.$$

از این رو، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی باشند، متمايز نیز هستند و می توانیم درباره مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ صحبت کنیم و مطمئن باشیم که این مجموعه دارای n بردار است. در این حالت مسلم است هیچ گونه ایهای در بحث پایه و بعد وجود نخواهد داشت. بعد یک فضای V با بعد متناهی بزرگترین n است که یک n -تایی از بردارهای V مستقل خطی باشد. وغیره. خواننده‌ای که فکر کند مطالب این بند جز هیا هو چیزی نیست، خوب است از خود سؤال کنند که آیا دو بردار

$$\alpha_1 = (e^{\pi/4}, 1)$$

$$\alpha_2 = (\sqrt{110}, 1)$$

در R^3 مستقل خطی هستند یا نه.

عناصر یک دنباله به ترتیب معینی شماره‌گذاری می‌شوند. در حالی که یک مجموعه دسته‌ای است از اشیاء بدون هیچ گونه آرایش و ترتیب خاص. البته، برای توصیف یک مجموعه باید اعضای آن را فهرست کنیم و این امر نیاز به اتخاذ یک ترتیب دارد. ولی، ترتیب، جزوی از مجموعه نیست. مجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{1, 3, 2, 4\}$ یکی هستند، درحالی که دنباله متناهی $4, 2, 3, 1$ با دنباله $1, 2, 3, 4$ کاملاً متفاوت است. جنبه ترتیب دنباله تأثیری بر مفاهیم استقلال، وابستگی، وغیره ندارد، زیرا وابستگی (آن طور که تعریف شد) متأثر از ترتیب نیست. دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته است اگر و تنها اگر دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته باشد. در بخش بعدی، ترتیب اهمیت خاصی خواهد داشت.

تمرین

۱. اگر دو بردار وابسته خطی باشند، ثابت کنید یکی از آنها مضرب اسکالری دیگری است.

۲. آیا بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4), \quad \alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$

$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0), \quad \alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

در R^4 مستقل خطی هستند؟

۳. پایه‌ای برای زیرفضایی از R^4 که توسط چهار بردار تمرین ۲ پدید می‌آید باید.

۴. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 2, 1), \quad \alpha_3 = (0, -3, 2)$$

پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهند. هریک از بردارهای پایه استاند را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بیان کنید.

۵. سه بردار وابسته خطی در R^3 باید که هر جفت از آنها مستقل خطی باشند.

۶. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F باشد. با یافتن پایه‌ای برای V که ۴ عنصر داشته باشد، ثابت کنید V چهار بعدی است.

۷. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۶، W_1 مجموعه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

و W_2 مجموعه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}$$

باشند.

(الف) ثابت کنید W_1 و W_2 زیرفضاهای V هستند.

(ب) ابعاد $W_1, W_2, W_1 + W_2$ و $W_1 \cap W_2$ را باید.

۸. مجدداً فرض کنید V فضای ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F باشد. پایه‌ای چون

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \quad A_j = A_j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

۹. فرض کنید V فضایی برداری بر روی یک زیرهیأت F از اعداد مختلط باشد. فرض

کنید بردارهای α, β, γ در V مستقل خطی باشند. ثابت کنید $(\alpha + \beta), (\alpha + \gamma)$

و $(\gamma + \alpha)$ دارای استقلال خطی اند.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری بر روی هیأت F باشد و تعدادی متناهی بردار چون $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در V این فضای را پدید آورند. ثابت کنید V با بعد متناهی است.

۱۱. فرض کنید V مجموعه همه ماتریسهای 2×2 مانند A با درایه‌های مختلط باشد که در شرط $0 = A_{11} + A_{22}$ صدق می‌کنند.

(الف) نشان دهید V با اعمال معقولی جمع ماتریسی و ضرب ماتریس در اسکالر،

فضایی است برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی.
 (ب) پایه‌ای برای این فضای برداری باید.

(پ) فرض کنید W مجموعه همه ماتریس‌های A در V با شرط $A_{21} = -A_{12}$ باشد (خط زیر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است). ثابت کنید W یک زیرفضای V است و پایه‌ای هم برای W باید.

۱۲. با یافتن پایه‌ای برای فضای همه ماتریس‌های $m \times n$ بر روی هیأت F , ثابت کنید بعد این فضا mn است.

۱۳. تمرین ۹ را در حالتی که V یک فضای برداری بر روی هیأت دو عنصری توصیف شده در تمرین ۵ بخش ۱۰.۱ باشد، مورد بحث قراردهید.

۱۴. فرض کنید V مجموعه اعداد حقیقی باشد. V با اعمال معمولی را به عنوان فضایی برداری بر روی هیأت اعدادگویا محسوب و ثابت کنید این فضای برداری بعد متأهی نداد.

۴.۳. مختصات

یکی از جنبه‌های مفید بیک پایه B در فضای V بعدی V این است که اساساً به ما امکان می‌دهد در V , نظیر «مختصات طبیعی»، x_i ؛ از یک بردار (x_1, x_2, \dots, x_n) در فضای F , به معروفی مختصات پردازیم. در این طرح، مختصات بردار α از V نسبت به پایه B اسکالرها لی خواهد بود که در بیان α به صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه به کار می‌رود. از این‌رو، علاقه‌مندیم که مختصات طبیعی بردار α در F را به عنوان مختصاتی که توسط α و پایه استاند F تعریف می‌شوند، محسوب کنیم. اما، در پذیرش این دیدگاه باید دقت کافی به عمل آوریم. اگر

$$\alpha = (x_1, \dots, x_n) = \sum x_i e_i$$

و B پایه استاند F باشد، دقیقاً چگونه مختصات بردار α توسط B و α تعیین می‌شوند؟ یک راه پاسخ دادن به این سوال چنین است. هر بردار مفروض α عبارت یکتاً به صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه استاند دارد، و مین مختص x_i از α ضریب e_i در این عبارت است. از این‌جهت می‌توانیم بگوییم α مختص کدام است. زیرا، ترتیبی «طبیعی» برای بردارهای پایه استاند وجود دارد؛ یعنی قاعده‌ای درست هست برای تعیین اینکه در پایه، کدام «اویلین» بردار است، کدام «دویمین»، والی آخر. اگر B پایه دلخواهی از فضای V باشد، احتفالاً ترتیبی طبیعی برای بردارهای B نداریم، و از این‌رو، قبل از آنکه بتوانیم α مختص α نسبت به B را تعریف کنیم، ضروری است ترتیبی برای این بردارها تحمیل کنیم. به تعبیر دیگر، مختصات نسبت به دنباله بردارها و نهمجموعه بردارها

تعریف می‌شوند.

تعريف. اگر V یک فضای برداری باشد، یک پایه مرتب برای V دنباله‌ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را پذید آورند.

اگر دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ پایه مرتبی برای V باشد، آنگاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. در واقع، پایه مرتب مجموعه‌ای است همراه با ترتیبی معین. با مختصر سوءاستفاده از علامت‌گذاری، همه این مطالب را با ذکر این که

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V است، خلاصه می‌کنیم.

حال فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V ، n تایی یکتا بی چون (x_1, \dots, x_n) از اسکالرها وجود دارد که

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

این n تایی یکتاست، زیرا اگر همچنین داشته باشیم

$$\alpha = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0$$

و استقلال خطی بردارهای α_i ایجاد می‌کند که به ازای هر i ، $x_i - z_i = 0$ را، زمین مختص α نسبت به پایه مرتب

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

می‌نامیم. اگر

$$\beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \alpha_i$$

و بنابراین، همین مختص ($\alpha + \beta$) نسبت به این پایه مرتب ($x_i + y_i$) است. به طور مشابه، همین مختص ($c\alpha$) برابر cx_i است. همچنین، روشن است که هر n تایی (x_1, \dots, x_n) در F^n عبارت است از n تایی مختصات برداری در V ، یعنی بردار

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

به طور خلاصه، هر پایه مرتب برای V تاظری یک به یک
 $\alpha \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$

بین مجموعه همه بردارهای V و مجموعه همه n تاییهای F^n برقرار می‌سازد. این تاظر دارای این خاصیت است که متاظر ($\alpha + \beta$) همان حاصل جمع متاظرهای دو بردار α و β در F^n است، و همچنین متاظر ($c\alpha$) برابراست با حاصل ضرب اسکالر c و متاظر بردار α در F^n .

در این مرحله، ممکن است این سؤال مطرح شود که چرا صرفاً پایه مرتبی برای V انتخاب نمی‌کنیم تا هر بردار V را به وسیله n تایی مختصات متاظرش توصیف نماییم؛ چرا که در این صورت از راحتی کار با n تاییها برخودار هستیم. این امر بهدو دلیل نقض غرض خواهد بود. اولاً، همان‌طور که تعریف اصل موضوعی فضاهای برداری نشان می‌دهد، سعی ما این است که فضاهای برداری را به عنوان دستگاههای جبری مجرد بررسی کنیم. ثانیاً، حتی در آن حالاتی که مختصات را به کار می‌بریم، نتایج مهم از توانایی ما در تغییر دستگاه مختصات؛ یعنی، در تغییر پایه مرتب، به دست می‌آیند.

اغلب، راحت‌تر است که به جای n تایی مختصات (x_1, \dots, x_n) از ماتریس مختصات α نسبت به پایه مرتب β :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

استفاده کنیم. برای نمایاندن وابستگی این ماتریس مختصات به پایه، علامت $[\alpha] \beta$

را برای ماتریس مختصات بردار α نسبت به پایه مرتب β به کار خواهیم برد. این نماد، در مواردی نظری این پرسش که در صورت تغییر پایه مرتبی به پایه مرتب دیگر چه تغییری در مختصات برداری چون α روی می‌دهد، خصوصاً مفید است.

پس، فرض کنیم V فضای n بعدی باشد، و

$$\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad \beta' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دو پایه مرتب برای V باشد، در این صورت، اسکالرهاي یکتايني چون $x_i P_{ij}$ وجوددارند که

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (13-2)$$

گيريم x'_1, x'_2, \dots, x'_n مختصات بردار مفروض α در (نسبت به) پایه مرتب B' باشد. در اين صورت

$$\begin{aligned} \alpha &= x'_1 \alpha'_1 + \cdots + x'_n \alpha'_n \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i. \end{aligned}$$

پس، رابطه

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i \quad (14-2)$$

به دست می آيد. چون x'_1, x'_2, \dots, x'_n مختصات بردار α در پایه مرتب B' ، به طور يكتايني می شوند، از (14-2) نتیجه می شود که

$$x_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (15-2)$$

گيريم P ماترييس $n \times n$ باشد که درايه j, i آن اسکالر P_{ij} است و گيريم X و X' ماترييسهاي مختصات بردار α در پایه های مرتب B و B' باشد. در اين صورت (15-2) را می توان به صورت فرمول

$$X = P X' \quad (16-2)$$

نوشت. چون B و B' دومجموعه مستقل خطی هستند، $X = 0$ اگر و تنها اگر $X' = 0$. لذا از (16-2) و قضیه ۷ افصل ۱، نتیجه می گيريم که P معکوس پذير است. ازاين رو،

$$X' = P^{-1} X. \quad (17-2)$$

اگر نماد معرفی شده فوق را برای ماترييس مختصات يك بردار نسبت به پایه های مرتب به کار گيريم، آنگاه (16-2) و (17-2) ييان می کنند که

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

پس، این بحث را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد.

قضیه ۷. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بر دوی هیأت F باشد، و \mathcal{B} و \mathcal{B}' دو پایه مرتب برای V باشند. آنگاه یک ماتریس $n \times n$ یکتا ولزوماً معکوس پذیر مانند P که درایه‌هایش در F مستند وجود دارد به طوری که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (1)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (2)$$

ستونهای P با دو ابط

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

تعیین می‌شوند.

برای تکمیل تحلیل بالا، نتیجه زیر را نیز اثبات می‌کنیم.

قضیه ۸. فرض کنیم P ماتریسی معکوس پذیر در $n \times n$ بر دوی هیأت F ، V یک فضای برداری n بعدی بر دوی F ، و \mathcal{B} پایه‌ای مرتب برای V باشد. در این صورت، پایه مرتب یکتا بودی چون \mathcal{B} وجود دارد که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (1)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (2)$$

اثبات. گیریم $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ متشکل از بردارهای $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ باشد. اگر $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ پایه مرتبی برای V و در مورد آن (۱) معتبر باشد، واضح است که

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

پس، کافی است نشان دهیم بردارهای α'_j که با این معادلات تعریف می‌شوند، تشکیل یک پایه می‌دهند. فرض کنیم $Q = P^{-1}$. در این صورت،

$$\begin{aligned} \sum_j Q_{jk} \alpha'_j &= \sum_j |Q|_{jk} \sum_i P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_j \sum_i P_{ij} Q_{jk} \alpha_i \\ &= \sum_i (\sum_j P_{ij} Q_{jk}) \alpha_i \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

بنابراین، زیرفضای پدیدآمده توسط مجموعه

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

شامل \mathcal{B} ونتیجتاً مساوی با V است. پس، \mathcal{B}' یک پایه است، و بنابر تعریف پایه و قضیه ۷ واضح است که (۱) معتبر وازنجا (۲) نیز معتبر می باشد. \square

مثال ۱۸. گیریم F یک هیأت، و

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

برداری از F باشد. اگر \mathcal{B} پایه مرتب استاندۀ F^n باشد:

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

آنگاه ماتریس مختصات بردار α در پایه \mathcal{B} به وسیله

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعیین می شود.

مثال ۱۹. فرض کنیم R هیأت اعداد حقیقی و θ عدد حقیقی ثابتی باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

معکوس پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

پس، به ازای هر θ ، مجموعه \mathcal{B}' مشتمل از بردارهای $(\cos \theta, \sin \theta)$ و $(-\sin \theta, \cos \theta)$ پایهای برای R^2 است. این پایه را به طور شهودی می توان بعنوان پایهای که از دوران پایه استاندۀ به اندازه زاویه θ حاصل می شود، توصیف کرد. اگر بردار (x_1, x_2) باشد، آنگاه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta.\end{aligned}$$

مثال ۲۰. گیریم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

بنابراین، بردارهای

$$\alpha'_1 = (-1, 0, 0)$$

$$\alpha'_2 = (2, 0, 0)$$

$$\alpha'_3 = (5, -3, 8)$$

پایه‌ای چون \mathcal{B}' را برای F^3 تشکیل می‌دهند. مختصات $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ از بردار $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ در پایه \mathcal{B}' به وسیله

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 \\ \frac{1}{8}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

تعیین می‌شوند. در حالت خاص

$$(3, 2, -8) = -10\alpha'_1 - \frac{1}{2}\alpha'_2 - \alpha'_3.$$

تمرین

۱. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\alpha_3 = (1, 0, 0, 0), \quad \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

پایه‌ای برای R^4 تشکیل می‌دهند. مختصات هر یک از بردارهای پایه استاند را نسبت به پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ بیا بید.

۲. ماتریس مختصات بردار $(1, 0, 0, 0)$ در پایه‌ای از C^3 را که بترتیب مشکل است از بردارهای $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, و $(i-1, i+1, 0, 0)$ بیا بید.

۳. فرض کنید $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه‌ای مرتب برای R^3 مشکل از

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 0, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 0)$$

باشد. مختصات بردار (a, b, c) در پایه مرتب \mathcal{B} چیست؟

۴. فرض کنید W زیر فضایی از C^3 باشد که توسط $(i, 0, 0)$ و $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ و $\alpha_2 = (1+i, 1, 0)$ پدید می‌آید.

(الف) نشان دهید که α_1 و α_2 پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(ب) نشان دهید که بردارهای $(1, 1, 0)$, $(1, i, 1+i)$ و $(0, \beta_1, \beta_2)$ در W قرار دارند و پایه دیگری برای W تشکیل می‌دهند.

(پ) مختصات α_1 و α_2 در پایه مرتب $\{\beta_1, \beta_2\}$ از W چه هستند؟

۵. فرض کنید $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ دو بردار در R^2 باشند که

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

ثابت کنید که $\{\alpha, \beta\}$ پایه‌ای برای R^2 است. مختصات بردار (a, b) را در پایه مرتب $\{\alpha, \beta\}$ بیا بید. (از نظر هندسی، شرایط روی α و β بیان می‌کنند که α و β متعامدند و هر یک طول ۱ دارند).

۶. فرض کنید فضای برداری V بر روی اعداد مختلط، مشکل از همه توابع از R در C باشد؛ یعنی، فضای همه توابع (با مقدار) مختلط روی خط حقیقی باشد. فرض کنید

$$\cdot f_2(x) = e^{-ix}, f_1(x) = 1$$

(الف) ثابت کنيد که f_1, f_2, f_3 مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنيد $A = \begin{pmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ \sin x & g_1(x) & g_2(x) \\ \cos x & g_2(x) & g_3(x) \end{pmatrix}$. ماتریس P باید به طوری که

$$g_j = \sum_{i=1}^3 P_{ij} f_i$$

۷. فرض کنید V فضای برداری (حقیقی) همه توابع چندجمله‌ای از R در R از درجه ۲ یا کمتر باشد؛ یعنی، فضای همه توابع f به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

باشد. فرض کنید $\#$ عدد حقیقی ثابتی باشد، و تابع زیر را تعریف کنید:

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x + t, \quad g_3(x) = (x + t)^2.$$

ثابت کنید $\{g_1, g_2, g_3\} = \mathcal{B}$ پایه‌ای برای V است. اگر

$$f(x) = c_0 + C_1 x + C_2 x^2,$$

محصصات f در پایه مرتب \mathcal{B} چه هستند؟

۵.۳ خلاصه هم ارزی سطري

در این بخش برای تکمیل بحث هم ارزی سطري ماتریسها، چند حکم مقدماتی در مورد پایه و بعد فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد استفاده قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که اگر A ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشد، بردارهای سطري A عبارتد از بردارهای F که توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ از

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$$

تعریف می‌شوند؛ و نیز یادآور می‌شویم که فضای سطري A زیر فضایی است از F که توسط این بردارها پدید می‌آید. رقبه سطري A عبارت است از بعد فضای سطري A . اگر P ماتریس $k \times m$ بر روی F باشد، آنگاه حاصل ضرب $B = PA$ ماتریسی $k \times n$ است که بردارهای سطري آن $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ ترکیبات خطی

$$\beta_i = P_{i1}\alpha_1 + \dots + P_{im}\alpha_m$$

از بردارهای سطري A هستند. بدین نحو، فضای سطري B زیر فضایی از فضای سطري A است. اگر P ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری باشد، آنگاه B هم ارز سطري A است، و نتیجتاً تقارن هم ارزی سطري، یا معادله $A = P^{-1}B$ ، ایجاب می‌کند که فضای سطري A نیز زیر فضایی از فضای سطري B باشد.

قضیه ۹. فضاهای سطري ماتریسها هم اذ سطري یکی هستند.

از این رو، می‌بینیم که برای مطالعه فضای سطري A کافی است به مطالعه فضای

سطری یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی که هم ارز سطری A باشد پردازیم؛ و این، همان چیزی است که قصد انجام آن را داریم.

قضیه ۱۰. فرض کنیم R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی غیر صفر باشد. در این صورت بردارهای سطری غیر صفر R برای فضای سطری R یک پایه تشکیل می‌دهند. اثبات. گیریم p_1, p_2, \dots, p_r بردارهای سطری غیر صفر ماتریس R باشند:

$$\rho_i = (R_{i1}, \dots, R_{in}).$$

مفهوماً این بردارها مستقل خطی‌اند. چون R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است، اعداد صحیح و مثبتی چون k_1, k_2, \dots, k_r وجود دارند که به ازای $r \leq i \leq n$

$$(الف) \quad R(i, j) = 0 \text{ هرگاه } k_i < j$$

$$(ب) \quad R(i, k_j) = \delta_{ij} \quad (18-2)$$

$$(پ) \quad k_1 < \dots < k_r$$

فرض کنیم $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ برداری در فضای سطری R باشد:

$$\beta = c_1 p_1 + \dots + c_r p_r. \quad (19-2)$$

در این صورت، ادعا می‌کنیم که $b_{k_j} = c_j$. زیرا، بنابر (18-2)

$$\begin{aligned} b_{k_j} &= \sum_{i=1}^r c_i R(i, k_j) \\ &= \sum_{i=1}^r c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned} \quad (20-2)$$

در حالت خاص، اگر $\beta = \beta = 0$ ، یعنی $c_1 p_1 + \dots + c_r p_r = 0$. آنگاه c_j باید مختص k_j بردار صفر باشد، و بنابراین، $c_j = 0$. پس، p_1, p_2, \dots, p_r مستقل خطی هستند. \square

قضیه ۱۱. گیریم m و n دو عدد صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. فرض کنیم W ذیرفضایی از F^n باشد و $\dim W \leq m$. در این صورت، تنها یک ماتریس $m \times n$ تحویل شده سطری پلکانی بر روی F وجود دارد که فضای سطری آن W باشد.

اثبات. حداقل یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $m \times n$ که فضای سطری آن W باشد وجود دارد. چون $\dim W \leq m$ ، می‌توان m بردار $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ در W انتخاب کرد که W را پردازد. گیریم A ماتریس $m \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ و R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی که هم ارز سطری A است باشد. در این صورت، فضای سطری R همان W است.

حال فرض می‌کنیم R ماتریس تحویل شده سطّری پلکانی دلخواهی باشد که فضای سطّری آن W است. گیریم p_1, p_2, \dots, p_r بردارهای سطّری غیرصفر R باشند، و درایه غیر صفر مقدم p_i در ستون k_1, k_2, \dots, k_r باشد، واقع شود. بردارهای p_1, p_2, \dots, p_r پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند. در اثبات قضیه ۱۵ مشاهده کردیم که اگر $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ در W باشد، آنگاه

$$\beta = c_1 p_1 + \dots + c_r p_r,$$

و $b_{k_i} = c_i$; به‌یان دیگر، عبارت یکتاًی β به صورت ترکیبی خطی از بردارهای p_r, \dots, p_1 عبارت است از

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} p_i. \quad (21-2)$$

بنابراین، هر بردار β با در دست بودن مختصات b_{k_i} آن، $r, k_1, \dots, k_r = i$ ، معین می‌شود. مثلاً p_i ، تنها بردار واقع در W است که مختص k_i آن ۱ و به‌ازای $s \neq i$ مختص k_s آن ۰ است.

فرض کنیم β در W باشد و $\beta \neq 0$. ادعا می‌کنیم که اولین مختص غیرصفر β در یکی از ستونهای k_s واقع می‌شود. چون

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} p_i,$$

و $\beta \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$\beta = \sum_{i=s}^r b_{k_i} p_i, \quad b_{k_s} \neq 0. \quad (22-2)$$

اگر $s < i \leq j$ ، بنابر شرایط (۱۸-۲) داریم $R_{ij} = 0$. بنابراین

$$\beta = (0, \dots, 0, b_{k_s}, \dots, b_n), \quad b_{k_s} \neq 0$$

و اولین مختص غیرصفر β در ستون k_s قرار می‌گیرد. همچنین توجه باید داشت که به ازای هر $i, k_i, S = 1, \dots, r$ ، برداری در W وجود دارد که مختص k_i آن غیر صفر است؛ این بردار همان p_i است.

اکنون روشی است که R به‌طور یکتاً توسط W تعیین می‌شود. توصیف R بر حسب W به شرح زیر است. همه بردارهای $(b_1, \dots, b_n) = \beta$ واقع در W را در نظر می‌گیریم. اگر $b_i \neq 0$ ، اولین مختص غیرصفر β باید در ستونی چون t قرار گیرد:

$$\beta = (0, \dots, 0, b_t, \dots, b_n), \quad b_t \neq 0.$$

گیریم k_1, \dots, k_r آن اعداد صحیح مثبت باشد که به‌ازای هر یک برداری چون $\beta \neq 0$ در W وجود داشته باشد به‌طوری که اولین مختص غیرصفرش در ستون t واقع

شود. اعداد k_1, k_2, \dots, k_r را با ترتیب $k_r < \dots < k_2 < k_1$ مرتب می‌کنیم. به ازای هر یک از اعداد صحیح مثبت k_i ، یک و تنها یک بردار p_i در W وجود دارد به طوری که مختص p_i بردار p_i برابر 1 ، و به ازای $i \neq s$ مختص p_s آن صفر باشد. در این صورت R ماتریسی است $m \times n$ با بردارهای سطری $p_1, p_2, \dots, p_s, \dots, p_n$. \square

نتیجه. هر ماتریس $m \times n$ همانند A هم اذ سطروی یک و تنها یک ماتریس تحویل شده سطروی پلکانی است.

اثبات. می‌دانیم که A حداقل با یک ماتریس تحویل شده سطروی پلکانی R همارز سطروی است. اگر A همارز سطروی یکی دیگر از این گونه ماتریسهای، مثل R' باشد؛ آنگاه R همارز سطروی R' است؛ و از این‌رو، R و R' دارای فضاهای سطروی مساوی‌اند و باید یکی باشند. \square

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند. در این صورت A همارز سطروی‌اند اگر و تنها اگر دارای فضاهای سطروی مساوی باشند.

اثبات. می‌دانیم که اگر A و B همارز سطروی باشند، آنگاه دارای فضاهای سطروی مساوی هستند. لذا فرض می‌کنیم که A و B دارای فضاهای سطروی مساوی باشند، در این صورت، A همارز سطروی یک ماتریس تحویل شده سطروی پلکانی R ، و B همارز سطروی یک ماتریس تحویل شده سطروی پلکانی R' است. چون A و B دارای فضاهای سطروی مساوی‌اند، R و R' نیز فضای سطروی مساوی دارند. بنابراین، $R = R'$ ، و A همارز سطروی B است. \square

خلاصه آنکه: اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند، احکام زیر هم ارزند:

۱. A و B همارز سطروی‌اند.

۲. A و B دارای فضاهای سطروی مساوی‌اند.

۳. $B = PA$ ، که در آن P یک ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیر است.

یک حکم همارز چهارم هم این است که دوستگاه همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی‌اند؛ اما، با اینکه می‌دانیم همارزی سطروی A و B ایجاب می‌کند که این دو دستگاه دارای جوابهای مساوی باشند، به نظر می‌رسد بهتر است اثبات عکس آن را به بعد موکول کنیم.

۶.۲. محاسبات مربوط به زیر فضاهای

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه اعمال سطروی مقدماتی روشی استانده شده را برای پاسخگویی به پرسش‌های واقعی معینی در رابطه با زیرفضاهای F^n به دست می‌دهند. قبل احکام مورد نیاز را فراهم کرده‌ایم و برای راحتی خواننده آنها را در اینجا گرد می‌آوریم. این بحث در مورد هر فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F در صورتی

صادق است که یک پایه مرتب ثابت β انتخاب شود و هر بردار α از V به وسیله یک n تایی (x_1, \dots, x_n) که مختصات α را در پایه مرتب β به دست می‌دهد، توصیف شود. فرض کنیم m بردار $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ از F^n مفروض باشند. پرسش‌های زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. چگونه معلوم شود که بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مستقل خطی‌اند؟ یا به طور کلی، چگونه می‌توان بعد W ، زیر فضای پدیدآمده توسط این بردارها، را یافت؟
۲. با مفروض بودن β در F^n ، چگونه می‌توان معلوم کرد که آیا β ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ است یا نه؛ یعنی، β در زیر فضای W قرار دارد یا نه؟
۳. چگونه می‌توان توصیفی صریح از زیر فضای W بدست داد؟

سومین سؤال قدری مبهم است، زیرا مشخص نیست که منظور از «توصیف صریح» چیست؛ به هر حال، ابتدا نوع توصیفی را که در ذهن داریم ارائه می‌دهیم. با این توصیف، فوراً می‌توان به پرسش‌های (۱) و (۲) پاسخ داد.

گیریم A ماتریسی $m \times n$ با بردارهای سطري α_i باشد:

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in}).$$

دباهاتی از اعمال سطري مقدماتی را به کار گيرید که از A آغاز و به یک ماتریس تحويل شده سطري بلکنی R ختم شود. قبل از آنکه انجام این کار را توضیح داده‌ایم. در این مرحله، بعد W (فضای سطري A) مشخص است، چراکه این بعد چیزی نیست جز تعداد بردارهای سطري غیر صفر R . اگر p_1, \dots, p_r بردارهای سطري غیر صفر R باشند، آنگاه $\{p_1, \dots, p_r\} = \mathcal{B}$ پایه‌ای برای W است. اگر او لین مختص غیر صفر c_i ، مختص k_i باشد، آنگاه بازی $c_i < k_i$ داریم

$$(الف) R(i, j) = 0, \text{ هر } k_i < j.$$

$$(ب) R(i, k_j) = \delta_{ij}$$

$$(پ) k_1 < \dots < k_r.$$

زیر فضای W مشکل است از همه بردارهای

$$\beta = c_1 p_1 + \dots + c_r p_r$$

$$= \sum_{i=1}^r c_i (R_{i1}, \dots, R_{in}).$$

در این صورت، مختصات b_1, \dots, b_n یک چنین بردار β عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}. \quad (23-2)$$

بخصوص $c_i = b_i$ ، و از این دو اگر $(b_1, \dots, b_n) = \beta$ ترکیبی خطی از p_i ها باشد، باید به صورت ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i \quad (24-2)$$

باشد. شرایط روی β برای بوقاری (24-2) عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25-2)$$

حال (25-2) توصیف صریح W ، زیرفضای پدید آمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ است؛ یعنی این زیرفضا مشکل است از همه بردارهای β در F^n که مختصاتشان در (25-2) صدق می‌کنند. (25-2) چه نوع توصیفی است؟ عمدتاً این توصیف W را به عنوان همه جوابهای معادلات، از طبیعت بسیار ویژه‌ای پرخوردار است؛ زیرا، $(n-r)$ مختص را به صورت ترکیبات خطی r مختص مشخص، b_1, \dots, b_r به دست می‌دهد. در انتخاب مختصات b_k آزادی کامل وجود دارد؛ یعنی اگر c_1, \dots, c_r اسکالرهايی دلخواه باشند، یك و تنها یك بردار β در W وجود دارد که c_k مختص k آن است.

نکته قابل توجه در اینجا این است: با مفروض بودن بردارهای α_i ، تحویل سطري رو شی است سر راست برای تعیین اعداد صحیح r, k_1, \dots, k_r و اسکالرهای c_i که توصیف (25-2) از زیرفضای پدید آمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ را به دست می‌دهند. همان‌طور که در قضیه ۱۱ نشان دادیم، مشاهده می‌شود که هر زیرفضای W از F^n دارای توصیفی از نوع (25-2) است. درباره سؤال (۲) نیز به نکاتی اشاره می‌کنیم. قبل، در بخش ۴.۱، بیان کرده‌ایم که چگونه می‌توان یك ماتریس معکوس پذیر $P \in m \times m$ مانند $P = PA$ را یافت به طوری که

$$\beta = x_1 \alpha_1 + \dots + x_m \alpha_m.$$

زیرا، بردارهای سطري R از معادله

$$\rho_i = \sum_{j=1}^m P_{ij} \alpha_j$$

به دست می‌آیند و بنابراین، اگر β ترکیبی خطی از α_i ها باشد، آن‌زیرا

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i \\ &= \sum_{i=1}^r b_{k_i} \sum_{j=1}^m P_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij} \alpha_j \end{aligned}$$

و از این رو

$$x_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij}$$

یکی از انتخابهای ممکن برای x است (ممکن است امکانات دیگری هم باشد). همچنین این سؤال را که آیا $(b_1, \dots, b_n) = \beta$ ترکیبی خطی از α_i ها هست یا نه، و اگر هست، اسکالرهاي x_i چه هستند، می‌توان به صورت اين پرسش که آيدستگاه معادلات

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}x_i = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

جواب دارد و در صورت وجود، جوابها چه هستند، مطرح کرد. ماتریس ضرایب این دستگاه معادلات، ماتریس A با بردارهای ستونی $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ است. در فصل ۱ کار بر داعمال سطري مقدماتی در حل دستگاه معادلات $BX = Y$ را مورد بحث قراردادیم. اکنون مثالی را مطرح می‌کنیم که در آن در پاسخگویی به سوالات مربوط به زیرفضاهای F^n هردو نقطه نظر اعمال می‌شود.

مثال ۲۱. در این مثال مسئله زیر را مطرح می‌کنیم. فرض کنیم W زیرفضایی از R^4 باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, 1)$$

$$\alpha_2 = (0, 2, 0, 1)$$

$$\alpha_3 = (-2, 0, -4, 3)$$

پدید آید.

(الف) ثابت کنید که $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند؛ یعنی، ثابت کنید این بردارها مستقل خطی هستند.

(ب) گیریم $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ برداری در W باشد. مختصات β نسبت به پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ چیست؟

(پ) فرض کنید

$$\alpha'_1 = (1, 0, 2, 0)$$

$$\alpha'_2 = (0, 2, 0, 1)$$

$$\alpha'_3 = (0, 0, 0, 3)$$

نشان دهید $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(ت) اگر β در W باشد، فرض کنید X ماتریس مختصات β در α - پایه و X' ماتریس مختصات β در α' - پایه را نشان دهد. ماتریسی 3×3 مانند P را که به ازای هر چنین $X = PX'$ باید.

برای پاسخگویی به این سوالات با روش اول، ماتریس A با بردارهای سطري

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را تشکیل می‌دهیم، ماتریس تحویل شده سطحی پلکانی R را که هم ارز سطحی است، می‌بایم، و همزمان همان اعمال را روی ماتریس همانی به کار می‌بریم تا به ماتریس معکوس پذیر Q که $R = QA$ دست باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Q = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(الف) واضح است که R دارای رتبه ۳ است، و لذا $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ مستقل خطی هستند.

(ب) از بردارهای (b_1, b_2, b_3, b_4) کدام در W قرار دارند؟ پایه‌ای برای W داریم که توسط p_1, p_2, p_3, p_4 ، یعنی بردارهای سطحی R ، معین می‌شود. با یک نظر می‌توان دید که زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای p_1, p_2, p_3, p_4 مشکل است از بردارهایی چون β که به ازای آنها $\beta = 2b_1 + b_2$. برای چنین بردار β داریم

$$\beta = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_4 p_4$$

$$= [b_1 b_2 b_4] R$$

$$= [b_1 b_2 b_4] Q A$$

$$= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_4 \alpha_3$$

$$x_i = [b_1 b_2 b_4] Q_i \quad \text{که در آن}$$

$$x_1 = b_1 - \frac{1}{3} b_2 + \frac{2}{3} b_4$$

$$x_2 = -b_1 + \frac{5}{6} b_2 - \frac{2}{3} b_4 \quad (26-2)$$

$$x_4 = -\frac{1}{6} b_2 + \frac{1}{3} b_4.$$

(پ) بردارهای $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ همگی به شکل (y_1, y_2, y_3, y_4) با شرط $y_1 = 2y_2$ هستند، و از این رو در W قرار دارند. با یک نظر می‌توان دید که این بردارها مستقل خطی هستند.

(ت) ماتریس P دارای ستونهای

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathbb{Q}}$$

است که در آن $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. معادلات (۲۶-۲) به ما نشان می‌دهند که ماتریسهای مختصات $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ را چگونه پیدا کنیم. مثلاً، بازای $\beta = \alpha'_1 + \alpha'_2$ داریم $1 = b_1 = 0, b_2 = 2, b_3 = 0$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(0) = 1$$

$$x_2 = -1 + \frac{0}{2}(0) - \frac{1}{3}(0) = -1$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{3}(0) = 0.$$

$\alpha'_3 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ و $\alpha'_2 = \alpha_2$ اوریم $\alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_2$. به طور مشابه بدست می‌آیند
بنابراین

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون ببینیم با روش دومی که تشریح کردیم چگونه با این پرسشها پاسخ می‌دهیم.
ماتریسی 3×4 مانند B را با بردارهای ستونی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_4 تشکیل می‌دهیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

تحقیق می‌کنیم که بازای کدام اسکالرهای y_1, y_2, y_3, y_4 دستگاه $BX = Y$ دارای جواب است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 2 & 2 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & -4 & y_3 \\ 1 & 1 & 3 & y_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 2 & 4 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_1 \\ 0 & 1 & 5 & y_4 - y_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 0 & -6 & y_2 - 2y_4 \\ 0 & 1 & 5 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - 2y_1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(2y_4 - y_2) \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 + \frac{5}{6}y_2 - \frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - 2y_1 \end{array} \right].$$

بنابراین، شرط جواب داشتن دستگاه $BX = Y$ ، این است که $y_3 = 2y_1 = 2y_2$. لذا $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ در W قرار دارد اگر و تنها اگر $b_3 = 2b_1, b_3 = 2b_2$. اگر β در W باشد، آنگاه مختصات (x_1, x_2, x_3) در پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را می‌توان از آخرین ماتریس بالاخواند و یک بار دیگر، فرمولهای (۲۶-۲) را برای این مختصات به دست آورد. اکنون به پرسش‌های (پ) و (ت) مثل قبل پاسخ می‌دهیم.

مثال ۰۲۲. ماتریس 5×5

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

و مسائل زیر درباره آن را در نظر می‌گیریم.

(الف) یک ماتریس معکوس پذیر P یا باید به طوری که PA یک ماتریس تحويل شده سطری پلکانی مانند R باشد.

(ب) پایه‌ای برای W ، فضای سطری A ، باید.

(پ) تعیین کنید کدام یک از بردارهای $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در W قرار دارند.

(ت) ماتریس مختصات هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از W را در پایه مرتباً انتخاب شده در (ب) بیاورد.

(ث) هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از W را به صورت ترکیبی خطی از سطرهای A بنویسید.

(ج) توصیف صریحی از V , فضای برداری همه ماتریسهای ستونی 5×1 مانند X با شرط $AX = 0$ را به دست دهید.

(چ) پایه‌ای برای V بیاورد.

(ح) به ازای کدام یک از ماتریسهای ستونی 5×1 مانند Y , معادله $AX = Y$ دارای جواب X است؟

برای حل این مسائل ماتریس افزوده A' از دستگاه $AX = Y$ را تشکیل می‌دهیم و دنباله‌ای مناسب از اعمال سطرنی روی A' به کار می‌بندیم.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3y_1 + y_2 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 \end{bmatrix}$$

(الف) اگر به ازای هر

$$PY = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 - y_2 \\ y_5 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \\ -3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و از این رو، PA ماتریس تحویل شده سطحی پلکانی

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. باید تأکید کرد که ماتریس P یکتا نیست. در واقع، تعداد زیادی ماتریس معکوس پذیر P (که از انتخابهای گوناگون اعمال مسورد استفاده جهت تحویل A' ناشی می‌شوند) وجود دارند که $PA = R$.

(ب) به عنوان پایه‌ای برای W , می‌توان بردارهای سطری غیرصفر

$$\rho_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$$

$$\rho_2 = (0, 0, 1, 4, 0)$$

$$\rho_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

از ماتریس R را انتخاب کرد.

(پ) فضای سطری W مشکل از همه بردارهای به صورت

$$\beta = c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3$$

$$= (c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$$

است که در آن c_1, c_2, c_3 اسکالرها دلخواهی هستند. پس، $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در W است اگر و تنها اگر

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2 + b_3 \rho_3$$

و این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$b_2 = 2b_1$$

$$b_4 = 3b_1 + 4b_3.$$

این معادلات نمونه‌هایی از دستگاه عمومی (۲۵-۲) هستند که با استفاده از آنها با یک نگاه می‌توان گفت که آیا برداری مفروض در W هست یا خیر. بنابراین، $(1, 2, 3, 4, 5)$ ترکیبی خطی از سطرهای A هست، اما $(1, 2, 0, -1, 1, -5, -10, 11)$ نیست.

(ت) ماتریس مختصات بردار $(b_1, 2b_1, b_3, 3b_1 + 4b_3, b_5)$ در پایه $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ در پایه

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

(ث) طرق بسیاری برای نوشتن بردارهای W به صورت ترکیبات خطی سطرهای A وجود دارد. شاید آسانترین راه آن باشد که از تختین شیوه بیان شده قبل از مثال ۲۱ پیروی کنیم:

$$\begin{aligned}\beta &= (b_1, 2b_1, b_3, 3b_1 + 4b_3, b_5) \\ &= [b_1, b_3, b_5, 0, 0] \cdot R \\ &= [b_1, b_3, b_5, 0, 0] \cdot PA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [b_1, b_3, b_5, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A \\ &= [b_1 + b_3, -b_3, 0, 0, b_5] \cdot A.\end{aligned}$$

در حالت خاص، در ازای $\beta = (-5, -10, 1, -11, 20)$ داریم

$$\beta = [-4, -1, 0, 0, 20] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ج) معادلات دستگاه $RX = 0$ عبارتند از

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_5 = 0.$$

از این رو، ۷ متشکل از همه ستونهای به شکل

$$X = \begin{bmatrix} -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 \\ -4x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

است که در آن x_2 و x_4 دلخواه هستند.
(ج) دوستون

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. این پایه مثالی است از پایه توصیف شده در مثال ۱۵.
(ح) معادله $Y = AX$ دارای جوابهای X است اگر و تنها اگر

$$-y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$-3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 = 0.$$

تمرین

۱. فرض کنید $n < s$ و A ماتریسی $s \times n$ باشد که در اینها بیش متعلق به هیأت F هستند.
از قضیه ۴ (و نهایات آن) استفاده کنید تا نشان دهید که یک X غیر صفر در $F^{n \times 1}$ وجود
دارد که $AX = 0$.

۲. فرض کنید

$$\alpha_1 = (1, 1, -2, 1), \quad \alpha_2 = (3, 0, 4, -1), \quad \alpha_3 = (-1, 2, 5, 2)$$

و

$$\alpha = (4, -5, 9, -7), \quad \beta = (3, 1, -4, 4), \quad \gamma = (-1, 1, 5, 1).$$

(الف) کدام یک از بردارهای α , β , γ در زیرفضایی از R^4 که توسط α_i ها پدید
می‌آید قرار دارد؟

(ب) کدام یک از بردارهای α , β , γ در زیرفضایی از C^4 پدید آمده توسط α_i ها
قرار دارد؟

(پ) آیا این مطلب قضیه‌ای را به یاد نمی‌آورد؟

۳. بردارهای

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad \alpha_2 = (3, 4, -2, 5), \quad \alpha_3 = (1, 4, 0, 9)$$

از R^4 را در نظر بگیرید. دستگاهی از معادلات خطی همگن بیان یابید که فضای جواب آن

دقیقاً زیرفضای پدیدآمده توسط این سه بردار از R^4 باشد.

۴. فرض کنید

$$\alpha_1 = (1, 0, -i), \quad \alpha_2 = (1+i, 1-i, 1) \quad \alpha_3 = (i, i, i, i)$$

از C^3 باشند. ثابت کنید که این بردارها پایه‌ای برای C^3 تشکیل می‌دهند. مختصات بردار (a, b, c) در این پایه کدامند؟

۵. توصیفی صریح از نوع (۲۵-۲) برای بردارهای

$$\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

در R^5 ، که ترکیب‌های خطی بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1, -1), \quad \alpha_2 = (-1, 2, -4, 2, 0)$$

$$\alpha_3 = (2, -1, 5, 2, 1), \quad \alpha_4 = (2, 1, 3, 5, 2)$$

هستند اراحته کنید.

۶. فرض کنید V فضای برداری حقیقی پدیدآمده توسط سطرهای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد.

(الف) پایه‌ای برای V بیاورد.

(ب) کدام یک از بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ عناصری از V هستند؟

(پ) اگر $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ در V باشد، مختصات آن در پایه مطلوب بند (الف) چیست؟

۷. را ماتریسی A $m \times n$ بر روی هیأت F فرض کنید و دستگاه معادلات $AX = Y$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید این دستگاه معادلات دارای جواب است. اگر و تنها اگر رتبه سطرهای ماتریس A با رتبه سطرهای ماتریس افزوده دستگاه برابر باشد.

تبديل‌های خطی

۱۰.۳. تبدیلهای خطی

اکنون به معرفی تبدیل خطی، یعنی مفهومی که در اکثر مطالب باقیمانده این کتاب مورد مطالعه است، می‌پردازیم. چون از این پس اصطلاحات مبحث توابع مندرج درضمیمه را آزادانه به کار می‌بریم، مطالعه (یا مطالعه مجدد) این مبحث را بهخواننده توصیه می‌کنیم.

تعريف. فرض کنیم V و W دو فضای بردادی بردودی هیأت F باشند. یک تبدیل خطی از V در W تابعی از V در W است که به ازای همه α ها و β ها از V و همه اسکالرهای c از F

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta.$$

مثال ۱. اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، تبدیل همانی I که با $I\alpha = \alpha$ تعریف می‌شود تبدیل خطی از V در V است. تبدیل صفر 0 که با $0\alpha = 0$ تعریف می‌شود نیز تبدیل خطی از V در V است.

مثال ۲. فرض کنیم F یک هیأت و V فضای توابع چندجمله‌ای f از F در F باشد که به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$$

هستند. بنابر تعریف قرار می‌دهیم

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + kc_k x^{k-1}.$$

در این صورت، D تبدیلی خطی از V در V به نام تبدیل مشتق‌گیری است.

مثال ۳. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ ثابت با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد. تابع T که با $T(X) = AX$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از $F^{n \times 1}$ در F^m و تابع U که با $U(\alpha) = \alpha A$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از F^n در F^m است.

مثال ۴. فرض کنیم ماتریس P با درایه‌های متعلق به هیأت F و ماتریس Q با درایه‌های F بزرگی داده شده باشند. تابع T از فضای $F^{m \times n}$ در خودش را با $T(A) = PAQ$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، T تبدیلی خطی از $F^{m \times n}$ در $F^{m \times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} T(cA+B) &= P(cA+B)Q \\ &= (cPA+PB)Q \\ &= cPAQ+PBQ \\ &= cT(A)+T(B). \end{aligned}$$

مثال ۵. فرض کنیم R هیأت اعداد حقیقی، و V فضای همه توابع پیوسته از R در R باشد. اگر T را با

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

تعریف کنیم، آنگاه T تبدیلی خطی از V در V است. تابع Tf نه تنها پیوسته است بلکه دارای مشتق اول پیوسته نیز است. خطی بودن انتگرال یکی از خواص اساسی آن به شمار می‌آید.

خواننده در شان دادن این حکم که تبدیلهای تعریف شده در مثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ تبدیلهای خطی هستند، به مشکلی برخواهد خورد. همچنان که مطالب بیشتری درباره تبدیلهای خطی می‌آموزیم. فهرست مثالها را نیز به طور قابل ملاحظه‌ای گسترش می‌دهیم. تذکر این نکته مهم است که اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، آنگاه $T(0)$ ؛ این مطلب را می‌توان از تعریف فهمید، زیرا

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0).$$

این نکته برای کسی که برای اولین بار جبر خطی را مطالعه می‌کند، غالباً گیج کننده است، زیرا، احتمالاً وی قبل اصطلاح «تابع خطی» را به طور متفاوتی به کار برده است. توضیحی

کوتاه سبب رفع این گیجی می‌شود. فرض کنیم V فضای برداری R^1 باشد. در این صورت، یک تبدیل خطی از V در V نوع خاصی تابع (با مقدار) حقیقی دوی خط حقیقی R است. در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین تابعی احتمالاً خطی نامیده می‌شود هرگاه نمودار آن یک خط راست باشد. حال آنکه بنا بر تعریف ما، یک تبدیل خطی از R^1 در R^1 ، تابعی است از R در R که نمودار آن یک خط راست ماد بود مبدأ باشد.

تبدیل خطی عمومی T علاوه بر خاصیت $\circ = (0)$ خاصیت دیگری هم دارد. چنین تبدیلی، ترکیبات خطی را «حفظ» می‌کند؛ یعنی، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهایی از V و c_1, \dots, c_n اسکالرهای داده شده‌ای باشند، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) = c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n).$$

این رابطه فوراً از تعریف نتیجه می‌شود. مثلاً،

$$\begin{aligned} T(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) &= c_1(T\alpha_1) + T(c_2\alpha_2) \\ &= c_1(T\alpha_1) + c_2(T\alpha_2). \end{aligned}$$

قضیه ۱. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر دوی هیأت F ، و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای موقب برای V باشد. همچنین فرض کنیم W فضایی برداری بر دوی همان هیأت F و β_1, \dots, β_n بردارهای دلخواهی از W باشند. در این صورت، تنها یک تبدیل خطی T از V در W وجود دارد که

$$T\alpha_j = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

اثبات. برای اثبات وجود تبدیلی خطی مانند T با شرط $T\alpha_j = \beta_j$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم. به ازای هر α در V ، یک n تایی (x_1, \dots, x_n) وجود دارد به طوری که

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

به ازای این بردار α ، چنین تعریف می‌کنیم

$$T\alpha = x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n.$$

در این صورت، T قاعده‌ای است خوش تعریف برای مربوط ساختن هر بردار α از V با بردار $T\alpha$ از W . بنا به تعریف، روشن است که به ازای هر j ، $T\alpha_j = \beta_j$. برای اینکه بینیم T خطی است، فرض می‌کنیم

$$\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$$

برداری در V و c اسکالر دلخواهی باشد. حال

$$c\alpha + \beta = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$$

و لذا بنا بر تعریف

$$T(c\alpha + \beta) = (cx_1 - y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n.$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} c(T\alpha) + T\beta &= c \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + \sum_{i=1}^n y_i \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^n (cx_i + y_i) \beta_i \end{aligned}$$

و از این رو

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta.$$

اگر U تبدیلی خطی از V در W با خاصیت $U\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, n$, باشد

$$\text{آنگاه به ازای بردار } \alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \text{ داریم}$$

$$\begin{aligned} U\alpha &= U\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (U\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \end{aligned}$$

و بنابراین U دقیقاً همان قاعدة T است که در بالا تعریف کردیم. این مطلب نشان می‌دهد که تبدیل خطی T , با خاصیت $T\alpha_j = \beta_j$, یکتاست. \square

گرچه قضیه ۱ بسیار ابتدایی است، اما چنان اساسی است که لازم دیدیم آن را به طور رسمی بیان کنیم. مفهوم تابع بسیار عمومی است. اگر V و W دو فضای برداری (غیر صفر) باشند، تعداد زیادی تابع از V در W وجود دارد. قضیه ۱ در تأکید براین واقعیت که توابع خطی بیش از حد، خاص هستند بهمَا کمک می‌کند.

مثال ۶. بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 2)$$

$$\alpha_2 = (3, 4)$$

مستقل خطی اند و بنابراین پایه‌ای برای R^2 تشکیل می‌دهند. بنابر قضیه ۱ تبدیل خطی یکتا بی از R^2 در R^3 وجود دارد که

$$T\alpha_1 = (3, 2, 1)$$

$$T\alpha_2 = (6, 5, 4).$$

در چنین حالتی باید بتوانیم $(\epsilon_1)T$ را بیاییم. اسکالرهاي c_1 و c_2 را که $c_1 + c_2 \alpha_2$ می‌باشند و سپس از این مطلب استفاده می‌کنیم که $T\epsilon_1 = c_1 T\alpha_1 + c_2 T\alpha_2$. اگر $(2, 1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 2)$ باشد، آنگاه $-2 = c_1 + 3c_2$. از این رو

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= -2(3, 2, 1) + (4, 5, 4) \\ &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

مثال ۷. فرض کنیم T تبدیل خطی از فضای m تاییهای F^m در فضای n تاییهای F^n باشد. قضیه ۱ می‌گوید که T به طور یکتا توسط دنباله بردارهای β_1, \dots, β_m با خاصیت

$$\beta_i = T\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

تعیین می‌شود. به طور خلاصه، T توسط نگارهای بردارهای پایه استانده به طور یکتا تعیین می‌شود. روش کار چنین است:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_1, \dots, x_m) \\ T\alpha &= x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m. \end{aligned}$$

اگر B ماتریس $m \times n$ باشد که بردارهای سطري آن β_1, \dots, β_m هستند، این رابطه بیان می‌کند که

$$T\alpha = \alpha B.$$

به بیان دیگر، اگر (B_{1n}, \dots, B_{mn}) آنگاه

$$T(x_1, \dots, x_m) = [x_1, \dots, x_m] \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

این توصیفی بسیار صریح از تبدیل خطی است. در بخش ۴.۳ به مطالعه‌ای عمیق در مورد رابطه بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم و از این توصیف خاص استفاده نمی‌کنیم، زیرا در این رابطه ماتریس B در سمت راست بردار α واقع است و این مطلب ممکن است با اشتباه کاریهای بینجامد. نکته اصلی در این مثال این است که می‌توانیم توصیفی صریح و نسبتاً ساده از همه تبدیلهای خطی از F^m در F^n به دست‌دهیم. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، آنگاه بر T نه تنها زیر مجموعه‌ای از W بلکه زیرفضایی از آن است. گیریم R_T بر T ، یعنی مجموعه همه بردارهای β در W باشد که به ازای آن عنصری مانند α در V هست که $\beta = T\alpha$. فرض کنیم β_1 و β_2 در R_T وجود دارند. بردارهایی مانند α_1 و α_2 در V وجود دارند به طوری که $T\alpha_1 = \beta_1$ و $T\alpha_2 = \beta_2$. به علت خطی بودن

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c\beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $c\beta_1 + \beta_2$ نیز در R_T است.

زیرفضای جالب دیگر وابسته به تبدیل خطی T ، مجموعه N مشکل از بردارهای α در V با شرط $T\alpha = 0$ است. این مجموعه زیرفضایی از V است، زیرا

(الف) $= 0 = T(0)$ ، بنابراین N غیرتنهی است؛

(ب) اگر $T\alpha_1 = T\alpha_2 = 0$ آنگاه

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و بنابراین $c\alpha_1 + \alpha_2$ در N قرار دارد.

تعريف. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر دوی هیأت F ، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. فضای پوچ T عبارت است از مجموعه همه بردارهای α از V با شرط $T\alpha = 0$.

هرگاه بعد V متناهی باشد، رتبه T بعد پرداز T است و پوچی T بعد فضای پوچ T . قضیه زیر یکی از مهمترین قضایای جبر خطی است.

قضیه ۲. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر دوی هیأت F ، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. اگر بعد V متناهی باشد، آنگاه

$\text{بعد}(V) = \text{پوچی}(T) + \text{تبغی}(T)$.

اثبات. گیریم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای N ، فضای پوچ T ، باشد. بردارهایی چون $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ در V وجود دارند به طوری که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اکنون ثابت می‌کنیم $\{T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای برد T است. بردارهای $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ یقیناً برد T را پردازیده‌اند؛ و چون به ازای هر $j \leq k$ ، $T\alpha_j = 0$ می‌بینیم که پردازیده‌اند برد $T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n$ هستند. برای اثبات استقلال خطی این بردارها، فرض کنیم اسکالرها بی‌چون c_i وجود دارند که

$$\sum_{i=k+1}^n c_i(T\alpha_i) = 0.$$

این رابطه بیان می‌کند که

۱. این فضای را هسته‌ی T هم می‌نامند.۲.

۲. پوچی را بعد هسته هم می‌نامند.۳.

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i\right) = 0,$$

و در نتیجه بردار $c_i \alpha_i = \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j$ در فضای پوچ T است. چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ پایه‌ای برای N تشکیل می‌دهند، باید اسکالرها b_1, \dots, b_k وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i.$$

پس

$$\sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0$$

و چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی هستند، باید داشته باشیم

$$b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0.$$

اگر r رتبه T باشد، این واقعیت که $T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n$ پایه‌ای برای برد T تشکیل می‌دهند، تصریح می‌کنند که $r = n - k$. حال چون k پوچی T ، و n بعد V است، اثبات تمام است. \square

قضیه ۳. اگر A ماتریس $m \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد، آنگاه
 رتبه ستونی $(A) =$ رتبه سطری (A) .

اثبات. فرض کنیم T تبدیل خطی از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ تعریف شده با $AX = AX$ باشد. فضای پوچ T عبارت است از فضای جواب دستگاه $AX = 0$; یعنی مجموعه همه ماتریسهای ستونی X به طوری که $AX = 0$. برد T مجموعه همه ماتریسهای ستونی $AX = Y$ ، است که $AX = Y$ جوابی برای مجهول X داشته باشد. اگر A ستونی ماتریس باشد، آنگاه

$$AX = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n.$$

بنابراین، برد T عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط ستونی A . به بیان دیگر، برد T فضای ستونی A است. بنابراین،

$$\text{رتبه ستونی } (A) = \text{رتبه } (T).$$

قضیه ۲ بیان می‌کنند که اگر S فضای جواب دستگاه $AX = 0$ باشد آنگاه $\text{رتبه ستونی } (A) + \text{بعد } (S) = n$.

اکنون به مثال ۱۵ از فصل ۲ رجوع می‌کنیم. در آنجا بررسی مان نشان داد که اگر r بعد فضای سطری A باشد، آنگاه فضای جواب S پایه‌ای مشکل از $n - r$ برد دارد:

. رتبه سطری $(A) = n - (S)$ بعد

اکنون واضح است که

□ . رتبه ستونی $(A) =$ رتبه سطری (A)

اثبات قضیه ۳ که هم اکنون ارائه شد، بستگی به محاسباتی صریح درباره دستگاههای معادلات خطی دارد. اثباتی بیشتر ادراکی هم وجود دارد که براین گونه محاسبات منکی نیست. چنین اثباتی را در بخش ۷.۰۳ عرضه می‌کنیم.

تمرین

۱. کدامیک از توابع T از R^2 در R^2 که در زیر آمده‌اند تبدیلی خطی است؟

$$\text{الف) } T(x_1, x_2) = (1+x_1, x_2)$$

$$\text{ب) } T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

$$\text{پ) } T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$$

$$\text{ت) } T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$$

$$\text{ث) } T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$$

۲. برد، رتبه، فضای پوچ، و پوچی تبدیل صفر و همچنین تبدیل همانی روی فضای برداری با بعد متناهی \mathcal{V} را بیابید.

۳. برد و فضای پوچ تبدیل مشتق‌گیری در مثال ۲ را توصیف کنید. همین کار را برای تبدیل انگرال گیری در مثال ۵ انجام دهید.

۴. آیا تبدیلی خطی مانند T از R^3 در R^2 وجود دارد که $(1, -1, 1) = (1, 0)$ و $(1, 1, 1) = (0, 1)$ باشد؟

۵. اگر

$$\alpha_1 = (1, -1), \quad \beta_1 = (1, 0)$$

$$\alpha_2 = (2, -1), \quad \beta_2 = (0, 1)$$

$$\alpha_3 = (-3, 2), \quad \beta_3 = (1, 1)$$

آیا تبدیلی خطی مانند T از R^2 در R^2 وجود دارد به‌طوری که به‌ازای $i = 1, 2, 3$

$$\beta_i = T\alpha_i$$

۶. تبدیل خطی T از F^2 در F^2 را که توسط $T\epsilon_1 = (c, d)$ و $T\epsilon_2 = (a, b)$ تعریف

می شود به طور صریح (نظریه تمرینهای ۱ و ۲) توصیف کنید.

۷. فرض کنیم F زیرهیأتی از اعداد مختلط و T تابعی از F^3 در F^3 باشد که توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

تعریف می شود.

(الف) نشان دهید که T تبدیلی خطی است.

(ب) اگر (a, b, c) برداری در F^3 باشد، تحت چه شرایطی روی a, b ، و c

این بردار در برد T قرار دارد؟ رتبه T چیست؟

(پ) a, b ، و c چه شرایطی داشته باشند تا بردار (a, b, c) در فضای پروژ T قرار گیرد؟ پوچی T چیست؟

۸. تبدیلی خطی از R^3 در R^3 را که زیرفضای پدید آمده توسط (۱، ۰، -۱) و (۰، ۲، ۰) برداش باشد، به طور صریح توصیف کنید.

۹. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F ، و B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد. اگر

$$T(A) = AB - BA,$$

نشان دهید T تبدیلی خطی از V در V است.

۱۰. فرض کنید V مجموعه همه اعداد مختلط باشد و به عنوان یک فضای برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی (با اعمال معمولی) در نظر گرفته شود. تابعی از V در V باید که یک تبدیل خطی روی این فضای برداری باشد، اما تبدیلی خطی روی C^1 نباشد، یعنی خطی مختلط نباشد.

۱۱. فرض کنید V فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی هیأت F ، و W فضای ماتریسهای $m \times 1$ بر روی همین هیأت باشد. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ ثابتی بر روی F ، و T تبدیل خطی از V در W تعریف شده توسط $T(X) = AX$ باشد. ثابت کنید T تبدیل صفر است اگر و تنها اگر A ماتریس صفر باشد.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری بعدی بر روی هیأت F باشد و T یک تبدیل خطی از V در V باشد و فضای پروژ مساوی. ثابت کنید n زوج است. (آیا می توانید مثالی از چنین تبدیل خطی بیاورید؟)

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری و T تبدیلی خطی از V در V باشد. ثابت کنید دو حکم زیر درباره T هم ارزند.

- (الف) اشتراک برد T و فضای پوچ T ذیرفضای صفر V است.
 (ب) اگر $0 = T(T\alpha)$, آنگاه $\alpha = 0$.

۴.۳. جبر تبدیلهای خطی

در مطالعه تبدیلهای خطی از V در W , این مطلب اهمیت اساسی دارد که مجموعه این تبدیلهای ساختار عادی یک فضای برداری را به ارث می برد. ساختار جبری مجموعه تبدیلهای خطی از فضای V در خودش, از این هم غنی تر است؛ زیرا ترکیب عادی توابع، عمل «ضرربی» هم برای این گونه تبدیلهای فراهم می آورد. در این بخش، به تجسس این مقایم می پردازیم.

قضیه ۴. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر دوی هیأت F , دو T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند. تابع $(T+U)$ که با

$$(T+U)(\alpha) = T\alpha + U\alpha$$

تعییف می شود تبدیلی خطی از V در W است. اگر c عنصری دلخواه از F باشد، تابع (cT) که با

$$(cT)(\alpha) = c(T\alpha)$$

تعییف می شود نیز تبدیلی خطی از V در W است. مجموعه همه تبدیلهای خطی از V در W همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالری که در بالا تعییف شد، فضایی برداری بر دوی هیأت F تشکیل می دهدند.

اثبات. فرض می کنیم T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند، و $(T+U)$ مانند بالا تعییف شده باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} (T+U)(c\alpha + \beta) &= T(c\alpha + \beta) + U(c\alpha + \beta) \\ &= c(T\alpha) + T\beta + c(U\alpha) + U\beta \\ &= c(T\alpha + U\alpha) + (T\beta + U\beta) \\ &= c(T+U)(\alpha) + (T+U)(\beta) \end{aligned}$$

که نشان می دهد $(T+U)$ تبدیلی خطی است. به طور مشابه

$$\begin{aligned} (cT)(d\alpha + \beta) &= c[T(d\alpha + \beta)] \\ &= c[d(T\alpha) + T\beta] \\ &= cd(T\alpha) + c(T\beta) \\ &= d[c(T\alpha)] + c(T\beta) \\ &= d[(cT)\alpha] + (cT)\beta \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد (cT) نیز تبدیلی خطی است.

برای این که نشان دهیم مجموعه تبدیلهای خطی از V در W (همراه با دو عمل مذکور) فضایی برداری است، باید هر یک از شرایط جمع برداری و ضرب اسکالری را مستقیماً بررسی کنیم. این کار را بهخواننده واگذار می‌کنیم، و خود به‌این توضیح بسته می‌کنیم که: بردار صفر را این فضا تبدیل صفر است که هر بردار V را به بردار صفر W می‌فرستد؛ بعلاوه، هر یک از خواص این دو عمل از خاصیت متناظر مربوط به اعمال فضای W نتیجه می‌شود. \square

شاید بهتر باشد راه دیگر نگرش به‌این قضیه را هم ذکر کنیم. اگر جمع و ضرب اسکالری را مانند بالا تعریف کنیم، آنگاه مجموعه همه توابع از V در W فضایی است برداری بروی هیأت F . این مطلب ربطی به‌این که V فضای برداری است ندارد؛ کافی است V مجموعه‌ای غیرتهی باشد. هر گاه V فضای برداری باشد، می‌توانیم تبدیلهایی خطی از V در W را هم تعریف کنیم، و در این صورت قضیه ۴ حکم می‌کند که تبدیلهای

خطی زیر فضایی از فضای همه توابع از V در W هستند.
فضای تبدیلهای خطی از V در W را با $L(V, W)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $L(V, W)$ تنها زمانی تعریف می‌شود که V و W فضاهایی برداری بروی هیأتی واحد باشند.

قضیه ۵. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بروی هیأت F ، بترتیب، با ابعاد n و m باشند. دو این صورت بعد فضای $L(V, W)$ متناهی دیراپر mn است.
اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

بترتیب، پایه‌های مرتبی برای V و W باشند. به‌ازای هر چفت از اعداد صحیح (p, q) با شرایط $1 \leq p \leq m$ و $1 \leq q \leq n$ ، تبدیل خطی $E^{p,q}$ از V در W را با

$$E^{p,q}(\alpha_i) = \begin{cases} 0 & i \neq q \\ \beta_p & i = q \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{هر گاه } i \neq q \\ \text{هر گاه } i = q \end{array}$$

$$= \delta_{iq} \beta_p$$

تعریف می‌کنیم. بنابر قضیه ۱، تبدیل خطی یکتا بی از V در W هست که در این شرایط صدق می‌کند. ادعا این است که mn تبدیل E^{pq} پایه‌ای را برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند.
فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. به‌ازای هر زکه $j \leq n$ ، گیریم $A_{mj}, A_{mj}, \dots, A_{mj}$ مختصات بردار $T\alpha_j$ در پایه مرتب \mathcal{B}' باشند؛ یعنی

$$T\alpha_j = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p. \quad (1-3)$$

می‌خواهیم نشان دهیم

$$T = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} E^{p,q} . \quad (2-3)$$

فرض کنیم U تبدیل خطی موجسود درسمت راست تساوی (۲-۳) باشد. آنگاه، به ازای هر j

$$\begin{aligned} U\alpha_j &= \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T\alpha_j \end{aligned}$$

و از اینجا $T = U$. حال (۲-۳) نشان می‌دهد که $E^{p,q}$ ها $L(V, W)$ را پدید می‌آورند. باید ثابت کنیم که اینها مستقل خطی نیز هستند. اما، این مطلب از آنچه در بالا انجام شد روشن است؛ زیرا، اگر تبدیل

$$U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}$$

تبدیل صفر باشد، آنگاه به ازای همه j ها، $U\alpha_j = 0$ ، پس

$$\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0 .$$

حال استقلال β_p ها ایجاب می‌کند که به ازای هر p و j ، $A_{pj} = 0$.

قضیه ۶. فرض کنیم V ، W و Z سه فضای برداری بروی هیأت F باشند. اگر T تبدیل خطی از V دو W و U تبدیل خطی از W دو Z باشد، آنگاه تابع مرکب UT که با $(UT)(\alpha) = U(T(\alpha))$ تعریف می‌شود، تبدیل خطی از V دو Z است.

اثبات.

$$\begin{aligned} (UT)(c\alpha + \beta) &= U[T(c\alpha + \beta)] \\ &= U(cT\alpha + T\beta) \\ &= c[U(T\alpha)] + U(T\beta) \\ &= c(UT)(\alpha) + (UT)(\beta) . \quad \square \end{aligned}$$

در آنچه که به نیال می‌آید عمدتاً سروکار ما با تبدیلهای خطی از فضای برداری

در خودش است. چون مکرراً ناگزیر از نوشتن « T تبدیلی خطی از V در V است» هستیم، به جای آن عبارت « T عملگری خطی روی V است» را می‌نویسیم.

تعریف. اگر V فضایی بودایی بروی هیأتی چون F باشد، یک عملگر خطی روی V عبادت است از تبدیلی خطی از V در V .

در مورد قضیه ۶، در حالتی که $V = W = Z$ و در نتیجه U و T دو عملگر خطی روی فضای V هستند، دیده می‌شود که ترکیب UT هم عملگری خطی روی V است. بنا بر این فضای $L(V, V)$ یک «عمل ضرب» هم دارد که توسط عمل ترکیب بروی آن تعریف می‌شود. در این حالت، عملگر TU نیز تعریف می‌شود، ولی باید توجه داشت که عموماً $UT \neq TU$ ؛ یعنی، $UT - TU \neq 0$. این نکته هم باید مورد توجه خاص قرار بگیرد که اگر T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه می‌توان T را با T ترکیب کرد. لذا نماد $T^* = TT$ ، و در حالت کلی به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ نماد: (T^n) (بار) $T^* = T \cdots T = T^n$ را به کارخواهیم برد و اگر $T \neq 0$ ، بنا بر تعریف قرار می‌دهیم $T^0 = I$.

لم. فرض کنیم V فضایی بودایی بروی هیأت F باشد. اگر U, T_1, T_2 دو عملگرهايی خطی روی V دو عضوی از F باشد، آنگاه

$$(الف) IU = UI = U$$

$$(ب) : (T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U ; U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$$

$$(پ) .c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$$

اثبات. (الف) این خاصیت تابع همانی، بدینهی است و بیان آن در اینجا صرفاً برای تأکید است.

$$[U(T_1 + T_2)](\alpha) = U[(T_1 + T_2)(\alpha)] \quad (ب)$$

$$= U(T_1\alpha + T_2\alpha)$$

$$= U(T_1\alpha) + U(T_2\alpha)$$

$$= (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha)$$

و بنا بر این $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$. همچنین

$$[(T_1 + T_2)U](\alpha) = (T_1 + T_2)(U\alpha)$$

$$= T_1(U\alpha) + T_2(U\alpha)$$

$$= (T_1U)(\alpha) + (T_2U)(\alpha).$$

پس، $U(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$. (خواننده ممکن است توجه کرده باشد که در اثبات این دو قانون پخش پذیری، از خطی بودن T_1 و T_2 استفاده نشده؛ در اثبات (پ) هم خطی

بودن U به کار نمی‌رود).

(پ) اثبات این قسمت به خواننده واگذار می‌شود. \square

مضمون این لم و مضمون قسمتی از قضیه ۵ نشان می‌دهند که فضای برداری $L(V, V)$ همراه با عمل ترکیب همان چیزی است که به جبر خطی با عنصر همانی مشهور است. این مطلب را در فصل ۴ مورد بحث قرارخواهیم داد.

مثال ۸. اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد، تبدیلی خطی T از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ را داریم که با $T(X) = AX$ تعریف می‌شود؛ و اگر B ماتریسی $p \times m$ باشد، تبدیل خطی U از $F^{p \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ را هم داریم که توسط $U(Y) = BY$ تعریف می‌شود. ترکیب UT بسادگی قابل توصیف است:

$$\begin{aligned}(UT)(X) &= U(T(X)) \\ &= U(AX) \\ &= B(AX) \\ &= (BA)X.\end{aligned}$$

پس، UT عبارت است از «عمل ضرب چپ در ماتریس حاصل ضرب BA ».

مثال ۹. فرض کنیم F یک هیأت و V فضای برداری همه توابع چندجمله‌ای از F باشد. گیریم D عملگر مشتق‌گیری تعریف شده در مثال ۲ و T عملگر خطی «ضرب در x »:

$$(Tf)(x) = xf(x)$$

باشد. در این صورت، $DT \neq TD$. در واقع، اگر I عملگر همانی باشد، خواننده باید بتواند $DT - TD = I$ را با آسانی اثبات کند.

هر چند «ضرب» تعریف شده روی $L(V, V)$ جابجا یابی نیست، اما با اعمال فضای برداری $L(V, V)$ رابطه زیبایی دارد.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \mathcal{B}$ پایه مرتبی برای فضای برداری V باشد. عملگرهای خطی $E^{p,q}$ را که در اثبات قضیه ۵ پدید آمدند، در نظر می‌گیریم:

$$E^{p,q}(\alpha_i) = \delta_{i,q} \alpha_p.$$

این n^2 عملگر خطی پایه‌ای برای فضای عملگرهای خطی روی V تشکیل می‌دهند. $E^{p,q} E^{r,s}$ چیست؟ داریم

$$\begin{aligned}(E^{p,q}E^{r,s})(\alpha_i) &= E^{p,q}(\delta_{is}\alpha_r) \\ &= \delta_{is}E^{p,q}(\alpha_r) \\ &= \delta_{is}\delta_{rs}\alpha_p.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$E^{p,q}E^{r,s} = \begin{cases} 0 & r \neq q \\ E^{p,s} & r = q \end{cases}$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد. در اثبات قضیه ۵ نشان دادیم که اگر

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathbb{Q}}$$

$$A = [A_1, \dots, A_n]$$

آنگاه

$$T = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}.$$

اگر

$$U = \sum_r \sum_s B_{rs} E^{r,s}$$

عملگر خطی دیگری دوی V باشد، آنگاه آخرین لم ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}TU &= \left(\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} \right) \left(\sum_r \sum_s B_{rs} E^{r,s} \right) \\ &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s A_{pq} B_{rs} E^{p,q} E^{r,s}.\end{aligned}$$

همچنان که مشاهده کرده‌ایم، تنها جملاتی که در این مجموع بسیار بزرگ باقی می‌مانند جملاتی هستند که برای آنها $r=q$ ، که در این صورت چون $E^{p,r}E^{r,s} = E^{p,s}$ داریم

$$\begin{aligned}TU &= \sum_p \sum_s \left(\sum_r A_{pr} B_{rs} \right) E^{p,s} \\ &= \sum_p \sum_s (AB)_{ps} E^{p,s}.\end{aligned}$$

پس، نتیجه عمل ترکیب T و U ضرب ماتریسهای A و B است.

در بحث راجع به اعمال جبری روی تبدیلهای خطی، تاکنون چیزی در مورد معکوس پذیری نگفته‌ایم. در این مورد یک پرسش مشخص و جالب این است: برای کدام عملگر خطی T روی فضای V ، عملگری خطی چون T^{-1} وجود دارد که $?TT^{-1} = T^{-1}T = I$

تابع T از V در W معکوس پذیر نامیده می‌شود، هرگاه یک تابع U از W در V یافت شود به طوری که UT تابع همانی روی V ، و TU تابع همانی روی W باشد. اگر T معکوس پذیر باشد، تابع U یکتا است و با T^{-1} نشان داده می‌شود. (د. ک. ضمیمه.)
علاوه، T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر

۱. T یک به یک باشد؛ یعنی از $T\alpha = T\beta$ نتیجه بشود که $\alpha = \beta$ ؛

۲. T پوشایش باشد؛ یعنی برد T (تمام) W باشد.

قضیه ۷. فرض کنیم V و W دو فضای بردایی بروی هیأت F و T تبدیلی خطی از V در W باشد. اگر T معکوس پذیر باشد، آنگاه تابع معکوس آن، T^{-1} ، تبدیلی خطی از W بروی V است.

اثبات. حرفهایمان را برای تأکید بر یک نکته تکرار می‌کنیم. وقتی T یک به یک و پوشایش باشد، یک تابع معکوس T^{-1} وجود دارد که به طور یکتا تعیین می‌شود و W را بروی V چنان می‌نگارد که $T^{-1}T$ تابع همانی روی V ، و TT^{-1} تابع همانی روی W باشد. مطلبی که در اینجا باید ثابت کنیم این است که اگر تابع خطی T معکوس پذیر باشد، آنگاه معکوسش T^{-1} نیز خطی است.

گیریم β_1 و β_2 بردارهایی از W ، و یک اسکالر باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) = cT^{-1}\beta_1 + T^{-1}\beta_2.$$

فرض کنیم به ازای ۱، $\alpha_i = T^{-1}\beta_i$ ؛ یعنی، α_i یکتا بردار در V باشد که $i = 1, 2$.
چون T خطی است

$$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT\alpha_1 + T\alpha_2$$

$$= c\beta_1 + \beta_2.$$

پس، $c\alpha_1 + \alpha_2$ یکتا بردار در V است که توسط T به $c\beta_1 + \beta_2$ فرستاده می‌شود، لذا

$$T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) = c\alpha_1 + \alpha_2$$

$$= c(T^{-1}\beta_1) + T^{-1}\beta_2$$

و T^{-1} خطی است. \square

فرض کنیم تبدیل خطی معکوس پذیر T از V بروی W و تبدیل خطی معکوس پذیر U از W بروی Z داده شده‌اند. آنگاه، UT معکوس پذیر است و $U^{-1}T^{-1} = T^{-1}U^{-1}$ (UT). این حکم، نه نیازی به خطی بودن UT دارد و نه مستلزم بررسی جداگانه یک به یک و پوشایش بودن آن است. فقط لازم است نشان دهیم که $T^{-1}U^{-1}$ هم معکوس چپ و هم معکوس راست است. UT

اگر T خطی باشد، آنگاه $T\alpha - T\beta = T(\alpha - \beta)$ ؛ از این‌رو، $T\alpha = T\beta$ اگر و

تنها اگر $T(\alpha - \beta) = 0$. این مطلب، تحقیق یک به یک بودن T را بسیار ساده می‌کند. تبدیل خطی T را نامنفرد نامیم، هرگاه $T\gamma = 0$ ایجاب کند که $\gamma = 0$; یعنی هرگاه فضای پوج T برابر با $\{0\}$ باشد. بدیهی است که T ، یک به یک است اگر و تنها اگر T نامنفرد باشد. تعیین این است که تبدیلهای خطی نامنفرد، آنهایی هستند که استقلال خطی را حفظ می‌کنند.

قضیه ۸. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. آنگاه، T نامنفرد است اگر و تنها اگر T هر زیرمجموعه مستقل خطی از V را بروی یک زیرمجموعه مستقل خطی از W ببرد.

البات. ابتدا فرض می‌کنیم T نامنفرد باشد و S را یک زیرمجموعه مستقل خطی از V می‌گیریم. اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ بردارهایی از S باشند، آنگاه $T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_k$ مستقل خطی هستند؛ زیرا اگر

$$c_1(T\alpha_1) + \dots + c_k(T\alpha_k) = 0$$

آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$$

وچون T نامنفرد است،

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$$

که از آن به علت مستقل بودن مجموعه S نتیجه می‌شود $c_1 = \dots = c_k = 0$ برابر صفر است. این استدلال نشان می‌دهد که نگاره S تحت T مجموعه‌ای است مستقل خطی.

فرض کنیم T هر زیرمجموعه مستقل خطی را بروی یک زیرمجموعه مستقل خطی ببرد. گیریم α برداری غیر صفر از V باشد. آنگاه، مجموعه S مشکل از بردار α مستقل است. نگاره S مجموعه‌ای است مشکل از بردار $T\alpha$ و این مجموعه نیز مستقل است. بنابراین، $T\alpha \neq 0$ ، زیرا مجموعه تک عنصری بردار صفر وابسته است. این مطلب نشان می‌دهد که فضای پوج T همان زیرفضای صفر است؛ یعنی، T نامنفرد است. \square

مثال ۱۹. فرض کنیم F زیرهیاتی از اعداد مختلط (یا هیأتی با سرشت نمای صفر)، V فضای توابع چندجمله‌ای بر روی F باشد. دو عملگر مشتق گیری، D ، و «ضرب در x^n »، T ، در مثال ۹ را در نظر می‌گیریم. چون D همه ثابت‌ها را به 0 می‌فرستد، منفرد است. گرچه بعد V متناهی نیست، اما برد D تمام V است، وابن امکان هست که معکوسی راست برای D تعریف شود. مثلاً، اگر E عملگر انتگرال گیری نامعین باشد:

$$E(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = c_0x + \frac{1}{1}c_1x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$$

آنگاه E عملگری خطی روی V است و $DE = I$. از طرف دیگر، زیرا $ED \neq I$ همه ثابتها را به 0 می‌فرستد. عملگر T حالتی شبیه به عکس این حالت را دارد. اگر بازای همه x ها $xf(x) = 0$ باشد، آنگاه $f = 0$. از این‌رو، T نامنفرد است، و یافتن معکوسی چپ برای T ممکن. مثلاً، اگر U عملگر «حذف جمله ثابت و تقسیم آن بر x » باشد:

$$U(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^{n-1}$$

آنگاه، U عملگری خطی روی V است و $UT = I$. ولی $TU \neq I$. در برداشتن T ، دربرداشتن U یعنی در فضای توابع چندجمله‌ای f با شرط $f(0) = 0$ نیز هست.

مثال ۱۲. فرض کنیم F یک هیأت و T عملگر خطی روی F^2 تعریف شده باشد.

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$$

باشد. در این صورت، T نامنفرد است، زیرا اگر $x_1 + x_2 = 0$ باشد، $x_1 = 0$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

و بنا بر این $x_1 = x_2 = 0$. همچنین مشاهده می‌شود که T پوشاست؛ زیرا، فرض کنیم (z_1, z_2) بردار دلخواهی از F^2 باشد. برای اینکه نشان دهیم (z_1, z_2) در برداشتن T است، باید اسکالرها بیان کرد که x_1 و x_2 باید برابر باشند.

$$x_1 + x_2 = z_1$$

$$x_1 = z_1$$

واضح است که جواب عبارت است از $x_2 = z_1 - z_2$. محاسبه اخیر فرمول صریحی برای T^{-1} به دست می‌دهد، که چنین است:

$$T^{-1}(z_1, z_2) = (z_2, z_1 - z_2).$$

در مثال ۱۱ دیدیم که یک تبدیل خطی ممکن است بدون پوشاندن نامنفرد، و نیز بدون نامنفرد بودن پوشاند. مثال اخیر حالت مهمی را نشان می‌دهد که در آن این واقعه نمی‌تواند روی دهد.

قضیه ۹. فرض کنیم V و W دو فضای بردادی باشد و $\dim V = \dim W$ باشند، احکام زیرهمایند:

(۱) T معکوس پذیر است.

(۲) T نامنفرد است.

(۳) T پوشاند؛ یعنی برداشتن T برای W است.

اثبات. گیریم بعد $(W) = n$. بنابر قضیه ۲

$$\text{پوچی}(T) + \text{رتبه}(T) = n.$$

اکنون T نامنفرد است اگر و تها اگر $\text{پوچی}(T) = n = \dim W$ برد T باشد. $\text{پوچی}(T) = n$ است که رتبه $\text{رتبه}(T)$ باشد. بنابراین، T نامنفرد است اگر و تها $\text{پوچی}(T) = n$ باشد. لذا، اگریکی از شرایط (۲) یا (۳) برقرار باشد، دیگری هم برقرار و T معکوس پذیر است. \square

به خواننده هشدار می‌دهیم که قضیه ۹ را جز در حالت متناهی بودن بعد و جزء با شرط $\dim V = \dim W$ به کار نبند. تحت فرضهای قضیه ۹، شرایط (۱)، (۲) و (۳) با احکام زیرینیز هم ارزند:

(۴) اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

(۵) پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود داد که پایه‌ای برای W است.

ذیلاً اثباتی برای همارز بودن این پنج شرط ارائه می‌کنیم. این اثبات شامل اثبات تازه‌ای از همارز بودن (۱) و (۲) و (۳) هم هست.

(۲) \rightarrow (۱). اگر T معکوس پذیر باشد، T نامنفرد است. (۳) \rightarrow (۲). فرض کنیم T نامنفرد و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. بنابر قضیه ۸، یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای W است؛ و چون بعد n نیز W است، این مجموعه از بردارها پایه‌ای برای W است. حال گیریم β برداری دلخواه از W باشد. اسکالرها چون c_1, c_2, \dots, c_n وجود دارند که

$$\begin{aligned}\beta &= c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n) \\ &= T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n)\end{aligned}$$

و این خود نشان می‌دهد که β در برد T است. (۴) \rightarrow (۳). اکنون فرض می‌کنیم T پوشنا باشد. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، بردارهای $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ برد T را، که بنابه فرض تمام W است، پیدید می‌آورند. چون بعد n برابر W است، این n بردار باید مستقل خطی باشند؛ یعنی، باید پایه‌ای را برای W تشکیل بدهند. (۵) \rightarrow (۴)، این حکم نیازی به توضیح ندارد. (۱) \rightarrow (۵). فرض کنیم پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ هم پایه‌ای برای W باشد. چون $T\alpha_i$ ها W را پیدید می‌آورند، واضح است که برد T تمام W است. اگر

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$$

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) = 0$$

$$c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n) = 0$$

وچون c_i ها مستقل هستند، هر c_i برابر صفر است، ولذا $\alpha_1 = \alpha_n = 0$. تا اینجا نشان داده ایم که برد T برابر با W است و T نامنفرد؛ بنابراین، T معکوس پذیر است. مجموعه عملگرهای خطی معکوس پذیر روی یک فضای V همراه با عمل ترکیب، مثال خوبی برای چیزی که در جبر به «گروه» معروف است، به دست می دهد. گرچه فرست آن را نداریم که بتفصیل در مورد گروهها به بحث پردازیم، مع هذا تعریف آن را ذیلاً ارائه می کنیم.

تعریف. یک گروه متشکل است از

۱. یک مجموعه G ؛

۲. یک قاعده (یا عمل) که بهر جفت x و y از عناصر G ، عنصر xy از G را با شرایط زیر وابسته می سازد:

(الف) به ازای هر x, y, z از G ، $x(yz) = (xy)z$ (شرکت پذیری)؛

(ب) یک عنصر e وجود دارد، به طوری که به ازای هر x از G ، $ex = xe = x$ ؛

(پ) بهر عنصر x از G ، عنصری x^{-1} از G متناظر است به طوری که

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

قبله دیده ایم که ترکیب $UT \rightarrow (U, T)$ بهر جفت عملگر خطی معکوس پذیر روی فضای V ، عملگر معکوس پذیر دیگری روی V را متناظر می سازد. ترکیب، یک عمل شرکت پذیر است. به ازای هر T, I ، عملگر همانی I در $IT = TI$ صدق می کند، و به ازای هر عملگر معکوس پذیر T (بنابر قضیه ۷) عملگر خطی معکوس پذیر T^{-1} وجود دارد که $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. از این رو، مجموعه عملگرهای خطی معکوس پذیر روی V همراه با این عمل یک گروه است. مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ معکوس پذیر، همراه با ضرب ماتریسی به عنوان عمل، مثال دیگری از یک گروه است. یک گروه جابجایی نامیده می شود، هرگاه شرط $xy = yx$ به ازای هر x و y برقرار باشد. هیچ یک از دو مثالی را که در بالا ذکر کردیم در حالت کلی گروه جابجایی نیست. عمل یک گروه جابجایی غالباً به صورت عنصر «همانی» e از نماده استفاده می شود. مجموعه بردارهای یک فضای برداری همراه با عمل جمع برداری، یک گروه جابجایی است. یک هیئت رامی توان به صورت مجموعه ای با دو عمل به نامهای جمع و ضرب توصیف کرد که تحت عمل جمع، گروهی جابجایی است، عناصر غیر صفرش تحت عمل ضرب، گروهی جابجایی تشکیل می دهند، و قانون پخش پذیری $xy + xz = xy + xz$ نیز در آن برقرار است.

تمرین

۱. فرض کنید T و U دو عملگر خطی روی R^2 باشند که با

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1) \quad U(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

تعریف می‌شوند.

(الف) T و U به طور هندسی چگونه توصیف می‌شوند؟

(ب) برای هریک از تبدیلهای $(U+T)$, UT , TU , T^2 و U^2 قواعدی شیوه به تعریف T و U بدست آورید.

۲. فرض کنید T (یکتا) عملگر خطی روی C^3 باشد که برای آن

$$T\epsilon_1 = (1, 0, i), \quad T\epsilon_2 = (0, 1, 1), \quad T\epsilon_3 = (i, 1, 0).$$

آیا T معکوس پذیر است؟

۳. عملگر خطی T روی R^3 با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

تعریف می‌شود. آیا T معکوس پذیر است؟ اگر چنین باشد، قاعده‌ای برای T^{-1} , شیوه به آنکه T را تعریف می‌کند، باید.

۴. برای عملگر خطی T تمرین ۳ ثابت کنید

$$(T^4 - I)(T - 3I) = 0.$$

۵. فرض کنید $C^{2 \times 2}$ فضای برداری مختلط ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. با فرض

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

T را عملگر خطی روی $C^{2 \times 2}$ بگیرید که با $T(A) = BA$ تعریف می‌شود. رتبه T چیست؟ آیا می‌توانید T^2 را توصیف کنید؟

۶. فرض کنید T تبدیلی خطی از R^3 در R^2 و U تبدیلی خطی از R^2 در R^3 باشد. ثابت کنید تبدیل UT معکوس پذیر نیست. این قضیه را تعیین بدهید.

۷. دو عملگر خطی T و U روی R^2 باید که $TU = 0$ ولی $UT \neq 0$.

۸. فرض کنید V فضایی برداری بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. اگر $T^2 = 0$ درباره رابطه برد T و فضای پوچ T چه می‌توانید بگویید؟ یک عملگر

خطی T روی R^2 مثال بزنید که $T^2 = 0$ ولی $T \neq 0$.

۹. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای V باشد و فرض کنید عملگری خطی چون U روی V وجود داشته باشد که $TU = I$. ثابت کنید T معکوس پذیر است و $U = T^{-1}$. مثالی بیاورید که نشان دهد وقتی V با بعد متناهی نباشد این مطلب صحیح نیست. (اهمایی: فرض کنید $D \cdot D = T$. D عملگر مشتق‌گیری روی فضای توابع چندجمله‌ای است).

۱۰. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F و T تبدیلی خطی از $F^{m \times 1}$ در $F^{n \times 1}$ باشد که با $T(X) = AX$ تعریف می‌شود. هرگاه $n < m$ نشان دهید ممکن است T پوشایش باشد و در عین حال نامنفرد نباشد. به طور مشابه، نشان دهید که اگر $m > n$ ، ممکن است T نامنفرد باشد ولی پوشایش نباشد.

۱۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. اگر رتبه $(T) = \text{رتبه } (T^2)$ ، ثابت کنید برد و فضای پوچ T مجزا هستند؛ یعنی، تهادر بردار صفر مشترک‌کنند.

۱۲. فرض کنید p, m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند و F یک هیأت باشد. فرض کنید V فضای ماتریسهای $m \times n$ بر روی F و W فضای ماتریسهای $p \times n$ بر روی F باشد. اگر B ماتریسی $p \times m$ و ثابت T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط $T(A) = BA$ باشد، ثابت کنید T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $m = p$ و B ماتریسی $m \times m$ و معکوس پذیر باشد.

۳.۰۳. یکریختی^۱

اگر V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F باشند، هر تبدیل خطی یک به یک T ، از V بر روی W ، یک یکریختی از V بر روی W نامیده می‌شود. هرگاه یک یکریختی از V بر روی W موجود باشد، گوییم V با W یکریخت است.

واضح است که V با V یکریخت است، زیرا عملگر همانی یک یکریختی از V بر روی V است. همچنین، اگر V تحت یکریختی T با W یکریخت باشد، آنگاه W نیز با V یکریخت است، زیرا T^{-1} یک یکریختی از W بر روی V است. خواسته باید باسانی بتواند نشان دهد که اگر V با W و W با Z یکریخت باشد، آنگاه V با Z هم یکریخت است. به طور خلاصه، یکریختی یک رابطه هم‌ارزی روی رده فضاهای برداری است. اگریک یکریختی از V بر روی W موجود باشد، گاهی به جای اینکه بگوییم V با W

^۱ این اصطلاح را این‌زمورفیسم هم می‌نامند...».

یکریخت است، می‌گوییم، V و W یکریخت‌اند. این موضوع اشکالی ایجاد نمی‌کند، زیرا V با W یکریخت است اگر و تنها اگر W با V یکریخت باشد.

قضیه ۱۰. هر فضای برداری n بعدی بودوی هیأت F با فضای F^n یکریخت است.

اثبات. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بسروی هیأت F ، و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای آن باشد.تابع T از V در F^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر α در V باشد، $T\alpha$ را n تایی مختصات (x_1, \dots, x_n) بردار α نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} می‌گیریم؛ یعنی، n تایی‌ای که

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

در مبحث مختصات از فصل ۲ نشان دادیم که این T خطی و یک به یک است و V را بروی F^n می‌نگارد. \square

با وجودی که بردارها و اعمال در فضاهای برداری یکریخت ممکن است کاملاً متفاوت باشند، به منظورهای گوناگون، غالباً آنها را «یکی» تلقی می‌کنیم؛ یعنی، فضاهای یکریخت را غالباً یکی می‌گیریم. در حال حاضر در باره‌این ایده به بحثی طولانی نمی‌پردازیم، زیرا مایلیم درک مفهوم یکریختی و احساس «یکی» بودن فضاهای یکریخت پا به پای تداوم مطالعه فضاهای برداری تقویت شوند.

اکنون به چند توضیح کوتاه می‌پردازیم. فرض کنیم T یک یکریختی از V بروی W باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از V باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۸، S مستقل خطی است اگر و تنها اگر زیرمجموعه $T(S)$ از W مستقل باشد. از این‌رو، در تضمیم‌گیری راجع به مستقل بودن S می‌توان به جای $T(S)$ به بررسی $T(S)$ پرداخت. از این مطلب مشهود است که یکریختی، «حافظ بعد» است؛ بدین معنی که بعد از یکریختی با بعد متاهی از فضای V با بعد نگاره‌اش مساوی است. به ترتیبی ساده از این ایده توجه کنید. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ بروی هیأت F باشد. درواقع ما تاکنون دو تعریف برای فضای جواب ماتریس A ارائه کرده‌ایم. اولی عبارت است از مجموعه همه n تایی‌های (x_1, \dots, x_n) از F^n که در هر یک از معادلات دستگاه $AX = 0$ صدق کنند. دومی مجموعه همه ماتریسهای ستونی $1 \times n$ مانند X است که $AX = 0$. بدین لحاظ، اولین فضای جواب زیرفضایی از F^n است، در حالی که دومی زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بروی هیأت F . اما یک یکریختی کاملاً واضح بین F^n و $F^{n \times 1}$ دیده می‌شود و آن

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

است. تحت این یکریختی، اولین فضای جواب A بروی دومین فضای جواب بردی شود.

بعد این فضاهای مساوی است، وازاین رو اگر بخواهیم قضیه‌ای درباره بعد فضای جواب اثبات کنیم، اهمیتی ندارد که کدام فضا را برای بحث انتخاب کنیم. درواقع، اگر تصمیم می‌گرفتیم F^n و فضای ماتریس‌های $1 \times n$ را یکی بگیریم، ممکن‌باشد "خواننده مانع" نمی‌شد. این کار را جزدمواردی که مناسب باشد انجام نخواهیم داد.

تمرین

۱. فرض کنید V مجموعه اعداد مختلط F هیأت اعداد حقیقی باشد. مجموعه V با اعمال معمولی فضایی برداری بر روی F است. یک یکریختی ازاین فضا بر روی R^2 را به طور صریح توصیف کنید.

۲. V را فضایی برداری بر روی هیأت اعداد مختلط بگیرید، و فرض کنید یک یکریختی T از V بر روی C^3 وجود داشته باشد. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بردارهایی از V باشند که

$$T\alpha_1 = (1, 0, i), \quad T\alpha_2 = (-2, 1+i, 0),$$

$$T\alpha_3 = (-1, 1, 1), \quad T\alpha_4 = (\sqrt{2}, i, 2).$$

(الف) آیا α_1 در زیرفضای پدیدآمده توسط α_2 و α_4 قرار دارد؟

(ب) اگر W_1 زیرفضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 و W_2 زیرفضای پدیدآمده توسط α_3 و α_4 باشد، اشتراک W_1 و W_2 را بدست آورید.

(پ) پایه‌ای برای زیرفضایی از V که توسط چهار بردار α_i پدیدآمده باشد، بیابید.

۳. فرض کنید W مجموعه همه ماتریس‌های هرمیتی مختلط 2×2 . یعنی مجموعه ماتریس‌های مختلط 2×2 چون A ، باشرط $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ باشد (خط زبر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است). همان‌طور که درمثال ۶ از فصل ۲ اشاره شد، W با اعمال معمولی، فضایی است برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی. نشان دهید

$$(x, y, z, t) \rightarrow \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یک یکریختی از R^4 بر روی W است.

۴. نشان دهید $F^{m \times n}$ با $F^{m \times n}$ یکریخت است.

۵. فرض کنید مجموعه اعداد مختلط V به عنوان یک فضای برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی در نظر گرفته شده باشد (تمرین ۱). تابع T از V در فضای ماتریس‌های حقیقی 2×2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $x+iy = z+ix$ و y حقیقی باشند،

$$T(z) = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید T یک تبدیل خطی (حقیقی) یک به یک از V در فضای ماتریسهای حقیقی \mathbb{R}^2 است.

(ب) نشان دهید $T(z_1 z_2) = T(z_1) T(z_2)$

(پ) برد T را چگونه توصیف می کنید؟

۶. دو فضای برداری V و W با بعد متناهی بر روی هیأت F را در نظر بگیرید و ثابت کنید $\dim V = \dim W$ یکریخت اند اگر و تنها اگر $\dim V = \dim W$

۷. فرض کنید V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F باشند، و U یک یکریختی از V بر روی W باشد. ثابت کنید $U^{-1} T U \rightarrow L(W, W) = L(V, V)$ بر روی $L(V, V)$ باشد. اگر T یک یکریختی از V در W باشد، آنگاه T با عملکردش روی بردارهای v_j تعیین می شود. هر یک از n بردار v_j به طور یکتا به صورت یک ترکیب خطی

۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلهای

فرض کنیم V یک فضای بردار n بعدی و W یک فضای برداری m بعدی بر روی هیأت F باشند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ پایه مترتب برای V و $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه مترتبی برای W باشد. اگر T تبدیل خطی دلخواهی از V در W باشد، آنگاه T با عملکردش روی بردارهای α_j تعیین می شود. هر یک از n بردار $T\alpha_j$ به طور یکتا به صورت یک ترکیب خطی

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \quad (4-3)$$

از β_i ها، که در آن اسکالرهای $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ مختصات $T\alpha_j$ در پایه مرتب \mathcal{B}' می باشند، قابل بیان است. از این رو، تبدیل T از طریق فرمولهای (۴-۳) با mn اسکالرهای A_{ij} تعیین می شود. ماتریس $A(i, j) = A_{ij}$ که با $A \in M \times n$ تعریف می شود، ماتریس T نسبت به دو پایه مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' نامیده می شود. کار بعدی ما این است که به طور واضح بفهمیم چگونه ماتریس A تبدیل خطی T را تعیین می کند.

اگر $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$ برداری از V باشد، آنگاه

$$T\alpha = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n x_j (T\alpha_j)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i
 \end{aligned}$$

و اگر X ماتریس مختصات α در پایه مرتب \mathcal{B} باشد، محاسبه بالا نشان می‌دهد که AX ماتریس مختصات بردار $T\alpha$ در پایه مرتب \mathcal{B}' است، زیرا اسکالر

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} X_j$$

درایه نمین سطر ماتریس ستونی AX است. همچنین مشاهده می‌شود که اگر A ماتریس $m \times n$ دلخواهی بر روی هیأت F باشد، آنگاه

$$T \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i \quad (4-3)$$

تبدیل خطی T از V در W را تعریف می‌کند که ماتریس آن نسبت به \mathcal{B} و \mathcal{B}' عبارت است از A . این مطلب را به طور رسمی خلاصه می‌کنیم:

قضیه ۱۱. فرض کنیم V یک فضای بردادی n بعدی بردوی هیأت F و W یک فضای بردادی m بعدی بردوی F باشد. و نیز فرض کنیم \mathcal{B} پایه مرتبی برای V ، و \mathcal{B}' پایه مرتبی برای W باشد. برای هر تبدیل خطی T از V در W یک ماتریس $m \times n$ ، مانند A ، که درایه‌هایش در F هستند، یافت می‌شود به طوری که به ازای هر بردار α از V

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

بعلاوه، $A \rightarrow T$ یک تناظر یک به یک بین مجموعه همه تبدیلهای خطی از V در W و مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بردوی هیأت F است.

ماتریس A ، که بنابر قضیه ۱۱ با T در تناظر است، ماتریس T نسبت به پایه‌های مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' نام دارد. به خاطرداشته باشیم تساوی (۳-۳) بیان می‌کند A ماتریسی است که ستونهایش A_1, \dots, A_n توسط

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathcal{B}'}, \quad j = 1, \dots, n$$

تعیین می‌شوند. اگر U تبدیل خطی دیگری از V در W ، و $[B_1, \dots, B_n]$ ماتریس U نسبت به پایه‌های مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' باشد، آنگاه $cA + B$ ماتریس U نسبت به \mathcal{B} و \mathcal{B}' است. این مطلب واضح است، زیرا

$$\begin{aligned}
 cA_j + B_j &= c[T\alpha_j]_{\mathcal{B}'} + [U\alpha_j]_{\mathcal{B}'} \\
 &= [cT\alpha_j + U\alpha_j]_{\mathcal{B}'} \\
 &= [(cT + U)\alpha_j]_{\mathcal{B}'}
 \end{aligned}$$

قضیه ۱۲. فرض کنیم V یک فضای برداری m -بعدی و W یک فضای برداری n -بعدی بر روی هیأت F باشد. به ازای هر جفت پایه مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، بنرتب برای V و W ، تابعی که بهر تبدیل خطی T ، ماتریس نسبت به \mathcal{B} و \mathcal{B}' (ا) تخصیص می‌دهد، یک پکویختن بین فضای (V, W) و فضای همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی هیأت F است.

اثبات. قبله ملاحظه کردیم که تابع مورد نظر خطی است؛ همچنان که در قضیه ۱۱ بیان شد، این تابع یک به یک نیز هست و $L(V, W)$ را بر روی مجموعه ماتریسهای $m \times n$ می‌نگارد. \square

در این بررسی، بخصوص به نمایش ماتریسی تبدیلهای خطی از یک فضا در خودش، یعنی به عملگرهای خطی روی یک فضای V ، علاقه‌مند هستیم. در این حالت بسیار مناسب است که در هر مورد از پایه‌های یکسان استفاده کنیم؛ یعنی، فرض کنیم که $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. در این صورت، ماتریس نمایش را به طور ساده ماتریس T نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} می‌نامیم. چون این مفهوم برایمان بسیار مهم است، تعریف آن را دوباره بیان می‌کنیم. اگر T تبدیلی خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای مرتبی برای V باشد، ماتریس T نسبت به \mathcal{B} (یا، ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}) عبارت است از ماتریس $n \times n$ مانند A که در اینجا A_{ij} ، با معادلات

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i, \quad j = 1, \dots, n \quad (5-3)$$

تعریف می‌شوند. همواره باید به خاطرداشت که این ماتریس که T را نمایش می‌دهد به پایه مرتب \mathcal{B} وابسته است، وعلاوه در هر پایه مرتب V نمایشی ماتریسی برای T موجود است. (برای تبدیلهای از یک فضا در فضای دیگر، این ماتریس به دو پایه مرتب، یکی برای V و دیگری از آن W ، وابسته است). برای آنکه این وابستگی را افزاید نباید، برای ماتریس عملگر خطی T در پایه مرتب \mathcal{B} از نماد

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

استفاده می‌کنیم. طریقه‌ای که با آن این ماتریس و این پایه مرتب T را توصیف می‌کنند، این است که به ازای هر α در V

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

مثال ۱۳. فرض کنیم V فضای ماتریسهای ستونی $1 \times n$ بر روی هیأت F ، W فضای ماتریسهای $m \times 1$ بر روی همین هیأت، و A ماتریس $m \times n$ ثابتی بر روی F باشد. همچنین فرض کنیم T تبدیل خطی از V در W تعریف شده با $T(X) = AX$ باشد. را پایه مرتبی برای V می‌گیریم که نظیر پایه استاندۀ F باشد، یعنی نمین بردار در \mathcal{B} همان ماتریس $1 \times n$ باشد با درایه ۱ در سطر نهم و درایه ۰ در سطرهای دیگر. فرض کنیم

پایه مرتب متناظر آن برای W باشد، یعنی زمین بردار \mathcal{B}' ماتریس Y_j با درایه ۱ در سطر زم و درایه ۰ در سایر سطرها باشد. در این صورت، ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، خود ماتریس A است. این مطلب واضح است، زیرا ماتریس AX ، زمین ستون ماتریس A است.

مثال ۱۴. گیریم F یک هیأت، و T عملگری روی F^2 باشد که با

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

تعریف می‌شود. به قول دیده می‌شود که T عملگری خطی روی F^2 است. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ پایه مرتب استاندۀ F^2 باشد. حال

$$T\epsilon_1 = T(1, 0) = (1, 0) = 1\epsilon_1 + 0\epsilon_2$$

$$T\epsilon_2 = T(0, 1) = (0, 0) = 0\epsilon_1 + 0\epsilon_2$$

ولذا ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مثال ۱۵. فرض کنیم V فضای همه توابع چندجمله‌ای از R در \mathbb{R} به شکل

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

یعنی، فضای توابع چندجمله‌ای از درجه سه یا کمتر باشد. عملگر مشتق گیری D در مثال ۲، V را در V می‌نگارد، زیرا D «کاهش‌دهنده درجه» است. فرض کنیم پایه مرتب \mathcal{B} برای V متشکل از چهارتابع f_1, f_2, f_3, f_4 باشد که با $f_j(x) = x^{j-1}$ تعریف می‌شوند. در این صورت،

$$(Df_1)(x) = 0, \quad Df_1 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_2)(x) = 1, \quad Df_2 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_3)(x) = 2x, \quad Df_3 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_4)(x) = 3x^2, \quad Df_4 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4$$

و بنابراین ماتریس D در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قبله دیدیم که هنگام جمع تبدیلهای، چیزی که برای ماتریسهای نمایش اتفاق می‌افتد این است که آنها هم جمع می‌شوند. اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگام ترکیب تبدیلهای چه اتفاق می‌افتد. به صورت دقیقت، فرض کنید V, W ، و Z فضاهایی برداری بر روی هیأت F ، و بترتیب، با ابعاد m, n ، و p باشند. T را تبدیلی خطی از V در W ، و U را تبدیلی خطی از Z در W می‌گیریم. فرض کنیم پایه‌های مرتب

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$$

بترتیب، برای فضاهای V, W ، و Z داده شده‌اند و A ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، و B ماتریس U نسبت به جفت \mathcal{B}' و \mathcal{B}'' است. در این صورت، بسادگی دیده می‌شود که C ، ماتریس تبدیل UT نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}'' عبارت است از حاصل ضرب A و B . زیرا، اگر α برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

$$[U(T\alpha)]_{\mathcal{B}''} = B[T\alpha]_{\mathcal{B}'}.$$

پس

$$[(UT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

و از این‌رو، بنا بر تعریف ویکتا بودن ماتریس نمایش، باید داشته باشیم $C = BA$. با انجام محاسبهٔ ذیل نیز می‌توان به‌این نتیجه دست یافت

$$\begin{aligned} (UT)(\alpha_j) &= U(T\alpha_j) \\ &= U\left(\sum_{k=1}^m A_{kj}\beta_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{kj}(U\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{kj} \sum_{i=1}^p B_{ik}\gamma_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m B_{ik}A_{kj} \right) \gamma_i \end{aligned}$$

و بنا براین باید داشته باشیم

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik}A_{kj}. \quad (6-3)$$

اعمال روی سطرهای ماتریسها موجب ایجاد انگیزه برای تعریف (6-3) ضرب ماتریسی شدند. در اینجا دیده می‌شود که ترکیب تبدیلهای خطی هم انگیزه‌ای بسیار قوی برای این تعریف است. خلاصهً این مطلب به‌طور رسمی چنین است.

قضیه ۱۳. فرض کنیم V, W و Z سه فضای برداری با بعدمتناهی بودی هیأت F ، T تبدیلی خطی از V در W و U تبدیلی خطی از W در Z باشند. اگر $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ و \mathcal{B} پایه‌هایی مرتباً، بترتیب، برای V, W و Z باشند و اگر A ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' و B ماتریس U نسبت به جفت \mathcal{B}' و \mathcal{B}'' باشد، آنگاه ماتریس ترکیب UT نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}'' عبارت است از ماتریس حاصل ضرب $C = BA$.

مالحظه‌مند کنیم که قضیه ۱۳، اثباتی از شرکت پذیری ضرب ماتریسی به دست می‌دهد. اثباتی که نیازی به محاسبه ندارد، و مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ ارائه شد. بعلاوه، خاطرنشان می‌کنیم که حالت خاصی از قضیه ۱۳ را در مثال ۱۲ هم اثبات کردیم.

تذکراین مطلب مهم است که اگر T و U عملگرهاي خطی روی فضای V باشند و نمایش ماتریسی را نسبت به پایه واحدی چون \mathcal{B} انجام دهیم، آنگاه قضیه ۱۳ شکل ساده $[UT]_{\mathcal{B}} = [U][T]_{\mathcal{B}}$ را به خود می‌گیرد. پس، در این حالت، تناظری که \mathcal{B} بین عملگرها و ماتریسها برقرار می‌کند، نه تنها یک یکریختی فضای برداری است، بلکه ضربها را نیز حفظ می‌کند. نتیجه‌ای ساده از این مطلب این است که عملگر خطی T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $[T]$ ماتریسی معکوس پذیر باشد. زیرا، عملگر همانی I در هر پایه مرتب دلخواه توسط ماتریس همانی نمایش داده می‌شود، و از این رو

$$UT = TU = I$$

هم ارز است با

$$[U][T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}} = I.$$

البته، وقتی T معکوس پذیر باشد

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگامی که پایه تغییر کند، چه تغییری در ماتریسهای نمایش رخ می‌دهد. به منظور سادگی، این پرسش را تنها برای عملگرهاي خطی روی یک فضای V مطرح می‌کنیم تا بتوانیم از پایه مرتب واحدی استفاده کنیم. سؤال به طور مشخص چنین است: فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دو پایه مرتب برای V باشند. ارتباط ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T]_{\mathcal{B}'}$ چیست؟ همان گونه که در فصل ۲ مشاهده کردیم، یک ماتریس $n \times n$ (معکوس پذیر) یکتایی P وجود دارد، به طوری که با ازای هر بردار α از V ،

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (7-۴)$$

این ماتریس عبارت است از $P = [P_1, \dots, P_n]$ که در آن $P_j = [\alpha'_j]$. بنابراین

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (8-3)$$

اگر (۷-۳) را برابردار $T\alpha$ بهكار بنديم، داريم

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (9-3)$$

از ترکيب (۷-۳)، (۸-۳) و (۹-۳) بهدست می آوريم

$$[T] P[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}}$$

با

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}} P[\alpha]_{\mathcal{B}} = [T\alpha]_{\mathcal{B}}$$

واز اين رو بايد داشته باشيم

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}} P \quad (10-3)$$

اين رابطه به پرسشن ما پاسخ مي گويد.

قبل از آنکه اين نتيجه را رسماً بيان کنیم، به مشاهده مطلب زير می پردازیم. عملگر خطی يكتابی چون U وجود دارد که با

$$U\alpha_j = \alpha'_j, \quad j = 1, \dots, n$$

تعريف می شود و \mathcal{B}' را بروی \mathcal{B} انتقال می دهد. عملگر U معکوس پذير است، زيرا پايه ای از V را بروی پايه ای از U می برد. ماتريس P (بالا) دقیقاً ماتريس عملگر U در پایه مرتب \mathcal{B}' است. زيرا P با

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

تعريف می شود و چون $\alpha'_j = U\alpha_j$ ، اين تساوي می تواند به صورت

$$U\alpha_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

نيز نوشته شود. پس، طبق تعريف (8)

قضيه ۱۶. فرض کنیم V يك فضای بروی با. بعد متناهی بروی هیأت F

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دو پایه مرتب بروی V و عملگری خطی دوی V باشد. اگر $[P]_{\mathcal{B}} = [P_j]_{n \times n}$ با متونهای $P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}} P.$$

دنتيجه، اگر U عملگر معکوس پذير تعريف شده با $\alpha'_j = U\alpha_j$ دوی V

باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}}.$$

مثال ۱۶. فرض کنیم عملگر خطی T روی R^2 با $(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ تعریف شود. در مثال ۱۴ نشان دادیم که ماتریس T در پایه مرتب استاند $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ برابر

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. اگر پایه مرتب \mathcal{B}' برای R^2 مشتمل از بردارهای $\epsilon'_1 = (1, 1)$ و $\epsilon'_2 = (2, 1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\epsilon'_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon'_2 &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2\end{aligned}$$

ولذا P عبارت است از ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

با محاسبه کوتاهی نتیجه می‌شود

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

از این رو

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

بسادگی می‌توانیم صحت این نتیجه را بررسی کنیم، زیرا

$$T\epsilon_1' = (1, 0) = -\epsilon_1' + \epsilon_2'$$

$$T\epsilon_2' = (2, 0) = -2\epsilon_1' + 2\epsilon_2'$$

مثال. فرض کنیم V فضای توابع چندجمله‌ای از R با «درجه» کمتر از ۳ یا مساوی با آن باشد. نظیر مثال ۱۵، D را عملگر مشتق‌گیری روی V می‌گیریم، و فرض می‌کنیم

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

پایه مرتب تعریف شده با x^i برای V باشد. عدد حقیقی t را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $(x+t)^i = g_i(x)$ ، به عبارت دیگر

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = tf_1 + f_2$$

$$g_3 = t^2 f_1 + 2tf_2 + f_3$$

$$g_4 = t^3 f_1 + 3t^2 f_2 + 3tf_3 + f_4.$$

همان‌گونه که بسادگی دیده می‌شود چون ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر، و معکوسش

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ پایه مرتبی برای V است. در مثال ۱۵، معلوم شد که ماتریس D در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس، ماتریس D در پایه‌های مرتب \mathcal{B}' عبارت است از

$$P^{-1}[D]_{\mathcal{B}'} P = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، D در پایه‌های مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' با یک ماتریس نمایش داده می‌شود. البته این نتیجه را می‌توان به نحو مستقیم تری هم مشاهده کرد، زیرا

$$Dg_1 = 0$$

$$Dg_2 = g_1$$

$$Dg_3 = 2g_2$$

$$Dg_4 = 3g_3.$$

این مثال نکتهٔ خوبی را نشان می‌دهد. اگر ماتریس عملگری خطی را در یک پایهٔ مرتب \mathcal{B} بشناسیم و بخواهیم ماتریس آن را در پایهٔ مرتب دیگر \mathcal{B}' بیابیم، هرچند ممکن است یافتن ماتریس نمایش با توصل مستقیم به تعریف کار بسیار ساده‌ای باشد، اما غالباً تغییر مختصات با استفاده از ماتریس معکوس پذیر P خیلی مناسب تراست.

تعاریف. فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (هرجای) بروی هیأت F باشند. گوییم $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ متشابه با A بروی F است، هرگاه یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر P یافت شود به طوری که $B = P^{-1}AP$

بنابر قضیة ۱۴، نتیجهٔ زیر را داریم: اگر V یک فضای برداری n بعدی بروی F و \mathcal{B} دو پایهٔ مرتب برای V باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی T روی V ، ماتریس $B = [T]_{\mathcal{B}}$ متشابه با ماتریس $A = [T]_{\mathcal{B}}$ است. عکس این حکم نیز صادق است. فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ دو ماتریس $n \times n$ و B متشابه با A باشد. همچنین فرض کنیم V فضای بعدی دلخواهی بروی F ، و \mathcal{B} پایهٔ مرتبی بروای V باشد. T را آن عملگر خطی روی V می‌گیریم که در پایهٔ \mathcal{B} با A نمایش داده می‌شود. اگر $B = P^{-1}AP$ را پایهٔ مرتبی برای V می‌گیریم که از \mathcal{B} توسط P حاصل می‌شود، یعنی

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

در این صورت، ماتریس T در پایهٔ \mathcal{B}' همان B خواهد بود. پس، این گفته که B متشابه با A است، بدین معنی است که روی هر فضای n بعدی F ، ماتریسهای A و B یک تبدیل خطی در دو پایهٔ مرتب (احیاناً) مختلف را نمایش می‌دهند.

توجه کنید که با به کار گرفتن $P = I$ ، هر ماتریس $n \times n$ مانند A متشابه با خودش است. اگر B متشابه باشد، آنگاه A نیز متشابه با B است، زیرا $B = P^{-1}AP$ ایجاب می‌کند که $B = (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = BP$. اگر B متشابه با A و C متشابه با B باشد، آنگاه $C = Q^{-1}BQ$ و $B = P^{-1}AP$ ایجاب می‌کند که C متشابه با A است، چرا که $C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. پس، تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F است. همچنین توجه کنید که تنها ماتریس متشابه با ماتریس I همانی I است، و تنها ماتریس متشابه با ماتریس صفر، خود ماتریس صفر است.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگر خطی روی C^2 تعریف شده با $(\circ, \circ) = (x_1, x_2)$ باشد.

فرض کنید \mathcal{B} پایه مرتب استاندۀ C^2 ، و $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ پایه مرتب تعریف شده با $(1, i) = (-i, 2)$ باشد.

(الف) ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' چیست؟

(ب) ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B}' و \mathcal{B} کدام است؟

(پ) ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}' چیست؟

(ت) ماتریس T در پایه مرتب $\{\alpha_2, \alpha_1\}$ کدام است؟

۲. فرض کنید T تبدیل خطی از R^3 در R^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3)$$

باشد.

(الف) اگر \mathcal{B} پایه مرتب استاندۀ R^3 و \mathcal{B}' پایه مرتب استاندۀ R^2 باشد، ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' کدام است؟

(ب) اگر $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ و در آنها

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (1, 0, 0),$$

$$\beta_1 = (0, 1), \quad \beta_2 = (1, 0)$$

ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' کدام است؟

۳. فرض کنید T عملگر خطی روی F و A ماتریس T در پایه مرتب استاندۀ F باشد.

فرض کنید W زیرفضای F پدید آمده با بردارهای ستونی A باشد. رابطه W با T چیست؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری ۲ بعدی بر روی هیأت F و \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد. اگر T عملگر خطی روی V باشد و

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T^2 - (a+d)T + (ad - bc)I = 0$$

۵. فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 باشد که ماتریس در پایه مرتب استاندۀ B با

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

است. پایه‌ای برای برد T و پایه‌ای برای فضای پوج T باید.

۶. فرض کنید T عملگر خطی روی R^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

باشد.

(الف) ماتریس T در پایه مرتب استاندۀ R^2 چیست؟

(ب) ماتریس T در پایه مرتب $\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ که در آن $\alpha_1 = (1, 2)$ و $\alpha_2 = (1, -1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی c عملگر $(T - cI)$ معکوس پذیر است.

(ت) اگر B پایه مرتب دلخواهی برای R^3 باشد و $A = [T]_B$ ، ثابت کنید که $A_{12}A_{21} \neq 0$.

۷. فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

باشد.

(الف) ماتریس T در پایه مرتب استاندۀ R^3 چیست؟

(ب) ماتریس T در پایه مرتب

$$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$

که در آن $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$ و $\alpha_3 = (2, 1, 1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید T معکوس پذیر است و قاعده‌ای شبیه آنکه T را تعریف می‌کند، برای T^{-1} به دست آورید.

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید دوماً تریس

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشا به‌اند. (داهنماهی: فرض کنید T عملگر خطی روی C^2 باشد که در پایه مرتب استاندۀ با ماتریس اول نمایش داده می‌شود. آنگاه دو بردار α_1 و α_2 باید که $T\alpha_2 = e^{-i\theta} \alpha_2$ و $T\alpha_1 = e^{i\theta} \alpha_1$ و $\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ یک پایه باشد.)

۹. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و S و T و U عملگرهاي خطی روی V باشند. سؤال: چه وقت پایه‌های مرتب \mathcal{B}' برای V یافت می‌شوند که

ثابت کنید $[S]_{\mathbb{B}} = [T]_{\mathbb{B}}$? پایه‌هایی وجود دارند اگر و تنها اگر یک عملگر خطی معکوس پذیر روی V یافت شود که $T = USU^{-1}$. (طرح اثبات: اگر، $[S]_{\mathbb{B}} = [T]_{\mathbb{B}}$ بگیرید که \mathcal{B} را بروی \mathcal{B}' ببرد و نشان دهید که $S = UTU^{-1}$. بعکس، آنگاه S را عملگری بگیرید که \mathcal{B}' را بروی \mathcal{B} ببرد و نشان دهید که $T = USU^{-1}$. آنگاه S را عملگر معکوس پذیری بگیرید که \mathcal{B} را بروی \mathcal{B}' ببرد و نشان دهید که $S = UTU^{-1}$. اگر به ازای عملگر S معکوس پذیری \mathcal{B} چون U داشته باشیم $T = USU^{-1}$. آنگاه S را پایه مرتب دلخواهی برای V و \mathcal{B}' را نگاره آن تحت U فرض کنید. سپس نشان دهید $[S]_{\mathbb{B}} = [T]_{\mathbb{B}}$.

۱۵. قبل از دیده ایم که عملگر خطی T روی \mathbb{R}^2 تعریف شده با $(x_1, x_2) = T(x_1, x_2)$ در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. این عملگر در رابطه $T^2 = T$ صدق می‌کند. ثابت کنید اگر عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد به طوری که $S^2 = S$ ، آنگاه یا $S = I$ یا $S = 0$ یا پایه‌ای مرتب چون \mathcal{B} برای \mathbb{R}^2 وجود دارد که $[S]_{\mathbb{B}} = A$ (منظور از A همان ماتریس فوق است).

۱۶. فرض کنید W فضای همه ماتریسهای ستونی $n \times 1$ بر روی هیأت F باشد. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، آنگاه A با ضرب از چپ، عملگر خطی L_A را روی W تعریف می‌کند: $L_A(X) = AX$. ثابت کنید هر عملگر خطی روی W ، یک ضرب از چپ در ماتریسی $n \times n$ است؛ یعنی به ازای ماتریسی چون A یک L_A است.

حال فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F و \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V ، تعریف می‌کنیم $[\alpha]_{\mathcal{B}} = U\alpha$. ثابت کنید U یک یکریختی از V بر روی W است. اگر T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه UTU^{-1} عملگری خطی روی W است. در نتیجه، UTU^{-1} ضرب از چپ در ماتریسی $n \times n$ مانند A است. A کدام ماتریس است؟

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد.

(الف) بنا بر قضیه ۱ عملگر خطی یکتاًی چون T روی V وجود دارد به طوری که

$$T\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad T\alpha_n = 0.$$

ماتریس A مربوط به عملگر T در پایه مرتب \mathcal{B} چیست؟

(ب) ثابت کنید $T^n = 0$ ولی $T^{n-1} \neq 0$.

(پ) فرض کنید S عملگری خطی روی V باشد که $S^n = 0$ ولی $S^{n-1} \neq 0$.

ثابت کنید پایه مرتبی چون \mathcal{B}' برای V وجود دارد که ماتریس S در پایه مرتب \mathcal{B}' همان ماتریس A در قسمت (الف) باشد.

(ت) ثابت کنید اگر M و N ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشند که $M = N = 0$ ولی $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$ آنگاه M و N مشابه‌اند.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T تبدیلی خطی از V در W باشد.

اگر

$$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

بترتیب، دو پایه مرتب برای V و W باشند، تبدیلهای $E^{p,q}$ را به صورتی که در اثبات قضیه ۵ تعریف شدند در نظر بگیرید: $E^{p,q}(\alpha_i) = \delta_{iq}\beta_p$. آنگاه $E^{p,q}(\alpha_i)$, $1 \leq q \leq n$, $1 \leq p \leq m$ اسکالرهای معین T در این پایه از $(L(V; W), A_{pq})$ تشکیل می‌دهند و لذا به ازای

$$(L(V; W), A_{pq})$$

$$T = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} E^{p,q}.$$

نشان دهید ماتریس A با درایه‌های $A(p, q) = A_{pq}$ دقیقاً همان ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' است.

۵.۳. تابعکهای خطی

اگر V فضایی برداری بر روی هیأت F باشد، یک تبدیل خطی f از V در هیأت اسکالرهای F یک تابع خطی روی V نامیده می‌شود. با توجه به مفهوم تبدیل خطی، این بدان معنی است که f تابعی است از V در F که به ازای همه بردارهای α و β از V و همه اسکالرهای c از F

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta).$$

مفهوم تابع خطی در مطالعه فضاهای با بعد متناهی مهم است، زیرا در سازمان دادن و روشن کردن مبحث زیرفضاهای، معادلات خطی، و مختصات یاری دهنده است.

مثال ۱۸. گیریم F یک هیأت باشد و a_1, \dots, a_n اسکالرهایی از F باشند. تابع روی F^n را با

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، f تابعکی خطی روی F^n است. این همان تابع خطی است که توسط ماتریس $[a_1 \dots a_n]$ نسبت به پایه مرتب استانداره F^n و پایه $\{1\}$ برای F

نمایش داده می‌شود:

$$a_j = f(\epsilon_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

هر تابع خطی دلخواه روی F^n نیز به ازای اسکالرها بی چون a_1, a_2, \dots, a_n بهمین شکل است. این مطلب بلا فاصله از تعریف تابع خطی نتیجه می‌شود، زیرا با تعریف $a_j = f(\epsilon_j)$ واستفاده از خطی بودن، داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(\sum_j x_j \epsilon_j) \\ &= \sum_j x_j f(\epsilon_j) \\ &= \sum_j a_j x_j. \end{aligned}$$

مثال ۱۹. اینک به مثالی مهم از تابعکهای خطی می‌پردازیم. فرض کنیم n عددی صحیح مشبт و F یک هیأت باشد. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد، بر A عبارت است از اسکالر

$$\text{tr} A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}.$$

تابع رد تابعکی خطی روی فضای ماتریسی $F^{n \times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} \text{tr}(cA + B) &= \sum_{i=1}^n (cA_{ii} + B_{ii}) \\ &= c \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} \\ &= c \text{tr}(A) + \text{tr}B. \end{aligned}$$

مثال ۲۰. فرض کنیم V فضای همه توابع چندجمله‌ای از هیأت F در خودش و \mathbb{C} عنصری از F باشد. اگر تعریف کنیم

$$L_t(p) = p(t)$$

آنگاه، L_t تابعکی خطی روی V است. معمولاً این مطلب به این صورت توصیف می‌شود که به ازای هر t «تعریف مقدار در t » تابعکی خطی روی فضای توابع چندجمله‌ای است. لازم است این نکته را مذکور شویم که چندجمله‌ای بودن توابع، نقشی در این مثال ندارد. تعیین مقدار در t ، تابعکی خطی روی فضای همه توابع از F در \mathbb{C} است.

مثال ۲۱. تابعک زیر ممکن است مهمترین تابع خطی در ریاضیات باشد. گیویسم $[a, b]$ فاصله‌ای بسته روی خط حقیقی و $([a, b])C$ فضای توابع (با مقدار) حقیقی

پیوسته روی $[a, b]$ باشد. در این صورت،

$$L(g) = \int_a^b g(t) dt$$

تابع خطی L روی $C[a, b]$ را تعریف می‌کند.

اگر V فضایی برداری باشد، دسته همه تابعکهای خطی روی V ، به‌طریقی طبیعی فضایی برداری تشکیل می‌دهد. این فضا همان $L(V, F)$ است. ما این فضا را با V^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان V می‌نامیم:

$$V^* = L(V, F).$$

اگر بعد V متناهی باشد، می‌توانیم توصیفی نسبتاً صریح از V^* فضای دوگان V به‌دست آوریم. در مورد فضای V^* طبق قضیه ۵ مطلبی می‌دانیم، و آن این است که

$$\text{بعد}(V^*) = \text{بعد}(V).$$

فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \mathcal{B}$ پایه‌ای برای V باشد. بنابر قضیه ۱ (به‌ازای هر i) یک تابع خطی یکتای f_i روی V وجود دارد که

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}. \quad (11-3)$$

بدین طریق، از \mathcal{B} مجموعه‌ای از n تابع خطی متمایز f_1, f_2, \dots, f_n روی V به‌دست می‌آوریم. این تابعکها دارای استقلال خطی نیز هستند. زیرا، فرض کنیم

$$f = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (12-3)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned}$$

باخصوص، اگر f تابع صفر باشد، به‌ازای هر j داریم $f(\alpha_j) = 0$ ، ولذا اسکالرهای c_j همگی ۰ هستند. حال f تابع $\sum_{i=1}^n c_i f_i$ مستقل خطی هستند و چون می‌دانیم که بعد V^* برابر n است، مجموعه $\{f_1, \dots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ لزوماً باید پایه‌ای برای V^* باشد. این پایه، پایه دوگان \mathcal{B} نامیده می‌شود.

قضیه ۱۵. فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی بروی هیأت F ، و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت، یک پایه دوگان یکتای

$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* وجود داده به طوری که $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. به ازای هر تابع f خطی f روی V داریم

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha_i) f_i \quad (13-3)$$

و به ازای هر بردار α از V داریم

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i. \quad (14-3)$$

اثبات. قبل از دادیم که پایه‌ای یکتا که «دوگان» \mathcal{B} است وجود دارد. اگر f تابعکی خطی روی V باشد، آنگاه f ترکیبی خطی همچون (۱۲-۳) از f هاست، و همان طور که بعد از تساوی (۱۴-۳) ملاحظه کردیم اسکالرهای x_i باید از $f(\alpha_j) = f_j(\alpha)$ به دست آیند. به طور مشابه، اگر

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$$

برداری از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^n x_i f_j(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} \\ &= x_j. \end{aligned}$$

بدین نحو، عبارت یکتا α بعنوان ترکیبی خطی از α_i ها

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i$$

است. \square

معادله (۱۴-۳) روش خوبی جهت توصیف ماهیت پایه دوگان برایمان فراهم می‌کند. این معادله می‌گوید که اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ پایه مرتبی برای V و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ دوگان آن باشد، آنگاه f دقیقاً تابعی است که بهر بردار α از V ، n میم مختص نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} را تخصیص می‌دهد. از این‌رو، می‌توانیم f را تراکم مختصی برای \mathcal{B} نیز بنامیم. فرمول (۱۳-۳) وقتی با (۱۴-۳) ترکیب شود می‌گوید که: اگر f در V^* با فرض $f(\alpha_i) = a_i$ باشد، آنگاه وقتی

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

داریم

$$f(\alpha) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \quad (15-3)$$

به بیان دیگر، هر گاه پایه مرتبی برای V انتخاب کنیم، و هر بردار v را توسط n تابع مختصاتش نسبت به \mathcal{B} ، یعنی (x_1, \dots, x_n) ، توصیف کنیم، آنگاه هر تابع خطی روی V به صورت $(15-3)$ است. این مطلب تعییس طبیعی مثال ۱۸ است که حالت خاص $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}, V = F^n$ است.

مثال ۳۲. فرض کنیم V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای از R در R با درجه ۲ یا کمتر باشد. گیریم t_1, t_2, t_3 و c_1, c_2, c_3 عدد حقیقی متمایز دلخواه باشند و

$$L_i(p) = p(t_i).$$

در این صورت، L_1, L_2, L_3 تابعهای خطی روی V هستند. این تابعهای مستقل خطی هستند؛ زیرا، فرض کنیم

$$L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3.$$

اگر $L = 0$ ؛ یعنی، به ازای هر p از V ، $L(p) = 0$ ، آنگاه با به کار بستن L بر «توابع چند جمله‌ای خاص x^1, x^2, x^3 » به دست می‌آوریم

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 = 0$$

$$t_1^2c_1 + t_2^2c_2 + t_3^2c_3 = 0.$$

از این معادلات نتیجه می‌شود که $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (همان طور که محاسبه کوتاهی نشان می‌دهد) ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

وقتی t_1, t_2, t_3 متمایز باشند، معکوس پذیر است. پس L_i ‌ها مستقل اند و چون بعد V برای 3 است، این تابعهای پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند. این، پایه دوگان کدام پایه از V است؟ یک چنین پایه‌ای $\{p_1, p_2, p_3\}$ از V باید در شرط

$$L_i(p_j) = \delta_{ij}$$

با

$$p_j(t_i) = \delta_{ij}$$

صدق کند. نسبتاً بهولت دیده می‌شود که این توابع چند جمله‌ای عبارتند از

$$p_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$$

$$p_3(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

پایه $\{p_1, p_2, p_3\}$ از V جاگ است، زیرا بنا بر (۱۴-۳) به ازای هر p در V داریم

$$p = P(t_1)p_1 + P(t_2)p_2 + P(t_3)p_3.$$

از این رو، اگر c_1, c_2 ، و c_3 سه عدد حقیقی دلخواه باشند، دقیقاً یک تابع چندجمله‌ای p بر روی R وجود دارد که درجه‌اش حداقل ۲ باشد و در شرایط $p(t_j) = c_j, j = 1, 2, 3$ صدق کند. این تابع چندجمله‌ای عبارت است از $p = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$.

اکنون درباره رابطه بین تابعکهای خطی و زیرفضاهای به بحث می‌پردازیم. اگر f تابع خطی غیر صفری باشد، آنگاه درجه f یک است، زیرا برد f زیرفضایی غیر صفر از هیأت اسکالرهاست و (بنا بر این) بایدهمان هیأت اسکالرها باشد. اگر بعد فضای زمینه V ، متناهی باشد، قضیه‌رتبه باضافه پوچی (قضیه ۲) به ما می‌گوید که بعد فضای پوچ N_f عبارت است از

$$N_f = \text{بعد}(V) - 1.$$

در هر فضای برداری با بعد n ، زیرفضایی با بعد $1 - n$ یک برد فضای نامیده می‌شود. چنین زیر فضایی‌گاهی ابر صفحه یا زیرفضای با هم بعد $1 - n$ نیز نامیده می‌شود. آیا هر ابر فضای فضای پوچ تابعکی خطی است؟ بسادگی دیده می‌شود که جواب مثبت است. نشان دادن این مطلب چنان مشکل نیست که هر زیرفضای d بعدی از فضای n بعدی اشتراک فضاهای پوچ $(n-d)$ تابع خطی است (قضیه ۱۶ زیر).

تعريف. اگر V فضایی برداری بروی هیأت F و S ذی‌سرمجموعه‌ای از V باشد، پوچ‌ساز S° عبارت است از مجموعه S° مشکل از تابعکهای خطی f بروی V که به ازای $f(a) = 0$ داشته باشد.

این مطلب باید روشن باشد که خواه S° زیر فضایی از V باشد خواه نباشد، S° همواره زیر فضایی از V است. اگر مجموعه S تنها مشکل از بردار صفر باشد، آنگاه $S^\circ = V^\circ$ ، و اگر $S = V$ آنگاه S° زیر فضای صفر V° است. (وقتی بعد V متناهی باشد، مشاهده این مطلب ساده است.)

قضیه ۱۶. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بروی هیأت F ، و W زیر فضایی از V باشد. دا این صورت،

$$\text{بعد}(W) = \text{بعد}(W^\circ) + \text{بعد}(V).$$

اثبات. گیریم k بعد W و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای آن باشد. بردارهای $V, \alpha_n, \dots, \alpha_{k+1}$ از V را طوری انتخاب می‌کنیم که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V گردد. فرض کنیم دوگان این پایه از V پایه $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* باشد. ادعا این است که $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای پوچساز W^* است. مسلماً به ازای هر $i \geq k+1$, f_i به W^* تعلق دارد، زیرا

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

و هرگاه $i \geq k+1$ و $j \leq k$, $f_i(\alpha_j) = 0$. از این مطلب نتیجه می‌شود که به ازای $i \geq k+1$, $f_i(\alpha_i) = 0$. البته با این شرط که α ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$ باشد. تابعکهای f_{k+1}, \dots, f_n مستقل خطی هستند، از این رو تنها چیزی که باید نشان دهیم این است که آنها W^* را پدید می‌آورند. فرض کنیم f در V^* باشد. حال

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$$

و اگر f در W^* باشد، به ازای $i \leq k$ داریم $f(\alpha_i) = 0$.

$$f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i.$$

پس نشان داده‌ایم که اگر f در W^* باشد، آنگاه $\dim W^* = n - k$, $\dim V = n$ و $\dim W = k$.

نتیجه. اگر W زیرفضایی k بعدی از یک فضای برداری n بعدی V باشد، آنگاه W اشتراک $(n-k)$ ایضاً از V دارد.

اثبات. این مطلب بیشتر نتیجه‌ای از اثبات قضیه ۱۶ است تا از صورت آن. در نمادگذاری اثبات، W دقیقاً مجموعه بردارهای $\alpha_i = 0, f_i(\alpha_i) = 0, i = k+1, \dots, n$ است که در حالت ۱، W فضای پوچ f است. \square

نتیجه. اگر W_1 و W_2 زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $W_1 = W_2$ اگر و تنها اگر $W_1^* = W_2^*$.

اثبات. اگر $W_1 = W_2$, آنگاه $W_1^* = W_2^*$. اما اگر $W_1 \neq W_2$, آنگاه یکی از این دو زیر فضا شامل برداری است که در زیرفضای دیگر نیست. فرض کنیم برداری چون α در W_2 هست که در W_1 نیست. بنا بر نتیجه قبل (یا اثبات قضیه ۱۶) تابعکی خطی چون f موجود است که به ازای هر بردار β از W_1 , $f(\beta) = 0$, اما $f(\alpha) \neq 0$. در این صورت f در W_1^* هست ولی در W_2^* نیست و لذا $W_1^* \neq W_2^*$. \square

در بخش بعد اثبات‌های مختلفی برای این دو نتیجه خواهیم آورد. نتیجه اول می‌گوید که: اگر پایه مرتبی برای فضای انتخاب کنیم، هر زیرفضای k بعدی می‌تواند با وضع شرط خطی همگن روی مختصات نسبت به آن پایه توصیف شود.

$(n-k)$ اثبات: از دیدگاه تابعکهای خطی، نظری به دستگاه‌های معادلات خطی

همگن می‌افکنیم. فرض کنیم دستگاه معادلات خطی

$$A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = 0$$

$$A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = 0$$

داده شده و بخواهیم جوابهای آن را بیابیم. اگر فرض کنیم f_i ها، $i = 1, \dots, m$ ، A_{ij} تابعکهای خطی روی F^n باشند که با

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = A_{i1}x_1 + \cdots + A_{in}x_n$$

تعریف می‌شوند، آنگاه زیرفضایی از F^n مشکل از همه α هایی را می‌جوییم که

$$f_i(\alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

به بیان دیگر، زیرفضایی را جستجویی کنیم که توسط f_1, \dots, f_m پسوج می‌شود. عمل تحویل سطیری ماتریس ضرایب، روشی با نظام جهت یافتن این زیرفضا در اختیار ما می‌گذارد. n تابی (A_{11}, \dots, A_{in}) ، مختصات تابعک خطی f نسبت به پایه‌ای که دوگان پایه استاندۀ F^n است را به دست می‌دهد. لذا، فضای سطیری ماتریس ضرایب را می‌توان به عنوان فضای تابعکهای خطی پدید آمده توسط f_1, \dots, f_m به حساب آورد. فضای جواب، زیرفضایی پسوج شده توسط این فضا از تابعکها است.

اگرچه تو ان از دیدگاه «دوگان» به دستگاه معادلات نظر کرد. به این معنی که فرض کنیم m بردار

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$$

از F^n به داده شده باشند و بخواهیم پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط این بردارها را بیابیم. چون هر تابعک خطی روی F^n نوعاً به صورت

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

است، شرط بودن f در این پوچساز این است که

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}c_j = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

یعنی، این است که (c_1, \dots, c_n) جوابی از دستگاه $AX = 0$ باشد. با این دید، عمل تحویل سطیری، روشی با نظام برای یافتن پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه متناهی مفروضی از بردارهای F^n به دست می‌دهد.

مثال ۰۲۳ «ذیلاً» سه تابعک خطی روی R^4 داده شده است:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 + x_4$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4.$$

زیرفضایی که توسط این تابعکها پوچ می شود، با یا فتن شکل تحویل شده سطحی پلکانی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

به طور صریح به دست می آید. محاسبه ای کوتاه یا نظری به مثال ۲۱ از فصل ۲ نشان می دهد که

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، تابعکهای خطی

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$$

همان زیرفضایی از (R^4) را بدید می آورند که تابعکهای f_1, f_2, f_3 و f_4 ؛ و همان زیرفضایی از R^4 را پوچ می سازند که f_1, f_2, f_3 و f_4 . زیرفضای پوچ شده، مشکل از بردارهای است که در شرایط

$$x_1 = -2x_3$$

$$x_2 = x_4 = 0$$

صدق می کنند.

مثال ۲۴. فرض کنیم W زیرفضایی از R^5 باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1) \quad \alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2) \quad \alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$$

پدید می آید. چگونه می توان W° را پوچ ساز W را توصیف کرد؟ ماتریس 5×4 ، ماتریس A ، با بردارهای سطحی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ را تشکیل می دهیم و ماتریس تحویل شده سطحی پلکانی R را که همارد سطحی A است می یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

اگر f تابعکی خطی روی R^5 باشد:

$$f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j$$

آنگاه f در درجه W^0 قرار دارد اگر و تنها اگر $f(\alpha_i) = 0$ بازی $i = 1, 2, 3, 4$ ؛ یعنی،
اگر و تنها اگر

$$\sum_{j=1}^5 A_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

و این خود هم ارز است با

$$\sum_{j=1}^5 R_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leq i \leq 3$$

با

$$c_1 - c_2 - c_4 = 0$$

$$c_3 + 2c_4 = 0$$

$$c_5 = 0.$$

همه این گونه تابعکهای خطی f را با تخصیص مقادیری دلخواه به c_2 و c_4 ، مثلاً $c_2 = a$ و $c_4 = b$ ، و سپس یافتن مقادیر متناظر $c_1 = a+b$ ، $c_3 = -2b$ ، $c_5 = 0$ به دست می‌آوریم.
بنابراین W^0 مشکل از همه تابعکهای خطی f به صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4$$

است. بعد W^0 دو است و پایه $\{f_1, f_2\}$ برای W^0 از قراردادن $a = 1$ و $b = 0$ در ابتدا،
و سپس $a = 0$ و $b = 1$ به دست می‌آید:

$$f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4.$$

تابع نوعی f از W^0 عبارت است از: $f = af_1 + bf_2$.

تمرین

۱ در R^3 بردارهای $(1, -1, -1)$ ، $(0, 1, -2)$ ، $(1, 0, 0)$ و $(0, 0, 1)$ را انتخاب می‌کیم

(الف) هر گاه تابع خطی f روی R^3 با شرایط

$$f(\alpha_1) = 1, \quad f(\alpha_2) = -1, \quad f(\alpha_3) = 3$$

باشد و $\alpha = (a, b, c)$ در این صورت $f(\alpha) = af_1 + bf_2 + cf_3$ را باید.

(ب) تابع خطی f روی R^3 را که

$$f(\alpha_3) \neq 0 \quad \text{ولی} \quad f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$$

به طور صریح توصیف کنید.

(پ) فرض کنید تابع خطی f با خواص

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0, \quad f(\alpha_3) \neq 0$$

باشد و $\alpha = (2, 3, -1)$. نشان دهید $f(\alpha) \neq 0$.

۳. فرض کنید پایه $\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ برای C^3 به صورت

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (2, 2, 0)$$

تعریف شده است. پایه دوگان B را بیابید.

۴. اگر A و B دوماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند، نشان دهید $tr(AB) = tr(BA)$ سپس نشان دهید ماتریسهای متشابه، ردهای متساوی دارند.

۵. فرض کنید V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای p از R با درجه ۲ یا کمتر باشد:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

سه تبدیل خطی توسط

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx,$$

$$f_3(p) = \int_0^{-1} p(x) dx$$

روی V تعریف می‌کنیم. با ارائه پایه‌ای برای V $\{f_1, f_2, f_3\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه‌ای برای V^* است.

۶. اگر A و B دوماتریس مختلط $n \times n$ باشند، نشان دهید که تساوی $AB - BA = I$ غیر ممکن است.

۷. فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت و F یک هیأت باشد، و f_1, \dots, f_m تابعکهایی خطی روی F^n باشند. به ازای هر α در F^m تعریف می‌کنیم

$$T\alpha = (f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)).$$

نشان دهید T تبدیل خطی از F^n در F^m است. سپس نشان دهید هر تبدیل خطی از F^n در F^m ، به ازای f_1, \dots, f_m تابعکهایی، به شکل بالا است.

۷. فرض کنید $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 0, -1, 2)$ و W زیرفضای پدید آمده توسط α_1 و α_2 از R^4 باشد. از تابعکهایی خطی مانند f به صورت $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ کدام در پوچساز W قرار دارد؟

۸. فرض کنید W زیرفضایی از R^5 باشد که توسط بردارهای $\alpha_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\alpha_2 = e_2 + 3e_3 + 3e_4 + e_5$, $\alpha_3 = e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 4e_4 + e_5$ پدید می‌آید. پایه‌ای برای W° بیاورد.

۹. فرض کنید V فضای برداری همه‌ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد، و

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید W زیرفضایی مشکل از همه A های با شرط $AB = 0$ از V ، و تابع خطی f روی V متعلق به پوچساز W باشد. اگر $f(I) = 3$, $f(C) = 0$, $f(A) = 0$ باشد، آنگاه f روی W چیست؟

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشند، $f(B)$ را بیاورد.

۱۰. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. n تابع خطی روی F^n توسط

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n (k-j)x_j, \quad 1 \leq k \leq n$$

تعریف می‌کنیم. بعد زیرفضای پوچ شده توسط f_1, \dots, f_n چیست؟

۱۱. فرض کنید W_1 و W_2 دوزیرفضا از یک فضای برداری با بعد متناهی V باشند.
 (الف) ثابت کنید $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$.
 (ب) ثابت کنید $(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ$.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. اگر f تابعکی خطی روی W باشد، ثابت کنید یک تابع خطی g روی V

یافت می شود به طوری که به ازای هر α در زیرفضای W ، $g(\alpha) = f(\alpha)$.

۱۳. فرض کنید F زیرهیاتی از هیأت اعداد مختلط و V فضای برداری دلخواهی بر روی F باشد. f و g را تابعهای خطی روی V می گیریم به قسمی که تابع h تعريف شده توسط $h(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$ نیز تابعکی خطی روی V شود. ثابت کنید $f \circ g = 0$.

۱۴. فرض کنید F هیأتی با سرشت نمای صفر و V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی F باشد. اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ تعدادی متناهی بردار از V باشند، و همه مخالف بردار صفر، ثابت کنید یک تابعک f روی V یافت می شود به طوری که

$$f(\alpha_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

۱۵. بنا بر تعریف ۳، ماتریسهای مشابه دارای ردهای متساوی‌اند. از این‌رو، می‌توانیم رد یک عملگر خطی روی یک فضای با بعد متناهی را رد هرماتریسی که آن عملگر را در یک پایه مرتب نمایش دهد تعريف کنیم. این مفهوم خوش تعريف است، چرا که همه این گونه ماتریسهای نمایش برای یک عملگر با هم مشابه‌اند.

حال فرض کنید V فضای همه ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F و P ماتریس 2×2 ثابتی باشد. فرض کنید T عملگر خطی تعريف شده توسط $T(A) = PA$ روی V باشد. ثابت کنید $tr(A) = 2tr(P)$.

۱۶. نشان دهید تابعک رد روی ماتریسهای $n \times n$ ، به مفهوم زیر، یکتاست. اگر W فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F ، و f تابعکی خطی روی W باشد که به ازای هر A و B از W ، $f(AB) = f(BA)$ ، آنگاه f مضربی اسکالری از تابع رد است. اگر علاوه بر این $f(I) = n$ ، آنگاه f خود تابع رد می‌باشد.

۱۷. فرض کنید W فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F و Z زیرفضای پدیدآمده توسط ماتریسهای C به صورت $C = AB - BA$ باشد. ثابت کنید Z دقیقاً زیرفضای مشکل از ماتریسهایی است که دارای رد صفر هستند. (داهنایی: بعد فضای ماتریسهای با رد صفر چیست؟ از «واحدهای» ماتریسی، یعنی از ماتریسهایی که تنها یک درایه غیر صفر دارند برای ساختن تعداد کافی ماتریس مستقل خطی به صورت $AB - BA$ استفاده کنید).

۶.۳. دوگان مضاعف

یک پرسش درباره پایه‌های دوگان که در بخش قبل بدان پاسخ ندادیم، این برد که آیا هر پایه برای V^* دوگان پایه‌ای برای V هست یا نه. روشی برای پاسخگویی به این

پرسش این است که V^{**} ، فضای دوگان V را بررسی کنیم.
اگر α برداری از V باشد، آنگاه α تبدیل خطی L_α را که با

$$L_\alpha(f) = f(\alpha), \quad \text{به ازای هر } f \text{ در } V^*$$

تعریف می‌شود، روی V^* القا می‌کند. اثبات این که L_α خطی است، چیزی نیست جز فرمولبندی مجدد تعریف اعمال خطی در V^* :

$$\begin{aligned} L_\alpha(cf + g) &= (cf + g)(\alpha) \\ &= (cf)(\alpha) + g(\alpha) \\ &= cf(\alpha) + g(\alpha) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\alpha(g). \end{aligned}$$

اگر V با بعد متناهی باشد و $\alpha \neq 0$ ، آنگاه $L_\alpha \neq 0$; به بیان دیگر، یک تابع خطی f وجود دارد که $f(\alpha) \neq 0$. اثبات این مطلب بسیار ساده است و در بخش ۵.۳ آمده است: پایه‌مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با شرط $\alpha_i = \alpha$ را برای V انتخاب کنید و f را تابعی خطی بگیرید که بهر بردار V ، اولین مختصّش در پایه‌مرتب \mathcal{B} را نسبت دهد.

قضیه ۱۷. فرض کنیم V یک فضای بودادی با بعد متناهی بردوی هیأت F باشد.
با ازای هر بردار α از V تعریف می‌کنیم

$$L_\alpha(f) = f(\alpha), \quad \text{به ازای هر } f \text{ در } V^*.$$

داین حدودت، نگاشت $\alpha \rightarrow L_\alpha$ یک یک‌ریختی از V بر روی V^{**} است.

اثبات. نشان دادیم که به ازای هر α تابع L_α خطی است. فرض کنیم α و β در V و c در F باشد، و همچنین $\gamma = c\alpha + \beta$. در این صورت، به ازای هر f در V^* ,

$$\begin{aligned} L_\gamma(f) &= f(\gamma) \\ &= f(c\alpha + \beta) \\ &= cf(\alpha) + f(\beta) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) \end{aligned}$$

وازاًین رو

$$L_\gamma = cL_\alpha + L_\beta.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $\alpha \rightarrow L_\alpha$ ، تبدیلی خطی از V در V^{**} است. این تبدیل نامفرد است؛ زیرا، بنا بر ملاحظات فوق، $L_\alpha = L_\beta$ اگر و تنها اگر $\alpha = \beta$. پس $\alpha \rightarrow L_\alpha$ تبدیل خطی نامفردی از V در V^{**} است و چون

$$\text{بعد }(V^{**}) = \text{بعد }(V^*) = \text{بعد }(V)$$

قضیه ۹ بیان می‌کند که این تبدیل معکوس‌پذیر، و بنابراین یک یکریختی از V^{**} بر روی V است. \square

نتیجه. فرض کنیم V یک فضای پردازی با بعد متناهی پردازی هیأت F باشد. اگر L تابعکی خطی در V^* , فضای دوگان V , باشد، آنگاه یک پرداز یکتای α در V موجود است به طوری که به ازای هر f در V^*

$$L(f) = f(\alpha).$$

نتیجه. فرض کنیم V یک فضای پردازی با بعد متناهی پردازی هیأت F باشد. هر پایه از V^* دوگان پایه‌ای از V است.

امیات. گیریم $\{f_1, \dots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ پایه‌ای برای V^* باشد. بنابر قضیه ۱۵، پایه‌ای چون $\{L_1, \dots, L_n\}$ برای V با این خاصیت یافت می‌شود که

$$L_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

با استفاده از نتیجه قبل، به ازای هر α بردار α در V وجود دارد به طوری که به ازای هر f در V^*

$$L_i(f) = f(\alpha_i)$$

یعنی، $L_\alpha = L$. از اینجا بلا فاصله نتیجه می‌شود که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است و \mathcal{B}^* دوگان این پایه است. \square

نظر به قضیه ۷، معمولاً α را با L_α یکی می‌گیریم، و می‌گوییم V دوگان فضای V «است»، یا اینکه فضاهای V و V^* به طور طبیعی در دوگانی یکدیگر هستند، و یا اینکه هر فضای دوگان فضای دیگر است. آخرین نتیجه گواه مفید بودن این نتیجه است. گواه دیگر به شرح زیر است.

اگر E زیرمجموعه‌ای از V باشد، آنگاه پوچساز E (بنای قاعده) زیرمجموعه‌ای از V^{**} است. اگر نظر به قضیه ۷ تصمیم به یکی از V و V^{**} بگیریم، آنگاه E زیرفضایی از V خواهد بود که مجموعه همه f های V با شرط $f(\alpha) = 0$ به ازای همه f های در E است. در یکی از نتیجه‌های قضیه ۶ مشاهده کردیم که هر زیرفضای W توسط پوچسازش W° تعیین می‌شود. چگونه؟ پاسخ این است که W زیرفضای پوچ شده توسط همه f های در W° ، یعنی اشتراک فضاهای پوچ همه f های متعلق به W° است. با توجه به نماد مورد استفاده برای پوچسازها، پاسخ را می‌توان بسیار ساده بیان کرد: $.W = (W^\circ)^\circ$

قضیه ۱۰. اگر S زیرمجموعه‌ای از فضای پردازی با بعد متناهی V باشد، آنگاه $(S^\circ)^\circ$ ذیرفضای پدیدآمده توسط S است.

اپهات. گیریم W زیرفضای پدیدآمده توسط S باشد. واضح است که $S^\circ = W^\circ$. بنا بر این، کافی است اثبات کنیم که $W = W^{\circ\circ}$. قبل اثباتی از این مطلب عرضه کردیم، و اینک اثباتی دیگر، بنا بر قضیه ۱۶

$$\begin{aligned} \text{بعد } (V) &= \text{بعد } (W^\circ) + \text{بعد } (W^\circ) \\ \text{بعد } (W^\circ) &= \text{بعد } (W^{\circ\circ}) + \text{بعد } (W^{\circ\circ}) \\ \text{و چون بعد } (V^*) &= \text{بعد } (V) \text{ داریم} \\ (W) &= \text{بعد } (W^{\circ\circ}) + \text{بعد } (W^{\circ\circ}) \end{aligned}$$

چون W زیرفضای $W^{\circ\circ}$ است، می‌بینیم که $W = W^{\circ\circ}$.

نتایج این بخش برای فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار هستند؛ لکن، اثباتها مستلزم استفاده از بهاظصطلاح اصل انتخاب می‌باشند. چون نمی‌خواهیم خود را در گیری بحثی طولانی درباره این اصل بکنیم، پوچسازها را در فضاهای برداری عمومی مورد بحث قرار نمی‌دهیم. اما، دو نتیجه درباره تابعکهای خطی روی فضاهای برداری دلخواه چنان اساسی هستند که نمی‌توان از آنها بسادگی گذشت.

گیریم V فضایی برداری باشد. می‌خواهیم ابرفضاهای V را تعریف کنیم. بجز در حالتی که بعد V متناهی باشد، نمی‌توانیم ابرفضاهای را از طریق بعد آنها تعریف کنیم. ولی می‌توانیم این ایده را که زیرفضای N برای پرکردن V دقیقاً یک بعد کم دارد، به طریق ذیر بیان کنیم:

۱. N زیرفضایی سره از V است؛
۲. اگر زیرفضای W از V شامل N باشد، آنگاه یا $W = N$ و یا $W \subset V$. شرایط (۱) و (۲) توانماً بیان می‌کنند که N زیرفضایی سره است، و زیرفضای سرهای بزرگتر از آن وجود ندارد؛ به طور خلاصه، N یک زیرفضای سره ماکسیمال است.

تعریف. اگر V فضایی برداری باشد، یک ابرفضای V یک زیرفضای سره ماکسیمال است.

قضیه ۱۹. اگر f تابع خطی غیر صفری روی فضای برداری V باشد، آنگاه فضای پوچ f ، یک ابرفضای V است. عکس، هر ابرفضای V ، فضای پوچ تابع خطی غیر صفری (نه لزومناً یکتا) روی است.

اثبات. فرض کنیم f تابع خطی غیر صفری روی V ، و N_f فضای پوچ آن باشد. α را برداری از V می‌گیریم که در N_f نباشد؛ یعنی، α را برداری می‌گیریم که $f(\alpha) \neq 0$. نشان می‌دهیم که هر بردار v ، در فضای پدیدآمده توسط N_f و α قرار دارد. این زیرفضا شامل همه بردارهای

$$F = c\alpha + \gamma \quad \text{در } N_f, \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

است. هرگاه β در V باشد، تعریف می‌کنیم

$$c = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}.$$

این تعریف بامعنى است چرا که $f(\alpha) \neq 0$. در این صورت، بردار $\gamma = \beta - c\alpha$ در N_f است، زیرا

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= f(\beta - c\alpha) \\ &= f(\beta) - cf(\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

لذا، β در زیر فضای پدیدآمده توسط α و N_f قرار دارد.

حال N را یک ابرفضای V فرض می‌کنیم و برداری چون α را در نظر می‌گیریم که در N نباشد. چون N یک زیرفضای سرة ماکسیمال است، زیرفضای پدیدآمده توسط N و α کل فضای V است. بنا بر این، هر بردار β از V به صورت

$$F \quad \beta = \gamma + c\alpha, \quad \gamma \text{ در } N \text{ و } c \text{ در } F$$

است. بردار γ و اسکالر c توسط β به طور یکتا تعیین می‌شوند. زیرا، اگر همچنین داشته باشیم

$$F \quad \beta' = \gamma' + c'\alpha, \quad \gamma' \text{ در } N \text{ و } c' \text{ در } F$$

آنگاه

$$(c' - c)\alpha = \gamma - \gamma'.$$

اگر $c' - c \neq 0$ ، آنگاه α باید در N باشد؛ از این رو، $c' = c$ و $\gamma' = \gamma$. طریقی دیگر برای بیان نتیجه حاصل چنین است. اگر β در V باشد، اسکالر یکتا بی چون c وجود دارد که در N $\beta - c\alpha$ است. این اسکالر را $f(\beta)$ می‌نامیم. حال، بررسی این که g تابعکی خطی روی V و N فضای پوج g است، آسان می‌باشد. □

لم. اگر f و g تابعکهای خطی دوی فضای برداری V باشند، آنگاه g مضرب اسکالاری f است اگر و تنها اگر فضای پوج g شامل فضای پوج f باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر $f(\alpha) = g(\alpha)$ باشد. □

اثبات. اگر $f(\alpha) = g(\alpha)$ باشد، آنگاه به همین نحو $g(\alpha) = f(\alpha)$ و مسلمانه اسکالاری از f است. فرض کنیم $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ ؛ آنگاه فضای پوج N_f یک ابرفضای V است. بردار α از V را با شرط $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ انتخاب و فرض می‌کنیم

$$c = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

تابعک خطی $h = g - cf$ روی N_f صفر است، زیرا f و g هر دو روی N_f صفر هستند و $h(\alpha) = g(\alpha) - cf(\alpha) = 0$. پس، h روی زیرفضای پدید آمده توسط N_f و α ، صفر است و این زیر فضا خود V است. نتیجه اینکه $h = 0$ ، یعنی $g = cf$. \square

قضیه ۳۰. فرض کنیم g, f_1, \dots, f_r تابعکهایی خطی روی فضای برداری V ، پتریب، با فضاهای پوچ N_1, \dots, N_r باشند. دلاین صورت، g قرکیبی خطی از f_1, \dots, f_r است اگر و تنها اگر N شامل اشتراک $N_1 \cap \dots \cap N_r$ باشد. اثبات. اگر N شامل اشتراک $N_1 \cap \dots \cap N_r$ باشد، آنگاه $g = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$ باشد. اگر N شامل اشتراک $N_1 \cap \dots \cap N_r$ باشیم، آنگاه $g = c(\alpha)$ باشد. بنابراین N شامل $N_1 \cap \dots \cap N_r$ است.

حال عکس (نیمة «اگر» قضیه) را به استقرار نسبت به اثبات می کنیم. لم قبل اثبات حالت $r = 1$ را به دست می دهد. فرض کنیم قضیه را برای حالت $r = 1$ پذانیم و تابعکهای خطی f ، N را با فضاهای پوچ N_1, \dots, N_k با این شرط که $N_1 \cap \dots \cap N_k$ مشمول در N باشد در نظر می گیریم. اگر $g = c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ تحدیدهای g, f_1, \dots, f_k به زیرفضای N_k باشند، آنگاه g, f_1, \dots, f_{k-1} تابعکهای خطی روی فضای برداری N_k هستند. بعلاوه، اگر N_k برداری در N_k باشد و به ازای $1, \dots, k-1$ داشته باشیم، آنگاه α در $N_1 \cap \dots \cap N_k$ است و لذا $g = c(\alpha)$. بنابراین فرض استقرار (حالت $r = 1$) اسکالرها یی چون c_i وجود دارد که

$$g' = c_1 f'_1 + \dots + c_{k-1} f'_{k-1}.$$

اکنون فرض می کنیم

$$h = g - \sum_{i=1}^{k-1} c_i f_i. \quad (16-3)$$

در این صورت، h تابعکی خطی روی V است و (۱۶-۳) می گوید که به ازای هر α از N_k ، $h(\alpha) = 0$. بنابراین h مضری اسکالری از f است. اگر $h = c_k f_k$ باشد و به صورت

$$g = \sum_{i=1}^k c_i f_i. \quad \square$$

تمرین

۱. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. W را مجموعه همه بردارهای (x_1, \dots, x_n) از F^n بگیرید که $x_1 + \dots + x_n = 0$. (الف) ثابت کنید W مشکل است از همه تابعکهای خطی f به صورت

$$f(x_1, \dots, x_n) = c \sum_{j=1}^n x_j.$$

(ب) نشان دهید W ، فضای دوگان W را می‌توان «به طور طبیعی» با تابعکهای خطی

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

روی F با شرط $c_1 + \dots + c_n = 0$ یکی گرفت.

۳. قضیه ۲۵ را برای اثبات مطلب ذیل به کار ببرید. اگر W زیرفضایی از یک فضای برداری با بعد متناهی V و $\{g_1, \dots, g_r\}$ پایه‌ای برای W باشد، آنگاه

$$W = \bigcap_{i=1}^r N_{g_i}.$$

۴. فرض کنید S یک مجموعه، F یک هیأت، و $V(S; F)$ فضای همه‌تابع از S در F با خواص

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) = c f(x)$$

باشد. W را زیرفضای n بعدی دلخواهی از $V(S; F)$ بگیرید و نشان دهید نقاطی چون x_1, \dots, x_n در S و توابعی چون f_1, \dots, f_n در W یافت می‌شوند به طوری که $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

۷.۳. ترانهاده تبدیل خطی

فرض کنیم دو فضای برداری V و W بر روی هیأت F و تبدیل خطی T از V در W داده شده باشند. در این صورت، T تبدیلی خطی از V^* در W^* به طریق زیر، القا می‌کند.

فرض کنید f تابعکی خطی روی W باشد و به ازای هر α از V

$$f(\alpha) = g(T\alpha). \quad (17-3)$$

در این صورت، (۱۷-۳) یک تابع f از V در F تعریف می‌کند. این تابع از ترکیب تابع T از V در W با تابع g از W در F حاصل می‌شود. چون T و g هر دو خطی هستند، قضیه ۶ می‌گوید که f نیز خطی است؛ یعنی، f تابعکی خطی روی V است. پس، T یک قاعده از T^* در دسترسن ما می‌گذارد که هر تابعک خطی g روی W را به یک تابعک خطی $f = T^*g$ روی V ، که طبق (۱۷-۳) تعریف می‌شود، مربوط می‌سازد. بعلاوه، توجه کنید که T^* در واقع تبدیلی خطی از W^* در V^* است؛ زیرا، اگر g_1 و g_2 در W^* باشند و c یک اسکالر

$$\begin{aligned} [T^*(cg_1 + g_2)](\alpha) &= (cg_1 + g_2)(T\alpha) \\ &= cg_1(T\alpha) + g_2(T\alpha) \\ &= c(T^*g_1)(\alpha) + (T^*g_2)(\alpha) \end{aligned}$$

واز اینجا $T'g_1 + T'g_2 = cg_1 + g_2$. این مطلب را خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۲۱. فرض کنیم V و W فضاهایی بردادی بر روی هیأت F باشند. به ازای هر تبدیل خطی T اذ V دد W یک تبدیل خطی یکتایی T' اذ W^* دد V وجود داردکه به ازای هر g اذ W^* ده α اذ V .

$$(T'g)(\alpha) = g(T\alpha).$$

T' را ترانهاده T می‌نامیم. تبدیل T' اغلب الحاقی T هم نامیده می‌شود، لکن، ما این اصطلاح را به کار نخواهیم برد.

قضیه ۲۲. فرض کنیم V و W فضاهایی بردادی بر روی هیأت F ، و T تبدیلی خطی اذ V دد W باشد. فضای پوچ T' پوچساز بود T است. اگر V و W با بعد متناهی باشند، آنگاه

$$(1) \text{ دتبه } (T) = \text{دتبه } (T')$$

$$(2) \text{ بود } T' \text{ پوچساز فضای پوچ } T \text{ است.}$$

اثبات. اگر g در W^* باشد، آنگاه بنا بر تعریف به ازای هر α از V ،

$$(T'g)(\alpha) = g(T\alpha).$$

این که g در فضای پوچ T' باشد بدین معنی است که به ازای هر α از V ، $g(T\alpha) = 0$ پس، فضای پوچ T' دقیقاً همان پوچساز بود T است.

فرض کنیم V و W با بعد متناهی باشند، مثلاً $\dim W = m$ و $\dim V = n$. برای اثبات (۱): گیریم r رتبه T ، یعنی بعد برد T باشد. طبق قضیه ۱۶، بعد پوچساز برد T برابر $(m-r)$ است. بنابر اولين حکم این قضیه، پوچی T' باید $(m-r)$ باشد. اما در آن صورت، چون T' تبدیلی خطی روی یک فضای m بعدی است، رتبه T' برای N فضای پوچ T باشد. هر تابعک واقع در برد T' در پوچساز N قرار دارد؛ زیرا، فرض کنیم به ازای یک g از W^* داشته باشیم $f = T'g$ ؛ در این صورت، اگر α در N باشد

$$f(\alpha) = (T'g)(\alpha) = g(T\alpha) = g(0) = 0.$$

حال برد T' زیرفضایی از فضای N^* است، و

$$\text{دتبه } (T') = \text{رتبه } (T) = \text{بعد } (N^*)$$

و بنابراین برد T' باید دقیقاً N^* باشد. \square

قضیه ۲۳. فرض کنیم V و W دو فضای بردادی با بعد متناهی بر روی هیأت F باشند. B داپایه مرتبی برای V با پایه دوگان B^* ، و B' داپایه مرتبی برای W با پایه

دوگان \mathcal{B}' می‌گیریم. اگر T تبدیلی خطی از V در W ماتریس T نسبت به \mathcal{B} و \mathcal{B}' د و B ماتریس T^* نسبت به \mathcal{B}'^* د \mathcal{B}^* باشد، آنگاه $.B_{ij} = A_{ji}$ اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\},$$

$$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}, \quad \mathcal{B}'^* = \{g_1, \dots, g_m\}.$$

با بر تعریف

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i, \quad j = 1, \dots, n$$

$$T^*g_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}f_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} (T^*g_j)(\alpha_i) &= g_j(T\alpha_i) \\ &= g_j\left(\sum_{k=1}^m A_{ki}\beta_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{ki}g_j(\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{ki}\delta_{jk} \\ &= A_{ji}. \end{aligned}$$

برای هر تابع خطی f در V

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)f_i.$$

اگر این فرمول را بر تابع $f = T^*g_j$ بکار بندیم و از این واقعیت که استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$T^*g_j = \sum_{i=1}^n A_{ji}f_i$$

که از آن پیدرنگ نتیجه می‌شود $.B_{ij} = A_{ji}$.

تعریف. اگر A ماتریسی $m \times n$ بروی هیأت F باشد، ترانهاده A عبارت است از ماتریس A^t ای $n \times m$ که با $A^t_{ij} = A_{ji}$ تعریف می‌شود.

بدین سان قضیه ۲۳ بیان می‌کند که اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد که

ماتریس نسبت به یک جفت پایه A است، آنگاه تبدیل ترانهاده T در جفت دوگان آن پایه‌ها توسط ماتریس ترانهاده A نمایش داده می‌شود.

قضیه ۲۴. فرض کنیم A ماتریس $m \times n$ دلخواهی بر روی هیأت F باشد. آنگاه رتبه سط्रی A با رتبه ستونی A برابر است.

امیات. پایه مرتب استاندۀ F را B و پایه مرتب استاندۀ F^* را B' می‌نامیم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از F^* در F^m باشد که ماتریس آن نسبت به جفت B ، B' برابر است؟ یعنی،

$$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$

که در آن

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j.$$

رتبه ستونی A برابر رتبه تبدیل T است؛ زیرا، برد T مشکل از همه m تابی‌هایی است که ترکیبی خطی از بردارهای ستونی A هستند. نگاشت ترانهاده T نسبت به پایه‌های دوگان B و B' توسط ماتریس A نمایش داده می‌شود. چون ستونهای A همان سطرهای A هستند، بنا بر همین استدلال می‌بینیم که رتبه سطري A (رتبه ستونی A) برابر رتبه T است. بنا بر قضیه ۲۲، رتبه‌های T و A برابرند، و لذا رتبه سطري A برابر رتبه ستونی A است. \square

اکنون می‌بینیم که اگر A ماتریس $m \times n$ بر روی F و T تبدیل خطی تعریف شده در فوق از F^m در F^m باشند، آنگاه

$$\text{رتبه ستونی}(A) = \text{رتبه سطري}(A) = \text{رتبه}(T).$$

این عدد را به طور ساده رتبه A می‌نامیم.

مثال ۲۵. در این مثال به مطلبی کلی می‌پردازیم – و بیشتر بحث است تا مثال. فرض کنیم فضای برداری n بعدی V بر روی هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده باشند، و نیز $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \beta$ پایه مرتبی برای V باشد. بنا بر تعریف، ماتریس T در پایه مرتب β عبارت است از ماتریس A ی $n \times n$ به طوری که

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i.$$

به بیان دیگر، $\forall i$ همان α_i مخصوص بردار $T\alpha_j$ در پایه مرتب β است. اگر $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایه دوگان β باشد، این مطلب به صورت ساده

$$A_{ij} = f_i(T\alpha_j)$$

یان می شود. اکنون بینیم هنگام تغییر پایه چه رخ می دهد. فرض کنیم

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

پایه مرتب دیگری برای V با پایه دوگان $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ باشد. اگر B ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}' باشد، آنگاه

$$B_{ij} = f'_i(T\alpha'_j).$$

گیریم U عملگر خطی معکوس پذیری باشد که $f'_i = U\alpha_j$. در این صورت، ترانهاده U از $U'f'_i = f_i$ بدست می آید. بسادگی می توان نشان داد که چون U معکوس پذیر است، نیز معکوس پذیر است و $(U^{-1})^{-1} = U$. از این رو، $f'_i = (U^{-1})^i = i$. بنابراین،

$$\begin{aligned} B_{ij} &= [(U^{-1})^i f_i](T\alpha'_j) \\ &= f_i(U^{-1} T\alpha'_j) \\ &= f_i(U^{-1} T U \alpha_j). \end{aligned}$$

اما، این رابطه چه می گوید؟ $f_i(U^{-1} T U \alpha_j)$ چیزی جز درایه j ، i ماتریس $U^{-1} T U$ در پایه مرتب \mathcal{B} نیست. محاسبات بالا نشان می دهد که این اسکالر درایه j ، i ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} هم هست. به بیان دیگر

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [U^{-1} T U]_{\mathcal{B}} \\ &= [U^{-1}]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}} \\ &= [U]_{\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

و این دقیقاً همان فرمول تغییر پایه است که قبلاً استخراج کردیم.

تمرین

۱. فرض کنید هیأتی چون F و تابعک خطی f روی F^2 تعریف شده توسط $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ داده شده اند. به ازای هر یک از عملگرهای خطی زیر، فرض کنید $f = T^t g$ و $g = T(x_1, x_2)$ را بیاید.

$$(الف) \quad T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$(ب) \quad T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

$$(پ) \quad T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

۲. فرض کنید V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای بر روی هیأت اعداد حقیقی

باشد. a و b را دو عدد حقیقی ثابت بگیرید، و فرض کنید f تابعکی خطی روی V باشد که توسط

$$f(p) = \int_a^b p(x) dx$$

تعریف می شود. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، $D^t f$ چیست؟

۳. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F و B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد. اگر عملگر خطی T روی V با $T(A) = AB - BA$ تعریف بشود و f تابع رد باشد، $T^t f$ چیست؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگر خطی روی V باشد. c را یک اسکالر بگیرید و فرض کنید بردار غیر صفری چون α در V موجود است که $T\alpha = c\alpha$. ثابت کنید تابع خطی غیر صفری چون f روی V وجود دارد که $T^t f = cf$.

۵. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید $\circ = A^t$ اگر و تنها $ir(A^t A) = \circ$.

۶. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد، و V فضای همه توابع چند جمله‌ای با درجه حد اکثر n ، یعنی توابع به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

بر روی هیأت اعداد حقیقی. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، پایه‌ای برای فضای پوچ عملگر ترانهاده D^t بیاورد.

۷. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشد. نشان دهید $T \rightarrow T^t$ یک یکریختی از $L(V, V)$ بر روی (V^*, V^*) است.

۸. فرض کنید V فضایی برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد.

(الف) اگر B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد، نشان دهید f_B تابع f_B روی V را طبق $f_B(A) = ir(B^t A)$ تعریف کنید.

(ب) نشان دهید هر تابع خطی روی V به صورت بالا است؛ یعنی، به ازای ماتریسی چون B برای f_B است.

(پ) نشان دهید $f_B \rightarrow B$ یک یکریختی از V بر روی V^* است.

چند جمله‌ایها

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱.۴ جبرها

هدف ما در این فصل این است که چند خاصیت بنیانی جبر چند جمله‌ایها بر روی یک هیأت F را اثبات کنیم. جهت تسهیل کار ابتدا به معنی مفهوم جبر خطی بر روی هیأت F می‌پردازیم.

تعريف. فرض می‌کنیم F یک هیأت باشد. یک جبر خطی بر روی هیأت F فضایی برداری مانند \mathcal{Q} بودی F همراه با عملی اضافی به نام ضرب برداری است که هرگفت از بردارهای α و β از \mathcal{Q} دا به برداد $\alpha\beta$ از \mathcal{Q} ، به نام حاصل ضرب α و β ، چنان وابسته می‌سازد که

(الف) ضرب شرکت‌پذیر است،

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

(ب) ضرب نسبت به جمع پخش‌پذیر است،

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{و} \quad (\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(پ) به ازای هر اسکالر c از \mathcal{Q}

$$c(\alpha\beta)=(c\alpha)\beta=\alpha(c\beta).$$

اگر عنصری چون α دارد موجود باشد، به طوری که به ازای هر α داریم $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ یک جبرخطی با عنصرهای بروی F و α عنصرهای می‌نامیم. جبر α جابجایی نامیده می‌شود هرگاه به ازای همه α و β های داریم $\alpha\beta = \beta\alpha$

مثال ۱. مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ بروی یک هیأت همراه با عمال معقولی یک جبرخطی با عنصرهای است؛ بخصوص، خود هیأت هم یک جبر با عنصرهای مانند است. این جبر در صورتی که $n \geq 2$ جابجایی نیست. خود هیأت (البته) جابجایی است.

مثال ۲. فضای همه عملگرهای خطی روی یک فضای برداری همراه با ترکیب عملگرهای، به عنوان ضرب، یک جبرخطی با عنصرهای مانند است. این جبر جابجایی است اگر و تنها اگر فضای یک بعدی باشد.

خواسته ممکن است درباره ضرب نقطه‌ای و ضرب خارجی بردارهای در \mathbb{R}^3 تجربیاتی داشته باشد. در این صورت وی باید متوجه باشد که هیچ یک از این ضربها، از نوع توصیف شده در تعریف جبرخطی نیست. ضرب نقطه‌ای یک «ضرب اسکالری» است؛ بدین معنی که به هر جفت بردار یک اسکالر وابسته می‌سازد و از این‌رو، یقیناً از نوع ضربی نیست که در حال حاضر مورد بحث ماست. ضرب خارجی هر چند به هر جفت بردار \mathbb{R}^3 یک بردار وابسته می‌کند، اما شرکت‌پذیر نیست.

بقیه این بخش به ساختن جبری خطی اختصاص دارد که با جبرهای مطرح شده در هر یک از مثالهای پیشین به طور بارزی متفاوت است. فرض کنیم F یک هیأت و S مجرمه اعداد صحیح نامنفی باشد. بنابر مثال ۳ از فصل ۲، مجموعه همه توابع از S در F فضای برداری F است. ما این فضای برداری را با F^∞ نشان می‌دهیم. لذا، بردارهای f دنباله‌ای نامتناهی (f_0, f_1, f_2, \dots) از اسکالرهای F هستند. اگر $af + bg$ دنباله‌ای نامتناهی است که با

$$(1-4) \quad af + bg = (af_0 + bg_0, af_1 + bg_1, af_2 + bg_2, \dots)$$

تعریف می‌شود. با وابسته کردن هر جفت f و g از بردارهای F^∞ به بردار fg که با

$$(2-4) \quad (fg)_n = \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

معین می‌شود، یک ضرب در F^∞ تعریف می‌کنیم. پس

$$fg = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \dots)$$

درصورتی که فضای صفر بعدی هم باشد این جیب جابجایی است. برای اجتناب از این گونه پیچیدگیها فرض می‌کنیم فضای حداقل دو عنصر متمایز داشته باشد. —م.

وچون بهازای $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(gf)_n = \sum_{i=0}^n g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i} = (fg)_n,$$

نتیجه می‌گیریم که این ضرب جابجاگی است، $gf = fg$. اگر h نیز متعلق به F^∞ باشد، آنگاه بهازای $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} [(fg)h]_n &= \sum_{i=0}^n (fg)_i h_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} \right) h_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n f_j g_{i-j} h_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} \\ &= \sum_{j=0}^n f_j (gh)_{n-j} = [f(gh)]_n \end{aligned}$$

و بنابراین

$$(fg)h = f(gh). \quad (3-4)$$

از خواسته می‌خواهیم نشان دهد که ضرب تعریف شده توسط (۲-۴) در شرایط (ب) و (پ) تعریف جبر خطی هم صدق می‌کند و بردار $(1, 0, 0, \dots)$ چون یک عنصر همانی برای F^∞ عمل می‌نماید. در این صورت، F^∞ همراه با اعمال تعریف شده در بالا یک جبرخطی جابجاگی با عنصر همانی بروی هیأت F است.

در مطالعی که متعاقباً خواهد آمد، بردار $(0, 0, \dots, 0, 1)$ نقش ممتازی بر عهده دارد و ما آن را همواره با x نشان می‌دهیم. در سراسر این فصل، x هرگز برای نشان دادن عنصری از هیأت F به کار نخواهد رفت. حاصل ضرب n بار x در خودش را با x^n نشان می‌دهیم و بنابر قرارداد می‌گیریم $1 = x^0$. در این صورت

$$x^k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \quad x^r = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

و در حالت کلی بهازای هر عدد صحیح $0 \leq k \leq n$ و بهازای همه اعداد صحیح نامتفقی $x^k = (x^k)_n$ دارخاتمه این بخش ملاحظه می‌کنیم که مجموعه مشکل از $1, x, x^2, \dots, x^n$ هم مستقل است و هم نامتناهی. پس، بعد جبر F^∞ متناهی نیست. جبر F^∞ گاهی جبر رشته‌های توانی صوری بروی F نامیده می‌شود. عنصر $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ غالباً به صورت

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (4-4)$$

نوشته می‌شود. این نماد در مواجهه با اعمال جبری بسیار مناسب است. هنگام استفاده از آن باید به خاطر داشت که این نماد صدر صد صوری است. در جبر، «مجموع نامتناهی» وجود ندارد و قرار بر این نیست که نماد رشته توانی (۴-۴) چیزی درباره همگرایی، در صورتی که خواننده بداند همگرایی چیست، القا کند. پس، با استفاده از دنباله‌ها و بدون آنکه در مخاطره ابهام مطالبی چون مجموع نامتناهی قرار بگیریم توانستیم جبری را که در آن عملهای جبری، رفتاری شبیه به جمع و ضرب رشته‌های توانی صوری دارد، به طور دقیق تعریف کنیم.

۳.۴. جبر چندجمله‌ایها

اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم یک چندجمله‌ای بر روی هیأت F را تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنیم $F[x]$ ذی فضای پدید آمده توسط پردازهای $1, x, x^2, \dots, x^n$ باشد. هر عنصر f یک چندجمله‌ای بر روی F نامیده می‌شود.

چون $F[x]$ متشکل از همه ترکیبات خطی (متناهی) x^n و توانهای آن است، هر بردار غیر صفر f از F^∞ ، یک چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح n وجود داشته باشد به طوری که $f \neq 0$ و به ازای همه اعداد صحیح $k > n$ ، $f_k = 0$; این عدد صحیح را که (در صورت وجود) مسلماً یکنائب درجه f می‌نامیم. درجه چندجمله‌ای f را با $\deg f$ نشان می‌دهیم، اما درجه‌ای به چندجمله‌ای اختصاص نمی‌دهیم.^۱ اگر f یک چندجمله‌ای غیر صفر از درجه n باشد، داریم

$$f = f_0 x^0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n, \quad f_n \neq 0 \quad (5-4)$$

اسکالرهای f_0, f_1, \dots, f_n گاهی ضرایب f نامیده می‌شوند، و گفته می‌شود f یک چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به F است. چندجمله‌ایهای به صورت $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ را چندجمله‌ایهای اسکالری می‌نامیم و غالباً به جای $c x^n$ می‌نویسیم. هر چندجمله‌ای غیر صفر f از درجه n با شرط $f_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای تکین نامیده می‌شود.

خواننده باید توجه داشته باشد که چندجمله‌ایها چیزهایی از قبیل ترابع چندجمله‌ای روی F که تاکنون در چند مورد درباره آنها صحبت کرده‌ایم، نیستند. اگر F شامل تعدادی نامتناهی عنصر باشد، مبنی $[x]$ و جبر ترابع چندجمله‌ای بر روی F یک یکریختی طبیعی برقرار است. این موضوع را در بخش بعد مورد بحث قرار می‌دهیم و اکنون نشان می‌دهیم که $F[x]$ یک جبر خطی است.

¹ $\deg f$ را با درجه (f) هم نشان می‌دهند. —م.

قضیه ۱. فرض کنیم f و g دو چندجمله‌ای غیرصفر بردی F باشند. دلاین صد و

(۱) fg یک چندجمله‌ای غیرصفر است؛

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \quad (2)$$

(۳) هرگاه f و g هر دو چندجمله‌ای‌هایی تکین باشند، آنگاه fg نیز یک چندجمله‌ای تکین است؛

(۴) fg یک چندجمله‌ای اسکالری است اگر و تنها اگر f و g هر دو چندجمله‌ای‌هایی اسکالری باشند؛

(۵) اگر $f+g \neq 0$ ، داریم

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

اثبات. فرض کنیم f از درجه m ، و g از درجه n باشد. اگر k عددی صحیح و غیرمنفی باشد،

$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}.$$

برای این که $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0$ ، لازم است $i \leq m$ و $i \leq n$ و $m+n+k-i \leq n$. لذا $m+n+k \leq i \leq m+k$ است. اگر $m+k = i$ باشد، آنگاه $m+n+k-i = n$ است. اگر $m+k < i$ باشد، آنگاه $m+n+k-i < n$ است. این را می‌توان $m+k = i$ نوشت.

$$(fg)_{m+n} = f_m g_n \quad (6-4)$$

و

$$(fg)_{m+n+k} = 0, \quad k > n. \quad (7-4)$$

احکام (۱)، (۲)، و (۳) پیدرنگ از (۶-۴) و (۷-۴) نتیجه می‌شوند، در حالی که (۴) و (۵) را به خواندن و اگذار می‌کنیم. \square

نتیجه ۱. مجموعه همه چندجمله‌ای‌های بردی یک هیأت مفروض F ، مجذوب اعمال (۱-۴) و (۲-۴)، یک جبرخطی جابجایی با عضوهایی بردی F است. اثبات. چون اعمال (۱-۴) و (۲-۴) همان اعمال تعریف شده در جبر F^∞ هستند و چون $Z[x]$ زیرفضایی از F^∞ است، کافی است ثابت کنیم که حاصل ضرب دو چندجمله‌ای خرد یک چندجمله‌ای است. این مطلب در صورت 0 بودن یکی از سازه‌ها بدیهی است و در غیر این صورت از (۱) نتیجه می‌شود. \square

نتیجه ۲. فرض کنیم f ، g و h چندجمله‌ای‌هایی بردی هیأت F باشند که $f \neq 0$ و $fg = fh$. دلاین صد و $g = h$.

اثبات. چون $fg = fh$ ، داریم $fg - fh = 0$ ، و نظر به اینکه $f \neq 0$ ، پیدرنگ از (۱) نتیجه می‌شود که $g - h = 0$. \square

چند واقعیت دیگرهم نسبتاً آسانی از اثبات قضیه ۱ نتیجه می‌شوند و ما برخی را در اینجا ذکرمی‌کنیم.
فرض کنیم

$$\cdot g = \sum_{j=0}^n g_j x^j \quad f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$$

در این صورت از (۷-۴) نتیجه می‌شود که

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r+s=t} f_r g_s \right) x^s. \quad (8-4)$$

از خواندن می‌خواهیم نشان دهد که در حالت خاص $f = cx^n$ ، $g = dx^m$ ، با c و d در F ، (۸-۴) به صورت

$$(cx^n)(dx^m) = cd x^{n+m} \quad (9-4)$$

در می‌آید. حال، از (۹-۴) و قوانین پخش پذیری $[F[x]]$ ، نتیجه می‌شود که حاصل ضرب

$$\sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j} \quad (10-4)$$

نیز می‌تواند نوشته شود. در اینجا، مجموع روی همه جفت اعداد صحیح j ، i با شرایط $n \leq j \leq m$ و $0 \leq i \leq n$ در نظر گرفته می‌شود.

تعريف. فرض کنیم α یک جبرخطی با عنصرهای F باشد. عنصر α همانی α را با ۱ نشان می‌دهیم و قواداد α کنیم که به ازای هر α از 1° در $\alpha = \alpha^\circ$. در این صورت بهر چندجمله‌ای $f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ بردوی F و هر α از α° ، یک عنصر $f(\alpha)$ از α پنا بر قاعدة

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^n f_i \alpha^i$$

وابسته می‌سازیم.

مثال ۳. گیریم C هیأت اعداد مختلف و $f = x^2 + 2$ باشد.
(الف) اگر $\alpha = C$ و z متعلق به C باشد، آنگاه $z^2 + 2 = f(z)$ ؛ بخصوص $f(2) = 6$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = 1.$$

(ب) اگر α جبرهمه ماتریسهای 2×2 بر روی C باشد و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$f(B) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(پ) اگر α جبر همه عولگرهای خطی روی C^3 و T عنصری از \mathbb{Q} داده شده توسط

$$T(c_1, c_2, c_3) = (i\sqrt{2}c_1, c_2, i\sqrt{2}c_3)$$

باشد، آنگاه f عملگری خطی روی C^3 است که توسط

$$f(T)(c_1, c_2, c_3) = (0, 3c_2, 0)$$

تعریف می‌شود.

(ت) اگر α جبر همه چندجمله‌ایهای بر روی C و $g = x^4 + 3i$ باشد، آنگاه

آن چندجمله‌ای در \mathbb{Q} است که به وسیله $f(g)$

$$f(g) = -7 + 6ix^4 + x^8$$

تعیین می‌شود.

درباره مثال اخیر خواننده نکته بین ممکن است متوجه شود که اگر f چندجمله‌ای مفروضی بر روی یک هیأت دلخواه و g چندجمله‌ای ($0, 1, 0, \dots$) باشد، آنگاه $f = f(x)$ ، اما بهوی توصیه می‌کنیم که این واقعیت را نادیده انگارد.

قضیه ۳. فرض کنیم F یک هیأت و α جبری خطی با عنصرهایی بر روی F باشد.

اگر f و g چندجمله‌ایهایی بر روی F ، α عنصری از \mathbb{Q} و c متعلق به F باشد، آنگاه

$$(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha); \quad (1)$$

$$(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha). \quad (2)$$

اثبات. نظر به اینکه اثبات (۱) کاملاً ساده است، تنها به اثبات (۲) می‌پردازیم. فرض کنیم

$$g = \sum_{j=0}^n g_j x^j \quad \text{و} \quad f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$$

بنابر (۱۰-۴)

$$fg = \sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j}$$

واز این رو، بنابر (۱)

$$\begin{aligned}
 (fg)(\alpha) &= \sum_{i,j} f_i g_j \alpha^{i+j} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^m f_i \alpha^i \right) \left(\sum_{j=0}^n g_j \alpha^j \right) \\
 &= f(\alpha)g(\alpha). \quad \square
 \end{aligned}$$

تمرین

۱. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد و A ماتریسی 2×2 بر روی F به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

برای هر یک از چندجمله‌ای‌های داده شده زیر، بر روی F ، ماتریس $f(A)$ را محاسبه کنید.

(الف) $f = x^2 - x + 2$

(ب) $f = x^3 - 1$

(پ) $f = x^4 - 5x + 7$

۲. فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$$

باشد و f چندجمله‌ای روی R تعریف شده توسط $f = -x^3 + 2$ مطلوب است.

$$f(T)$$

۳. فرض کنید A یک ماتریس قطری $n \times n$ بر روی هیأت F باشد؛ یعنی، ماتریسی باشد که به ازای $j \neq i$ در شرط $A_{ij} = 0$ صدق کند. چندجمله‌ای f بر روی F که توسط

$$f = (x - A_{11}) \cdots (x - A_{nn})$$

تعریف می‌شود داده شده است. مطلوب است

۴. اگر f و g دو چندجمله‌ای مستقل خطی بر روی هیأت F و h یک چندجمله‌ای غیر صفر بر روی F باشند، نشان دهید fh و gh مستقل‌اند.

۵. اگر F هیأتی باشد، نشان دهید که حاصل ضرب دو عضو غیر صفر F^∞ غیر صفر است.

۶. فرض کنید S مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های غیر صفر بر روی هیأت F باشد. اگر هیچ دو

عضوی از درجه مساوی نداشته باشند، نشان دهید که S در $F[x]$ مجموعه مستقلی است.

۷. اگر a و b اعضای هیأت F باشند و $a \neq 0$ ، نشان دهید که چندجمله ایهای 1 ، $ax+b$ ، $(ax+b)^2$ ، $(ax+b)^3$ ، ... پایه ای برای $F[x]$ تشکیل می دهند.

۸. اگر F یک هیأت و h یک چندجمله ای از درجه ای بزرگتر از یا مساوی با یک بر روی F باشد، نشان دهید نگاشت $f(h) \rightarrow f$ یک تبدیل خطی یک به یک از $F[x]$ در $F[x]$ است. همچنین نشان دهید این تبدیل یک یک رخنی از $F[x]$ بروی $F[x]$ است اگر و تنها اگر $\deg h = 1$.

۹. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط \mathbb{C} و D تبدیلهای تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{1+i} x^{i+1}$$

و

$$D\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n i c_i x^{i-1}$$

بر روی $F[x]$ باشند.

(الف) نشان دهید T عملگر خطی نامنفر دی روی $F[x]$ است. همچنین نشان دهید T معکوس پذیر نیست.

(ب) نشان دهید D عملگر خطی روی $F[x]$ است و فضای پوچ آن را به دست آورید.

(پ) نشان دهید $TD = I$ و $DT \neq I$.

(ت) به ازای هر f و g از $F[x]$ نشان دهید

$$T[(Tf)g] = (Tf)(Tg) - T[f(Tg)].$$

(ث) قاعده ای برای D مشابه با قاعده داده شده در (ت) برای T بیان و آن را اثبات کنید.

(ج) فرض کنید V زیرفضای غیر صفری از $F[x]$ باشد که به ازای هر f در V چندجمله ای Tf متعلق به V است. نشان دهید بعد V متناهی نیست.

(ج) فرض کنید V زیرفضایی با بعد متناهی از $F[x]$ باشد ثابت کنید یک عدد صحیح $m \geq 0$ یافت می شود که به ازای هر f در V ، $D^m f = 0$.

۳.۴. درونیابی لامرا انز

در سراسر این بخش فرض می کنیم F هیأتی ثابت و t_1, t_2, \dots, t_n عنصر همتایز از F باشند. فرض کنیم V زیرفضایی از $F[x]$ مشکل از همه چندجمله ایهای از درجه کمتر از

یا مساوی با n (همراه با چندجمله‌ای \circ) و L_i تابعی از V در F تعریف شده توسط

$$L_i(f) = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

به ازای هر f از V باشد. بنابر حکم (۱) قضیه ۲، هر L_i تابعکی خطی روی V است. یکی از مطالبی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که مجموعه متشکل از L_0, L_1, \dots, L_n پایه‌ای برای V^* ، فضای دوگان V ، تشکیل می‌دهد.

بدیهی است برای این منظور کافی است که $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ دوگان پایه‌ای چون $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ از V باشد (با قضیه ۱۵ در فصل ۳ مقایسه شود). چنین پایه‌ای یکی بیشتر نیست و در صورت وجود با

$$L_j(P_i) = P_i(t_j) = \delta_{ij} \quad (۱۱-۴)$$

تعیین می‌شود. چندجمله‌ایها

$$P_i = \frac{(x - t_0) \cdots (x - t_{i-1})(x - t_{i+1}) \cdots (x - t_n)}{(t_i - t_0) \cdots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \cdots (t_i - t_n)} \quad (۱۲-۴)$$

$$= \prod_{j \neq i} \frac{(x - t_j)}{(t_i - t_j)}$$

از درجه n هستند، از این‌رو به V تعلق دارند و بنابر قضیه ۲ در (۱۱-۴) صدق می‌کنند.

$$\text{اگر } f = \sum_i c_i P_i, \text{ آنگاه به ازای هر } j$$

$$f(t_j) = \sum_i c_i P_i(t_j) = c_j. \quad (۱۳-۴)$$

چون چندجمله‌ای \circ دارای این خاصیت است که به ازای هر t از F ، $(t) = \sum_i c_i P_i$ ، از (۱۳-۴) نتیجه می‌شود که چندجمله‌ایها P_0, P_1, \dots, P_n مستقل خطی هستند. چندجمله‌ایها $1, x, x^2, \dots, x^n$ پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند و لذا بعد V برای $(n+1)$ است. بنابراین، مجموعه مستقل $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ نیز پایه‌ای برای V باشد. پس، به ازای هر f از V

$$f = \sum_{i=0}^n f(t_i) P_i. \quad (۱۴-۴)$$

عبارت (۱۴-۴)، فرمول درون‌یابی لگرانژ نامیده می‌شود. اگر x را در (۱۴-۴) قرار دهیم، چنین بدست می‌آوریم

$$x' = \sum_{i=0}^n (t_i)^i P_i.$$

اکنون از قضیه ۷ در فصل ۲ نتیجه می‌شود که ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \quad (15-4)$$

معکوس پذیر است. ماتریس $(15-4)$ ماتریس واندرموند نامیده می‌شود؛ نشان دادن مستقیم معکوس پذیری این ماتریس، هنگامی که t_0, t_1, \dots, t_n اعضایی متمایز از F باشند، تمرین جالبی است.

در بحث حاضر اگر f یک چندجمله‌ای دلخواه بر روی F باشد، تابع چندجمله‌ای از F در F را که هر t در F را به $f(t)$ می‌برد، با \tilde{f} نشان می‌دهیم. بنابر تعریف (با مثال ۴ در فصل ۲ مقایسه شود) هر تابع چندجمله‌ای به همین طریق به وجود می‌آید؛ هر چند بر حسب اتفاق به ازای دو چندجمله‌ای f و g با شرط $f \neq g$ ممکن است داشته باشیم $\tilde{f} = \tilde{g}$ ، خوشبختانه، به طوری که خواهیم دید، این وضع ناخوش آیند تنها در حالتی که F هیأتی با تعدادی متناهی عنصر متمایز باشد پیش می‌آید. برای اینکه رابطه بین چندجمله‌ایها و توابع چندجمله‌ای را با روشهای دقیق و جامع تشریح کنیم، نیاز به تعریف ضرب دوتا تابع چندجمله‌ای داریم. اگر f و g دو چندجمله‌ای بر روی F باشند، حاصل ضرب \tilde{f} و \tilde{g} عبارت است از تابع $\tilde{f} \tilde{g}$ از F در F که با

$$(f \tilde{g})(t) = f(t) \tilde{g}(t) \quad F \text{ به ازای } t \text{ در } F \quad (16-4)$$

تعریف می‌شود. بنابر قسمت (۲) قضیه (2) ، $(f \tilde{g})(t) = f(t)g(t)$ ، ولذا به ازای هر t از F

$$(fg)(t) = f(t)g(t).$$

از این رو، $\tilde{(fg)} = \tilde{f} \tilde{g}$ و تابعی چندجمله‌ای است. در اینجا، بررسی این نکته که فضای برداری توابع چندجمله‌ای بر روی F ، در صورتی که ضرب مطابق $(16-4)$ تعریف شود، یک جبر خطی با عنصرهای متمایز از F است، موضوعی است سرداست و آن را به خواننده واگذارمی‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم هیأت F و جیرهای خطی α و β بر روی F داده شده باشند. جیرهای α و β یکسریخت خوانده می‌شوند هرگاه یک نگاشت یک به یک $\alpha \rightarrow \beta$ باشد که α و β در F دو اسکالر c و d باشند.

$$(c\alpha + d\beta) = c\alpha + d\beta \quad (\text{الف})$$

و

$$(\alpha\beta)^\sim = \alpha^\sim\beta^\sim \quad (\text{ب})$$

نگاشت \sim از α یک یکریختی از α بروی \sim نامیده می‌شود. از این‌دو، هر یک یکریختی از α بروی \sim ، یک یکریختی فضای برداری از α بروی \sim است که دادای خاصیت اضافی (ب) مربوط به «حفظ» حاصل‌ضرب هم است.

مثال ۴. گیریم V یک فضای برداری n -بعدی بر روی هیأت F باشد. بنا بر قضیه ۱۳ در فصل ۳ و تذکرات منعطف آن، هر پایه مرتب β از V یک یکریختی β از T → $[T]$ است که جبر عملگرهای خطی روی V بروی جبر ماتریس‌های $n \times n$ بر روی F تعیین می‌کند. حال فرض کنیم عملگر خطی ثابت U روی V و چندجمله‌ای

$$f = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

با ضرایب c_i از F داده شده باشد. در این صورت

$$f(U) = \sum_{i=0}^n c_i U^i,$$

و چون $[T] \rightarrow T$ نگاشتی خطی است

$$[f(V)]_\beta = \sum_{i=0}^n c_i [U^i]_\beta.$$

اکنون از این واقعیت که به ازای هر T_1 و T_2 از $L(V, V)$

$$[T_1 T_2]_\beta = [T_1]_\beta [T_2]_\beta$$

نتیجه می‌گیریم که

$$[U^i]_\beta = ([U]_\beta)^i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

نظر به اینکه این رابطه به ازای $1, 0, \dots, n$ نیز معتبر است، این نتیجه را به دست می‌آوریم که

$$[f(U)]_\beta = f([U]_\beta). \quad (17-4)$$

بدازبان کلمات، اگر U عملگر خطی روی V باشد، ماتریس یک چندجمله‌ای از U در پایه‌ای مفروض، عبارت است از همان چندجمله‌ای بر حسب ماتریس U .

قضیه ۳. اگر F هیأتی مشتمل بر تعدادی نامتناهی عنصر متمایز باشد، نگاشت $f \rightarrow f$ یک یکریختی از جبر چندجمله‌ایها بر روی F بروی جبر توابع چندجمله‌ای بر روی F است.

اثبات. طبق تعریف، این نگاشت پوشاست؛ و اگر f و g متعلق به $[x]$ باشند،

واضح است که به ازای همه اسکالرهای c و d ،

$$(cf + dg) \sim = cf \sim + dg \sim.$$

چون قبله ثابت کردیم که $f \sim g \sim = f \sim g \sim$ (یعنی $f \sim = f$)، تنها نیازمندیم نشان دهیم که این نگاشت یک به یک است. برای انجام این کار، به خاطر خطی بودن نگاشت، کافی است نشان دهیم $f \sim$ ایجاب می‌کند که f را کمتر باشد، به طوری که $f \sim = f$. در این صورت فرض کنیم f یک چندجمله‌ای از درجه n یا کمتر باشد، گیریم $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. عنصر متمایز از F باشند. چون $f \sim = f$ ، به ازای $i = 0, 1, \dots, n$ ، $a_i = a_{\sim(i)}$ داریم $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. و یک نتیجه آنی از (۱۴-۴) است که $f = 0$. \square

از نتایج بخش بعد اثبات کاملاً متفاوتی برای این قضیه به دست خواهیم آورد.

تمرین

۱. با استفاده از فرمول درون یابی لاغر انز، یک چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی یا بید که از درجه کوچکتر از یا مساوی با ۳ باشد و $f(-1) = 2, f(0) = -2, f(1) = 6, f(2) = -2$ باشند.

۲. فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ اعدادی حقیقی باشند. می‌خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است یک چندجمله‌ای f روی R از درجه نایبیشتر از ۲ بیاییم که $f(-1) = \alpha, f(0) = \beta, f(1) = \gamma, f(2) = \delta$. ثابت کنید این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$$2\alpha + 6\beta - \gamma - 8\delta = 0.$$

۳. فرض کنید F هیأت اعداد حقیقی باشد و داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = (x-2)(x-3)(x-1).$$

(الف) نشان دهید $p(A) = 0$.

(ب) فرض کنید P_1, P_2, P_3 و P_4 چندجمله‌ایهای لاغر انز به ازای $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 0$ باشند. ماتریس $E_i = P_i(A)$ را محاسبه کنید.

- (ب) نشان دهید $E_i^* = E_i$ هرگاه $E_i E_j = 0$ و $E_1 + E_2 + E_3 = I$ و $i \neq j$ و
 (ت) نشان دهید $A = 2E_1 + 3E_2 + E_3$

۴. فرض کنید (P_1, P_2, P_3) مجموعه‌ای از خطی روی \mathbb{R}^4 باشد که $T = p(x-2)(x-3)$ بر روی $P(T) = 0$ باشد. فرض کنید $p(x-2)(x-3)$ چندجمله‌ایهای لاغرانژ در تمرین ۳ باشند و $E_i = P_i(T)$ باشد که $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 &= I, \\ i \neq j \text{ هرگاه } E_i E_j &= 0 \\ E_i^* &= E_i, \\ T &= 2E_1 + 3E_2 + E_3. \end{aligned}$$

۵. عدد صحیح مثبت n و هیأت F داده شده‌اند. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و P ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری بر روی F باشد. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، ثابت کنید

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.$$

۶. فرض کنید F یک هیأت باشد. بعضی از تابعکهای خطی خاص روی $F[x]$ را که از طریق «تعیین مقدار در f »:

$$L(f) = f(t)$$

به دست می‌آیند قبلاً دیده‌ایم. این گونه تابعکهای نه تنها خطی هستند بلکه دارای این خاصیت نیز می‌باشند که $L(fg) = L(f)L(g)$. ثابت کنید اگر L تابعکی خطی روی $F[x]$ باشد که به ازای هر f, g ,

$$L(fg) = L(f)L(g),$$

آنگاه، یا $L = 0$ یا یک t در F یافت می‌شود که به ازای همه f ‌ها، $L(f) = f(t)$.

۴.۴۳. ایده‌ای های چندجمله‌ایها

در این بخش به تابعی که عملتاً به ساختار ضربی جبر چندجمله‌ایهای بر روی یک هیأت وابسته هستند می‌پردازیم.

۷. فرض کنیم f و d دو چندجمله‌ای غیر صفر بر روی هیأت F باشند و $\deg d \leq \deg f$. این صورت، یک چندجمله‌ای g دو $F[x]$ با یکی از دو شرط زیر یافت می‌شود:

$$\deg(f - dg) < \deg f \text{ یا } f - dg = 0$$

اثبات. فرض کنیم

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad b_n \neq 0.$$

در این صورت و

$$\deg \left[f - \left(\frac{a_m}{b_n} \right) x^{m-n} d \right] < \deg f \text{ یا } f - \left(\frac{a_m}{b_n} \right) x^{m-n} d = 0$$

بدین سان می‌توان g را مساوی $(a_m/b_n)x^{m-n}$ اختیار کرد. \square

با استفاده از این لم می‌توانیم نشان دهیم که فرایند آشنا « تقسیمات متواالی » برای چندجمله‌ایها با ضرایب حقیقی یا مختلط بر روی هر هیأت دلخواه نیز امکان پذیر است.

قضیه ۴. اگر f و d دو چندجمله‌ای بروی هیأت F باشند و d مخالف 0 آنگاه دو چندجمله‌ای q و r در $F[x]$ وجود دارند به طوری که

$$f = dq + r \quad (1)$$

$$\deg r < \deg d \text{ یا } r = 0 \quad (2)$$

چندجمله‌ایها q و r که در شرایط (1) و (2) صدق می‌کنند یکتا هستند.

اثبات. اگر f چندجمله‌ای باشد یا $\deg f < \deg d$ آنگاه، $f = dq$ و $q = 0$ یک پاسخ است. در حالت $\deg f \geq \deg d$ و $f \neq dq$ ، لم قبل نشان می‌دهد که می‌توان یک چندجمله‌ای g با شرط $f - dg = 0$ باشد که $\deg(f - dg) < \deg f$ باشد. اگر $\deg(f - dg) \geq \deg d$ و $f - dg \neq 0$ ، چندجمله‌ای h را طوری انتخاب می‌کنیم که $(f - dg) - dh = 0$

$$\deg[f - d(g+h)] < \deg(f - dg).$$

با ادامه این فرایند تا حد لزوم، سرانجام چندجمله‌ایها q و r با شرط $r = 0$ یا $\deg r < \deg d$ ، $f = dq + r$ که در آن $\deg r < \deg d$ باشد. حال فرض کنیم همچنین داشته باشیم $f = dq_1 + r_1$ که در آن $\deg r_1 = \deg d$ باشد. در این صورت، $d(q - q_1) = r_1 - r$ و $dq + r = dq_1 + r_1$ آنگاه، $q - q_1 \neq 0$ و $d(q - q_1) \neq 0$.

$$\deg d + \deg(q - q_1) = \deg(r_1 - r).$$

اما چون درجه $r_1 - r$ کمتر از درجه d است، چنین چیزی ممکن نیست، و $q - q_1 = 0$. از این رو، همچنین داریم $r_1 - r = 0$. \square

تعریف، چند جمله‌ای غیر صفر d بر دوی $F[x]$ باشد، اگر f در $F[x]$ مفروض است. اگر f در F باشد، قضیه قبل نشان می‌دهد که حداکثر یک چندجمله‌ای q موجود است که $f = dq$. اگر چنین q بی‌وجود داشته باشد، گوییم d چندجمله‌ای f را عاد می‌کند، f بر d تقسیم (بخش) پذیر است یا f مضربی از d است. در این صورت، می‌نویسیم $d = f/q$. خارج قسمت f بر d می‌نامیم.

نتیجه ۱. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای بودوی هیأت F ، و عنصری از F باشد. در این صورت، f بر $x - c$ تقسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f(c) = 0$. اثبات. بنا بر قضیه فوق $f = (x - c)q + r$ و در آن r یک چندجمله‌ای اسکالری است. طبق قضیه ۲

$$f(c) = 0q(c) + r(c) = r(c).$$

از این رو، $r = 0$ اگر و تنها اگر $f(c) = 0$. \square

تعریف. فرض کنیم F یک هیأت باشد. عنصر c از F ریشه یا صفر چندجمله‌ای مفروض f بر دوی F خوانده می‌شود، هرگاه $f(c) = 0$.

نتیجه ۲. یک چندجمله‌ای f از درجه n بر دوی هیأت F حداکثر n ریشه در F دارد.

اثبات. نتیجه برای چند جمله‌ای‌های از درجه ۰ و درجه ۱ به طور آشکار درست است. فرض می‌کنیم که نتیجه برای چندجمله‌ای‌های از درجه $1 - n$ نیز درست باشد. اگر ریشه‌ای از f باشد، آنگاه $f(x - a) = (x - a)q$ و در آن q دارای درجه $1 - n$ است. چون $f(b) = 0$ اگر و تنها اگر $a = b$ یا $q(b) = 0$ ، بنا بر فرض استقراء نتیجه می‌شود که f حداکثر n ریشه دارد. \square

خواننده توجه دارد که گام اصلی در اثبات قضیه ۳ بیدرنگک از این نتیجه به دست می‌آید.

در مبحث ریشه‌های چندگانه مقوله مشتقات صوری چندجمله‌ایها مفید واقع می‌شود. مشتق چندجمله‌ای

$$f = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

عبارت است از چند جمله‌ای

$$f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1}.$$

از نماد $D_f = f'$ هم استفاده خواهیم کرد. مشتق گیری خطی است؛ بدین معنی که، $D^m f = f^{(m)}$ است. مشتقات صوری مراتب بالاتر $D^m f = f^{(m)}$ باشند. وغیره نیز وجود دارند.

قضیه ۵. (فرمول تیلور) فرض کنیم F هیأتی با سوشت نمای هفر، c عنصری از F عددی صحیح مثبت باشد. اگر چندجمله‌ای f بر دوی F باشد، $\deg f \leq n$ باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{(D^k f)}{k!}(c)(x-c)^k.$$

اثبات. فرمول تیلور پیامدی از قضیه دوجمله‌ای، و خطی بودن عملگرهای D^n, \dots, D^2, D است. قضیه دوجمله‌ای که باسانی با استقرار ثابت می‌شود مدعی است که

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k.$$

در این فرمول

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}$$

همان ضریب دوجمله‌ای مشهور است که تعداد ترکیبات k شیء از m شیء را به دست می‌دهد. بنابر قضیه دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} x^m &= [c + (x-c)]^m \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c^{m-k} (x-c)^k \end{aligned}$$

$$= c^m + mc^{m-1}(x-c) + \cdots + (x-c)^m$$

و این، بیان فرمول تیلور برای حالت $f = x^m$ است. اگر

$$f = \sum_{m=0}^n a_m x^m$$

آنگاه

$$D^k f(c) = \sum_m a_m (D^k x^m)(c)$$

و

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(c)}{k!} (x-c)^k &= \sum_k \sum_m a_m \frac{D^k x^m}{k!} (c)(x-c)^k \\
 &= \sum_m a_m \sum_k \frac{D^k x^m}{k!} (c)(x-c)^k \\
 &= \sum_m a_m x^m \\
 &= f. \quad \square
 \end{aligned}$$

باید مذکور شد که به علت مستقل خطی بودن چند جمله‌ایهای $1, (x-c), \dots, (x-c)^n$ (با تمرین در بخش ۲.۴ مقایسه شود) فرمول تیلور روش منحصر به فرد نوشتند f به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $(x-c)^k$ ($k \leq n$) را به دست می‌دهد.

در این مرحله، تذکر این مطلب، بدون ذکر جزئیات، ممکن است خالی از ارزش باشد که با تغییر متاسبی فرمول تیلور برای چند جمله‌ایهای بر روی هیأت‌های با سرشتمانی متناهی نیز معتبر است. اگر سرشتمانی هیأت F متناهی باشد (مجموع تعدادی متناهی ۱ در F برابر شود) آنگاه ممکن است در F داشته باشیم $\circ = k_1$ ، که در این حالت تقسیم $(D^k f)(c)$ بر $k_1!$ معنی است. با این حال، تقسیم $D^k f$ بر $k_1!$ می‌تواند با معنی باشد، زیرا که هر ضریب $D^k f$ حاصل ضرب عنصری است از F در عددی صحیح تقسیم پذیر بر $k_1!$. اگر این مطالب گیج کننده به نظر برسند، به خواننده توصیه می‌شود که توجه خود را به هیأت‌های با سرشتمانی صفر یا بزرگ‌تر هیأت‌های از اعداد مختلف معطوف دارد.

اگر c ریشه‌ای از چند جمله‌ای f باشد، چندگانگی c به عنوان ریشه‌ای از f بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبت r است به طوری که f بر $(x-c)^r$ تقسیم پذیر باشد. چندگانگی یک ریشه، بوضوح کوچکتر است از یا مساوی است با درجه f . در مورد چند جمله‌ایهای بر روی هیأت‌های با سرشتمانی صفر، چندگانگی c به عنوان ریشه‌ای از f ، در ارتباط است با تعداد مشتقاتی از f که در c صفر می‌شوند.

قضیه ۶. فرض کنید F هیأتی با سرشتمانی صفر و f یک چند جمله‌ای بر دوی F باشد. در این صورت، اسکالر c (یشه‌ای) از f با چندگانگی r است اگر و تنها اگر

$$(D^k f)(c) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1$$

$$(D^r f)(c) \neq 0.$$

اثبات. فرض کنیم r چندگانگی c به عنوان یک ریشه f باشد. در این صورت یک چند جمله‌ای g با خواص $g = (x-c)^r g(c) + 0$ وجود دارد. زیرا در غیر این صورت، بنا بر نتیجه ۱ از قضیه ۴، f بر $(x-c)^{r+1}$ تقسیم پذیر است. با به کار بستن

فرمول تیلور بر g ,

$$f = (x - c)^r \left[\sum_{m=0}^{n-r} \frac{(D^m g)(c)}{m!} (x - c)^m \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{n-r} \frac{(D^m g)(c)}{m!} (x - c)^{r+m}.$$

چون تنها یک راه برای نوشتن f به عنوان ترکیبی خطی از توانهای $(x - c)^k$ ($0 \leq k \leq n$) وجود دارد، داریم

$$\cdot \frac{(D^k f)(c)}{k!} = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq r-1 \\ \frac{D^{k-r} g(c)}{(k-r)!} & r \leq k \leq n \end{cases}$$

بنابراین، بازای 1 $D^r f(c) = g(c) \neq 0$ و $D^k f(c) = 0$ $\forall k \leq r-1$. عکس، اگر این شرایط برآورده شوند، از فرمول تیلور پیدرنگ نتیجه می‌شود که یک چندجمله‌ای g با شرایط $g(x - c)^r = f$ و $g(x - c)^k = 0$ $\forall k \neq r$ وجود دارد. حال فرض کنیم r بزرگترین عدد صحیح مثبتی نباشد که $f(x - c)^r$ را عاد کند. در این صورت، یک چندجمله‌ای h وجود دارد که $f(x - c)^{r+1} h = 0$. ولی این مطلب، بنا به نتیجه 2 از قضیه 1 ، ایجاب می‌کند که $h = 0$ ؛ لذا $g(x - c) = 0$ که هنوز خود یک تناقض است. \square

تعریف. گیریم F یک هیأت باشد. یک ایدآل $F[x]$ زیرفضایی چون M اذ M است که به اذای هر f اذ $F[x]$ و هر g اذ M ، چندجمله‌ای fg متعلق به M باشد.

مثال ۵. اگر F یک هیأت و d یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، مجموعه $M = dF[x]$ مشکل از همه مضربهای d با f های دلخواه در $[F[x], F]$ ، یک ایدآل است. زیرا، M غیر تهی است و در واقع M شامل d است؛ و اگر f و g متعلق به $F[x]$ باشند و c اسکالر، آنگاه

$$c(df) - dg = d(cf - g)$$

متعلق به M است و بنابراین M زیر فضاست. سرانجام M به همین نحو شامل $(df)g = d(fg)$ هم است. ایدآل M ایدآل اصلی تولیدشده توسط d نامیده می‌شود.

مثال ۶. فرض کنیم d_1, d_2, \dots, d_n تعدادی متناهی چندجمله‌ای بر روی F باشند. در این صورت M ، مجموع زیرفضاهای $[F[x], F]$ یک زیرفضاست و نیز یک ایدآل. زیرا، فرض کنیم p متعلق به M باشد. در این صورت، چند جمله‌ایهایی مانند $d_1 f_1, d_2 f_2, \dots, d_n f_n$ در $[F[x], F]$ وجود دارند که $p = d_1 f_1 + \dots + d_n f_n$. اگر g چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$pg = d_1(f_1g) + \dots + d_n(f_ng)$$

و بنابراین pg نیز به M تعلق دارد. اذ این‌رو، M یک ایدآل است، و می‌گوییم که ایدآل تولید شده توسط چند جمله‌ایهای d_1, \dots, d_n می‌باشد.

مثال ۷. F را زیر هیأتی از اعداد مختلف فرض می‌کنیم و ایدآل

$$M = (x+2)F[x] + (x^2+8x+16)F[x]$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $[x] \in M$. زیرا، M شامل

$$x^2+8x+16 - x(x+2) = 6x+16$$

و از این‌رو، شامل $= 6(x+2) - 6x+16$ است. پس، چندجمله‌ای اسکالری ۱، و در نتیجه همه مضربهای آن به M تعلق دارند.

قضیه ۷. اگر F یک هیأت، و M ایدآل غیر صفری از $F[x]$ باشد، چندجمله‌ای تکین یکتاً چون $d \in F[x]$ یافت می‌شود که M ایدآل اصلی تولید شده توسط d باشد. اثبات. طبق فرض، M شامل یک چندجمله‌ای غیر صفر است؛ درین همه چندجمله‌ایهای غیر صفر M ، یک چندجمله‌ای d از کمترین درجه وجود دارد. می‌توان فرض کرد که d تکین است؛ زیرا، در غیر این صورت با ضرب d در یک اسکالر می‌توان آن را تکین ساخت. حال، اگر $f = dq+r$ باشد، قضیه ۴ نشان می‌دهد $f = dq+r$ با این شرط که $r = 0$ یا $dq = r$ است، $d \in M$ در M تعلق دارد. از طرفی چون d عنصری از M و از کمترین درجه است نمی‌توانیم داشته باشیم $dF[x] \subset M$ ، لذا $d = 0$. پس، $M = dF[x]$. اگر g چندجمله‌ای تکین دیگری باشد که $[x] \in M = gF[x]$ ، آنگاه در چندجمله‌ای غیر صفر p و وجود دارند که $g = pq$ و $d = dpq$. از این‌رو، $g = dq$

$$\deg d = \deg p + \deg q.$$

بنابراین، $\deg p = \deg q = 0$ و $d = g$ تکین هستند، $d = g$ و در نتیجه \square .

مشاهده این مطلب با ارزش است که در اثباتی که هم اکنون ارائه شد، حالت خاصی از یک واقعیت نسبتاً مفید و عمومی به شرح زیر مورد استفاده قرار گرفت: اگر p چندجمله‌ای غیر صفری از یک ایدآل M باشد و اگر چندجمله‌ای f در M بر p تقسیم پذیر نباشد، آنگاه $f = pq+r$ و «باقیمانده» r نه تنها به M تعلق دارد و مخالف 0 است، بلکه درجه آش کوچکتر از درجه p هم است. قیلاً، در مثال ۷ نیز برای نشان دادن این که چندجمله‌ای اسکالری ۱ مولد تکین ایدآل مورد نظر است، از این واقعیت استفاده کردیم. اصولاً، یافتن چندجمله‌ای تکینی که ایدآل غیر صفر مفروضی را تولید کند، همواره

امکان پذیر است. زیرا، در هر ایدآل می‌توان به توسط تعدادی متاهی از تقسیم‌متوالی،
نها یعنی یک چندجمله‌ای با کمترین درجه به دست آورد.

نتیجه. اگر p_1, p_2, \dots, p_n چندجمله‌ایهایی بر دوی هیأت F باشند و همه صفر
نباشند، یک چندجمله‌ای تکین یکتای d در $F[x]$ وجود دارد که

(الف) d در ایدآل تولید شده توسط p_1, p_2, \dots, p_n قرار دارد.

(ب) d هر یک از چندجمله‌ایهای p_1, p_2, \dots, p_n را عاد می‌کند.

هر چندجمله‌ای که در (الف) و (ب) صدق کند، لزوماً شرط زیر را نیز برمی‌آورد.

(پ) بر هر چندجمله‌ای که همه چندجمله‌ایهای p_1, p_2, \dots, p_n را بخش کند،
بخش پذیر است.

اثبات. گیریم d مولد تکین ایدآل

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

باشد. هر عنصر این ایدآل بر d بخش پذیر است؛ لذا، همه چندجمله‌ایهای p_i بر d بخش-
پذیرند. حال فرض کنیم f یک چندجمله‌ای باشد که همه چندجمله‌ایهای p_1, p_2, \dots, p_n را
عاد کند. در این صورت، چندجمله‌ایهایی چون g_1, g_2, \dots, g_n وجود دارند که $p_i = f g_i$ ،
 $i = 1, 2, \dots, n$.

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

است، چندجمله‌ایهایی چون q_1, q_2, \dots, q_n در $F[x]$ یافت می‌شوند که

$$d = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n.$$

پس

$$d = f[g_1 q_1 + \dots + g_n q_n].$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که d چندجمله‌ای تکینی است که در (الف)، (ب)، و (پ) صدق
می‌کند. اگر d' یک چندجمله‌ای باشد که شرایط (الف) و (ب) را برآورد، از (الف) و
تعريف d نتیجه می‌شود که d' مضربی اسکالری از d است و در (پ) نیز صدق می‌کند.
سرانجام، در حالتی که d' چندجمله‌ای تکینی باشد، داریم $d' = d$. \square

تعريف. اگر p_1, p_2, \dots, p_n چندجمله‌ایهایی بر دوی هیأت F باشند و همگی ۰ نباشند،
آنگاه، d ، مولد تکین ایدآل

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ایهای p_1, p_2, \dots, p_n نامیده می‌شود. این اصطلاح
توسط لم قبل توجیه می‌شود. گوییم چندجمله‌ایهای p_1, p_2, \dots, p_n نسبت بهم اول‌هستند،
هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد، یا معادل آن، هرگاه ایدآلی را که آنها

تولید می‌کنند همه $F[x]$ باشد.

مثال ۸. گیریم C هیأت اعداد مختلط باشد. در این صورت

(الف) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x+2$ و $x^2+8x+16$ برابر است (مثال

۷ را ببینید)؟

(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $(x+i)^2(x-i)$ و $(x-2)(x^2+1)$ برابر است. زیرا ایدآل $(x-2)(x+i)$

$$(x-2)(x+i)F[x] + (x-2)(x^2+1)F[x]$$

شامل

$$(x-2)(x+i) - (x-2)(x^2+1) = (x-2)(x+i)(i-2)$$

و بنابراین شامل $(x-2)(x+i)$ است که تکین است و هردوی

$$(x-2)(x+i) \text{ و } (x-2)(x^2+1)$$

را عاد می‌کند.

مثال ۹. فرا هیأت اعداد گویامی گیریم و در $F[x]$ فرض می‌کنیم M ایدآل تولید

شده توسط

$$(x-3)(x-2)^2, (x-1)(x+2)^2$$

باشد. در این صورت، M شامل

$$\frac{1}{3}(x+2)^2[(x-1)-(x-3)] = (x+2)^2$$

است و چون

$$(x+2)^2 = (x-3)(x+7) - 17$$

M شامل چندجمله‌ای اسکالری ۱ هم است. از این‌رو، $M = F[x]$ و چندجمله‌ای‌های

$$(x-3)(x-2)^2(x-3), (x-1)(x+2)^2$$

نسبت بهم اول هستند.

تمرین

۱. فرض کنید Q هیأت اعداد گویا باشد. تعیین کنید کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از

$Q[x]$ ایدآل است. هرگاه مجموعه داده شده ایدآل باشد، مولد تکین آن را ببینید.

(الف) همه \mathbb{F} ‌های از درجه زوج؛

(ب) همه f ‌های از درجه بزرگتر از یا مساوی با ۵؛

(پ) همه f ‌هایی که $f(0) = 0$ ؛

(ت) همه f ‌هایی که $f(4) = f(2)$ ؛

(ث) همه f ‌های واقع در بر د عملگر خطی T تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}.$$

۳. مطلوب است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر یک از جفت چندجمله‌ایها زیر:

$$(الف) x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \quad 2x^5 - x^3 - 3x^2 - 6x + 4$$

$$(ب) x^3 + 2x^2 + 3x + 6 \quad 3x^4 + 8x^3 - 3$$

$$(پ) x^3 + 6x^2 + 7x + 1 \quad x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

۴. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، نشان دهید مجموعه همه چندجمله‌ایها f در $F[x]$ با شرط $f(A) = 0$ یک ایدآل است.

۵. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

مولد تکین ایدآل متشكل از همه چندجمله‌ایها f در $F[x]$ را که $f(A) = 0$ باید.

۶. اگر F یک هیأت باشد، نشان دهید اشتراک هر تعداد دلخواه از ایدآل‌های $F[x]$ خود یک ایدآل است.

۷. گیریم F یک هیأت باشد. نشان دهید ایدآل تولید شده توسط تعدادی متناهی چندجمله‌ای از $F[x]$ چون f_1, f_2, \dots, f_n عبارت است از اشتراک همه ایدآل‌های شامل آنها.

۸. فرض کنید K زیرهیأتی از یک هیأت F و f و g چندجمله‌ایها باید در $K[x]$ باشند. اگر M_f ایدآل تولید شده توسط f و g در $[K[x], K]$ و M_g ایدآل تولید شده توسط آنها در $[F[x], F]$ باشد، نشان دهید M_f و M_g دارای مولدهای تکین مساوی هستند.

۵.۴. تجزیه چندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول

در این بخش اثبات می‌کنیم که هر چندجمله‌ای بر روی هیأت F را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایها «اول» نوشت. این تجزیه به‌سازه‌ها، ابزار مؤثری برای

یا قسن بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر تعداد متناهی از چندجمله‌ایها، و بخصوص، وسیله مؤثری برای اتخاذ تصمیم درمورد اینکه چه وقت این چندجمله‌ایها نسبت بهم اول هستند، فراهم می‌آورد.

تعريف. فرض کنیم F یک هیأت باشد. چندجمله‌ای f در $F[x]$ ۱) تحويل پذیر بر روی F می‌نامیم، هرگاه چندجمله‌ایهای g و h از درجه بزرگتر از یا مساوی با یک در $F[x]$ وجود داشته باشند به طوری که $g = gh$; و گرنه، $f = fgh$ ۲) تحويل ناپذیر بر روی F می‌نامیم. هرچندجمله‌ای تحويل ناپذیر غیرا-سکالری بر روی F یک چندجمله‌ای اول بر روی F نام دارد و گاهی یک اول در $F[x]$ نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱۰. چندجمله‌ای $1 + x^2$ بر روی هیأت C از اعداد مختلط تحويل پذیر است.

زیرا

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

و چندجمله‌ایهای $x+i$ و $x-i$ به $C[x]$ تعلق دارند. از طرف دیگر، $1 + x^2$ بر روی هیأت اعداد حقیقی R تحويل ناپذیر است. چراکه اگر

$$x^2 + 1 = (ax+b)(a'x+b')$$

و a, a' و b, b' در R باشند، آنگاه

$$aa' = 1, \quad ab' + ba' = 0, \quad bb' = 1.$$

این روابط ایجاب می‌کنند که $a^2 + b^2 = 0$ ، که این خود با حقیقی بودن اعداد a و b غیرممکن است، مگر آنکه $a = b = 0$.

قضیه A. گیریم p, f ، و g چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند. فرض کنیم چندجمله‌ای اولی باشد که حاصل ضرب fg ۱) عاد کند. ۲) این حدودت، p یا f ۳) عاد می‌کند یا g ۴).

اثبات. اگر فرض کنیم p چندجمله‌ای اول تکینی است، از عمومیت اثبات تکاسته ایم. در این صورت، این واقعیت که p اول است، چیزی جزاین نمی‌گوید که ۱) و p تنها مقسوم علیه‌های تکین p هستند. گیریم d بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و p است. در این صورت، $1 + d = d$ یا $d = p$; چراکه $d = p$ چندجمله‌ای تکینی است که p را تقسیم می‌کند. اگر $d = p$ ، آنگاه p چندجمله‌ای f را تقسیم می‌کند و کار به انجام می‌رسد. از این‌رو، فرض می‌کنیم $d = p$; یعنی، فرض می‌کنیم f و p نسبت بهم اول باشند. ثابت خواهیم کرد که p چندجمله‌ای g را عاد می‌کند. چون بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و p یک است، چندجمله‌ایهایی چون $f + p$ وجود دارند که $f + p = 1$. با ضرب این رابطه در g داریم

$$\begin{aligned} g &= f \circ fg + p \circ pg \\ &= (fg) f \circ + p(p \circ g). \end{aligned}$$

چون p ، چندجمله‌ای fg را عاد می‌کند، $f \circ fg$ و نیز مساماً $(fg) f \circ p$ را نیز تقسیم می‌کند. بدین‌سان g بر p بخش‌پذیر است. \square

نتیجه. اگر p یک اول باشد f حاصل‌خوب $f \circ \dots f$ (ا عاد کند، آنگاه p یکی از چندجمله‌ایها f, \dots, f^k را عاد می‌کند.

اثبات. اثبات با استفاده از صورت فضیله است. فرض کنیم $n = k$ اثبات کرده باشیم و p حاصل‌ضرب $f_{k+1} \circ \dots \circ f_1$ از $(f+1)$ چندجمله‌ای را تقسیم کند. چون p چندجمله‌ای نیست. فرض کنیم نتیجه را برای $n = k$ اثبات کرده باشیم و p حاصل‌ضرب $f_{k+1} \circ \dots \circ f_1$ را تقسیم می‌کند. p یا $f_{k+1} \circ \dots \circ f_1$ را عاد می‌کند یا $f_{k+1} \circ \dots \circ f_1$ را. بنا بر فرض استقرار، اگر p چندجمله‌ای $f \circ \dots f$ را عاد کند، آنگاه f زیری هست که $j \leq k$ و p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. بدین لحاظ می‌بینیم که در هر حالت، p باید یکی از f ‌ها، $1 \leq j \leq k+1$ را عاد کند. \square

قضیه ۹. اگر F یک هیئت باشد، هر چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری دد $[F[x]]$ دهی توان به‌یک، و بدون احتساب قریب، تنها به‌یک طریق به صورت حاصل‌خوبی اذوالهای تکین دد $[F[x]]$ تجزیه کرد.

اثبات. فرض کنیم f چندجمله‌ای غیر اسکالری تکینی بر روی F باشد. هرگاه $\deg f = 1$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند؛ زیرا چندجمله‌ایها درجه یک خود تحویل ناپذیرند. فرض کنیم f دارای درجه $1 < n$ باشد. بنا بر فرض استقرار می‌توانیم فرض کنیم که قضیه برای همه چندجمله‌ایها تکین غیر اسکالری از درجه کمتر از n درست است. اگر f تحویل ناپذیر باشد، خود هم اکنون به صورت حاصل‌ضربی از اولهای تکین هست. در غیر این صورت، $f = gh$ که در آن g و h دو چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری از درجه کمتر از n هستند. پس، g و h می‌ترانند به صورت حاصل‌ضربی‌ای از اولهای تکین در $[F[x]]$ تجزیه شوند، و از اینجا به‌همین نحو f . حال فرض کنیم

$$f = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

که در آن p_1, \dots, p_m و q_1, \dots, q_n اولهای تکینی از $[F[x]]$ هستند. در این صورت، p_m حاصل‌ضرب $q_1 \cdots q_n$ را تقسیم می‌کند. بنا بر نتیجه قبل، p_m باید یکی از q_i ‌ها را عاد کند. چون q_i و p_m هردو چندجمله‌ایها اول تکینی هستند، این بدان معنی است که

$$q_i = p_m. \quad (16-4)$$

از (16-4) می‌بینیم که اگر $m = 1$ یا $n = 1$ داریم $m = n = 1$ ؛ زیرا

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg p_i = \sum_{j=1}^n \deg q_j$$

در این حالت چیزی بیشتر برای اثبات نمی‌ماند، لذا فرض می‌کنیم $m > n > 1$ و $p_m = q_n$ و

$$p_1 \cdots p_{m-1} p_m = q_1 \cdots q_{n-1} p_m.$$

حال بنابراین نتیجه ۲ از قضیه ۱ داریم

$$p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{n-1}.$$

چون درجه چندجمله‌ای $p_1 \cdots p_m$ کمتر از n است، فرض استقرار به کار می‌رود و نشان می‌دهد که q_1, q_2, \dots, q_{n-1} حداقل ترتیب پندتی جدیدی از p_1, p_2, \dots, p_{m-1} است. این مطلب همراه با (۱۶-۴) نشان می‌دهد که تجزیه f به صورت حاصل ضربی از اولهای تکین، بدون توجه به ترتیب سازه‌ها، یکنائب است. \square

در تجزیه چندجمله‌ای تکین غیراسکالری f مفروض در بالا، بعضی از سازه‌های اول تکین ممکن است تکرار شوند. اگر p_1, p_2, \dots, p_r ، اولهای تکین متمایزی باشند که در این تجزیه f ظاهر می‌شوند، آنگاه

$$f = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \quad (17-4)$$

که در آن نمای n_i تعداد دفعاتی است که سازه اول p_i در تجزیه ظاهر می‌شود، این تجزیه نیز مسلماً یکنائب است، و تجزیه اولیه f نامیله می‌شود. بسادگی می‌توان نشان داد که هر مقسوم-علیه تکین f به صورت

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad (18-4)$$

است. از (۱۸-۴) نتیجه می‌شود که بزرگترین مقسوم علیه مشترک تعدادی متناهی چندجمله‌ای تکین غیراسکالری f ، از ترکیب همه سازه‌های اول تکینی بدست می‌آید که به طور همزمان در تجزیه‌های f ، p_1, p_2, \dots, p_r ظاهر می‌شوند. نمایی که برای هر یک از سازه‌های اول فوق الذکر باید در نظر گرفته شود، بزرگترین نمایی است که آن سازه به توان این نمای سازه‌ای از همه f ها باشد. هرگاه هیچ توانی (غیر صفر) از چندجمله‌ایها اول، سازه‌ای از همه f ها نباشد، این چندجمله‌ایها نسبت به هم اول هستند.

مثال ۱۱. فرض کنیم هیأت F و عناصر متمايز a, b, c از F داده شده باشند. در این صورت، چندجمله‌ایهای $x-a, x-b, x-c$ اولهای تکین متمایزی از $F[x]$ هستند. اگر n, m_r, m_s و s اعداد صحیح مثبتی باشند، بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ایها

$$(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^s$$

است، حال آنکه سه چندجمله‌ای $(x-a)^m$

$$(x-b)^n(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-b)^n$$

نسبت بهم اول هستند.

قضیه ۱۰. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای تکین غیراسکالری بود و هیأت F د

$$f = p_1^n \cdots p_k^m$$

تجزیه f به‌سازه‌های اول باشد. به‌ازای هر j ، $k \leq j \leq 1$ ، گیریم

$$f_j = \frac{f}{p_j^{n_j}} = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}.$$

در این صورت f_j نسبت بهم اول هستند.

اثبات. اثبات (آسان) این قضیه را به‌خواندن و اگذار می‌کنیم. این قضیه را بیشتر بدین منظور بیان کردیم که بعدها بتوانیم به آن رجوع کنیم. \square

قضیه ۱۱. فرض کنیم چندجمله‌ای f بود و هیأت F و مشتق آن f' داده شده باشند. در این صورت f حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای تحویل ناپذیر متمازی بود و f' است اگر و تنها اگر f و f' نسبت بهم اول باشند.

اثبات. فرض کنیم در تجزیه f به‌سازه‌های اول بروی هیأت F ، چندجمله‌ای اول (غیراسکالری) p تکرار بشود. در این صورت، به‌ازای عنصری چون h از $F[x]$ ، $f = p^s h$. آنگاه

$$f' = p^s h' + s p^s h$$

و p مقسوم‌علیه h' نیز هست. پس، f و f' نسبت بهم اول نیستند.

حال فرض کنیم $p_k = p_1 \cdots p_k$ و $f = f_j$ چندجمله‌ایهای تحویل ناپذیر غیراسکالری متمازی بروی F باشند. اگر $f_j = f / p_j$ ، آنگاه

$$f' = p'_j f_j + p'_1 f_1 + \cdots + p'_k f_k.$$

گیریم p چندجمله‌ای اولی باشد که هم f و هم f' را عاد می‌کند. در این صورت f بی هست که $p_i = p_j$. حال به‌ازای $i, j \neq k$ چندجمله‌ای f_j را عاد می‌کند، و چون f_j چندجمله‌ای

$$f' = \sum_{j=1}^k p'_j f_j$$

را هم تقسیم می‌کند، می‌بینیم که p_i باید f_j را نیز عاد کند. بنابراین p_i یا f_j را عاد می‌کند یا p_i را عاد نمی‌کند، چرا که p_i از هم متمازی ند. لذا، p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. این هم ممکن نیست، زیرا درجه f یکی کمتر از درجه f است. پس، نتیجه می‌گیریم که هیچ اولی هم f و هم f' را عاد نمی‌کند، یا آنکه f و f'

نسبت بهم اول هستند. □

تعريف. هیأت F بسته جبری نامیده می‌شود، هرگاه هرچندجمله‌ای اول بردی F دادای درجه ۱ باشد.

اینکه می‌گوییم F بسته جبری است بدین معنی که هرچندجمله‌ای تکین تحویل ناپذیر غیراسکالری بروی F به صورت $(x - c)$ است. قبلاً دیده‌ایم که هرچندجمله‌ای از این نوع بر روی هر هیأت F تحویل ناپذیر است. بدین‌سان، یک تعریف همارز برای هیأت بسته جبری عبارت از این است: هیأتی چون F که هرچندجمله‌ای غیراسکالری f در $[x]$ بتواند به صورت

$$f = c(x - c_1)^{n_1} \cdots (x - c_k)^{n_k}$$

که در آن c یک اسکالر، c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از F و n_1, \dots, n_k اعداد صحیح مثبتی هستند، بیان شود. یک فرمولیندی دیگرهم این است که اگر f یک چندجمله‌ای غیر اسکالری بروی F باشد، آنگاه عنصری چون c در F وجود دارد که $f(c) = 0$.

هیأت R از اعداد حقیقی بسته جبری نیست؛ زیرا چندجمله‌ای $(x^2 + 1)$ بر روی R که از درجه ۱ نیست تحویل ناپذیر است و یا به‌این علت که عددی حقیقی مانند c وجود ندارد که $x^2 + 1 = 0$. قضیه موسوم به قضیه بنیادی جبر بیان می‌کند که هیأت C از اعداد مختلط بسته جبری است. اگرچه این قضیه را در این کتاب بعداً هم به کار می‌بریم ولی آن را اثبات نمی‌کنیم. اثبات این قضیه از یک سو به علت محدودیت زمانی، واز سوی دیگر به‌این خاطر که به خاصیتی «غیرجبری» از اعداد حقیقی وابسته است، کثار گذاشته شده است. برای دیدن اثباتی از این قضیه، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به کتاب شرایر و اسپرنر^۱ مندرج در فهرست مراجع رجوع کند.

قضیه بنیادی جبر همچنین روش می‌کند که چه امکاناتی برای تجزیه چندجمله‌ایها با ضرایب حقیقی به‌سازه‌های اول وجود دارد. اگر چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی باشد و c ریشه‌ای مختلط از f ، آنگاه c ، مزدوج مختلط، \bar{c} ، نیز یک ریشه f است. بنابراین، ریشه‌های مختلطی که حقیقی نیستند باید به صورت جفت‌های مزدوج ظاهر بشوند. در نتیجه مجموعه همه ریشه‌ها به صورت $\{c, \bar{c}, c_1, \dots, c_k, t_1, \dots, t_l\}$ است که در آن c_1, \dots, c_k اعدادی حقیقی و t_1, \dots, t_l اعدادی مختلط و غیرحقیقی هستند. پس، f به صورت

$$f = c(x - t_1) \cdots (x - t_l) p_1 \cdots p_r$$

تجزیه می‌شود، که در آن p_i چندجمله‌ای درجه دو م

$$p_i = (x - c_i)(x - \bar{c}_i)$$

است. البته ضرایب این چندجمله‌ایها p_i حقیقی هستند. نتیجه می‌گیریم که درجه هر چند-

جمله‌ای تحویل ناپذیر بروی هیأت اعداد حقیقی ۱ یا ۲ است، و هر چندجمله‌ای بروی R حاصل ضربی است از چند سازه خطی، که از ریشه‌های حقیقی f به دست می‌آیند، در چند چندجمله‌ای درجه دوم تحویل ناپذیر.

تمرین

۱. فرض کنید چندجمله‌ای تکین p بروی هیأت F و چندجمله‌ایها نسبت بهم اول f و g بروی F داده شده باشند. ثابت کنید بزرگترین مقسوم علیه مشترک Pf و Pg برابر است.

۲. با قبول قضیه بنیادی جبر، مطلب زیر را اثبات کنید. اگر f و g چندجمله‌ایها بروی بروی هیأت اعداد مختلط باشند، آنگاه f و g نسبت بهم اولند اگر و تنها اگر f و g ریشه مشترکی نداشته باشند.

۳. فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایها بروی هیأت اعداد مختلط و f یک چندجمله‌ای تکین بروی همین هیأت باشد. ثابت کنید تساوی

$$f = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$$

که در آن c_1, \dots, c_k اعداد مختلط متمایزی هستند برقرار است اگر و تنها اگر f و Df نسبت بهم اول باشند. به بیان دیگر، f دارای ریشه تکراری نیست اگر و تنها اگر f و Df ریشه مشترکی نداشته باشند. (قضیه بنیادی جبر را دانسته فرض کنید.)

۴. تعیین زیراز فرمول تیلور را ثابت کنید: فرض کنید f, g ، و h چندجمله‌ایها بروی زیرهیأتی از اعداد مختلط باشند به طوری که $\deg f \leq n$. در این صورت

$$f(g) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(h)(g-h)^k.$$

(در اینجا $f(g)$ به معنی «ترکیب f با g » است.)

در بقیه تمرینها به تعریف زیر نیازمندیم: اگر f, g ، و p چندجمله‌ایها بروی هیأت F باشند و $p \neq 0$ ، گوییم f همنهشت با g به پیمانه p است، هرگاه $(f-g)(p) = 0$ باشد. هرگاه f همنهشت با g به پیمانه p باشد، می‌نویسیم

$$f \equiv g \pmod p.$$

۵. بازای هر چندجمله‌ای غیر صفر p ، ثابت کنید همنهشتی به پیمانه p رابطه‌ای هم ارزی است؛ یعنی،

$$\text{(الف) انعکاسی است: } f \equiv f \pmod p.$$

(ب) متقارن است: اگر $g \equiv f \pmod{p}$, آنگاه $f \equiv g \pmod{p}$

(پ) متعدد است: اگر $f \equiv h \pmod{p}$, $g \equiv h \pmod{p}$ و $f \equiv g \pmod{p}$ آنگاه

۶. فرض کنید $f_1 \equiv g_1 \pmod{p}$ و $f \equiv g \pmod{p}$

(الف) ثابت کنید $f + f_1 \equiv g + g_1 \pmod{p}$

(ب) ثابت کنید $ff_1 \equiv gg_1 \pmod{p}$

۷. از تمرین ۶ برای اثبات مطلب زیراستفاده کنید اگر f, g, h و p چندجمله‌ایها بی

بررسی هیأت F باشند و $p \neq 0$ و اگر همچنین $f \equiv g \pmod{p}$ و $h(f) \equiv h(g) \pmod{p}$

$h(f) \equiv h(g) \pmod{p}$

۸. اگر p چندجمله‌ای تحویل ناپذیری باشد و $f, g \equiv 0 \pmod{p}$, ثابت کنید یا

یا $f \equiv 0 \pmod{p}$. اگر p تحویل پذیر نباشد، مثالی بیاورید که نشان دهد مطلب فوق

نادرست است.

۱۰. حلقه‌های جابجایی

در این فصل، به اثبات احکام اصلی دترمینانهای ماتریس‌های مربعی می‌پردازیم. این امر را نه تنها برای ماتریس‌های بر روی هیأتها، بلکه همچنین برای ماتریس‌هایی که در ایهای آنها «اسکالر» هایی از نوع عمومی تری هستند، انجام می‌دهیم. این تعمیم دو دلیل دارد. اول آنکه، در فصل بعد در موارد معینی ناگزیر از بحث درباره دترمینانهای ماتریس‌هایی با در ایهای چندجمله‌ای هستیم. دوم آنکه، در آنچه که درباره دترمینانها خواهیم آورد، یکی از اصول موضوع هیأتها، یعنی اصلی که وجود معکوس ضربی هر عنصر غیر صفر را تضمین می‌کند، هیچ گونه نقشی ندارد. به این دلایل، مناسب است که نظریه دترمینانها را برای ماتریس‌هایی که در ایهای آنها عناصری از یک حلقة جابجایی با عنصر همانی باشند، تعمیم دهیم.

- تعریف. یک حلقة عبادت است از یک مجموعه K همراه با دو عمل $\rightarrow x+y$ و $\rightarrow xy$ که شرایط ذیر داراودند:
- (الف) $x, y \in K$ تحت عمل $\rightarrow x+y$ یک گروه جابجایی است (K تحت جمع یک گروه جابجایی است);
 - (ب) $(xy)z = x(yz)$ (ضرب شرکت پذیر است);
 - (پ) $(y+z)x = yx + zx$ و $x(y+z) = xy + xz$ (دو قانون پخش‌پذیری)

پرقدارند).

اگر به ازای هر x و y از K داشته باشیم $xy = yx$ ، گوییم حلقه K جابجایی است. اگر عنصری چون 1 در K یافت شود به طوری که به ازای هر x ، $x = x \cdot 1 = x$ ، گوییم K حلقه‌ای با عنصر همانی است و 1 را عنصر همانی K می‌نامیم.

در اینجا حلقه‌های جابجایی با عنصر همانی مورد نظر ما هستند. چنین حلقه‌ای را می‌توان به طور خلاصه به صورت مجموعه‌ای چون K همراه با دو عمل توصیف کرد که همه اصول موضوع هیأت را که در فصل 1 ارائه شدارضا می‌کنند مگر احتمالاً اصل موضوع (A) و شرط $0 \neq 1$ را. بدین سان، یک هیأت عبارت است از حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی غیر صفر که به هر x غیر صفر، عنصر $-x$ با خاصیت $1 = -xx$ متاظر شود. مجموعه اعداد صحیح همراه با اعمال معمولی، یک حلقه جابجایی با عنصر همانی است، اما یک هیأت نیست. مجموعه همه چندجمله‌ایهای بر روی یک هیأت همراه با جمع و ضربی که برای چندجمله‌ایها تعریف کردیم حلقه جابجایی دیگری با عنصر همانی است.

اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هر ماتریس $m \times n$ بر روی K را به صورت تابعی چون A از مجموعه جفت‌های (j, i) از اعداد صحیح $m \leq i \leq 1$ و $1 \leq j \leq n$ در K تعریف می‌کنیم. طبق معمول چنین ماتریسی را با آرایه‌ای مستطیلی که دارای m سطر و n ستون باشد، نمایش می‌دهیم. مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای بر روی K ، به همان نحو که برای ماتریسهای بر روی هیأتها تعریف شدند، تعریف می‌شوند:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}.$$

جمع آنگاه تعریف می‌شود که A و B دارای تعداد سطرها و نیز تعداد ستونهای مساوی باشند، و ضرب هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. خواص جبری اساسی این اعمال در اینجا هم معتبرند. مثلاً

$$(AB)C = A(BC), A(B+C) = AB + AC$$

همچون مورد هیأتها، عناصر K را هم اسکالر می‌نامیم. با این قرار، ترکیب خطی سطرها یا ستونهای هر ماتریس را می‌توان همچون گذشته، تعریف کرد. به طور اجمالی، به استثنای تاییجی که به « تقسیم » پذیری در K مربوط‌اند، کلیه احکامی را که قبلاً برای ماتریسهای بر روی هیأتها به دست آورده براتای ماتریسهای بر روی K نیز معتبرند.

۴۰۵. تابع دترمینان

فرض کنیم K یک حلقه جابجایی با عنصر همانی باشد. می‌خواهیم به هر ماتریس $n \times n$ (مربعی) بر روی K ، اسکالری (عنصری از K) که به عنوان دترمینان آن ماتریس شناخته

می‌شود، اختصاص دهیم. این امکان وجود دارد که دترمینان ماتریس مربعی A را تنها با نوشتن فرمولی بر حسب درایه‌های A تعریف کنیم. در این صورت، خواص گوناگون دترمینان را می‌توان از این فرمول به دست آورد. اما، چنین فرمولی نسبتاً پیچیده است، و ما برای دست یابی به مزیتی تکنیکی به صورت زیر عمل می‌کنیم. یک «تابع دترمینان» روی $n \times n$ را چنان تابعی تعریف می‌کنیم که^۴ به هر ماتریس $n \times n$ بر روی K اسکالری را تخصیص بدهد و دارای خواص ویژه زیر باشد: این تابع، به عنوان تابعی از هر یک از سطرهای ماتریس، خطی باشد؛ مقدار آن روی هر ماتریس با دو سطر متساوی برابر صفر باشد؛ و مقدار آن روی ماتریس همانی $n \times n$ برابر با ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که چنین تابعی وجود دارد و سپس یکتا بودن آن را اثبات می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که دقیقاً یک تابع با این ویژگیها وجود دارد. هنین اثبات یکتا بودی، فرمولی صریح برای دترمینان و نیز چندین خاصیت مفید آن را به دست خواهیم آورد.

این بخش به تعریف «تابع دترمینان» و به اثبات وجود حداقل یک تابع دترمینان اختصاص دارد.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جا به جایی با عنصر همانی، n عددی صحیح مثبت، و D تابعی باشد که به هر ماتریس $n \times n$ مانند A بر روی K اسکالر $D(A)$ از $D(A)$ اهتماً $D(A)$ را می‌نامیم. D تابعی خطی است هرگاه به اذای هر i ، $1 \leq i \leq n$ تابعی خطی از n عین سطر با ثابت نگاه داشتن $(1-n)$ سطر دیگر باشد.

این تعریف نیازمند چند توضیح است. اگر D تابعی از $n \times n$ در K و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ سطرهای ماتریس A باشند، می‌نویسیم

$$D(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

یعنی، D را به عنوان تابعی از سطرهای A نیز به شمار می‌آوریم. در این صورت، این بیان که D تابعی n خطی است، بدین معنی است که

$$D(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \alpha'_i, \dots, \alpha_n) = cD(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n). \quad (1-5)$$

اگر همه سطرهای به جز سطر i را ثابت نگاهداریم و D را به عنوان تابعی از سطر i محسوب کنیم، معمولاً مناسبتر است که به جای $D(A)$ $D(\alpha_i)$ بنویسیم (یعنی $D(\alpha_i)$). بدین صورت، می‌توانیم (۱-۵) را به صورت

$$D(c\alpha_i + \alpha'_i) = cD(\alpha_i) + D(\alpha'_i),$$

به شرطی که معنی آن دوشن باشد، خلاصه کنیم.

مثال ۱۰. فرض کنیم اعداد صحیح مثبت k_1, k_2, \dots, k_n ، $1 \leq k_i \leq n$ ، و عنصر a از

مفروض باشند. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A بر روی K ، تعریف می‌کنیم

$$D(A) = \alpha A(1, k_1) \cdots A(n, k_n). \quad (2-5)$$

در این صورت تابع D تعریف شده توسط (2-5) تابعی n خطی است. زیرا، اگر D را به عنوان تابعی از سطر i ماتریس A با ثابت نگاهداشت سطرهای دیگر بینگاریم، می‌توانیم بنویسیم

$$D(\alpha_i) = A(i, k_i)b.$$

در اینجا b عنصر ثابتی از K است. گیریم $\alpha'_i = (A'_{i1}, \dots, A'_{in})$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} D(c\alpha_i + \alpha'_i) &= [cA(i, k_i) + A'(i, k_i)]b \\ &= cD(\alpha_i) + D(\alpha'_i). \end{aligned}$$

پس، D تابعی خطی از هر یک از سطرهای A است.
تابع n خطی ویژه‌ای از این نوع، تابع

$$D(A) = A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}$$

است. به عبارت دیگر، «حاصل ضرب درایه‌های قطری» تابعی n خطی روی $K^{n \times n}$ است.

مثال ۳. ذیلاً همه توابع 2 خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K رامی‌باییم.
فرض کنیم D چنین تابعی باشد. اگر سطرهای ماتریس همانی 2×2 را با ϵ_1 و ϵ_2 نشان دهیم، داریم

$$D(A) = D(A_{11}\epsilon_1 + A_{12}\epsilon_2, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2).$$

با استفاده از این حکم که D تابعی 2 خطی است مطابق (1-5) داریم

$$\begin{aligned} D(A) &= A_{11}D(\epsilon_1, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2) + A_{12}D(\epsilon_1, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2) \\ &= A_{11}A_{21}D(\epsilon_1, \epsilon_1) + A_{11}A_{22}D(\epsilon_1, \epsilon_2) + A_{12}A_{21}D(\epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad + A_{12}A_{22}D(\epsilon_2, \epsilon_2). \end{aligned}$$

از این رو، D توسط چهار اسکالر

$$D(\epsilon_2, \epsilon_2), D(\epsilon_2, \epsilon_1), D(\epsilon_1, \epsilon_2), D(\epsilon_1, \epsilon_1)$$

کاملاً تعیین می‌شود. خواسته باشد باسانی بتواند نشان دهد که اگر a, b, c و d چهار اسکالر دلخواه در K باشند و تعریف کنیم

$$D(A) = A_{11}A_{21}a + A_{11}A_{22}b + A_{12}A_{21}c + A_{12}A_{22}d$$

آنگاه D تابعی 2 خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K است و

$$\begin{aligned} D(\epsilon_1, \epsilon_1) &= a, & D(\epsilon_1, \epsilon_2) &= b, \\ D(\epsilon_2, \epsilon_1) &= c, & D(\epsilon_2, \epsilon_2) &= d. \end{aligned}$$

لهم، هر ترکیب خطی از توابع n خطی، خود n خطی است.
اثبات. کافی است ثابت کنیم که ترکیبی خطی از دو تابع n خطی تابعی است
خطی. گیریم D و E توابعی n خطی باشند. اگر a و b به K تعلق داشته باشند، بدیهی است که ترکیب خطی $aD + bE$ توسط

$$(aD + bE)(A) = aD(A) + bE(A)$$

تعریف می‌شود. از این‌رو، اگر همه سطرها، به جز سطر i ، را ثابت نگاهداریم

$$\begin{aligned} (aD + bE)(c\alpha_i + \alpha'_i) &= aD(c\alpha_i + \alpha'_i) + bE(c\alpha_i + \alpha'_i) \\ &= acD(\alpha_i) + aD(\alpha'_i) + bcE(\alpha_i) + bE(\alpha'_i) \\ &= c(aD + bE)(\alpha_i) + (aD + bE)(\alpha'_i). \quad \square \end{aligned}$$

اگر K یک هیأت و V مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی K باشند، لس بالا بیان می‌کند که مجموعه توابع n خطی روی V زیرفضای همه توابع از V در K است.

مثال ۳. فرض کنیم تابع D روی ماتریسهای 2×2 بر روی K توسط

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (3-5)$$

تعریف شده باشد. در این صورت، D مجموع دو تابع از نوع توصیف شده در مثال ۱ است:

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1(A) = A_{11}A_{22}$$

$$D_2(A) = -A_{12}A_{21}.$$

بنابر لس بالا، D تابعی 2 خطی است. خوانده‌ای که مختصر تجربه‌ای با دترمینانها داشته باشد این مطلب را شکفت آور نخواهد یافت؟ زیرا، (۳-۵) چیزی جز تعریف معمولی دترمینان یک ماتریس 2×2 نیست. بدیهی است تابع D که هم‌اکنون تعریف شدنونه توابع 2 خطی نیست. این تابع دارای خواص ویژه بسیاری است که اینک به ذکر برخی از آنها می‌پردازیم. اول، اگر I ماتریس همانی 2×2 باشد، آنگاه $D(I) = 1$ ؛ یعنی، $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$. دوم، اگر دو سطر A برای بر باشند، داریم

$$D(A) = A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} = 0.$$

سوم، اگر A' ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای ماتریس A ای 2×2 حاصل شده باشد، آنگاه $D(A') = -D(A)$ ؛ زیرا

$$\begin{aligned}
 D(A') &= A'_{11}A'_{22} - A'_{12}A'_{21} \\
 &= A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \\
 &= -D(A).
 \end{aligned}$$

تعریف. تابع n خطی D ا متناوب گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\text{(الف) وقتی دو سطر } A \text{ متساوی باشند، } D(A) = 0.$$

$$\text{(ب) اگر ماتریس } A' \text{ از تعویض دو سطر } A \text{ حاصل شده باشد، آنگاه}$$

$$D(A') = -D(A).$$

ذیلاً ثابت می‌کنیم هر تابع n خطی D که شرط (الف) را برآورد، خود بهمود شرط (ب) را نیز برآورد. با این وجود، برای راحتی است که در تعریف تابع n خطی متناوب هردو خاصیت را گنجانده‌ایم. خواننده احتمالاً خود درخواهد یافت که اگر D در شرط (ب) صدق کند و دو سطر از سطرهای ماتریس A متساوی باشند، آنگاه $D(A) = -D(A)$. این مطلب ما را وسوسه می‌کند حکم کنیم که در این صورت D در شرط (الف) نیز صدق می‌کند. به عنوان مثال، اگر K هیأتی باشد که در آن $0 \neq 1 + 1$ ، این مطلب درست است، ولی در حالت عمومی (الف) نتیجه‌ای از (ب) نیست.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، عددی صحیح ثبت و D تابی از ماتریسهای $n \times n$ بر روی K دارد. گوییم D تابع دترمینان است، هرگاه D خطی و متناوب باشد و $D(I) = 1$.

همچنان که قبلاً نیز بیان کردیم، نهایتاً نشان خواهیم داد که روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K دقیقاً یک تابع دترمینان وجود دارد. این مطلب در مورد ماتریسهای 1×1 بروی K بسادگی قابل مشاهده است. تابع $D(A) = a$ که با D داده شود، یک تابع دترمینان است و واضح است که این تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 است. از این گذشته در موقعیتی هستیم که تکلیف حالت $2 \times 2 = n$ را نیز معلوم کنیم. در مثال ۳ نشان داده شد که تابع

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

یک تابع دترمینان است. بعلاوه، فرمولی که در مثال ۲ ارائه شد، نشان می‌دهد که D تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2 است. زیرا نشان دادیم که به ازای هر تابع 2 خطی D

$$\begin{aligned}
 D(A) &= A_{11}A_{21}D(\epsilon_1, \epsilon_1) + A_{11}A_{22}D(\epsilon_1, \epsilon_2) + A_{12}A_{21}D(\epsilon_2, \epsilon_1) + \\
 &\quad A_{12}A_{22}D(\epsilon_2, \epsilon_2).
 \end{aligned}$$

اگر D متناوب باشد، آنگاه

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = D(\epsilon_2, \epsilon_2) = 0$$

و

$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = -D(\epsilon_1, \epsilon_2) = -D(I).$$

اگر D در شرط ۱ $D(I) = 0$ نیز صدق کند، آنگاه

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

مثال ۴. هیأت F و تابع 3×3 خطی متناوب دلخواه D روی ماتریسهای 3×3 بردوی حلقة چندجمله‌ای $F[x]$ را در نظرمی‌گیریم.
فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & -x^r \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^r \end{bmatrix}.$$

اگر سطرهای ماتریس همانی 3×3 را با $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_r$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(A) = D(x\epsilon_1 - x^r\epsilon_r, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^r\epsilon_r).$$

از آنجاکه D ، به عنوان تابعی از هرسطر، خطی است

$$\begin{aligned} D(A) &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^r\epsilon_r) - x^r D(\epsilon_r, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^r\epsilon_r) \\ &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1) + x^r D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_r) - x^r D(\epsilon_r, \epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad - x^r D(\epsilon_r, \epsilon_2, \epsilon_r). \end{aligned}$$

چون D متناوب است، داریم

$$D(A) = (x^r + x^r) D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_r).$$

نم. فرض کنیم تابع ۲ خطی D با این خاصیت باشد که به ازای هر ماتریس $A \times 2$ بردوی K با سطرهای متساوی، $D(A) = 0$. دلاین صورت D متناوب است. اثبات. آنچه که باید نشان دهیم این است که اگر A ماتریسی 2×2 باشد و A' از تعویض سطرهای A حاصل بشود، آنگاه $D(A') = -D(A)$. اگر سطرهای A را α و β بنامیم، این بدان معنی است که باید نشان دهیم $D(\beta, \alpha) = -D(\alpha, \beta)$. چون D تابعی ۲ خطی است

$$D(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = D(\alpha, \alpha) + D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) + D(\beta, \beta).$$

بنابراین $D(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = D(\alpha, \alpha) = D(\beta, \beta) = 0$. بنابراین

$$D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) = 0. \square$$

لهم. تابع $n \times n$ خطی D دوی ماتریسهای $n \times n$ بردوی K مفروض است. فرض کنیم D دادای این خاصیت باشد که هرگاه دوسطرمجاور A متساوی باشند، آنگاه $D(A) = 0$. دلایل این صداقت D متناوب است.

اثبات. باید نشان دهیم وقتی که دوسطر دلخواه A متساوی باشند آنگاه $D(A) = 0$ و نیز وقتی که A' از تعویض دوسطر دلخواه A حاصل بشود آنگاه $D(A') = -D(A)$. ابتدا، فرض می کنیم A' از تعویض دوسطر مجاور A حاصل شده باشد. شایان توجه است که برهانی که در اثبات لم قبل به کار رفت شامل این حالت نیز می شود و $D(A') = -D(A)$ را به دست می دهد.

اینک فرض می کنیم B از تعویض سطرهای i و j ماتریس A با شرط $i < j$ حاصل شده باشد. بدیهی است می توانیم B را با چند تعویض متوالی سطرهای مجاور A به طور جفت جفت به دست آوریم. از تعویض سطرهای $i+1$ با سطر $(i+1)$ شروع می کنیم و کار را ادامه می دهیم تا اینکه سطرهای i و j متساوی شوند. پس

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$$

در آیند. این عمل نیاز به $i-j=k$ تعویض سطرهای مجاور دارد. اکنون با استفاده از $(1-k)$ تعویض سطرهای مجاور، α_i را به مکان α_j منتقل می کنیم. بدینسان، B را با $k+(k-1)=2k-1$ تعویض سطرهای مجاور، از A به دست می آوریم. پس

$$D(B) = (-1)^{2k-1} D(A) = -D(A).$$

فرض می کنیم A ماتریس $n \times n$ با دوسطر متساوی، مثلاً $\alpha_i = \alpha_j$ با $i < j$ باشد: اگر $i+1=j$ ، آنگاه A دارای دوسطرمجاور متساوی است و $D(A) = 0$. اگر $i+1 > j$ ، α_i و α_j را تعویض می کنیم. ماتریس A حاصل؛ یعنی B ، دارای دوسطر مجاور متساوی است و لذا $D(B) = -D(A) = 0$. از سوی دیگر، پس $D(A) = 0$. \square

تعريف. اگر $1 < n$ و A یک ماتریس $n \times n$ بردوی K باشد، ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر i و ستون j ماتریس A با $A(i|j)$ نشان می دهیم. اگر D تابعی $(n-1) \times (n-1)$ خطی و ماتریسی $n \times n$ باشد، قرار می گذاریم که $D_{ij}(A) = D[A(i|j)]$.

قضیه ۱. فرض کنیم $1 < n$ و D تابع $(n-1) \times (n-1)$ خطی متناوبی دوی ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ بردوی K باشد. به ازای هر j ، $n \geqslant j \geqslant 1$ ، تابع E_j تعریف شده توسط

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A) \quad (4-5)$$

تابع خطی متناوبی روی ماتریسهای $n \times n$ است. اگر D یک تابع دترمینان باشد، هر E_j نیز یک تابع دترمینان است. اثبات. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، $D_{ij}(A)$ مستقل از i مین سطر A است. چون $(n-1)$ خطی است، واضح است که D_{ij} به عنوان تابعی از هر سطر، به جز سطر i ، خطی است. بنا بر این $A_{ij}D_{ij}(A)$ تابعی خطی از A است. هر ترکیب خطی از توابع خطی، خود خطی است؛ از این رو، E_j هم خطی است. برای اینکه ثابت کنیم E_j متناوب n خطی است، کافی است شاند دهیم هنگامی که A دارای دو سطر مجاور متساوی باشد $E_j(A) = 0$. فرض می کنیم $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ و $i \neq k+1$. اگر $A(i|j) = A_{(k+1)|j}$ دارای دو سطر متساوی است ولذا $D_{ij}(A) = 0$. بنا بر این

$$E_j(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{k+1+j} A_{(k+1)j} D_{(k+1)j}(A).$$

$$\alpha_k = \alpha_{k+1}$$

$$A(k|j) = A(k+1|j) \quad \text{و} \quad A_{kj} = A_{(k+1)j}$$

$$\text{در این صورت مسلم} E_j(A) = 0.$$

حال فرض می کنیم D یک تابع دترمینان باشد. اگر $I^{(n)}$ ماتریس همانی $n \times n$ باشد، آنگاه $E_j(I^{(n)}) = I^{(n-1)}(n-1 \times (n-1))$ ، یعنی $I^{(n-1)}$ است. چون $E_j(I^{(n)})$ از (۴-۵) نتیجه می شود که

$$E_j(I^{(n)}) = D(I^{(n-1)}). \quad (5-5)$$

حال ۱ $= D(I^{(n-1)})$ ، از این رو $E_j(I^{(n)}) = 0$ نیز یک تابع دترمینان است. \square

نتیجه. اگر K حلقه‌ای جا به جایی با عنصر همانی n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه حداقل یک تابع دترمینان روی $k^n \times k^n$ وجود دارد. اثبات. قبلاً وجود یک تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 بر روی K ، و حتی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K را نشان دادیم. قضیه ۱ بوضوح نشان می دهد که با در دست داشتن یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $(1-n) \times (1-n)$ ، چگونه می توان یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ را ساخت. حال، اثبات این نتیجه با استفاده از تکمیل می شود. \square

مثال ۵. فرض کنیم B ماتریسی 2×2 بر روی K باشد و

$$|B| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}.$$

در این صورت، اگر D یک تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2 باشد، آنگاه $D(B) = |B|$

نشان دادیم که این تابع روی $K^{2 \times 2}$ یکنای است. گیریم

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریسی 3×3 بر روی K باشد. اگر E_1, E_2 ، و E_3 را طبق (۴-۵) تعریف کنیم، آنگاه

$$E_1(A) = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۶-۵)$$

$$E_2(A) = -A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{23} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{32} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۷-۵)$$

$$E_3(A) = A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} - A_{23} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + A_{33} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}. \quad (۸-۵)$$

از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که E_1, E_2 ، و E_3 توابع دترمینان هستند. در واقع، چنان‌که بعداً نشان خواهیم داد، $E_1 = E_2 = E_3$ ، ولی هنوز این موضوع حتی در این حالت ساده هم روشن نیست. به صورت، این موضوع را مستقیماً با بسط هر یک از عبارات بالامی توان نشان داد. به جای انجام این کار، چند مثال خاص می‌آوریم.

(الف) فرض کنیم $K = R[x]$

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^3 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$E_1(A) = (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_2(A) = -x^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-2) \begin{vmatrix} (x-1) & x^3 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_3(A) = x^3 \begin{vmatrix} 0 & x-2 & |x-1 & x| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (x-3) \begin{vmatrix} x-1 & x \\ 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3).$$

(ب) گیریم و $K = R$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$E_1(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$E_2(A) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$E_3(A) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

تمرین

۱. هریک از عبارات زیر، یک تابع D روی مجموعه ماتریس‌های 3×3 بروی هیأت اعداد حقیقی تعریف می‌کند. در کدام یک اذاین حالات D تابعی 3 -خطی است؟

$$\text{(الف)} : D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$\text{(ب)} : D(A) = (A_{11})^2 + 3A_{11}A_{22}$$

$$\text{(پ)} : D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$$

$$\text{(ت)} : D(A) = A_{13}A_{22}A_{33} + 5A_{12}A_{23}A_{32}$$

$$\text{(ث)} : D(A) = 0$$

$$\text{(ج)} : D(A) = 1$$

۳. مستقیماً نشان دهید که سه تابع E_1 , E_2 , و E_3 تعریف شده توسط (۶-۵)، و (۷-۵) مساوی‌اند.

۴. حلقة جابجایی K با عنصر همانی مفروض است. اگر A ماتریسی 2×2 بر روی K باشد، الحاقی کلاسیک A عبارت از ماتریس 2×2 ی $\text{adj } A$ است که به صورت

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. اگر \det تابع یکتای دترمینان روی ماتریسهای 2×2 بر روی K را نمایش دهد، نشان دهید

$$:(\text{adj } A)A = A(\text{adj } A) = (\det A)I \quad (\text{الف})$$

$$\det(\text{adj } A) = \det(A) \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \text{adj}(A^t) = (\text{adj } A)^t \quad (\text{پ})$$

A^t ترانهاده A را نشان می‌دهد.

۵. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد. نشان دهید که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$. اگر A معکوس پذیر باشد، فرمولی برای A^{-1} بدست آورید.

۶. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد و $A^t = A$. نشان دهید به ازای هر اسکالر c داریم $\det(cI - A) = c^2$.

۷. زیرهیأت K از اعداد مختلط و عدد صحیح مثبت n مفروض است. فرض کنید j_1, j_2, \dots, j_n اعداد صحیح مثبتی کوچکتر از یا متساوی با n باشند. به ازای هر ماتریس $n \times n$ بر روی K تعریف می‌کنیم

$$D(A) = A(j_1, k_1)A(j_2, k_2) \cdots A(j_n, k_n).$$

ثابت کنید D تابعی n -خطی است اگر و تنها اگر اعداد صحیح j_1, j_2, \dots, j_n متمایز باشند.

۸. فرض کنید K حلقة‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. نشان دهید تابع دترمینان روی ماتریسهای A ی 2×2 بر روی K به عنوان تابعی از ستونهای A تابعی است متناوب و ۲ خطی.

۹. حلقة جابجایی K با عنصر همانی را در نظر بگیرید و تابع D روی ماتریسهای 3×3 بر روی K را با قاعدة

$$D(A) = A_{11} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{13} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

تعریف کنید. نشان دهید D به عنوان تابعی از ستونهای A متناوب و خطی است.

۹. فرض کنید K حلقه‌ای جا بجا یابی با عنصرهای $n \times n$ باشد و D تابع خطی متناوب روی ماتریس‌های $n \times n$ بر روی K . نشان دهید

- (الف) هرگاه یکی از سطرهای A برابر باشد، $D(A) = 0$.
 (ب) هرگاه B از A با اختلاف کردن مضربی اسکالری از یک سطر A به سطری دیگر حاصل شده باشد، $D(B) = D(A)$.

۱۰. هیأتی چون F ، یک ماتریس A 3×2 بر روی F ، و بردار (c_1, c_2, c_3) از F^3 تعریف شده توسط

$$c_1 = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{11} \\ A_{23} & A_{21} \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

داده شده‌اند. نشان دهید

- (الف) $2 = \text{رتبه}(A)$ اگر و تنها اگر $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$ ؛
 (ب) اگر A دارای رتبه ۲ باشد، آنگاه (c_1, c_2, c_3) پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه معادلات $AX = 0$ است.

۱۱. فرض کنید K حلقه‌ای جا بجا یابی با عنصرهای 2×2 تابع خطی متناوب روی ماتریس‌های 2×2 بر روی K باشد. نشان دهید به ازای هر A, B ، $D(A) = (\det A)D(I)$ و $D(AB) = D(A)D(B)$. حال از این نتیجه استفاده کنید (هیچ محاسبه‌ای روی درایه‌ها جایز نیست) و نشان دهید که به ازای هر دو ماتریس A و B 2×2 بر روی K داریم

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

۱۲. یک هیأت F و یک تابع D روی ماتریس‌های $n \times n$ بر روی F (با مقادیر در F) داده شده‌اند. فرض کنید به ازای هر A, B ، $D(AB) = D(A)D(B)$. نشان دهید که به ازای هر A داریم $D(I) = 1$ یا $D(A) = 0$. در حالت اخیر، نشان دهید هنگامی که A معکوس پذیر باشد آنگاه $D(A) \neq 0$.

۱۳. فرض کنید R هیأت اعداد حقیقی باشد و تابع D روی ماتریسهای 2×2 بر روی R با مقادیر در R چنان باشد که به ازای همه A ها و B ها، $D(AB) = D(A)D(B)$. همچنین فرض کنید

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \neq D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

مطلوب زیر را اثبات کنید:

- (الف) $D(0) = 0$ ؛
 (ب) هر گاه $A^2 = 0$ آنگاه $D(A) = 0$ ؛
 (پ) هر گاه B از تبعویض سطرها (یا ستونهای A) حاصل شده باشد، آنگاه $D(B) = -D(A)$ ؛
 (ت) هر گاه یک سطر (یا یک ستون) A صفر باشد آنگاه $D(A) = 0$ ؛
 (ث) هر گاه A منفرد باشد آنگاه $D(A) = 0$.

۱۴. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد. در این صورت، مجموعه همه ماتریسهای به صورت $f(A)$ که در آن f یک چندجمله‌ای بر روی F است حلقه‌ای است جابجایی با عنصر همانی که آن را با K نمایش می‌دهیم. اگر B ماتریسی 2×2 بر روی K باشد، آنگاه دترمینان B ، ماتریسی 2×2 بر روی F و به صورت $f(A)$ است. فرض کنید I ماتریس همانی 2×2 بر روی F و B ماتریس 2×2 بر روی K به این صورت باشد که

$$B = \begin{bmatrix} A - A_{11}I & -A_{12}I \\ -A_{21}I & A - A_{22}I \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $f = x^2 - (A_{11} + A_{22})x + \det A = f(A)$ ، که در آن $\det B = f(A)$ ، و همچنین نشان دهید $0 = f(A)$.

۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان

در این بخش، یکتایی تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K را اثبات می‌کنیم. اثبات، به طور کاملاً طبیعی، ما را به درنظر گرفتن جایگشتها و برخی از خواص بنیانی آنها رهنمون می‌کند.

فرض کنیم D تابع n خطی متناوبی روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K باشد. ماتریس A $n \times n$ بر روی K با سطرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را در نظر می‌گیریم. اگر سطرهای ماتریس همانی $n \times n$ بر روی K را با $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ نشان دهیم، داریم

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n A(i, j) \epsilon_j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (9-5)$$

از این رو

$$D(A) = D\left(\sum_j A(1, j) \epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) \\ = \sum_j A(1, j) D(\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

اکنون اگر ϵ_k را جایگزین α_2 کنیم، می بینیم که

$$D(\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_k A(2, k) D(\epsilon_j, \epsilon_k, \dots, \alpha_n).$$

پس

$$D(A) = \sum_{j, k} A(1, j) A(2, k) D(\epsilon_j, \epsilon_k, \dots, \alpha_n).$$

سپس در $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ را به جای α_3 می گذاریم، والی آخر سرانجام برای $D(A)$ به عبارتی پیچیده ولی از نظر تئوری مهم دست می باییم و آن:

$$D(A) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A(1, k_1) A(2, k_2) \cdots A(n, k_n) \times \\ D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \dots, \epsilon_{k_n}). \quad (10-5)$$

در (10-5) مجموع به ازای همه دنبالهای (k_1, k_2, \dots, k_n) از اعداد صحیح مثبت نایشتر از n محاسبه می شود. این مطلب نشان می دهد که D مجموعی متناهی از توابع از نوع توصیف شده توسط (2-5) است. باید توجه داشت که (10-5) صرفاً نتیجه ای از فرض n خطی بودن D است، و نیز اینکه حالت خاصی از (10-5) درمثال ۲ به دست آمد. چون D متناوب است

$$D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \dots, \epsilon_{k_n}) = 0$$

با این شرط که دو نمایه i متساوی باشند. دنباله (k_1, k_2, \dots, k_n) از اعداد صحیح مثبت نایشتر از n با این خاصیت که هیچ دوتایی از k_i ها متساوی نباشد، یک جایگشت از درجه n نامیده می شود. بنابراین، در (10-5)، ضرورت دارد فقط عمل جمع، بر روی دنبالهایی صورت گیرد که جایگشتها بی از درجه n هستند.

چون هر دنباله متناهی با هر n تابعی تابعی است تعريف شده روی اولین n عدد صحیح مثبت، هر جایگشت از درجه n را می توان به عنوان تابعی یک به یک از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به روی خودش تعریف کرد. چنین تابعی، مثلاً σ ، با n تابعی $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ متناظر است و از این رو چیزی جزو قاعده ای برای ترتیب بندی

اعداد ۱، ۲، ۰۰۰... به یک روش کاملاً خوش تعریف نیست.

اگر D تابع خطی متناوبی باشد و A ماتریسی $n \times n$ بر روی K ، آنگاه داریم

$$D(A) = \sum A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) \quad (11-5)$$

که در آن مجموع بهازای جایگشت‌های متمایز σ از درجه n محاسبه می‌شود.
حال نشان می‌دهیم که

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = \pm D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \quad (12-5)$$

که در آن علامت \pm تنها به جایگشت σ وابسته است. دلیل این نکته به شرح زیر است.
دباله $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ را می‌توان از دنباله $(1, 2, \dots, n)$ با تعدادی متناهی تعویض جفتی عناصر بدست آورد. مثلاً، اگر $\sigma_1 \neq 1$ ، می‌توان جای ۱ و σ_1 را عوض کرد و $(\sigma_1, 1, \dots, \sigma_n)$ را بدست آورد. با ادامه این راه، پس از حداقل n بار تعویض جفتهاي از اين نوع به دنباله $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ دست می‌یابیم. چون D متناوب است، هر بار که دو سطر ϵ_i و ϵ_j را تعویض کنیم، علامت مقدار آن هم تغییر می‌کند. پس، اگر از $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ با m تعویض از جفتهاي (i, j) به $(1, 2, \dots, n)$ داریم، بررسیم،

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (-1)^m D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n).$$

در حالت خاص، اگر D یک تابع دترمینان باشد

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (-1)^m \quad (13-5)$$

که در آن m تنها به σ وابسته است و نه به D . بنابراین، همه توابع دترمینان، به ماتریسی با سطرهای $\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}$ یک مقدار تخصیص می‌دهند، و این مقدار یا ۱ است یا -1 .
حکمی بنیانی درمورد جایگشت‌ها به شرح زیر است: اگر σ جایگشتی از درجه n باشد، می‌توان از دنباله $(1, 2, \dots, n)$ ، با تعویضهاي متوالی از جفتها، به دنباله $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ رسید. گرچه این امر می‌تواند به طرق گوناگون انجام شود، ولی بدون توجه به چگونگی انجام آن، تعداد تعویضهاي به کار رفته یا همواره زوج است و یا همواره فرد. در این صورت، جایگشت بترتیب زوج یا فرد نامیشه می‌شود. علامت جایگشت σ توسط

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & \text{هر گاه } \sigma \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{هر گاه } \sigma \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود. در اینجا نماد « σ » عدد صحیح ۱ را نشان می‌دهد.
ذیلاً نشان خواهیم داد که این خاصیت بنیانی جایگشت‌ها را می‌توانیم از مطالعی که هم‌اکنون درمورد توابع دترمینان می‌دانیم نیز بدست آوریم. اما، عجالتاً این مطلب را

دانسته فرض می کنیم. پس، عدد صحیح m موجود در $(13-5)$ همواره زوج است هر گاه σ جایگشتی زوج باشد، و همواره فرد است هر گاه σ جایگشتی فرد باشد. در این صورت، به ازای هر تابع n خطی متناظر D داریم

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (\operatorname{sgn} \sigma) D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$$

و با استفاده از $(11-5)$ داریم

$$D(A) = \left[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) \right] D(I). \quad (14-5)$$

بدیهی است که I ماتریس همانی $n \times n$ را نشان می دهد.

از $(14-5)$ می توان دریافت که دقیقاً یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K وجود دارد. هر گاه این تابع را با \det نمایش دهیم، داریم

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) \quad (15-5)$$

که در آن مجموع به ازای جایگشتهای متمایز σ از درجه n محاسبه می شود. این مطالب رسماً به صورت زیر خلاصه می شوند.

قضیه ۳. فرض کنیم K حلقه ای جا بجا یی با عنصر همانی و عددی صحیح مثبت باشد. دقیقاً یک تابع دترمینان دوی مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی K وجود دارد، و این تابع همان تابع \det تعریف شده در $(15-5)$ است. اگر D تابع خطی متناظر دوی $K^{n \times n}$ باشد، آنگاه به ازای هر ماتریس A

$$D(A) = (\det A) D(I).$$

این همان قضیه ای است که در جستجویش بودیم، اما کمبودی در اثبات آن وجود دارد. این کمبود عبارت از اثبات این مطلب است که به ازای هر جایگشت مفروض σ و قتنی τ تعویض جفتها از $(1, 2, \dots, n)$ به $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ بر سیم، تعداد تعویضها یا همواره زوج است یا همواره فرد. این حکم بنیانی مربوط به ترکیبات، بدون هرگونه رجوعی به دترمینانها قابل اثبات است؛ با این وجود، مایلیم نشان دهیم که چگونه این واقعیت از وجود یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ نتیجه می شود.

فرض کنیم K حلقه اعداد صحیح باشد و D تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K . σ را جایگشتی از درجه n می گیریم و فرض می کنیم از $(1, 2, \dots, n)$ با m تعویض از جفتهای (i, j) ، $i \neq j$ ، به $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ بر سیم. چنانکه در $(13-5)$ نشان دادیم

$$(-1)^m = D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n})$$

یعنی، عدد $(-1)^m$ باید مقدار D روی ماتریس با سطرهای $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$ باشد. اگر

$$D(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) = 1$$

آنگاه، m لزوماً زوج است و اگر

$$D(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) = -1$$

آنگاه، m حتماً فرد است.

چون فرمولی صریح برای دترمینان ماتریسهای $n \times n$ در دست هست و این فرمول حاوی جایگشتهای از درجه n است، این بخش را با چند مشاهده دیگر در مورد جایگشتها به پایان می‌رسانیم. ابتدا، متذکر می‌شویم که دقیقاً $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ جایگشت از درجه n وجود دارد. زیرا، اگر σ چنین جایگشتی باشد، n امکان برای انتخاب σ_1 وجود دارد؛ وقتی این انتخاب صورت گرفت، $(1-n)$ انتخاب برای σ_2 موجود است، سپس $(n-2)$ انتخاب برای σ_3 ، و الی آخر. بنابراین

$$n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

جایگشت مانند σ وجود دارد. پس، فرمول (۱۵-۵) برای $\det(A)$ ، این تابع را به صورت مجموعی از $n!$ جمله، یک جمله به ازای هر جایگشت از درجه n ، بدست می‌دهد. هر جمله مفروض حاصل ضربی چون

$$\sigma(1, \sigma_1) \dots \sigma(n, \sigma_n)$$

از n درایه A است، یک درایه از هر سطر و یکی از هر ستون با علامتی «+» یا «-» بر حسب اینکه σ جایگشتی زوج یا جایگشتی فرد باشد.

وقتی جایگشتها به عنوان توابعی یک به یک از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به روی خودش محسوب شوند، تعریف یک نوع ضرب برای جایگشتها میسر می‌شود. حاصل ضرب σ و τ بسادگی می‌تواند تابع مرکب $\sigma\tau$ با تعریف

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

باشد. اگر σ جایگشت همانی، $i = (\sigma(i))$ را نشان دهد، آنگاه هر σ دارای یک معکوس σ^{-1} است که

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

این مشاهدات را می‌توان با این گفته که مجموعه جایگشتها از درجه n تحت عمل ترکیب یک گروه است خلاصه کرد. این گروه غالباً گروه متنقارن درجه n نامیده می‌شود.

از دیدگاه حاصل ضرب جایگشتها، خاصیت بنیانی علامت هر جایگشت این است که

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau). \quad (۱۶-۵)$$

به بیان دیگر، $\sigma\tau$ جایگشتی زوج است هرگاه σ و τ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد، در حالی که $\sigma\tau$ فرد است هرگاه یکی از دو جایگشت فرد و دیگری زوج باشد. این مطلب

را می‌توان از تعریف علامت، بر حسب تعویضهای متواالی جفتهای (j, i) دریافت. با این وجود، نشان دادن چگونگی حصول رابطه $\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)$ از یک خاصیت بنیانی دترمینانها ممکن است آموزنده هم باشد.

گیریم K حلقة اعداد صحیح و σ و τ جایگشتهاي از درجه n باشند. $\epsilon_{ij}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ij}$ را سطرهای ماتریس همانی $n \times n$ بر روی K می‌گیریم و فرض می‌کنیم A ماتریس با سطرهای $\epsilon_{ij}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ij}$ و B ماتریس با سطرهای $\epsilon_{ii}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ii}, \epsilon_{ij}$ باشد. ϵ_{ii} سطر i درستیقاً شامل یک درایه غیرصفر، یعنی همان 1 واقع در ستون τi است. از اینجا بسادگی مشاهده می‌شود که ϵ_{ii} همان زمین سطر ماتریس حاصل ضرب AB است. حال

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \text{sgn}(\sigma\tau) \det(B) = \text{sgn}\sigma \det(A) = \text{sgn}\tau \\ \text{sgn}(\sigma\tau) &= (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau) \end{aligned}$$

از این رو، بلا فاصله پس از اثبات قضیه زیر داریم

قضیه ۳. فرض کنیم K حلقة‌ای جابجایی با عنصر همانی، A و B ماتریسهایی $n \times n$ بر روی K باشند. در این صورت

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

اثبات. B را ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی K می‌گیریم و به ازای هر ماتریس A ی $n \times n$ تعریف می‌کنیم $D(A) = \det(AB)$. اگر سطرهای A را با $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\alpha_1 B, \dots, \alpha_n B).$$

در اینجا $\alpha_i B$ ماتریسی $n \times 1$ را نشان می‌دهد که حاصل ضرب ماتریس α_i ی $n \times n$ و ماتریس B ی $n \times 1$ است. از آنچه که

$$(c\alpha_i + \alpha'_i)B = c\alpha_i B + \alpha'_i B$$

و α_i تابعی n خطی است، بسادگی دیده می‌شود که D تابعی n خطی است. اگر $\alpha_i = \alpha_j$ باشیم، آنگاه $\alpha_i B = \alpha_j B$ و چون \det متناوب است

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

از این رو، D نیز متناوب است. پس D یک تابع n خطی متناوب است، و بنا بر قضیه ۲

$$D(A) = (\det A)D(I).$$

اما بر این

$$\det(AB) = D(A) = (\det A)(\det B). \quad \square$$

حکم $\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)$ ، تنها یکی از چند نتیجه قضیه ۳ است. بعضی از این نتیجه‌ها را در بخش بعد ملاحظه خواهیم کرد.

تمرین

۱. اگر K حلقه‌ای جا بجایی با عنصر همانی و A ماتریسی بر روی K به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

باشند، نشان دهید $\det A = 0$.

۲. ثابت کنید دترمینان ماتریس و اندرموند

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

برابر $(b-a)(c-a)(c-b)$ است.

۳. شش جایگشت درجه ۳ را به طور ضریب بنویسید و مشخص کنید کدام فرد و کدام زوج است، و آنها را در ارائه فرمول کامل (۱۵-۵) برای دترمینان یک ماتریس 3×3 به کار ببرید.

۴. فرض کنید σ و τ جایگشتهایی از درجه ۴ باشند که با $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1, \tau_1 = 3, \tau_2 = 1, \tau_3 = 2, \tau_4 = 4$ تعریف شده‌اند.

(الف) σ فرد است یا زوج؟ τ فرد است یا زوج؟

(ب) $\sigma\tau$ و $\tau\sigma$ را بیابید.

۵. اگر A ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری بر روی یک هیأت باشد، نشان دهید $\det A \neq 0$.

۶. A ماتریسی 2×2 بر روی یک هیأت است. ثابت کنید $\det(I+A) = 1 + \det A$ و $\text{tr}(A) = 0$. اگر و تنها اگر $\det A = 0$.

۷. ماتریس $n \times n$ مانند A مثلثی نامیده می‌شود، هر گاه $A_{ij} = 0$ وقتی که $j > i$ ، یا هر گاه $A_{ij} = 0$ وقتی که $i > j$. ثابت کنید که دترمینان هر ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب $A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$ از درایه‌های قطری آن است.

۸. فرض کنید A ماتریسی 3×3 بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس $A - xI$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم؛ درایه A_{ij} ، این ماتریس چندجمله‌ای

است. اگر $f = \det(xI - A) = \delta_{ij}x - A_{ij}$ درجه ۳ است. اگر به ازای اعداد مختلف c_1, c_2, c_3 را داشته باشیم

$$f = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$$

ثابت کنید

$$\cdot c_1 c_2 c_3 = \det A \quad \text{و} \quad c_1 + c_2 + c_3 = \operatorname{tr}(A)$$

۹. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. اگر σ جایگشتی از درجه n باشد، ثابت کنید که تابع

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

یک عملگر خطی معکوس پذیر روی F^n است.

۱۰. فرض کنید F یک هیأت، n عددی صحیح مثبت، و S مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. فرض کنید V فضای برداری همه توابع از S در F ، و W مجموعه توابع n خطی متناوب روی S باشد. ثابت کنید W زیرفضایی از V است. بعد W چند است؟

۱۱. عملگر خطی T روی F^n داده شده است. قابع D_T را به صورت

$$D_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n).$$

تعريف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید D_T یک تابع n خطی متناوب است.

(ب) اگر

$$c = \det(T\epsilon_1, \dots, T\epsilon_n)$$

نشان دهید که به ازای هر n بردار داده شده $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داریم

$$\det(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = c \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

(پ) اگر B پایه مرتبی برای F^n و A ماتریس T در پایه مرتب B باشد، نشان دهید $\det A = c$.

(ت) فکر می‌کنید چه نامی برای اسکالر c مناسب است؟

۱۲. اگر σ جایگشتی از درجه n و A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F با بردارهای سط्रی $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ باشد، فرض کنید $\sigma(A)$ ماتریس $n \times n$ با بردارهای سطري $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را نمایش دهد.

(الف) ثابت کنید $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$ و در حالت خاص $\sigma(I) = I$.

(ب) اگر T عملگر خطی تمرین σ باشد، ثابت کنید ماتریس T در پایه مرتب استاندۀ برابر (I) است.

(پ) آیا $(I)^{-\sigma}$ ماتریس $(I)\sigma$ است؟

(ت) آیا این درست است که $\sigma(A)$ با A مشابه است؟

۱۳. ثابت کنید تابع علامت روی جایگشتها به معنی زیر یکتاست. اگر f تابعی باشد که بهر جایگشت درجه n یک عدد صحیح را تخصیص بدهد و اگر $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$ باشد آنگاه f یا متعدد است یا متعدد 1 ، و یا تابع علامت است.

۴.۵ چند خاصیت دیگر دترمینان

در این بخش به شرح برخی از خواص مفید تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ می‌پردازیم. شاید اولین نکته‌ای را که باید خاطر نشان کنیم، مطلب ذیل باشد. در بحث سطرهای A نقش ممتازی را ایفا کردند. چون تفاوتی اساسی بین سطرهای و ستونها وجود ندارد، می‌توان انتظار داشت که $\det A$ تابع n خطی متداولی از ستونهای A هم باشد. در واقع چنین است و برای اثبات آن کافی است نشان دهیم

$$\det(A^t) = \det(A) \quad (17-5)$$

که در آن A^t نمایشگر ترانهاده A است.

اگر σ جایگشتی از درجه n باشد،

$$A^t(i, \sigma i) = A(\sigma i, i).$$

در این صورت بنا به عبارت (۱۵-۵) داریم

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(\sigma 1, 1) \cdots A(\sigma n, n).$$

وقتی که $j^{-1} i = \sigma^{-1} i$ داریم $A(\sigma i, i) = A(j, \sigma^{-1} j) = A(j, \sigma^{-1} j)$. از این رو

$$A(\sigma 1, 1) \cdots A(\sigma n, n) = A(1, \sigma^{-1} 1) \cdots A(n, \sigma^{-1} n).$$

چون $\sigma \sigma^{-1}$ جایگشت همانی است،

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \quad (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \sigma^{-1}) = 1$$

بعلاوه، چون σ روی همه جایگشتها درجه n تغییر می‌کند، σ^{-1} نیز چنین تغییر می‌کند. بنابراین

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma^{-1}) A(1, \sigma^{-1} 1) \cdots A(n, \sigma^{-1} n)$$

$$= \det A$$

و (۱۷-۵) اثبات می‌شود.

در موارد معینی به محاسبه در مینانهای مشخصی نیاز نمی‌یم. هنگامی که این امر ضرورت یا بد، غالباً استفاده از حکم زیر مفید است. اگر B از A با افزودن ضربی از یک سطر A به سطری دیگر (یا ضربی از یک ستون به ستونی دیگر) حاصل شود، آنگاه

$$\det B = \det A. \quad (18-5)$$

ما این حکم را در مورد سطراها اثبات می‌کنیم. فرض کنیم B از A با افزودن $c\alpha_i$ به α_j ، بافرض $j < i$ ، حاصل بشود. چون \det ، به عنوان تابعی از n مین سطر، خطی است

$$\begin{aligned} \det B &= \det A + c \det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

حکم مفید دیگری هم بشرح زیر است. فرض کنیم ماتریسی $n \times n$ به صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

داده شده باشد. در اینجا A ماتریسی $r \times r$ ، B ماتریسی $s \times s$ ، C ماتریسی $s \times r$ ، و 0 ماتریس صفر $s \times r$ را نشان می‌دهد. در این صورت

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \quad (19-5)$$

برای اثبات این مطلب، تعریف می‌کنیم

$$D(A, B, C) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

اگر A و B را ثابت نگاهداریم، آنگاه D به عنوان تابعی از سطراهای C متناظر و خطی است. از این‌رو، بنا بر قضیه ۲

$$D(A, B, C) = (\det C) D(A, B, I).$$

که در آن I ماتریس همانی $s \times s$ است. با تفریق مضاری از سطراهای I از سطراهای B و به کار بردن حکم پیش از رابطه (۱۸-۵)، داریم

$$D(A, B, I) = D(A, 0, I).$$

حال (۱۹-۵) به عنوان تابعی از سطراهای A مسلم‌آمیز متناظر و خطی است. از این‌رو

$$D(A, 0, I) = (\det A) D(I, 0, I).$$

اما، ۱ = $D(I, 0, I)$ ، پس

$$\begin{aligned} D(A, B, C) &= (\det C) D(A, B, I) \\ &= (\det C) D(A, \circ, I) \\ &= (\det C)(\det A). \end{aligned}$$

با برهانی از همین نوع یا با استفاده از ترانهادهای داریم

$$\det \begin{bmatrix} A & \circ \\ B & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \quad (20-5)$$

مثال ۶. فرض کنیم K هیأت اعداد گویا باشد و بخواهیم دترمینان ماتریس 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

را محاسبه کنیم. با تفریق مضربهای مناسب سطر ۱ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

را به دست می آوریم و می دانیم که بنا بر (۱۸-۵) این ماتریس همان دترمینان ماتریس A را دارد. اگر $\frac{1}{4}$ سطر ۲ را از سطر ۳، و سپس $\frac{1}{3}$ سطر ۲ را از سطر ۴ کم کنیم، داریم

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

و باز دیگر $\det B = \det A$. از صورت بلوکی B برمی آید که

$$\det A = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 & -8 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4(32) = 128.$$

حال فرض کنیم $A \times n > 1$ و $n \times n$ ماتریسی روی K باشد. در قضیه ۱ با مفروض بودن تابع دترمینان روی ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ نشان دادیم که یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ چگونه ساخته می‌شود. حال که یکتاپی تابع دترمینان را ثابت کرده‌ایم، فرمول (۴-۵) مطلب زیر را بیان می‌کند. اگر هر نمایه ستونی دلخواه ز را ثابت نگاهداریم.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

اسکالر $(-1)^{i+j} \det A(i|j)$ همسازه i و j ماتریس A یا همسازه درایه i و j ماتریس A نامیده می‌شود. در این صورت، فرمول فوق برای $\det A$ به وسیله $\det A(i|j)$ همسازه‌های ستون Z_m (یا گاهی بسط به وسیله کهادهای ستون Z_m) نامیده می‌شود. اگر بنویسیم

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$$

آنگاه از فرمول فوق برمی‌آید که به ازای هر j

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{ij} C_{ij}.$$

در اینجا همسازه C_{ij} برابر دترمینان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر i و ستون j ماتریس A است. اگر $j \neq k$ ، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = 0.$$

زیرا، اگر m مین ستون A را جایگزین زمین ستون آن بکنیم، و ماتریس حاصل را B بنامیم، آنگاه B دارای دو ستون متساوی است و لذا $\det B = 0$. چون $B(i|j) = A(i|j)$ داریم

$$0 = \det B$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} B_{ij} \det B(i|j)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ik} \det A(i|j)$$

$$= \sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij}.$$

این خواص همسازه‌ها را می‌توان به صورت

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det A \quad (21-5)$$

خلاصه کرد.

ماتریس $n \times n$ ، $\text{adj}A$ ، که ترانهاده ماتریس همسازه‌های A است، العاقی کلاسیک نامیده می‌شود. بدین نحو

$$(\text{adj}A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A(j|i). \quad (22-5)$$

فرمول (21-5) را می‌توان در معادله ماتریسی

$$(\text{adj}A)A = (\det A)I \quad (23-5)$$

خلاصه کرد.

حال مایلیم که تساوی $A(\text{adj}A) = (\det A)I$ را هم اثبات کنیم. چون $A^t(i|j) = A(j|i)^t$

$$(-1)^{i+j} \det A^t(i|j) = (-1)^{i+i} \det A(j|i)$$

که به طور ساده بیانگراین مطلب است که همسازه j ، i ماتریس A^t همان همسازه i ، j است. بنابراین

$$\text{adj}(A^t) = (\text{adj}A)^t. \quad (24-5)$$

با به کار بستن (23-5) بر A^t ، بدست می‌آوریم

$$(\text{adj}A^t)A^t = (\det A^t)I = (\det A)I$$

و با ترانهش آن داریم

$$A(\text{adj}A^t)^t = (\det A)I.$$

حال با استفاده از (24-5) به آنچه که می‌خواستیم دست می‌یابیم:

$$A(\text{adj}A) = (\det A)I. \quad (25-5)$$

نظیر مورد ماتریسهای بر روی هیأتها، ماتریس A بر روی K ، معکوس پذیر بر روی K نامیده می‌شود هرگاه ماتریسی A چون $n \times n$ با درایه‌های متعلق به K یافت شود به طوری که $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. اگر چنین ماتریس معکوسی موجود باشد، یکتاست؛ زیرا، همان برهانی که در فصل ۱ به کار رفت نشان می‌دهد که اگر $BA = AC = I$ آنگاه $B = C$. فرمولهای (23-5) و (25-5)، درباره معکوس پذیری ماتریسهای بر روی K مطالب زیر را به دست می‌دهند. اگر عنصر $\det A$ در K معکوس ضربی داشته باشد، آنگاه A معکوس پذیر است و $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj}A$ یکتا معکوس A است. عکس، بسادگی دیده می‌شود که اگر A بر روی K معکوس پذیر باشد، آنگاه $\det A$ در K معکوس پذیر است. زیرا، اگر $BA = I$ ، داریم

$$1 = \det I = \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

حاصل آنچه که ثابت کردہ ایم قضیه زیر است.

قضیه ۴. فرض کنیم A ماتریس $n \times n$ بر روی K باشد. دو این صورت A بر روی K معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ باشد. وقتی A معکوس پذیر باشد، یکتا معکوس A عبارت است از

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj} A.$$

بعضی، هر ماتریس $n \times n$ بر روی یک هیأت، معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

باید خاطر نشان کنیم که این معیار دترمینانی برای معکوس پذیری، ثابت می کند که هر ماتریس $n \times n$ با معکوسی چپ یا راست، معکوس پذیر است. این اثبات کاملاً مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ برای ماتریسهای بر روی هیأتها ارائه کردیم. مایلیم مفهوم معکوس پذیری ماتریسهای با درایه‌های چندجمله‌ای را نیز خاطر نشان کنیم. اگر K حلقه چندجمله‌ای $[x]$ باشد، تنها عناصری از K که معکوس پذیر هستند، عبارتند از چند جمله‌ایهای اسکالری غیر صفر؛ زیرا، اگر f و g دو چندجمله‌ای با شرط $fg = 1$ باشند داریم $\deg f = \deg g = 0$ ، $\deg f + \deg g = 0$ ؛ یعنی، f و g دو چند جمله‌ای اسکالری هستند. از این‌رو، هر ماتریس $n \times n$ بر روی حلقه چندجمله‌ای $[x]$ ، بر روی $F[x]$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن یک چندجمله‌ای اسکالری غیر صفر باشد.

مثال ۷. فرض کنیم $K = R[x]$ حلقه چندجمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد. اگر

$$B = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x+2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} x^2 + x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه، با یک محاسبه کوتاه، داریم $\det A = x+1$ و $\det B = -6$. از این‌رو، A بر روی K معکوس پذیر نیست، درحالی که B بر روی K معکوس پذیر است. توجه کنید که

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -x-1 \\ -x+1 & x^2+x \end{bmatrix}, \quad \text{adj} B = \begin{bmatrix} x & -x-2 \\ -x^2+2x-3 & x^2-1 \end{bmatrix},$$

و $(\text{adj} B)B = -6I$ و $(\text{adj} A)A = (x+1)I$. بدیهی است که

$$B^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} x & -x-2 \\ -x^2+2x-3 & 1-x^2 \end{bmatrix}.$$

مثال ۸. فرض کنیم K حلقه اعداد صحیح باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\det A = -2$ و

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

از این رو، A بعنوان یک ماتریس بر روی حلقه اعداد صحیح، معکوس پذیر نیست؛ با این وجود، می‌توانیم A را بعنوان ماتریسی بر روی هیأت اعداد گویا نیز محاسب کنیم، که در این صورت A معکوس پذیر است و

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

در رابطه با ماتریسهای معکوس پذیر، مایلیم به ذکر حکم مقدماتی دیگری هم پردازیم. ماتریسهای متشابه، دترمینانهای مساوی دارند؛ یعنی، اگر P بر روی K معکوس پذیر باشد و $\det B = \det A$ ، آنگاه $B = P^{-1}AP$ مطلب واضح است، زیرا

$$\det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = \det A.$$

این مشاهده ساده، این امکان را به وجود می‌آورد که دترمینان هر عملگر خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی را تعریف کنیم. اگر T عملگری خطی روی V باشد، دترمینان T را دترمینان هر ماتریس $n \times n$ می‌تعریف کنیم که نمایش T در پایه مرتبی از V باشد. چون همه این ماتریسهای متشابه هستند، دترمینانهای مساوی دارند و این تعریف با معنی است. در این باره به تمرین ۱۱ بخش ۳.۵ رجوع کنید.

حال به بحث درباره قاعدة گرامر^۱ برای حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، و بخواهیم دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ را به ازای n تابی مفرض (y_1, \dots, y_n) حل کنیم. اگر آنگاه

$$(\text{adj} A)AX = (\text{adj} A)Y$$

و بنابراین

$$(\det A)X = (\text{adj} A)Y.$$

پس

$$\begin{aligned}
 (\det A)x_i &= \sum_{i=1}^n (\text{adj} A)_{ji} y_j \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i \det A(i|j).
 \end{aligned}$$

عبارت آخر همان دترمینان ماتریس $n \times n$ حاصل از جایگزینی Y به جای z مین ستون است. اگر $\det A = 0$ ، از این مطلب چیزی معلوم نمی شود؛ اما، اگر $\det A \neq 0$ باشد و y_1, y_2, \dots, y_n اسکالرهايی از F باشند، يكجا جواب هیأت F از دستگاه معادلات $AX = Y$ به صورت $X = A^{-1}Y$

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

به دست می آید. در اینجا B_j ماتریس $n \times n$ حاصل از جایگزینی Y به جای z مین ستون ماتریس A است.

در خاتمه این بخش، علاقه مندیم به چند توضیح که با اعتقاد ما به نمایاندن چهره واقعی دترمینان کمک می کنند، پردازیم. گاه لازم است دترمینانهای مشخصی را محاسبه کنیم، و لذا جزئی از این بخش را به روشهایی که این محاسبات را آسان می سازند اختصاص دادیم. لکن، نقش اصلی دترمینان در این کتاب، هر چند زیبایی احکامی همچون قاعده کرامر انکارناپذیر است، نظری است. اما، قاعده کرامر عمدهاً به این علت که خود در گیر محاسبات بسیاری است، وسیله مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی نیست. لذا باید فکر خود را برآنچه که قاعده کرامر بیان می کند متوجه شویم تا بر چگونگی محاسبه با آن در واقع، امیدواریم که خواننده ضمن تفکر روی تمامی این فصل، تأکید بیشتری بر درک مفهوم دترمینان و چگونگی رفتار آن داشته باشد تا بر چگونگی محاسبه دترمینان ماتریسهای معین.

تمرین

۱. از فرمول الحاقی کلاسیک برای محاسبه معکوس هر یک از ماتریسهای حقیقی 3×3 زیر استفاده کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

۲. قاعده کرامر را برای حل هر یک از دستگاه معادلات خطی زیر بر روی هیأت اعداد گویا به کار گیرید.

$$x + y + z = 11 \quad (\text{الف})$$

$$2x - 4y - z = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

$$3x - 2y = 7 \quad (\text{ب})$$

$$3y - 2z = 6$$

$$2z - 2x = -1$$

۳. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ بر روی هیأت F متقارن کج است هر گاه $A^t = -A$. اگر A یک ماتریس $n \times n$ متقارن کج با درایه‌های مختلط باشد و n عددی فرد، ثابت کنید $\det A = 0$.

۴. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ بر روی هیأت F متعامد نامیده می‌شود هر گاه $AA^t = I$. اگر A متعامد باشد، نشان دهید $\det A = \pm 1$. یک ماتریس متعامد مثال بزنید که به ازای آن $\det A = -1$.

۵. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ بر روی هیأت اعداد مختلط را یکانی خوانیم هر گاه $I = AA^*$ (نمایشگر ترانهاده مزدوج A است). اگر A یکانی باشد، نشان دهید که $|\det A| = 1$.

۶. فرض کنید T و U دو عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشند. ثابت کنید

$$\det(TU) = (\det T)(\det U) \quad (\text{الف})$$

(ب) T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\det T \neq 0$.

۷. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ بر روی K که حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی است، باشد. فرض کنید A صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

را داشته باشد. در اینجا A_i ماتریسی $r_i \times r_j$ است. ثابت کنید

$$\det A = (\det A_1)(\det A_2) \cdots (\det A_k).$$

۸. گیریم V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد. فرض کنید B عنصر ثابتی از V و T_B عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $T_B(A) = AB - BA$ باشد. نشان دهید $\det T_B = 0$.

۹. ماتریس $A \in n \times n$, بر روی هیأتی مفروض است و $A \neq 0$. اگر r عدد صحیح مثبت دلخواهی بین ۱ و n باشد، یک زیرماتریس $r \times r$ از A عبارت است از ماتریس $r \times r$ حاصل از حذف $(n-r)$ سطر و $(n-r)$ ستون از A . رتبهٔ ترمینانی A بزرگترین عدد صحیح مثبت r است که زیرماتریسی $r \times r$ از A دارای ترمینان غیر صفر باشد. ثابت کنید رتبهٔ ترمینانی A برآ بر رتبهٔ سطحی A ($=$ رتبهٔ ستونی A) است.

۱۰. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، ثابت کنید حداکثر n اسکالر متمایز در F وجود دارد که $\det(cI - A) = 0$.

۱۱. دو ماتریس A و B بر روی هیأت F داده شده‌اند. نشان دهید که اگر A معکوس پذیر باشد، حداکثر n اسکالر c در F وجود دارد که به ازای آنها ماتریس $cA + B$ معکوس پذیر نیست.

۱۲. اگر V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و B ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد، فرض کنید L_B و R_B دو عملگر خطی روی V باشند که با $R_B(A) = AB$ و $L_B(A) = BA$ تعریف می‌شوند. نشان دهید

$$\det L_B = (\det B)^n \quad (\text{الف})$$

$$\det R_B = (\det B)^n \quad (\text{ب})$$

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط و B ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی C باشد. عملگر خطی M_B روی V را توسط B^* تعریف می‌کنیم، که در آن $B^* = \overline{B}^t$, $M_B(A) = BAB^*$ نشان دهید

$$\det M_B = |\det B|^{2n}.$$

حال فرض کنید H مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی در V باشد؛ A هرمیتی است هرگاه $A = A^*$. در این صورت H فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. نشان دهید تابع T_B تعریف شده توسط $T_B(A) = BAB^*$ عملگر خطی روی V است. نشان دهید T_B تعریف شده توسط $T_B(A) = BAB^*$ عملگر خطی روی V است، و سپس نشان دهید $\det T_B = |\det B|^{2n}$. (داهنایی: در محاسبهٔ $\det T_B$, نشان دهید V دارای پایه‌ای مشکل از ماتریسهای هرمیتی است و سپس نشان دهید $\det T_B = \det M_B$).

۱۴. فرض کنید A, B, C و D ماتریسهای $n \times n$ جا بجا شونده‌ای بر روی هیأت F

باشد. نشان دهید دترمینان ماتریس $2n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برابر $\det(AD - BC)$ است.

۵.۵. مدول

اگر K حلقه‌ای جا بجا یسی با عنصر همانی باشد، هر مدول بر روی K دستگاهی جبری است که مانند فضای برداری عمل می‌کند و در آن K نقش هیأت اسکالرها را بر عهده دارد. به طور دقیق، گوییم V یک مدول بر روی K (یا یک K -مدول) است، هر گاه

۱. عملی به نام جمع: $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta$ روی V یافت شود به طوری که تحت آن V گروهی جا بجا یسی باشد

۲. عملی به نام ضرب: $c\alpha \rightarrow c\alpha$ از عناصر α در V و c در K موجود باشد که

$$(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$$

$$c(c_1 + c_2)\alpha = cc_1\alpha + cc_2\alpha$$

$$(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$$

$$1\alpha = \alpha.$$

برای منظور ما، مهمنترین K -مدولها، مدل‌های "متابی" K^n هستند، هر چند مدل‌های ماتریسی $K^{n \times n}$ نیز مهم‌اند. اگر V مدول دلخواهی باشد، عیناً به همان نحو که در مورد فضای برداری عمل کردیم می‌توانیم از ترکیبات خطی، وابستگی خطی، و استقلال خطی صحبت کنیم. باید مواطی باشیم نتاً یعنی از فضاهای برداری را که به عمل تقسیم بر اسکالرهای غیر صفر و ابسته‌اند، یعنی اعمالی که به هیأت مربوط‌اند و ممکن است حلقه K فاقد آنها باشد، در مورد V به کار نبندیم. مثلاً، اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ وابسته خطی باشند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که یکی از α_i ‌ها ترکیبی خطی از بقیه آنهاست. این مطلب یافتن پایه در مدول را مشکل تر می‌سازد.

یک پایه برای مدول V زیرمجموعه‌ای مستقل خطی است که مدول را پذیده‌می‌آورد (یا تولید می‌کند). این همان تعریفی است که در مورد فضای برداری هم ارائه کردیم. خاصیت مهم پایه‌ای چون B این است که هر عنصر V را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیبی خطی از (تعدادی متناهی از) عناصر B بیان کرد. اگر در ریاضیات اصل انتخاب (ر. ک. پیوست) پذیرفته شود، می‌توان نشان داد که هر فضای برداری دارای پایه است. خواننده بخوبی آگاه است که در هر فضای برداری دلخواهی که توسط تعدادی متناهی بردار پذیده‌آید، پایه هم وجود دارد. اما، برای مدول وضعیت چنین نیست. از

این رو، برای مدولهایی که پایه دارند، و نیز برای مدولهایی که توسط تعدادی متناهی عنصر پدید می‌آیند، نیاز به نامهای خاصی داریم.

تعریف. K -مدول V ، یک مدول آزاد نامیده می‌شود، هرگاه دادای پایه باشد. اگر V دادای پایه‌ای متناهی شامل n عنصر باشد، آنگاه V یک K -مدول آزاد با n مولد نامیده می‌شود.

تعریف. مدول V به طور متناهی تولید می‌شود هرگاه شامل زیرمجموعه‌ای متناهی باشد که V را پدید آورد. رتبه مدولی که به طور متناهی تولید بشود کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که V توسط k عنصر پدید آید.

تکرار می‌کنیم که ممکن است مدولی به طور متناهی تولید بشود، بدون آنکه پایه‌ای متناهی داشته باشد. اگر V -مدول آزادی با n مولد باشد، آنگاه V با مدول K یک‌ریخت است. اگر $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، یک یک‌ریختی که بردار $c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n$ را به روی n تایی (c_1, \dots, c_n) از K^n بفرستد، وجود دارد. فوراً دیده نمی‌شود که مدول V نمی‌تواند مدولی آزاد با k مولد با شرط $k \neq n$ باشد. به بیان دیگر، واضح نیست که تعداد عناصر هر دو پایه دلخواه V باید لزوماً مساوی باشند. اثبات این حقیقت بر اساس کاربرد جالبی از دترمینانهاست.

قضیه ۵. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر V یک K -مدول آزاد با n مولد باشد، آنگاه رتبه V برابر n است.

می‌خواهیم ثابت کنیم که V نمی‌تواند توسط تعدادی کمتر از n عنصر از اثبات. خودش پدید آید. چون V با K^n یک‌ریخت است، باید نشان دهیم که اگر $m < n$ ، مدول n تاییهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ پدید نمی‌آید. ما تریس A با سطرهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم هر یک از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ از پایه استانده ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ باشد. در این صورت ماتریسی چون P در $K^{n \times m}$ وجود دارد که

$$PA = I.$$

در اینجا I ماتریس همانی $n \times n$ است. گیریم \tilde{A} ماتریس $n \times n$ حاصل از افزودن سطر 0 در زیر سطرهای A باشد و \tilde{P} ماتریس $n \times n$ دلخواهی که ستونهای P را به عنوان n ستون اول خود دارد. در این صورت

$$\tilde{P}\tilde{A} = I.$$

بنابراین، $\det \tilde{A} \neq 0$. اما چون $n < m$ در اینجا \tilde{A} یک سطر \tilde{A} همه صفر نساد. این تناقض نشان می‌دهد که K -مدول V را پدید نمی‌آورند. \square

توجه به این نکته مهم است که قضیه ۵ یکتاً نیست. بعد هر فضای برداری (با بعد متناهی)

را ثابت می‌کند. این اثبات که بر وجود تابع دترمینان استوار است با اثباتی که در فصل ۲ عرضه کردیم کاملاً متفاوت است. از قضیه ۵ بر می‌آید که «مدول آزاد از رتبه n » با «مدول آزاد با n مولد» یکی است.

اگر V مدولی بر روی K باشد، مدول $\text{دوگان}^* V$ مشکل است از همه توابع خطی f از V در K . اگر V مدول آزادی از رتبه n باشد، آنگاه $* V$ نیز مدولی آزاد از رتبه n است. اثبات این مطلب عیناً همان اثبات در مورد فضاهای برداری است. اگر $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد، پایه $\text{دوگان}^* V$ را بسته‌ای چون $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای مدول V وجود دارد. تابع f به هر v از V ، n میں مختص نسبت به $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را تخصیص می‌دهد:

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \dots + f_n(\alpha)\beta_n$$

اگر f تابعی خطی روی V باشد، آنگاه

$$f = f(\beta_1)f_1 + \dots + f(\beta_n)f_n.$$

۶.۵. تابع چند خطی

هدف این بخش بیان بحث دترمینان در قالبی است که به اعتقاد ما چهره واقعی دترمینان را می‌نمایاند. برای این منظور، فرمهای چند خطی متناوب روی مدولها را مورد بحث قرار می‌دهیم. این فرمها تعمیم طبیعی دترمینان، آن طور که ما آن را عرضه کردیم، هستند. خواننده‌ای هم که شرح مختصر مدولها در بخش ۵.۵ را تخوانده باشد (با مایل نباشد که بخواند) نیز می‌تواند این بخش را با بهره‌وری مطالعه کند مشروط براین که «فضای برداری بر روی F با بعد n » را همواره به جای «مدول آزاد بر روی K از رتبه n » منظور کند.

فرض کنیم K حلقه‌ای جا بجایی با عنصر همانی و V مدولی بر روی K باشد. اگر r عدد صحیح مثبتی باشد، تابع L از $V \times V \times \dots \times V = V \times V \times \dots \times V$ در K چند خطی نامیده می‌شود، هر گاه $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ به عنوان تابعی از هر α_i ، وقتی α_i ‌ها دیگر ثابت نگه داشته شوند، خطی باشند؛ یعنی، هر گاه به ازای هر α_i

$$L(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r).$$

یک تابع چند خطی روی V یک فرم r خطی روی V ، یا یک فرم چند خطی از درجه r روی V نیز نامیده می‌شود. به چنین تابعی گاهی یک r -تابسور روی V نیز گفته می‌شود. دسته همه توابع چند خطی روی V با $M'(V)$ نشان داده می‌شود. اگر L و M در $M'(V)$ باشند، آنگاه مجموع $L+M$ ، که به این صورت تعریف می‌شود:

$$(L+M)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + M(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

نیز چند خطی است؛ و اگر c عنصری از K باشد، حاصل ضرب cL ، که به این صورت

تعریف می‌شود:

$$(cL)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

نیز چندخطی است. بنابراین، $(V^M)^*$ یک K -مدول (زیرمدولی از مدول همه توابع از V در K) است.

اگر $r=1$ ، داریم $M^*(V) = V^*$ که همان مدول دوگان توابع خطی روی V است. از توابع خطی نیز می‌توان برای ساختن مثالهایی از فرمهای چندخطی از مراتب بالاتر استفاده کرد. اگر f_1, f_2, \dots, f_r توابعی خطی روی V باشند، تعریف می‌کنیم

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2) \cdots f_r(\alpha_r).$$

واضح است که L فرمی خطی روی V است.

مثال ۹. اگر V مدول باشد، یک فرم ۲ خطی روی V معمولاً یک فرم دوخطی روی V نامیده می‌شود. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به K باشد. در این صورت

$$L(X, Y) = Y^t A X$$

فرم دوخطی L را روی مدول $K^{n \times 1}$ تعریف می‌کند. به طور مشابه

$$M(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^t$$

فرم دوخطی M را روی K^n تعریف می‌کند.

مثال ۱۰. تابع دترمینان بهر ماتریس A $n \times n$ عنصر A از K را مربوط می‌سازد. اگر $\det A$ به عنوان تابعی از سطرهای A در نظر گرفته شود:

$$\det A = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

آنگاه D فرمی n خطی روی K^n است.

مثال ۱۱. به دست آوردن عبارتی جبری برای فرم ۲ خطی نوعی، روی مدول K^n آسان است. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ بردارهایی از V و A ماتریسی $r \times n$ با سطرهای $M'(K^n)$ از L باشد، آنگاه به ازای هر تابع L از $M'(K^n)$

$$\begin{aligned}
 L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= L\left(\sum_{j=1}^n A_{1j}\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_r\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n A_{1j}L(\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{j=1}^n A_{1j}\left(\sum_{k=1}^n A_{2k}\epsilon_k, \dots, \alpha_r\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{1j}A_{2k}L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{j,k=1}^n A_{1j}A_{2k}L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \dots, \alpha_r).
 \end{aligned}$$

اگر بهجای $\alpha_3, \dots, \alpha_r$ بهنوبت برابرهاشان برحسب ترکیبات خطی بردارهای پایه استاند را قراردهیم و (i, j) را بهجای A_{ij} بنویسیم، فرمول زیر به دست می‌آید:

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \quad (26-5)$$

$$\sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n A(1, j_1) \cdots A(r, j_r)L(\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_r}).$$

در (26-5) به ازای هر تابعی مانند $(j_1, \dots, j_r) = J$ از اعداد صحیح مثبت بین ۱ و n ، یک جمله وجود دارد. تعداد این نوع r تابعی‌ها برابر n^r است. پس، L کاملاً توسط (26-5) و مقادیر خاص:

$$c_J = L(\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_r})$$

تخصیص یافته به n^r عنصر (j_1, \dots, j_r) تعیین می‌شود. همچنین باسانی دیده می‌شود که اگر به ازای هر تابعی مانند J عنصری چون c_J از K را انتخاب کنیم، آنگاه

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_J A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) c_J \quad (27-5)$$

فرمی خطی روی K^n تعریف می‌کند.

فرض کنیم L تابعی چندخطی روی V^r باشد و M تابعی چندخطی روی V^s . تابع روی V^{r+s} را با $L \otimes M$

$$(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) = \quad (28-5)$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s})$$

تعریف می‌کنیم. اگر تصورمان از V^{r+s} همان $V^r \times V^s$ باشد، آنگاه به ازای α در V^r و β در V^s

$$(L \otimes M)(\alpha, \beta) = L(\alpha)M(\beta).$$

واضح است که $L \otimes M$ روی V^{r+s} چندخطی است. تابع $L \otimes M$ ضرب تانسوری L و M نامیده می‌شود. ضرب تانسوری جا بهایی نیست. درواقع، $M \otimes L \neq L \otimes M$ مگر آنکه $M = 0$ یا $L = 0$; با این وجود، ضرب تانسوری به طور مطلوبی با اعمال مدولی در M^* و M^* مربوط است.

لم. فرض کنیم L_1 و L_2 فرمایی خطی روی V و M_1 و M_2 فرمایی خطی روی V و c عنصری از K باشد.

$$(الف) (cL_1 + L_2) \otimes M = c(L \otimes M) + L_2 \otimes M$$

$$(ب) L \otimes (cM_1 + M_2) = c(L \otimes M_1) + L \otimes M_2$$

اینها تمرین.

ضرب تانسوری شرکت پذیر است؛ یعنی، اگر L_1 ، M_1 و N (ترتیب) فرمایی r ، s و t خطی روی V باشند، آنگاه

$$(L \otimes M) \otimes N = L \otimes (M \otimes N).$$

این مطلب تتجههای آنی از این واقعیت است که عمل ضرب در K شرکت پذیر است. بنابراین، اگر L_1, L_2, \dots, L_r توابعی چندخطی روی V^1, V^2, \dots, V^r باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L = L_1 \otimes \dots \otimes L_r$$

به عنوان تابعی چندخطی روی V^r که در آن $f_1 + f_2 + \dots + f_r = f$ ، بدون ابهام تعریف می‌شود. قبل از حالت خاصی از این را ذکر کردیم. اگر f_1, \dots, f_r توابعی خطی روی V باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L = f_1 \otimes \dots \otimes f_r$$

توسط

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1) \dots f_r(\alpha_r)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنیم K حلقه‌ای جا بهایی با عنصر همانی باشد. اگر V یک K -مدول آزاد از دسته n باشد، آنگاه $M(V)$ یک K -مدول آزاد از دسته n است؛ درواقع، اگر $\{f_1, \dots, f_r\}$ پایه‌ای برای مدول دوگان V^* باشد، آنگاه $\{f_i\}$ هر ب تانسوری

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_r : V^* \rightarrow K, \quad j_1 \leq r, \dots, j_r \leq n$$

پایه‌ای برای $M(V)$ تشکیل می‌دهند. اثبات. فرض کنیم $\{f_1, \dots, f_r\}$ پایه مرتبتی برای V^* باشد که دوگان پایه

از V است. به ازای هر بردار α از V , داریم
 $\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \cdots + f_n(\alpha)\beta_n$.

اگنون به محاسبه‌ای نظیر آنچه در مثال ۱۱ انجام شد می‌پردازیم. اگر L فرمی خطی روی V و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ عناصری از V باشند، آنگاه بنابر (۲۶-۵)

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \dots, j_r} f_{j_1}(\alpha_1) \cdots f_{j_r}(\alpha_r) L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}).$$

به بیان دیگر،

$$L = \sum_{j_1, \dots, j_r} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r}. \quad (۲۹-۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که n^r ضرب تانسوری

$$E_J = f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \quad (۳۰-۵)$$

که با r تابیهای $(j_1, \dots, j_r) = J$ معین می‌شوند مدول $M^r(V)$ را پدید می‌آورند. بنابر دلیل زیر، r فرمهای مختلف E_J مستقل هستند. فرض کنیم به ازای هر J ، عنصری چون c_J در K وجود داشته باشد و تابع چندخطی

$$L = \sum_J c_J E_J \quad (۳۱-۵)$$

را تشکیل داده باشیم. توجه کنید که اگر $I = (i_1, \dots, i_r)$ آنگاه

$$E_I(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J. \end{cases}$$

بنابراین از (۳۱-۵) مشاهده می‌شود که

$$c_I = L(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}). \quad (۳۲-۵)$$

به خصوص، اگر $0 = L$ ، آنگاه به ازای هر تابی I ، $c_I = 0$.

تعزیف، فرض کنیم L فرمی خطی در K -مدول V باشد. گوییم L متناوب است، دعویتی که وقتی $\alpha_i = \alpha_j$ به ازای $i \neq j$ آنگاه $0 = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ است.

اگر L تابع چندخطی متناوبی روی V باشد، آنگاه

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_r) = -L(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r).$$

به بیان دیگر، اگر جای دو بردار (با نمایه‌های مختلف) را در r تابی $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ تعویض کنیم، مقادیر L تغییر علامت می‌دهد. چون هر جایگشت σ حاصل ضربی از ترانهشت است، می‌بینیم که $L(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(r)}) = (\text{sgn } \sigma)L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

دسته همه فرمهای خطی متناوب روی V را با $\Lambda'(V)$ نشان می‌دهیم. باید روشن باشد که $\Lambda'(V)$ زیرمدولی از $M'(V)$ است.

مثال ۱۲. قبلاً در این فصل نشان دادیم که روی مدول K ، دقیقاً یک فرم خطی متناوب D با خاصیت $1 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ وجود دارد. همچنین در قضیه ۲ نشان دادیم که اگر L فرم دلخواهی از $\Lambda''(K)$ باشد، آنگاه

$$L = L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) D.$$

به عبارت دیگر، $\Lambda''(K)$ -مدولی آزاد از رتبه ۱ است. گذشته از این، فرمول صریح (۱۵-۵) را برای D به دست آورديم. بر حسب نمادی که جدیداً به کار می‌بریم، این فرمول را می‌توان به صورت

$$D = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) f_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma n} \quad (۳۳-۵)$$

هم نوشت. در اینجا f_1, \dots, f_n توابع مختصی استاندۀ روی K هستند و مجموع بر روی $n!$ جایگشت مختلف σ از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ گسترش دارد. اگر دترمینان ماتریس A را به صورت

$$\det A = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(\sigma 1, 1) \cdots A(\sigma n, n)$$

بنویسیم، آنگاه عبارت متفاوتی برای D به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) f_1(\alpha_{\sigma 1}) \cdots f_n(\alpha_{\sigma n}) \\ &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \dots, \alpha_{\sigma n}) \end{aligned} \quad (۳۴-۵)$$

$$L = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

یک روش عمومی برای مربوط ساختن فرمی متناوب به فرمی چندخطی وجود دارد. اگر L فرمی خطی روی مدول V باشد و σ جایگشتی از $\{1, \dots, r\}$ با تعریف

$$L_{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_{\sigma 1}, \dots, \alpha_{\sigma r})$$

تابع خطی دیگر L_{σ} به دست می‌آید. اگر بر حسب اتفاق L متناوب باشد، آنگاه $L_{\sigma} = (\operatorname{sgn} \sigma) L$. اکنون، بازای هر L از $M'(V)$ تابع $L_{\pi, L}$ از $M'(V)$ را بنابر

$$\pi, L = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) L_{\sigma} \quad (۳۵-۵)$$

تعریف می‌کنیم، بدین معنی که

$$(\pi, L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \dots, \alpha_{\sigma r}). \quad (۳۶-۵)$$

لم، π تبدیلی خطی از $M'(V)$ در $\Lambda'(V)$ باشد، آنگاه $\pi_{\cdot L} = r!L$

اثبات. فرض کنیم τ جایگشت دلخواهی از $\{1, \dots, r\}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} (\pi_{\cdot L})(\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rr}) &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \dots, \alpha_{\tau\sigma r}) \\ &= (\text{sgn } \tau) \sum_{\sigma} (\text{sgn } \tau \sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \dots, \alpha_{\tau\sigma r}). \end{aligned}$$

اگر σ همه جایگشتهای $\{1, \dots, r\}$ را (یکبار) احراز کند، $\sigma \tau$ نیز چنین می‌کند. بنابراین،

$$(\pi_{\cdot L})(\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rr}) = (\text{sgn } \tau)(\pi_{\cdot L})(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

ولذا، $\pi_{\cdot L}$ فرمی متناوب است.

اگر L در $\Lambda'(V)$ باشد، آنگاه به ازای هر σ داریم

$$L(\alpha_{\sigma 1}, \dots, \alpha_{\sigma r}) = (\text{sgn } \sigma) L(\alpha_1, \dots, \alpha_r);$$

از این رو، $\square \cdot \pi_{\cdot L} = r!L$

در (۳۴-۵) نشان دادیم که تابع دترمینان D از (K^n) عبارت است از

$$D = \pi_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n).$$

در اینجا f_1, \dots, f_n توابع مختصی استاندۀ روی K هستند. در بارۀ آخرین ام، نکته مهمی هست که باید آن را متذکر شویم. اگر K هیأتی با سرشناسی صفر و $r!$ در K معکوس پذیر باشد، آنگاه π فضای $M'(V)$ را به روی $\Lambda'(V)$ می‌نگارد. در واقع، در این حالت به کار بردن نگاشت π به جای $\pi_1 = (1/r)$ از یک دیدگاه، طبیعی‌تر است، زیرا π نگاشتی تصویری از $M'(V)$ به روی $\Lambda'(V)$ است؛ یعنی، نگاشتی است خطی از $M'(V)$ به روی $\Lambda'(V)$ با این خاصیت که $L = L(\pi_1)$ اگر و تنها اگر L در $\Lambda'(V)$ باشد.

قضیّه ۷. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصرهای V, K -مدول آزادی از تبة n باشد. اگر $n > r$ ، آنگاه $\{f_1, \dots, f_r\} \subset \{f_1, \dots, f_n\}$ باشد، آنگاه $\Lambda'(V)$ K -مدول آزادی از تبة n است.

اثبات. فرض کنیم $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ باشد. اگر L در $M'(V)$ باشد، داریم $\{f_1, \dots, f_n\}$ باشد. اگر L در $M'(V)$ باشد، داریم

$$L = \sum_j L(\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn}) f_{j1} \otimes \dots \otimes f_{jn} \quad (۳۷-۵)$$

که در آن مجموع به ازای همه تاییهای $j_1, \dots, j_r = j$ از اعداد صحیح بین ۱ و n محاسبه می‌شود. اگر L متناوب و دوتا از نمایه‌های j مساوی باشند، آنگاه

$$L(\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn}) = 0.$$

اگر $n > r$ ، آنگاه در هر تابی مانند J عددی صحیح باید تکرار بشود. از این‌رو، اگر $\Lambda'(V) = \{0\}$ باشد، مجموع در (۳۷-۵) حال فرض می‌کیم $n \leq r \leq J$. اگر J در $\Lambda'(V)$ باشد، مجموع در (۳۷-۵) لازم است تنها به‌ازای آن تابیهای J محاسبه شود که به‌ازای آنها j_1, j_2, \dots, j_r متمایز هستند؛ زیرا همه جملات دیگر 0 می‌باشند. هر تابی از اعداد صحیح متمایز بین 1 و n جایگشتی از یک r تابی $(j_1, \dots, j_r) = J$ ، است که $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. این نوع خاص از تابیهای یک r -بُر از $\{1, \dots, n\}$ نامیده می‌شود. تعداد چنین برها بی

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

است.

هر بُر ثابت J را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم L_J مجموع همه جملاتی از (۳۷-۵) باشد که با جایگشت‌های بر J متناظر هستند. اگر σ جایگشتی از $\{1, \dots, r\}$ باشد، آنگاه

$$L(\beta_{j_{\sigma 1}}, \dots, \beta_{j_{\sigma r}}) = (\text{sgn } \sigma) L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}).$$

پس

$$L_J = L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) D_J \quad (38-5)$$

که در آن

$$D_J = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f_{j_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes f_{j_{\sigma r}} \quad (39-5)$$

$$= \pi_r(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r}).$$

از (۳۹-۵) در می‌یابیم که همه D_J ‌ها متناوب هستند و به‌ازای هر L در $\Lambda'(V)$

$$L = \sum_{J \text{ برها}} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) D_J. \quad (40-5)$$

ادعا این است که فرم D_J پایه‌ای برای $\Lambda'(V)$ تشکیل می‌دهند. قبل از دیده ایم که اینها $\Lambda'(V)$ را پذید می‌آورند. باسانی دیده می‌شود که این فرمها مستقل خطی هم هستند؛ زیرا، اگر برها (i_1, \dots, i_r) و (j_1, \dots, j_r) داده شده باشند، آنگاه

$$D_J(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 1, & I = J \\ 0, & I \neq J. \end{cases} \quad (41-5)$$

حال فرض کنیم به‌ازای هر بُر، اسکالری چون c داشته باشیم و

$$L = \sum_j c_j D_j$$

را تعریف کنیم. از $(40-5)$ و $(41-5)$ نتیجه می‌گیریم

$$c_I = L(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

\square . $c_I = 0$ بخصوص، اگر $L = 0$ ، آنگاه بهازای هر بردار I داریم

نتیجه. اگر V K -مدول آزادی از رتبه n باشد، آنگاه $\Lambda^n(V)$ K -مدولی آزاد از رتبه ۱ است. اگر T عملگری خطی V باشد، عنصر یکتاپی چون c در V یافت می‌شود که بهازای هر فرم خطی متناظر L دوی

$$L(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

اثبات. اگر L در $\Lambda^n(V)$ باشد، آنگاه بوضوح ضابطه

$$L_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n)$$

فرم n خطی متناظر L_T را تعریف می‌کند. فرض کنیم M مولدی برای $\Lambda^n(V)$ ، که مدولی از رتبه یک است، باشد. هر L در $\Lambda^n(V)$ به طور یکتا به صورت $L = aM$ ، بهازای یک a در K ، قابل بیان است. بویژه، بهازای c معینی $M_T = cM$ برای $L = aM$ داریم

$$\begin{aligned} L_T &= (aM)_T \\ &= aM_T \\ &= a(cM) \\ &= c(aM) \\ &= cL. \quad \square \end{aligned}$$

طبیعی است که عنصر c در نتیجه اخیر را دترمینان T بنامیم. در حالت $r = n$ (وقتی که تنها یک بسر $(1, \dots, n) = J$ وجود دارد) از $(39-5)$ نتیجه می‌شود که دترمینان T برای دترمینان ماتریسی است که T را در هر پایه مرتب $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ نمایش دهد. بینیم چرا. درایه j ، i این ماتریس نمایش برای است با

$$A_{ij} = f_j(T\beta_i),$$

ولذا

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \dots, T\beta_n) &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \dots, T\beta_n) &= (\det T) D_J(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \det T. \end{aligned}$$

اهمیت این تذکرها در این است که با کمک قضیه ۷ و نتیجه آن، تعریفی برای دترمینان عملگرهای خطی به دست می‌آوریم که بستگی به شناخت دترمینان ماتریسها ندارد. سپس می‌توانیم دترمینان ماتریسها را بر حسب دترمینان عملگرهای عکس این طریق تعریف کنیم.

حال می‌خواهیم قدری بیشتر در مورد فرم‌های خطی متناوب خاص D_j ، که در (۳۹-۵) آنها را به پایه $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* مربوط ساختیم، گفتگو کنیم. درک این نکته مهم است که $D_j(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ دترمینان ماتریس $r \times r$ معینی است. اگر

$$A_{ij} = f_j(\alpha_i), \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq n$$

یعنی، اگر

$$\alpha_i = A_{i1}\beta_1 + \dots + A_{in}\beta_n, \quad 1 \leq i \leq r$$

و J بر r تابی (j_1, \dots, j_r) باشد، آنگاه

$$D_j(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, j_{\sigma 1}) \dots A(r, j_{\sigma r}) \quad (42-5)$$

$$= \det \begin{bmatrix} A(1, j_1) & \dots & A(1, j_r) \\ A(r, j_1) & \dots & A(r, j_r) \end{bmatrix}.$$

پس، $D_j(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ برابر دترمینان ماتریسی $r \times r$ است که از ستون‌های n تابیهای مختصات $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ که j_1, j_2, \dots, j_r ماتریسی $r \times n$ باشد، آنگاه $A(1, j_1) \dots A(r, j_r)$ را به عنوان سطرهای خود دارد، شکل می‌گیرد. نماد دیگری که گاهی برای این دترمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد، عبارت است از

$$D_j(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})}. \quad (43-5)$$

بر مبنای این نماد، اثبات قضیه ۷ نشان می‌دهد که هر فرم خطی متناوب L می‌تواند نسبت به پایه‌ای چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ توسعه معادله

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \quad (44-5)$$

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})$$

بیان شود.

۷.۵. حلقةٌ مُكَرَّرَةٌ لِلأسْمَانِ

بسیاری از خواص مهم دترمینانها و فرم‌های چندخطی متناوب، به بهترین وجه بر حسب یک عمل ضرب روی فرم‌ها، به نام ضرب خارجی، تشریح می‌شوند. اگر L و M ، بترتیب، فرم‌های r و s خطی متناوبی روی مدول V باشند، آنگاه ضربی وابسته به L و M ، یعنی ضرب تansوری $L \otimes M$ ، وجود دارد. ولی، این ضرب فرمی متناوب نیست، مگر آنکه $L = 0$ یا $M = 0$ باشند؛ با این وجود، راهی طبیعی برای تصویر این ضرب در $(V)^{\otimes r+s}$ در دست هست. به نظرمی‌رسد که

$$L \cdot M = \pi_{r+s}(L \otimes M) \quad (45-5)$$

ضرب «طبیعی» فرم‌های متناوب باشد. ولی، آیا این‌طور است؟

یا باید مثال خاصی را در نظر بگیریم. فرض کنیم V مدول K ، و f_1, f_2, \dots, f_n توابع مختصی استانده روی K باشند. اگر $j \neq i$ ، آنگاه

$$f_i \cdot f_j = \pi_r(f_i \otimes f_j)$$

تابع (دترمینان)

$$D_{ij} = f_i \otimes f_j - f_j \otimes f_i,$$

است که با (۳۹-۵) تعریف می‌شود. حال فرض کنیم k نمایه‌ای متفاوت با i و j باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} D_{ij} \cdot f_k &= \pi_r[(f_i \otimes f_j - f_j \otimes f_i) \otimes f_k] \\ &= \pi_r(f_j \otimes f_k \otimes f_i) - \pi_r(f_j \otimes f_i \otimes f_k). \end{aligned}$$

اثبات لم بعد از معادله (۳۶-۵) نشان می‌دهد که به ازای هر فرم r خطی مانند L و هر جایگشت σ از $\{r, r, \dots, r\}$

$$\pi_r(L_\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma \pi_r(L).$$

از این‌رو، $D_{ij} \cdot f_k = 2\pi_r(f_i \otimes f_j \otimes f_k) - 2\pi_r(f_j \otimes f_i \otimes f_k)$.

بنابراین داریم

$$(f_i \cdot f_j) \cdot f_k = f_i \cdot (f_j \cdot f_k).$$

تمام این مطالب بسیار تویددهنده به نظرمی‌رسند. اما گیری هم وجود دارد. با وجود محاسبه‌ای که هم‌اکنون به انجام رساندیم، به اصطلاح ضرب داده شده در (۴۵-۵) شرکت پذیر نیست. در واقع، اگر L نمایه‌ای متفاوت با i, j و k باشد، آنگاه می‌توان با

محاسبه‌ای نشان داد که

$$D_{ij} \cdot D_{kl} = 4\pi_4(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l)$$

و نیز

$$(D_{ij} \cdot f_k) \cdot f_l = 6\pi_4(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l).$$

پس عموماً

$$(f_i \cdot f_j) \cdot (f_k \cdot f_l) \neq [(f_i \cdot f_j) \cdot f_k] \cdot f_l$$

و می‌بینیم که اولین تلاش ما برای یافتن ضرب به عملی شرکت ناپذیر منجر شد.

اگرخواننده برای نشان دادن شرکت ناپذیری، ارائه اثبات مستقیم دو معادله را امری نسبتاً ملال آور یا بد نباید متعجب شود. خصلت موضوع این است، و اینکه وجود دستوری عمومی کار را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند هم نمونه است.

فرض کنیم L فرمی خطی و M فرمی خطی روی مدول V باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \pi_{r+s}((\pi_r L) \otimes (\pi_s M)) &= \pi_{r+s}(\sum_{\sigma, \tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) L_\sigma \otimes M_\tau) \\ &= \sum_{\sigma, \tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) \pi_{r+s}(L_\sigma \otimes M_\tau) \end{aligned}$$

که در آن σ بر روی گروه متقارن S_r منشکل از همه جایگشتهای $\{\dots, r, 1\}$ ، و τ بر روی S_s تغییر می‌کند. هر جفت σ و τ عنصر (σ, τ) از S_{r+s} را به دست می‌دهد که r عنصر اول $\{1, \dots, r+s\}$ را طبق σ و s عنصر آخر آن را طبق τ جای می‌گرداند. روشن است که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$$

$$(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)} = L_\sigma \otimes M_\tau.$$

بنابراین

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = \sum_{\sigma, \tau} \operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)}].$$

اما، قبل مشاهده کرده‌ایم که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)}] = \pi_{r+s}(L \otimes M).$$

از این رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = r! s! \pi_{r+s}(L \otimes M). \quad (۴۶-۵)$$

این فرمول محاسبات چندی را ساده می‌کند. مثلاً، فرض کنیم پنج ۳-بُر مانند $I = (i_1, \dots, i_r)$ ، و یک ۵-بُر مانند $J = (j_1, \dots, j_s)$ در دست باشد. برای سادگی کار، همچنین فرض کنیم

$$i_1 < \dots < i_r < j_1 < \dots < j_s.$$

در این صورت توابع دترمینان وابسته

$$D_I = \pi_r(E_I)$$

$$D_J = \pi_s(E_J)$$

را که در آنها E_I و E_J توسط (۳۵-۵) تعیین می‌شوند، خواهیم داشت. با استفاده از (۴۶-۵) بلا فاصله می‌بینیم که

$$\begin{aligned} D_I \cdot D_J &= \pi_{r+s}[\pi_r(E_I) \otimes \pi_s(E_J)] \\ &= r!s!\pi_{r+s}(E_I \otimes E_J). \end{aligned}$$

$$\text{چون } E_I \otimes E_J = E_{IJ}, \text{ نتیجه می‌گیریم که}$$

$$D_I \cdot D_J = r!s!D_{IJ}.$$

این فرمول حاکمی است که شرکت ناپذیری ضرب (۴۵-۵)، از این واقعیت ناشی می‌شود که $D_I \cdot D_J \neq D_{IJ}$. گذشته از همه اینها، حاصل ضرب D_I و D_J باید D_{IJ} باشد. برای اصلاح وضع، لازم است ضرب جدیدی به نام ضرب خارجی (یا ضرب گوهای) فرم خطی متناوب L و فرم S خطی متناوب M را به صورت

$$L \wedge M = \frac{1}{r!s!} \pi_{r+s}(L \otimes M) \quad (47-5)$$

تعریف کنیم. در این صورت، برای توابع دترمینان روی K^n داریم

$$D_I \wedge D_J = D_{IJ}$$

وانصاف این است که به ضرب صحیح فرم‌های چندخطی متناوب دست یافته باشیم. متأسفانه، (۴۷-۵) برای عمومی ترین حالت تحت بررسی فاقد معنی است، چرا که ممکن است در حلقة K قادر به تقسیم بر ای امر نباشیم. اگر K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد، آنگاه (۴۷-۵) بامعنی است و خیلی سریع می‌توان نشان داد که ضرب گوهای شرکت پذیر است.

قضیه A. فرض کنیم K هیأتی با سرشت نمای صفو V فضایی بوداری بر روی K باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت پذیر روی فرم‌های چند خطی متناوب روی V است. بهیان دیگر، اگر L, M و N فرم‌های چند خطی متناوبی روی V ، بترتیب از درجهات r, s و t باشند، آنگاه

$$(L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N).$$

اثبات. از (۴۷-۵) نتیجه می‌شود که به ازای هر دو اسکالر دلخواه c و d ،

$$cd(L \wedge M) = cL \wedge dM$$

$$r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] = r!s!(L \wedge M) \wedge t!N$$

و چون $\pi_t(N) = t!N$ ، داریم

$$r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] = \pi_{r+s}(L \otimes M) \wedge \pi_t(N)$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \frac{1}{t!} \pi_{r+s+t}[\pi_{r+s}(L \otimes M) \otimes \pi_t(N)].$$

اکنون از (۴۶-۵) مشهود است که

$$r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N).$$

با محاسبه‌ای مشابه

$$r!s!t![(L \wedge (M \wedge N))] = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N)$$

$$\square \cdot (L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N)$$

اکنون به حالت عمومی که در آن تنها فرض می‌شود K یک حلقة جابجایی با عنصر همانی است، بازمی‌گرددیم. مسئله اول ما این است که (۴۷-۵) را با تعریفی هم ارز که در حالت عمومی هم کار کند، عوض کنیم. اگر L و M فرمهای چندخطی متناوبی، بترتیب از درجات r و s ، باشد می‌خواهیم فرم چند خطی متناوب مترادف $L \wedge M$ از درجه $r+s$ را که

$$r!s!(L \wedge M) = \pi_{r+s}(L \otimes M)$$

سازیم.

اکنون بهیادآوری چگونگی تعریف $(L \otimes M)_{r+s}$ می‌پردازیم. بهر جایگشت σ از $\{1, \dots, r+s\}$ تابع چند خطی

$$(sgn \sigma)(L \otimes M)_\sigma \quad (48-5)$$

را که در آن

$$(L \otimes M)_\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) = (L \otimes M)(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(r+s)})$$

مربوط می‌سازیم و توابع (۴۸-۵) را به ازای همه جایگشت‌های σ جمع می‌کنیم. از جایگشت وجود دارد؛ اما، به علت متناوب بودن L و M بسیاری از توابع (۴۸-۵) مساوی‌اند. در واقع، حداکثر

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

تابع متمایز (۴۸-۵) وجود دارد. بینیم چرا. فرض کنیم S_{r+s} مجموعه جایگشت‌های $\{1, \dots, r+s\}$ ، یعنی گروه مترادف از درجه $r+s$ باشد. نظریه اثبات (۴۶-۵) زیر

مجموعه G مشکل از جایگشتهای σ را که مجموعه‌های $\{1, \dots, r+s\}$ را در داخل خودشان جای می‌گردانند، جدا می‌کنیم. بهیان دیگر، σ در G است، هر گاه به‌ازای هر j بین 1 و r داشته باشیم $r \leq j \leq r+s$. (ازوماً نتیجه می‌شود که به‌ازای هر j بین 1 و $r+s$ $r+s+1 \leq j \leq r+s$). حال G زیرگروهی از S_{r+s} است، پس اگر σ و τ در G باشند، آنگاه $\sigma\tau^{-1}$ نیز در G است. آشکار است که $G = \{\sigma \in S_{r+s} \mid \sigma \text{ عضو } G\}$ است.

حال نگاشت

$$S_{r+s} \xrightarrow{\psi} M^{r+s}(V)$$

تعریف شده توسط

$$\psi(\sigma) = (\operatorname{sgn} \sigma)(L \otimes M),$$

در دست است. چون L و M متناوب هستند، به‌ازای هر γ در G

$$\psi(\gamma) = L \otimes M.$$

بنابراین، چون هر فرم $r+s$ خطی N روی V ، $N_\gamma = N_{\gamma^{-1}}$ داریم

$$\psi(\tau\gamma) = \psi(\tau)\psi(\gamma).$$

این مطلب نشان می‌دهد که نگاشت ψ روی هر هم‌مجموعه (γ) از زیرگروه G ثابت است. اگر τ_1 و τ_2 در S_{r+s} باشند، بر حسب اینکه $\tau_1\tau_2^{-1}$ در G باشد یا نباشد هم‌مجموعه‌های τ_1G و τ_2G یا مساوی‌اند یا مجزا. هر هم‌مجموعه شامل $\{\sigma \in S_{r+s} \mid \sigma \text{ عضو } G\}$ است، از این رو

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

هم‌مجموعه متمایز وجود دارد. اگر G/H دسته هم‌مجموعه‌ها را نشان دهد، آنگاه ψ تابعی روی G/H است که، بنابر آنچه نشان داده‌ایم، تابعی چون $\tilde{\psi}$ روی آن مجموعه وجود دارد که به‌ازای هر τ در S_{r+s}

$$\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau G).$$

اگر H هم‌مجموعه چپی از G باشد، آنگاه به‌ازای هر τ در H ، $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau H) = \tilde{\psi}(H)$. اکنون ضرب خارجی فرمای چندخطی متناوب L و M از درجه‌های r و s را با قرار دادن

$$L \wedge M = \sum_H \tilde{\psi}(H) \quad (49-5)$$

که در آن H روی G تغییر می‌کند، تعریف می‌کنیم. روش دیگر بیان تعریف $L \wedge M$ چنین است. فرض کنیم S مجموعه دلخواهی از جایگشتهای $\{1, \dots, r+s\}$

باشد که از هر هم-مجموعه چپ G دقیقاً یک عنصر را شامل است. در این صورت

$$L \wedge M = \sum_{\sigma} (\text{sgn}\sigma)(L \otimes M). \quad (50-5)$$

که در آن σ بر روی L تغییر می‌کند. واضح است که

$$r!s!t!L \wedge M = \pi_{r+s+t}(L \otimes M)$$

و از این رو، تعریف جدید وقتی K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد با (۴۷-۵) هم ارز است.

قضیه ۹. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و ۱ مدولی دوی K باشد. دد این صورت ضرب خارجی عملی شرکت پذیر دوی فرمهای چند خطی متناوب دوی V است. به بیان دیگر، اگر L, M, N فرمهای چند خطی متناوبی دوی V ، پترتیب از درجات r, s, t باشند، آنگاه

$$(L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N).$$

اثبات. گرچه اثبات قضیه ۸ در اینجا به کار نمی‌آید، اما در چگونگی اثبات حالت عمومی الهام بخش است. فرض کنیم $G(r, s, t)$ زیرگروهی از S_{r+s+t} مشکل از جایگشتها بی باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r\}, \quad \{r+1, \dots, r+s\}, \quad \{r+s+1, \dots, r+s+t\}$$

را داخل خودشان جای می‌گردانند. در این صورت به ازای همه ملمهای واقع در هم-مجموعه چپ مفروضی از $G(r, s, t)$ ، توابع چند خطی μ $(\text{sgn}\mu)(L \otimes M \otimes N)$ مساوی‌اند. از هر هم-مجموعه چپ $G(r, s, t)$ عضوری انتخاب می‌کنیم و E را مجموع جملات متناظر μ $(\text{sgn}\mu)(L \otimes M \otimes N)$ می‌گیریم. آنگاه E مستقل از نحوه انتخاب نمایشگرهای μ است و

$$r!s!t!E = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N).$$

نشان خواهیم داد که $L \wedge (M \wedge N)$ و $(L \wedge M) \wedge N$ هر دو با E متساوی هستند. فرض کنیم $G(r+s, t)$ زیرگروهی از S_{r+s+t} باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r+s\}, \quad \{r+s+1, \dots, r+s+t\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. فرض کنیم T مجموعه‌ای از جایگشتها از $\{1, \dots, r+s+t\}$ باشد، که شامل دقیقاً یک عنصر از هر هم-مجموعه چپ $G(r+s, t)$ است. بنا بر (۵۰-۵)

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\tau} (\text{sgn}\tau)[(L \wedge M) \otimes N]_{\tau}$$

که در آن مجموع بر روی همه جایگشت‌های τ در T نوشته می‌شود. حال فرض کنیم $G(r, s)$ زیرگروهی از S_{r+s} باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r\}, \quad \{r+1, \dots, r+s\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. گیریم S مجموعه دلخواهی از جایگشت‌های $\{1, \dots, r+s\}$ باشد که شامل دقیقاً یک عنصر از هم-مجموعه چپ $G(r, s)$ است. از (۵۰-۵) و آنچه در بالا نشان دادیم، نتیجه می‌شود که

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) [(L \otimes M) \circ \otimes N]_{\sigma, \tau}$$

که در آن مجموع به‌ازای همه جفت‌های τ, σ در $S \times T$ محاسبه می‌شود. اگر توافق کنیم که هر σ در S_{r+s} را با عنصری از S_{r+s+t} ، که روی $\{1, \dots, r+s\}$ با σ توافق داشته و روی $\{r+s+1, \dots, r+s+t\}$ برابر عنصر همانی باشد یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} \operatorname{sgn}(\sigma \tau) [(L \otimes M \otimes N)_{\sigma, \tau}]$$

اما

$$[(L \otimes M \otimes N)_{\sigma, \tau}] = (L \otimes M \otimes N)_{\tau, \sigma}$$

بنابراین

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} \operatorname{sgn}(\tau \sigma) (L \otimes M \otimes N)_{\tau, \sigma}$$

حال فرض کنیم به‌ازای σ در S ، τ در T ، و γ در $G(r, s, t)$ داشته باشیم

$$\tau_1 \sigma_1 = \tau_2 \sigma_2 \gamma$$

در این صورت $\tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \gamma$ در $G(r+s, t)$ است نتیجه می‌شود که τ_1, τ_2 در یک هم-مجموعه چپ $G(r+s, t)$ قرار دارند. بنابراین $\tau_1 = \tau_2$ و $\sigma_1 = \sigma_2 \gamma$. اما این مطلب ایجاد می‌کند که σ_1, σ_2 (به عنوان عناصری از S_{r+s}) در یکی از هم-مجموعه‌های $G(r, s)$ واقع شوند؛ از این‌رو، $\sigma_1 = \sigma_2$. پس، حاصل ضربهای $\tau \sigma$ با

$$\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!} \frac{(r+s)!}{r!s!t!}$$

جفت (τ, σ) در $T \times S$ متناظرند، همگی متمایز هستند و در هم-مجموعه‌های متمایزی از $G(r, s, t)$ قرار می‌گیرند. چون دقیقاً

$$\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}$$

هم-مجموعه چپ $(L \wedge M) \wedge N = E$ در S_{r+s+t} وجود دارد، نتیجه می‌شود که $E = L \wedge (M \wedge N)$. □

مثال ۱۳. ضرب خارجی با فرمولهای معین مربوط به محاسبه دترمینان، مشهور به بسطهای لاپلاس، ارتباط نزدیک دارد. گیریم K حلقه‌ای جا جایی با عنصر همانی و n عدد صحیح مثبتی باشد. فرض کنیم $n \leq r \leq s$ و L فرم r خطی متناوب روی K^n تعریف شده توسط

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $r = s$ ، و M فرم s خطی متناوب

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \det \begin{bmatrix} A_{1(r+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s(r+1)} & \cdots & A_{sn} \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه $L \wedge M = D$ تابع دترمینان K^n است. این امر نتیجه‌ای فوری از این حکم است که $L \wedge M$ فرم n خطی متناوبی است و (چنانکه می‌توان دید)

$$(L \wedge M)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = 1.$$

حال اگر $L \wedge M$ را به طرز صحیح توصیف کنیم، یکی از بسطهای لاپلاس برای دترمینان هر ماتریس $n \times n$ بر روی K را به دست می‌آوریم.

در گروه جایگشتی S_n ، فرض کنیم G زیر گروهی باشد که مجموعه‌های $\{1, 0, 0, \dots, r\}$ و $\{1, 0, 0, \dots, r+1\}$ را در داخل خودشان جای بگرداند. هر هم-مجموعه چپ G شامل دقیقاً یک جایگشت σ است که $\sigma(r+1) < \dots < \sigma_2 < \dots < \sigma_1 < \sigma_r$ و $\sigma_1 < \dots < \sigma_{r+1} < \dots < \sigma_{r+1}$. علامت این جایگشت توسط

$$\text{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)}$$

مشخص می‌شود. ضرب گوهای $L \wedge M$ با

۱. فرمولی که در متن اصلی آمده چنین است:

$$\text{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r + \left(\frac{r(r-1)}{2}\right)}$$

که صحیح نیست، زیرا اگر r عددی فرد بین 1 و n باشد، برای هم-مجموعه

$(L \wedge M)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum (\text{sgn}\sigma) L(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(r)}) M(\alpha_{\sigma(r+1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$

معین می‌شود که در آن مجموع بر روی دسته‌ای از σ ها، از هر گروه مجموعه G یکی، محاسبه می‌شود. بنابراین

$$(L \wedge M)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j_1 < \dots < j_r} e_j L(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}) M(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_s})$$

و در آن

$$e_j = (-1)^{j_1 + \dots + j_r - (r(r+1)/2)}$$

$$k_i = \sigma(r+i).$$

به بیان دیگر

$$\det A = \sum_{j_1 < \dots < j_r} e_j \begin{vmatrix} A_{j_1, 1} & \dots & A_{j_1, r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j_r, 1} & \dots & A_{j_r, r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{k_1, r+1} & \dots & A_{k_1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k_r, r+1} & \dots & A_{k_r, n} \end{vmatrix}.$$

این یک بسط لاپلاس است. بسطهای دیگر را می‌توان با عوض کردن مجموعه‌های $\{1, \dots, r\}$ و $\{r+1, \dots, n\}$ با دو مجموعه مکمل مقاومتی از نمایه‌ها به دست آورد.

$\rightarrow G = G$ ، تنها جایگشتی که هی تواند دارای خاصیت مذکور باشد، جایگشت همانی ϵ است.
اما مطابق این فرمول

$$\text{sgn}\epsilon = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} = -1.$$

فرمول صحیح باید

$$\text{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \frac{r(r+1)}{2}}$$

باشد، که به طریق ذیس اثبات می‌شود. برای چنین σ بی تعداد $(\sigma_1 - 1)$ تعویض لازم است که σ_1 عنصر ابتدای جایگشت باشد. و نیز $\sigma_2 - \sigma_1$ تعویض لازم است که σ_2 عنصر دوم جایگشت باشد. و به همین منوال $\sigma_r - \sigma_{r-1}$ تعویض لازم است که σ_r عنصر r جایگشت باشد. پس از این تعویضها $(\sigma_1 - 1), (\sigma_2 - \sigma_1), \dots, (\sigma_r - \sigma_{r-1}), \dots, (\sigma_r - 1)$ بدون تغییر و با ترتیب درست درجای خود قرار می‌گیرد. بدینسان

$$\text{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma_1 - 1} \cdot (-1)^{\sigma_2 - \sigma_1} \cdot \dots \cdot (-1)^{\sigma_r - \sigma_{r-1}} = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \frac{r(r+1)}{2}}.$$

در ترجمه صورت صحیح این فرمول، و نیز صورت تصحیح شده نتایج مربوط به آن آمده است.

اگر \wedge یک K -مدول باشد، می‌توانیم مدولهای فرمی گوناگون $(V)^r \wedge$ را پهلوی هم قرار دهیم و با استفاده از ضرب خارجی حلقه‌ای تعریف کنیم. برای سادگی، این کار را تنها برای حالت K -مدول آزادی از رتبه n انجام می‌دهیم. در این صورت، به ازای r مدولهای $(V)^r \wedge$ بدینهی هستند. حال

$$\wedge(V) = \wedge^0(V) \oplus \wedge^1(V) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(V)$$

را تعریف می‌کنیم. این یک مجموع مستقیم خارجی است – مفهومی که قبل از آن صحبت نشده است. عناصر $\wedge(V)$ عبارتند از $1 + n$ تاییهای (L_0, \dots, L_n) با $L_r \in \text{در}(V)$. جمع، و ضرب در K ، به همان صورت که برای $1 + n$ تاییهای انتظار می‌رود، تعریف می‌شوند. ضمناً $\wedge(K) = K \cdot \wedge^0(V) \wedge \wedge^1(K) \wedge \cdots \wedge \wedge^n(K)$ است، یکی بگیریم، آنگاه $\wedge(K) \wedge \wedge(M)$ زیر مدولی از $\wedge(V)$ می‌باشد و تجزیه به مجموع مستقیم

$$\wedge(V) = \wedge^0(V) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(V)$$

به مفهوم معمولی آن، بر قرار است. چون $\wedge(V)$ ، K -مدول آزادی از رتبه n است، می‌بینیم که $\wedge(V)$ نیز یک K -مدول آزاد است و

$$(\wedge(V)) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n.$$

ضرب خارجی یک عمل ضرب در $\wedge(V)$ تعریف می‌کند: از ضرب خارجی روی فرمها استفاده می‌کنیم و آن را به طور خطی به $\wedge(V) \wedge \wedge(V)$ سرایت می‌دهیم. این عمل، نسبت به عمل جمع روی $\wedge(V)$ پخش‌پذیر است و به $\wedge(V) \wedge \wedge(V)$ ساختار حلقه می‌بخشد. این حلقه گرآسمان روی V^* است. این حلقه جا بجا یی نیست؛ مثلاً اگر L و M بترتیب در \wedge^r و \wedge^s باشند، آنگاه

$$L \wedge M = (-1)^{rs} M \wedge L.$$

با این وجود، حلقه گرآسمان در چندین شاخه ریاضیات حائز اهمیت است.

۶

فرمای متعارف مقدماتی

دانلود از سایت (یافن سرا)
www.riazisara.ir

۱۰۶. مقدمه

قبل اشاره کرده‌ایم که هدف اصلی ما مطالعه تبدیلهای خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی است. تا اینجا، مثالهای خاص بسیاری از تبدیلهای خطی دیدیم و قضایایی چند درباره تبدیل خطی کلی اثبات کردیم. درحال فضاهای با بعد متناهی، از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این گونه تبدیلها استفاده کردیم و این نمایش مسلماً بهیش ما در مورد رفتار آنها افزود. فضای برداری $L(V, W)$ مشکل از تبدیلهای خطی از یک فضادر فضایی دیگر و نیز جبر خطی $L(V, V)$ مشکل از تبدیلهای خطی از یک فضا در خودش را مورد بررسی قراردادیم.

در دو فصل آتی، به بررسی عملگرهای خطی مشغول می‌شویم. برنامه ما این است که تنها یک عملگر خطی T روی فضای برداری با بعد متناهی V را برگزینیم و «آن را تفکیک کنیم تا بفهمیم در درون آن چه می‌گذرد». در این مرحله اولیه، ساده‌ترین راه آن است که هدف خود را به زبان ماتریسی بیان کنیم: برای عملگر خطی داده شده T پایه موتیی برای V بیابید که نسبت به آن، ماتریس T شکل ساده منتخی را به خود بگیرد. در اینجا تصویری از آنچه که در ذهن داریم، آورده شده است. شاید از نظر انجام کار ساده‌ترین ماتریسها، بعد از مضربهای اسکالری ماتریس همانی، ماتریسهای قطری

$$D = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

باشد. فرض کنیم T عملگری خطی روی یک فضای n بعدی V باشد. اگر می توانستیم پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ برای V بیا بیم که در آن T توسط ماتریس قطری D در (۱-۶) نمایش داده شود، مسلماً اطلاعات قابل ملاحظه ای درباره T کسب می کردیم. به عنوان نمونه، برخی از اعداد ساده وابسته به T ، مثل رتبه T یا دترمینان T رامی توانستیم با اندک کوششی فراتر از یک نگاه به ماتریس D ، تعیین کنیم. همچنین می توانستیم به طور آشکار برد و فضای پروژ T را توصیف کنیم. چون $[T]_{\mathcal{B}} = D$ [اگر و تنها اگر]

$$T\alpha_k = c_k \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2-6)$$

برد برابر زیرفضای پدیدآمده توسط α_k هایی است که به ازای آنها $c_k \neq 0$ ، و فضای پروژ زیرفضای پدیدآمده توسط بقیه α_i هاست. درواقع، به نظر منصفانه می آید که بگوییم، اگر پایه ای چون \mathcal{B} و ماتریسی قطری چون D را می شناختیم که $[T]_{\mathcal{B}} = D$ ، می توانستیم به هر سؤال احتمالی در مورد T باسانی پاسخ دهیم.

آیا هر عملگر خطی T می تواند توسط ماتریسی قطری در پایه ای مرتب، نمایش داده شود؟ اگرچنین نیست، برای کدام عملگرهای T چنین پایه ای وجود دارد؟ در صورت وجود چگونه می توانیم چنین پایه ای را بیا بیم؟ اگر چنین پایه ای وجود نداشته باشد، ساده ترین نوع ماتریسی که توسط آن می توانیم T را نمایش دهیم، کدام است؟ اینها برخی از سؤالاتی هستند که در این فصل (فصل بعدی) به آنها خواهیم پرداخت. همچنان که از برخی از مشکلات آنگاهی می باییم، شکل سؤالات ما نیز پیچیده تر و ظرفیت خواهد شد.

۳.۶. مقادیر سرشت نما

تذکرات مقدماتی بخش قبل، نقطه شروعی برای تلاش جهت تجزیه و تحلیل عملگر خطی عمومی T به دست می دهد. ما مطلب کلیدی خود را از (۲-۶) می گیریم که پیشنهاد می کنند بردارهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که توسط T به مضربهای اسکالری خودشان فرستاده می شوند.

تعريف. فرض کنیم V فضایی بودای بودی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. یک مقدار سرشت نمای T اسکالری چون c در F است که برای آن بوداد غیرصفحی چون $\alpha \in V$ با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ وجود داشته باشد. اگر c یک مقدار سرشت نمای T

باشد، آنگاه

- (الف) هر α با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ یک بردار سرشت نمای T وابسته به مقدار سرشت نمای c نامیده می‌شود.
- (ب) دسته همه α ‌ها که $T\alpha = c\alpha$ فضای سرشت نمای وابسته به c نامیده می‌شود.

مقدادیر سرشت نما در مواردی ریشه‌های سرشت نما، ریشه‌های را کند، مقدادیر ویژه، مقدادیر سره، یا مقدادیر طیفی هم نامیده می‌شوند. در این کتاب تنها از نام «مقدادیر سرشت نما» استفاده خواهیم کرد.

اگر T عملگری خطی و c اسکالری دلخواه باشد، مجموعه بردارهای α به طوری که $T\alpha = c\alpha$ ، زیرفضایی از V است. این زیرفضای، فضای پسوج تبدیل خطی $(T - cI)$ است. c را یک مقدار سرشت نمای T می‌نامیم، هرگاه این زیرفضای، زیرفضای صفر نباشد؛ یعنی، هرگاه $(T - cI)$ یک به یک نباشد. در صورتی که فضای زمینه V با بعد متناهی باشد، $(T - cI)$ دقیقاً زمانی یک به یک نیست که دترمینان آن 0 باشد. حال مطالع فوق را خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و c اسکالر دلخواهی باشد. احکام زیر هم اذند.

- (۱) یک مقدار سرشت نمای T است.
- (۲) عملگر $(T - cI)$ منفرد (معکوس ناپذیر) است.
- $\cdot \det(T - cI) = 0$ (۳)

معیار دترمینانی (۳) بسیار مهم است، زیرا به ما می‌گوید که کجا مقدادیر سرشت نمای T را جستجو کنیم. چون $\det(T - cI)$ نسبت به متغیر c یک چندجمله‌ای درجه n است، مقدادیر سرشت نما را به صورت ریشه‌های این چندجمله‌ای به دست می‌آوریم. اجازه بدھید این مطلب را با دقت بیان کنیم.

اگر B پایه مرتبی برای V باشد و $A = [T]$ ، آنگاه $(T - cI)$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس $(A - cI)$ معکوس پذیر باشد. در نتیجه، تعریف زیر مصدق دارد.

تعریف. اگر A ماتریسی $n \times n$ بردی هیأت F باشد، یک مقدار سرشت نمای A در F ، اسکالری چون c اذ F است که ماتریس $(A - cI)$ منفرد (معکوس ناپذیر) باشد.

چون c یک مقدار سرشت نمای A است اگر و تنها اگر $\det(A - cI) = 0$ است، یا به طور همارز، اگر و تنها اگر $\det(cI - A) = 0$ است، پس ماتریس $(xI - A)$ با درایهای چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم و چندجمله‌ای $f = \det(xI - A)$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح مقدادیر سرشت نمای A در دقیقاً اسکالرها بایی چون c در F هستند که $f(c) = 0$.

بدین دلیل، f چندجمله‌ای سرشت نمای A نامیده می‌شود. توجه به این نکته مهم است که f چندجمله‌ای تکینی است که دقیقاً از درجه n است. این مطلب بسادگی از فرمول دترمینان ماتریس بر حسب درایه‌ها یش قابل مشاهده است.

لم. ماتریسهای متشابه، چندجمله‌ای سرشت نمای مساوی دارند.
اثبات. اگر $B = P^{-1}AP$, آنگاه

$$\begin{aligned}\det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(xI - A) \cdot \det P \\ &= \det(xI - A). \quad \square\end{aligned}$$

این لم مارا قادر می‌سازد که آگاهانه چندجمله‌ای سرشت نمای عملگر T را به نوان چندجمله‌ای سرشت نمای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی که T را در پایه مرتبی از \mathcal{V} نمایش دهد تعریف کنیم. عیناً همچون در مرور ماتریسهای مقادیر سرشت نمای T ریشه‌های چندجمله‌ای سرشت نمای T هستند. بخصوص، این مطلب نشان می‌دهد که T نمی‌تواند بیش از n مقدار سرشت نمای متمایز داشته باشد. توجه به این نکته مهم است که ممکن است T هیچ مقدار سرشت نما نداشته باشد.

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی \mathbb{R}^2 باشد که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت نمای T (یا A) عبارت است از

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

چون این چندجمله‌ای دارای ریشه حقیقی نیست، T هیچ مقدار سرشت نما ندارد. اگر U عملگری خطی روی C^2 باشد که در پایه مرتب استانده توسط A نمایش داده می‌شود، آنگاه U دارای دو مقدار سرشت نمای i و $-i$ است. در اینجا نکته‌ای ظرفیت دیده می‌شود. در بحث مر بوط بد مقادیر سرشت نمای ماتریس مفروض A باید مواظب باشیم که هیأت موردنظر را تصریح کنیم. در این مثال ماتریس A دارای هیچ مقدار سرشت نما در \mathbb{R} نیست، اما دو مقدار سرشت نمای i و $-i$ در C دارد.

مثال ۳. گیزیم A ماتریس 3×3 (حقیقی)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت چند جمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از

$$\left| \begin{array}{ccc} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{array} \right| = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

از این‌رو، مقادیر سرشت‌نمای A عبارتند از ۱ و ۲.

فرض کنیم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه استاندۀ توسط A نمایش داده می‌شود. بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ را می‌باییم. داریم

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

با یک نظر روشن است که $A - I$ دارای رتبه ۲ است (و لذا پوچی $T - I$ برابر ۱ است). از این‌رو، فضای بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۱ یک-بعدی است. بردار $(1, 0, 2) = \alpha_1$ فضای پوچ $T - I$ را پیدا می‌آورد. پس، $T\alpha = \alpha$ اگر و تنها اگر α مضربی اسکالری از α_1 باشد. اکنون

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. آشکار است که رتبه $A - 2I$ نیز ۲ است، بنابراین فضای بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۲ دارای ۱ بعد است. بدیهی است که $T\alpha = 2\alpha$ اگر و تنها اگر α مضربی اسکالری از $(1, 1, 2) = \alpha_2$ باشد.

تعريف: فرض کنیم T عملگری خطی در فضای با بعد متناهی V باشد. گوییم T قطری شدنی است، هرگاه پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر بردار آن یک بردار سرشت‌نمای T باشد.

دلیل این نام‌گذاری باید روش باشد؛ زیرا، اگر پایه مرتبتی چون $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که در آن هر α_i یک بردار سرشت‌نمای T باشد، آنگاه ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} قطری است. اگر $c_i \alpha_i = c_i \alpha_i$ داریم

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

حتماً لازم نیست که اسکالرهای c_1, \dots, c_n متمایز باشند؛ در واقع، ممکن است همگی یک اسکالر باشند (وقتی که T مضری اسکالری از عملگر همانی است).

همچنین می‌توان تعریف کرد که T قطری شدنی است هرگاه بردارهای سرشت‌نمای T فضای V را پدید آورند. این تعریف تنها از نظر ظاهر با تعریف قبلی متفاوت است، چراکه می‌توان بین هرمجموعه‌پدیدآورندهای از بردارها، پایه‌ای انتخاب کرد.

در مثالهای ۱ و ۲ عمدتاً عملگرهای خطی روی R^2 برگزیدیم که قطری شدنی نباشند. در مثال ۱، عملگری خطی روی R^2 داریم که قطری شدنی نیست، چراکه مقادیر سرشت‌نمای T ندارد. در مثال ۲، عملگر T مقادیر سرشت‌نمای دارد؛ در واقع، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T به‌طور کامل برروی هیأت اعداد حقیقی تجزیه می‌شود: $(x-1)(x-2) = f$. با این حال، T قطری شدنی نیست. به‌هریک از دو مقادیر سرشت‌نمای T ، تنها یک فضای یک بعدی از بردارهای سرشت‌نمای واپس است. از این‌رو، ممکن نیست بتوانیم پایه‌ای برای R^2 تشکیل دهیم که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T باشد.

فرض کنیم عملگر خطی T قطری شدنی باشد. بعلاوه فرض کنیم c_1, \dots, c_n مقادیر سرشت‌نمای همتای T باشند. در این صورت، پایه مرتبی چون \mathcal{B} وجود دارد که در آن توسط ماتریسی قطری با درایه‌های قطعی c_i نمایش داده می‌شود و هریک از c_i ‌ها به تعداد دفعات معینی تکرار می‌شوند. اگر تعداد دفعات تکرار c_i برای d_i باشد، آنگاه (با انتخاب ترتیبی درست) ماتریس شکل بلوکی

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n I_n \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

دارد که در آن I ماتریس همانی $d_1 \times d_1$ است. از این ماتریس دو مطلب مشاهده می‌شود. اول اینکه، چند جمله‌ای سرشت نمای T ، حاصل ضربی از سازه‌های خطی (احتمالاً مکرر) است:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{d_k}.$$

اگر هیأت اسکالری F بسته جبری، مثلاً هیأت اعداد مختلط باشد، هر چند جمله‌ای بر روی F را می‌توان بدین صورت به سازه‌ها تجزیه کرد (د. ل. بخش ۵۰.۴)؛ اما، اگر F بسته جبری نباشد، وقتی که بگوییم چند جمله‌ای سرشت نمای T دارای چنین تجزیه‌ای به سازه‌هاست، داریم ویژگی خاصی از آن را ذکر می‌کنیم. دومین مطلبی که از (۳-۶) مشاهده می‌شود. این است که $[T - c_i I]$ هم d_i صفر روی قطر اصلیش دارد. هر چند این رابطه بین بعد فضای سرشت نمای T و چندگانگی مقدار سرشت نمای T ریشه‌ای از f در ابتدای جالب به نظر نمی‌آید، اما راه‌ساده‌ای است برای تعیین اینکه آیا عملگر مفروضی قطری شدنی است یا خیر.

لم. فرض کنیم $f(T)\alpha = c\alpha$. اگر f چند جمله‌ای دلخواهی باشد، آنگاه $f(T)\alpha = f(c)\alpha$ است. تمرین.

لم. فرض کنیم T عملگری خطی در فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T و W فضای بردارهای سرشت نمای واپسیه به مقدار سرشت نمای c باشد. اگر $W = W_1 + \dots + W_k$ آنگاه

$$\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_k.$$

د) واقع، اگر \mathcal{B} پایه مرتبی برای W باشد، آنگاه $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k)$ پایه مرتبی برای W است.

المباین. فضای $W = W_1 + \dots + W_k$ زیرفضای پدیدآمده توسط همه بردارهای سرشت نمای T است. معمولاً وقتی که مجموع W از زیرفضاهای W_i را تشکیل می‌دهیم، به دلیل روابطی خطی که ممکن است بین بردارهای فضاهای گوناگون موجود باشد، انتظار داریم که $\dim W < \dim W_1 + \dots + \dim W_k$. این لم بیان می‌کند که فضاهای سرشت نمای واپسیه به مقادیر سرشت نمای متفاوت منتقل از یکدیگر نند.

فرض کنیم که (β_i) برداری چون $\beta_i \in W_i$ در دست باشد و نیز فرض کنیم $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_k$. نشان می‌دهیم که $\beta_i = \beta$. گیریم f چند جمله‌ای

$$\begin{aligned}
 & \text{دلخواهی باشد. چون } c_i \beta_i = T \beta_i, \text{ لم قبل می‌گوید که} \\
 & \circ = f(T) \circ = f(T) \beta_1 + \cdots + f(T) \beta_k \\
 & = f(c_1) \beta_1 + \cdots + f(c_k) \beta_k.
 \end{aligned}$$

چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_k را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$f_i(c_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 \circ &= f_i(T) \circ = \sum_j \delta_{ij} \beta_j \\
 &= \beta_i.
 \end{aligned}$$

حال، فرض کنیم B_i پایه مرتبی برای W_i و B دنباله (B_1, \dots, B_k) باشد.
 در این صورت B زیرفضای $W = W_1 + \cdots + W_k$ را پدید می‌آورد. بعلاوه، بدلیل
 زیر B یک دنباله مستقل خطی از بردارهاست. هر رابطه خطی بین بردارهای B شکل
 $\circ = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ را کسه در آن β_i ترکیبی خطی از بردارهای B_i است، خواهد
 داشت. بنابر آنچه که هم اکنون انجام دادیم، می‌دانیم که به ازای هر i ، $\circ = \beta_i$. چون هر B_i
 مستقل خطی است، مشاهده می‌کنیم که تنها رابطه خطی بین بردارهای B ، رابطه خطی
 بدیهی است. \square

قضیه ۳. فرض کنیم T عملگری خطی دو فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم
 c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T و W_i فضای پوچ $(T - c_i I)$ باشد. مطالع
 ذیل هم ارزند.

(۱) T قطعی شدنی است.

(۲) چندجمله‌ای سرشت نمای T عبارت است از

$$\begin{aligned}
 f &= (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} \\
 &\quad \cdot i = 1, \dots, k, \dim W_i = d_i \\
 \dim W_1 + \cdots + \dim W_k &= \dim V \quad (۳)
 \end{aligned}$$

اثبات. قبله دیده‌ایم که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. اگرچندجمله‌ای سرشت نمای f
 حاصل ضرب سازه‌های خطی باشد، چنانکه در (۲) هم هست، آنگاه
 $d_1 + \cdots + d_k = \dim V$ است. زیرا مجموع d_i ‌ها برای درجه چندجمله‌ای سرشت نمای است،
 و این درجه همان $\dim V$ است. بنابراین (۳) از (۲) نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم (۳)
 برقرار باشد. بنا بر لم، باید داشته باشیم $V = W_1 + \cdots + W_k$. پس، بردارهای

□ سرشت نمای T فضای V را پدید می‌آورند.

نظیر ماتریسی قضیه ۲ را می‌توان به صورت زیر تنظیم کرد. فرض کیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیئت F ، و $c_k, \dots, c_1, 0, 0, 0$ مقادیر سرشت نمای متمایز A در F باشند. به ازای هر i ، گیریم B_i فضای ماتریسهای ستونی X (با درایه‌های متعلق به F) باشد که

$$(A - c_i I)X = 0$$

و فرض کیم B_i پایه مرتبی برای X باشد. اگر پایه‌های $B_1, \dots, B_k, 0, 0, 0$ به طور دسته جمعی به دنبال هم بیایند، دنباله ستونهای ماتریسی چون

$$P = [P_1, P_2, \dots] = (B_1, \dots, B_k).$$

را تشکیل می‌دهند. ماتریس A روی F مشابه ماتریسی قطری است اگر و تنها اگر ماتریسی مربعی باشد. وقتی P مربعی باشد، معکوس پذیر هم هست و $P^{-1}AP$ قطری است.

مثال ۳. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندہ با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. می‌خواهیم با استفاده از اعمال مختلف سط्रی و ستونی چگونگی محاسبه چندجمله‌ای سرشت نمای را نشان دهیم.

$$\begin{array}{c|ccc} x-5 & 6 & 6 & | & x-5 & 0 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 & = & 1 & x-2 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 & & -3 & 2-x & x+4 \end{array}$$

$$= (x-2) \begin{array}{c|ccc} x-5 & 5 & -6 & | & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & & -3 & -1 & x+4 \end{array}$$

$$= (x-2) \begin{array}{c|ccc} x-5 & 0 & 6 & | & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & & -2 & 0 & x+2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 6 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)(x^2 - 3x + 2) \\
 &= (x-2)^2(x-1).
 \end{aligned}$$

ابعاد فضاهای بردارهای سرشت نمای وابسته به این دو مقدار سرشت نمای چیستند؟ داریم

$$A - I = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}.$$

می‌دانیم که $A - I$ منفرد است و بوضوح ≥ 2 رتبه $(A - I)$. بنابراین، $2 =$ رتبه $(A - I)$. بدینهی است که $1 =$ رتبه $(A - 2I)$.

فرض کنیم W_2 و W_1 و W فضاهای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقادیر سرشت نمای 1 و 2 باشند. می‌دانیم که $\dim W_1 = 1$ و $\dim W_2 = 2$. بنابراین T قطری شدنی است. ارائه پایه‌ای برای R^3 که در آن T توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آسان است. فضای پوچ $(T - I)$ توسط بردار $(3, -1, 3)$ پدیدمی‌آید، ولذا $\{\alpha_1\}$ پایه‌ای برای W_1 است. فضای پوچ $T - 2I$ (یعنی فضای W_2) مشکل است از بردارهای (x_1, x_2, x_3) با شرط $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. از این رو، به عنوان پایه‌ای برای W_2 مثلاً $\{\alpha_2\}$ می‌توانیم این دو بردار را برگزینیم:

$$\alpha_2 = (2, 1, 0)$$

$$\alpha_3 = (2, 0, 1).$$

اگر $\{B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\}$ آنگاه $[T]$ عبارت است از ماتریس قطری

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

این واقعیت که T قطری شدنی است، بدین معنی است که ماتریس اولیه A با ماتریس قطری D (بر روی R) متشابه است. ماتریس P که ما را قادر به تغییر مختصات از پایه استانده می‌سازد (مسلماً) ماتریسی است که ترانهاده‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را به عنوان

بردارهای ستونی خود دارد:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

علاوه، $AP = PD$ ، بنا بر این

$$P^{-1}Ap = D.$$

تمرین

۱. در هر یک از حالات زیر فرض کنیم T و U دو عملگر خطی بترتیب روی R^3 و C^2 باشند که هر دو بترتیب در پایه مرتب استاندۀ R^3 و پایه مرتب استاندۀ C^2 توسط A نمایش داده می شوند. چندجمله‌ایهای سرشت نمای T و U ، همچنین مقادیر سرشت نمای هر عملگر را بیاورد، و نیز به ازای هر مقدار سرشت نمای چون c پایه‌ای برای فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به آن بیاورد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

۲. فضای برداری n بعدی V بر روی F داده شده است. چندجمله‌ای سرشت نمای عملگر همانی روی V چیست؟ چندجمله‌ای سرشت نمای عملگر صفر چیست؟

۳. ماتریس مثلثی شکل A بر روی هیأت $n \times n$ مفروض است. ثابت کنید که مقادیر سرشت نمای A در ایهای قطری A ، یعنی اسکالرهای A_{ii} می باشند.

۴. فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندۀ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

- نمایش داده می شود. با ارائه پایه‌ای برای R^3 که هر بردار آن یک بردار سرشت نمای T باشد، ثابت کنید T قطری شدنی است.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت R با ماتریسی قطری متشابه است؟ آیا A بر روی هیأت C با ماتریسی قطری متشابه است؟

۶. فرض کنید T عملگری خطی روی \mathbb{R}^4 باشد که در پایه مرتب استاندہ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود. تحت چه شرایطی روی a, b , و c عملگر T قطری شدنی است؟

۷. T را عملگری خطی روی فضای برداری n بعدی V بگیرید و فرض کنید n مقدار سرشت نمای هتمایز داشته باشد. ثابت کنید T قطری شدنی است.

۸. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند. ثابت کنید که اگر $(I - AB)$ معکوس پذیر باشد، آنگاه $BA - I$ نیز معکوس پذیر است و

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

۹. از نتیجه تعریف ۸ استفاده و ثابت کنید که اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند، آنگاه مقادیر سرشت نمای AB و BA در F مساوی هستند.

۱۰. فرض کنید A ماتریس 2×2 متقارنی ($A^t = A$) با درایه های حقیقی باشد. ثابت کنید A بر روی R با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. ماتریس 2×2 مختلط N را که $N^2 = 0$ در نظر بگیرید. ثابت کنید یا $N = 0$ یا N بر روی C با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مشابه است.

۱۲. از نتیجه تمرین ۱۱ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: اگر A ماتریسی 2×2 با درایه‌های مختلط باشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی از یکی از دو نوع

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

متشا به است.

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همه توابع پیوسته از R در R ، یعنی فضای توابع حقیقی (مقدار) پیوسته روی خط حقیقی، باشد. فرض کنید T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

باشد. ثابت کنید که T دارای هیچ مقدار سرشت نما نیست.

۱۴. ماتریس قطری A ای $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت نما

$$(x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

را که در آن c_1, \dots, c_k متمایز هستند، در نظر بگیرید. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ با شرط $AB = BA$ باشد. ثابت کنید که بعد V برابر $d_1 + \dots + d_k$ است.

۱۵. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد. فرض کنید T عملگر خطی «ضرب از چپ در A » روی V باشد. آیا این درست است که A و T مقادیر سرشت نما مساوی دارند؟

۳.۶. چندجمله‌ایهای پوچساز

در تلاش برای تحلیل عملگر خطی T یکی از مفیدترین مقولاتی که باید بدانیم، رده چندجمله‌ایهایی است که T را پوج می‌سازند. بهیان دقیقتر، فرض کنیم V فضای برداری بر روی هیأت F و T عملگر خطی روی V باشد. اگر p یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، آنگاه $(T)^p$ نیز عملگر خطی روی V است. اگر q چندجمله‌ای دیگری بر روی F باشد، آنگاه

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T)$$

$$(pq)(T) = P(T)q(T).$$

از این رو، دستهٔ چندجمله‌ایهای p که T را پوچ می‌سازند، بدین معنی که

$$p(T) = 0$$

یک ایدآل در جبر چندجمله‌ای $F[x]$ است. این ایدآل ممکن است ایدآل صفر باشد، بدین معنی که ممکن است T توسط هیچ چندجمله‌ای غیر صفری پوچ نشود. اما، اگر بعد فضای V متناهی باشد، این امر نمی‌تواند روی دهد.

فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای n بعدی V باشد. $1 + n^2$ توان اول T را مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$I, T, T^2, \dots, T^{n^2}.$$

این دنباله، از $1 + n^2$ عملگر در $L(V, V)$ ، فضای عملگرهای خطی روی V ، تشکیل می‌شود. بعد فضای $L(V, V)$ برابر n^2 است. بنا بر این، این دنباله از $1 + n^2$ عملگر باید وابسته خطی باشد؛ یعنی، به ازای چند اسکالر c_i که همگی صفر نباشند، داریم

$$c_0 I + c_1 T + \dots + c_{n^2} T^{n^2} = 0.$$

از این رو، ایدآل چندجمله‌ایهای که T را پوچ می‌سازند شامل چندجمله‌ای غیر صفری از درجه n^2 یا کمتر هم هست.

بنا بر قضیه ۵ از فصل ۴، هر ایدآل چندجمله‌ایها مشتمل از همهٔ مضربهای چندجمله‌ای تکین ثابتی است که مولد آن ایدآل است. پس، عملگر T با چندجمله‌ای تکین p با خاصیت زیر در تنازع است: اگر f چندجمله‌ای مفروضی بر روی F باشد، آنگاه $f(T) = 0$ اگر و تنها اگر $pg = f$ باشد، که در آن g نیز یک چندجمله‌ای بر روی F است.

تعريف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای بودادی با بعد متناهی V بود و F هیأت باشد. چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از (یکتا) مولد تکین ایدآل چندجمله‌ایهایی بر روی F که T را پوچ می‌سازند.

نام «چندجمله‌ای مینیمال» از این واقعیت ریشه می‌گیرد که مولد هر ایدآل چندجمله‌ایها با چندجمله‌ای تکین از درجهٔ مینیمم در آن ایدآل مشخص می‌شود. این بدان معنی است که چندجمله‌ای مینیمال p برای عملگر خطی T به طور یکتا با سه خاصیت زیر معین می‌شود:

(۱) p چندجمله‌ای تکینی بر روی هیأت اسکالری F است.
 $p(T) = 0$.

(۲) درجهٔ هیچ چندجمله‌ای بر روی F که T را پوچ می‌سازد کمتر از درجهٔ p نیست.
 اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، چندجمله‌ای مینیمال A را به طریق مشابه، به عنوان یکتا مولد تکین ایدآل همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی F که A را پوچ می‌سازند، تعریف می‌کنیم. اگر عملگر T در پایهٔ مرتبی توسط ماتریس A نمایش داده

شود، آنگاه T و A چندجمله‌ای مینیمال مساوی دارند. این بدان خاطر است که $(T)f = f(T)$ در آن پایه با ماتریس $f(A)$ نمایش داده می‌شود و بنا بر این، $0 = f(T) = f(A)$ اگر و تها اگر $f(A) = 0$.

از تذکر اخیر درمورد عملگرها و ماتریسها نتیجه‌می‌گیریم که ماتریس‌های متشابه دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی هستند. این حکم از تعاریف نیز روشن است، زیرا به ازای هر چندجمله‌ای

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.$$

نکته اساسی دیگری هم درمورد چندجمله‌ایهای مینیمال ماتریسها هست که باید متذکر شویم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد. فرض کنیم F_1 هیأتی باشد که F را به عنوان یک زیرهیأت شامل است. (مثلًا، A ممکن است ماتریسی با درایه‌های گویا باشد، درحالی که F_1 هیأت اعداد حقیقی. یا A ممکن است ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد، درحالی که F_1 هیأت اعداد مختلط). می‌توان A را به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی F ، یا به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی F_1 محسوب کرد. در ظاهر، ممکن است به نظر رسد که برای A دو چندجمله‌ای مینیمال متفاوت به دست می‌آید. خوشبختانه این طور نیست؛ و باید ببینیم چرا. تعریف چندجمله‌ای مینیمال A ، در صورتی که به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F محسوب شود، چیست؟ همه چندجمله‌ایهای A ، در صورتی که به عنوان متعلق به F که A را پروژ می‌سازند در نظر می‌گیریم و آن را که با کوچکترین درجه است انتخاب می‌کنیم. اگر f چندجمله‌ای تکینی بر روی F باشد:

$$f = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \quad (4-6)$$

آنگاه $0 = f(A)$ صرفاً بیان می‌کند که رابطه‌ای خطی بین توانهای A در دست است:

$$A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0. \quad (5-6)$$

درجه چندجمله‌ای مینیمال، کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که یک رابطه خطی به صورت (5-6) بین توانهای I, A, A^2, \dots, A^k وجود داشته باشد. بعلاوه، بنا بر یکتا بی چندجمله‌ای مینیمال به ازای این k یک و تها یک رابطه به صورت (5-6) برقرار است؛ بدین معنی که، وقتی درجه این چندجمله‌ای مینیمال، k ، تعیین شود، اسکالرها بی یکتا چون a_0, a_1, \dots, a_{k-1} در F یافت می‌شوند که در (5-6) صدق کنند. اینها، ضرایب چندجمله‌ای مینیمال هستند.

حال (به ازای هر k) در (4-5) دستگاهی مشکل از 2^n معادله خطی برای «مجھولهای a_0, a_1, \dots, a_{k-1} » داریم. چون درایه‌های A در F قرار دارند، ضرایب دستگاه معادلات (4-5) هم در F هستند. بنا بر این، اگر دستگاه به ازای a_0, a_1, \dots, a_{k-1} در F جوابی داشته باشد، به ازای a_0, a_1, \dots, a_{k-1} در F نیز دارای جوابی است. (د. ک. انتهای بخش ۰.۴۰۱) اکنون باید روش باشد که دو چندجمله‌ای مینیمال مساوی هستند.

تا اینجا چه مطالعی درباره چندجمله‌ای مینیمال عملگری خطی روی فضای n بعدی آموخته‌ایم؟ تنها چیزی که می‌دانیم این است که درجه آن از n^2 تجاوز نمی‌کند. معلوم می‌شود که این تخمین نسبتاً ضعیف است، چراکه این درجه نمی‌تواند بیش از n باشد. بزودی ثابت می‌کنیم که این عملگر به وسیله چندجمله‌ای سرشت‌نمایش پسوج می‌شود. ابتدا، به مشاهده حکمی مقدماتی تر می‌پردازیم.

قضیه ۳. فرض کنیم T عملگری خطی دو فضای برداری n باشد [یا، A ماتریسی $n \times n$ باشد]. چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مینیمال $[T]$ [یا A ، دارای ریشه‌های مساوی ولی احتمالاً با چندگانگیهای متفاوت هستند.

اینها. گیریم p چندجمله‌ای مینیمال T و c یک اسکالر باشد. آنچه را که می‌خواهیم نشان بدهیم این است که $\circ = p(c)$. اگر و تنها اگر c یک مقدار سرشت‌نمای T باشد. ابتدا فرض کنیم $\circ = p(c)$. در این صورت

$$p = (x - c)q$$

که در آن q یک چندجمله‌ای است. چون $\deg q < \deg p$ ، تعریف چندجمله‌ای مینیمال p تصریح می‌کند که $\circ = p(T) \neq q(T)$. برداری چون β انتخاب می‌کنیم که $\circ = q(T)\beta \neq p(T)\beta$. در این صورت

$$\begin{aligned} \circ &= p(T)\beta \\ &= (T - cI)q(T)\beta \\ &= (T - cI)\alpha \end{aligned}$$

و بنابراین، c یک مقدار سرشت‌نمای T است. حال، فرض کنیم c یک مقدار سرشت‌نمای T ، مثلاً $\circ = T\alpha = c\alpha$ و $\alpha \neq 0$ ، باشد. همان‌طور که در یکی از لمهای پیش مذکور شدیم

$$p(T)\alpha = p(c)\alpha.$$

چون $\circ = p(T) \neq p(c)$ ، داریم \square .

فرض کنیم T یک عملگر خطی قطری شدنی و c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند. در این صورت باسانی دیده می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از چندجمله‌ای

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k).$$

اگر α یک بردار سرشت‌نمای باشد، آنگاه یکی از عملگرهای $T - c_1 I, \dots, T - c_k I$ بردار α را به 0 می‌فرستد. بنابراین به ازای هر بردار سرشت‌نمای α

$$(T - c_1 I) \cdots (T - c_k I)\alpha = 0.$$

پایه‌ای برای فضای زمینه وجود دارد که مشکل از بردارهای سرشت نمای T است؛ از این‌رو

$$p(T) = (T - c_1 I) \cdots (T - c_k I) = 0.$$

ما حصل کارمان چنین است. اگر T یک عملگر خطی قطری شدنی باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از سازه‌های خطی متمایز است. به طوری که بزودی خواهیم دید، این خاصیت مشخص کننده عملگرهای قطری شدنی است.

مثال ۴. سعی می‌کنیم چندجمله‌ایهای عملگرهای مثال‌های ۱، ۲، و ۳ را بیاییم. ما آنها را به عکس ترتیب فوق مورد بحث قرار می‌دهیم. قبلًا معلوم شد که عملگر مثال ۳ قطری شدنی و با چندجمله‌ای سرشت نمای

$$f = (x - 1)(x - 2)^2$$

است. از بند قبل بر می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از

$$P = (x - 1)(x - 2).$$

خواننده می‌تواند با بررسی مستقیم کاملاً اطمینان یا بد که

$$(A - I)(A - 2I) = 0.$$

در مثال ۲، عملگر T نیز چندجمله‌ای سرشت نمای $f = (x - 1)(x - 2)^2$ را دارد. اما، این قطری شدنی نیست و لذا نمی‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال آن $(x - 1)(x - 2)$ است. در این حالت درباره چندجمله‌ای مینیمال چه می‌دانیم؟ به واسطه قضیه ۳ می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای همان ۱ و ۲ هستند، البته احتمالاً با چند گانگی‌ای دیگر. پس رامیان چندجمله‌ایهایی به صورت $(x - 1)^k(x - 2)^l$ ، $k, l \geq 1$ جستجو می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (A - I)(A - 2I) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

از این‌رو، درجه چندجمله‌ای مینیمال اقلای ۳ است. پس، باید $(x - 2)^2(x - 1)$ یا $(x - 2)^2(x - 1)^2$ را بیازماییم. دومی که چندجمله‌ای سرشت نمای است، انتخابی محتمل به نظر می‌رسد. با آسانی می‌توان محاسبه کرد که $(A - 2I)^2 = 0$ و $(A - I)(A - 2I) = 0$. پس، چندجمله‌ای مینیمال T همان چندجمله‌ای سرشت نمای آن است.

در مثال ۱، عملگر خطی T روی R^2 را که در پایه استانده توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود مورد بحث قراردادیم. چندجمله‌ای سرشت نما، $x^2 + 1$ است که هیچ ریشه حقیقی ندارد. برای تعیین چندجمله‌ای مینیمال، T را کنار می گذاریم و حواس خود را روی A متمرکزمی کنیم. به عنوان ماتریسی مختلط، A دارای مقادیر سرشت نما ω و $-\omega$ است. هر دو ریشه باید در چندجمله‌ای مینیمال ظاهر شوند. پس چندجمله‌ای مینیمال بر $x^2 + 1$ تقسیم پذیر است. باسانی می توان نشان داد که $0 + I = A^2$. بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال $1 + x^2$ است.

قضیه ۴ (کیلی-همیلتون)^{۱۰} ۰ عملگر خطی T (وی فضای بردادی بعد متناهی V داده شده است. اگر f چندجمله‌ای سرشت نما T باشد، آنگاه $0 = f(T) = f$ به بیان دیگر، چندجمله‌ای مینیمال T چندجمله‌ای سرشت نما T را عاد می کند.

اثبات. بعدها دو اثبات دیگر از این قضیه، مستقل از اثبات ارائه شده در اینجا، عرضه خواهیم کرد. اثبات حاضر هر چند کوتاه، ولی احتمالاً فهم آن مشکل است. گذشته از اختصار، این اثبات این حسن را هم دارد که کاربردی آموزنده و کاملاً غیر بدیهی از نظریه عمومی در تعریف ۵ گسترش یافته، عرضه می کند.

فرض کنیم K حلقه جابجایی با عنصرهای متشکل از همه چندجمله‌ایهای از T باشد. بدیهی است که K در واقع جبری جابجایی با عنصرهای برروی هیأت اسکالری است. پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V انتخاب می کنیم و A را ماتریسی می گیریم که T را در آن پایه نمایش می دهد. در این صورت

$$T\alpha_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

این معادلات را می توان به صورت دم ارز

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ji} T - A_{ji} I) \alpha_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

نیز نوشت. فرض کنیم B عنصری از $K^{n \times n}$ با درایه‌های

$$B_{ij} = \delta_{ij} T - A_{ji} I$$

باشد. وقتی $n = 2$

$$B = \begin{bmatrix} T - A_{11} I & -A_{21} I \\ -A_{12} I & T - A_{22} I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det B &= (T - A_{11}I)(T - A_{22}I) - A_{12}A_{21}I \\ &= T^2 - (A_{11} + A_{22})T + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I \\ &= f(T)\end{aligned}$$

که در آن f چندجمله‌ای سرشت‌نمای است:

$$f = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A.$$

در حالت $n > 2$ نیز روش نیز است که

$$\det B = f(T)$$

چرا که f دترمینان ماتریس $xI - A$ است که در اینجا یعنی چندجمله‌ایهای

$$(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ij}$$

می‌باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم $\det B = 0$. برای اینکه $f(T) = 0$ عملگر صفر باشد لازم و کافی است که به ازای $n, \dots, k = 1, \dots, n$. طبق تعریف B ، بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ در معادلات

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} \alpha_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (6-6)$$

صدق می‌کنند. وقتی $n = 2$ ، نوشتن (6-6) به صورت

$$\begin{bmatrix} T - A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T - A_{22}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الهام بخش است. در این حالت، الحقیقی کلاسیک، یعنی $\operatorname{adj} B$ ، عبارت است از ماتریس

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} T - A_{22}I & A_{21}I \\ A_{12}I & T - A_{11}I \end{bmatrix}$$

۱. این قسمت از اثبات اندکی تصحیح شده است در متن اصلی در این رابطه بجای A_{ji} ، A_{ij} آمده است که با تصحیح این اشتباہ، شکافی در اثبات پهلو وجود می‌آید. خوشبختاً با استفاده از

$$(xI - A)_{ij}^t = xI_{ji} - A_{ji} \quad f = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t$$

نتیجه مطلوب؛ یعنی، $\det(B) = \det(TI - A)^t = \det(TI - A) = f(T)$ بدست می‌آید. م.

$$\tilde{B}B = \begin{bmatrix} \det B & & \circ \\ \circ & & \det B \end{bmatrix}.$$

از این دو، داریم

$$\begin{aligned} (\det B) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= (\tilde{B}B) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{B} \left(B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در حالت کلی، فرض کنیم $\tilde{B} = \text{adj } B$. در این صورت بنابر (۶-۶) به ازای هر جفت i, k

$$\sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j = 0,$$

و با مجموع گیری روی i ، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right) \alpha_j. \end{aligned}$$

حال $\tilde{B}B = (\det B)I$ ، و از این رو

$$\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{kj} \det B.$$

پس

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \delta_{kj} (\det B) \alpha_j \\ &= (\det B) \alpha_k, \quad 1 \leq k \leq n. \square \end{aligned}$$

قضیه کیلی-همیلتون، عمدهاً بدین خاطر در این مرحله مفید است که حیطه جستجو برای چندجمله‌ایهای مینیمال عملگرهای گوناگون را محدود می‌سازد. اگر ماتریس A را که نمایشگر T در پایه مرتبی است بشناسیم، آنگاه می‌توانیم چندجمله‌ای سرشتمانی آن، f ، را محاسبه کنیم. می‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند و هر دو

ریشه‌های مساوی دارند. هیچ روش خاصی برای محاسبه دقیق ریشه‌های چندجمله‌ایها (مگر در صورت کوچک بودن درجه) در دست نیست؛ اما، اگر f به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$$d_i \geqslant 1, c_1, \dots, c_k, \dots, c_n \quad f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} \quad (7-6)$$

آنگاه

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}, \quad 1 \leqslant r_j \leqslant d_j. \quad (8-6)$$

این تنها چیزی است که در حالت عمومی می‌توان ابراز کرد. اگر f چندجمله‌ای (7-6) با درجه n باشد، آنگاه به‌ازای هر چندجمله‌ای p نظیر (8-6) می‌توانیم ماتریسی $n \times n$ بیا بیم که p را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت نمای خود و p را به‌عنوان چندجمله‌ای مینیمال خود دارا باشد. این مطلب را حالا اثبات نمی‌کنیم. ولی، می‌خواهیم این واقعیت را تأکید کنیم که علم به‌اینکه چندجمله‌ای سرشت نمای شکل (7-6) را دارد، تصریح می‌کند که چندجمله‌ای مینیمال به‌شکل (8-6) است و هیچ چیز دیگری در مرور دارد ابراز نمی‌کند.

مثال ۵. گیریم A ماتریس (گویای) 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. توانهای A بسادگی قابل محاسبه‌اند:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس $A^3 = 4A$; یعنی، اگر $(x+2)(x-2) = x^2 - 4x = x(x-2) - 4x = p$, آنگاه $p(A) = 0$ چندجمله‌ای مینیمال A را تقسیم کند. این چندجمله‌ای مینیمال بوضوح از درجه ۱ نیست، چرا که این مطلب بدان معنی است که A مضربی اسکالری از عنصر همانی است. از این‌رو، نامزدهای چندجمله‌ای مینیمال عبارتند از: p , $x(x+2)$, $x(x-2)$, $x^2 - 4x$. سه چندجمله‌ای درجه دوم را می‌توان حذف کرد، زیرا با یک نظر آشکار است که p بخصوص A مقادیر سرشت‌نمای A هستند. یکی از سازه‌های $x^2 - 4x$, $x+2$ باید دوبار در چندجمله‌ای سرشت‌تما تکرار شود. آشکار است که $= 2$ رتبه (A) . درنتیجه، فضایی دو بعدی از بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای 0 وجود دارد. اکنون از قصیه ۲ باید روشن باشد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای $(x^2 - 4x)$ است، و نیز اینکه A بر روی هیأت اعداد گویا با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

متشاشه است.

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی باشد. چندجمله‌ای مینیمال عملگر همانی روی V کدام است؟ چندجمله‌ای مینیمال عملگر صفر چیست؟

۲. فرض کنید a , b , و c عناصر هیأت F و A ماتریس 3×3 زیر بر روی F باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

ثابت کنید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $c - bx - ax^2 - x^3$ و این، چندجمله‌ای مینیمال A نیز هست.

۳. فرض کنید A ماتریس حقیقی 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A ، $(x^2 - 1)^2$ است که چندجمله‌ای مینیمال آن نیز هست.

۴. آیا ماتریس A از تمرین ۳ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است؟

۵. فضای برداری V بعدی V عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. فرض کنید عدد صحیح مثبتی چون k موجود است که $T^k = 0$. ثابت کنید 0

۶. ماتریسی 3×3 بیا بینید که چندجمله‌ای مینیمال آن x^2 باشد.

۷. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و V فضای چندجمله‌ایهای بر روی R که درجه آنها حد اکثر n است باشد (چندجمله‌ای 0 را نیز در V قرار دهید). فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد. چندجمله‌ای مینیمال D کدام است؟

۸. فرض کنید P عملگری روی R^2 باشد که هر بردار را به موازات محور y ها بر روی محور x ها تصویر کند: $P(x, y) = (x, 0)$. نشان دهید که P خطی است. چندجمله‌ای مینیمال P چیست؟

۹. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$

باشد. نشان دهید که

$$c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k = \text{tr}(A).$$

۱۰. فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ثابت و T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

باشد. نشان دهید که چندجمله‌ای مینیمال T برابر چندجمله‌ای مینیمال A است.

۱۱. ماتریسهای A و B ای $n \times n$ بر روی هیأت F داده شده‌اند. بنابر تمرین ۹ در بخش

۱۰. دوماً تریس AB دارای مقادیر سرشت نمای مساوی است. آیا چند جمله ایهای سرشت نمای آنها هم مساوی است؟ آیا چند جمله ایهای مینیمال آنها مساوی است؟

۱۰.۶. زیرفضاهای پایا

در این بخش به معرفی چند مفهوم می‌پردازیم که در تحلیل عملگرهای خطی مفید واقع خواهد شد. از این ایده‌ها برای به دست آوردن سرشت نمایی عملگرهای قطری شدتی (و مثلثی شونده) بر حسب چند جمله ایهای مینیمالشان، استفاده خواهیم کرد.

تعزیف. فرض کنیم V فضایی برداری و T عملگری خطی روی V باشد. اگر W زیرفضایی از V باشد، گوییم W تحت T پایا است، هرگاه به ازای هر بردار α در W بردار $T\alpha$ هم در W باشد؛ یعنی، هرگاه $T(W)$ مشمول W باشد.

مثال ۶. اگر T عملگر خطی دلخواهی روی V باشد، آنگاه V تحت T پایاست، همین‌طور است زیرفضای صفر. بر T و فضای پوچ T نیز تحت T پایا هستند.

مثال ۷. هیأت F و عملگر مشتق‌گیری D روی فضای $F[x]$ متشکل از چند جمله ایهای بر روی F مفروض است. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت و W زیرفضای چند جمله ایهای از درجه حداقل n باشد. در این صورت W تحت D پایاست. این امر دقیقاً طریق دیگر بیان این مطلب است که D «کاهش‌دهنده درجه» است.

مثال ۸. در اینجا به تعمیمی بسیار مفید از مثال ۶ می‌پردازیم. عملگر خطی T روی V مفروض است. فرض کنیم U عملگر خطی دلخواهی روی V باشد که با T جابجا شود؛ یعنی $TU = UT$. همچنین فرض کنیم W بر U و N فضای پوچ U باشد. W و N هردو تحت T پایا هستند. اگر α در U باشد، مثلاً $\alpha = U\beta$ ، آنگاه $(T\alpha) = T(U\beta) = U(T\beta) = U(T\beta) = U(T\beta) = U(T\beta)$ و از این‌رو، $T\alpha$ در U قرار دارد. اگر α در N باشد، آنگاه

$$U(T\alpha) = T(U\alpha) = T(\circ) = \circ ;$$

پس، $T\alpha$ متعلق به N است.

نوع خاصی از عملگرهایی که با T جایجا می‌شوند، عملگری چون $(Tg)(T) = g(T)$ است که در آن g یک چند جمله ای است. مثلاً، ممکن است داشته باشیم. $U = T - cI$ در آن c یک مقدار سرشت نمای T است، فضای پوچ U برای ما آشناست. می‌بینیم که این مثال، این حکم (بدیهی) را شامل است که فضای بردارهای سرشت نمای T وابسته به مقدار سرشت نمای c تحت T پایا است.

مثال ۹. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^2 باشد که در پایه مرتب استانده باماً تریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. در این صورت تنها زیرفضاهایی از R^2 که تحت T پایا هستند، عبارتند از R^2 و زیرفضای صفر. هر زیرفضای پایایی دیگری لزوماً باید دارای بعد یک باشد. اما، اگر W زیرفضایی باشد که توسط بردار غیرصفر α پدیده می‌آید، این حکم که تحت T پایاست به معنی این است که α یک بردار سرشت نماست، ولی A هیچ مقدار سرشت نهای حقیقی ندارد.

هرگاه زیرفضای W تحت عملگر T پایا باشد، T عملگر خطی چون $T_{\#}(T(\alpha)) = T(\alpha)$ طبق $T_{\#}(\alpha) = T(\alpha)$ در W القا می‌کند. عملگر خطی $T_{\#}$ به ازای هر α در W تعریف می‌شود، ولی $T_{\#}$ با T کاملاً متفاوت است، زیرا دامنه آن W است نه V . وقتی بعد V متناهی باشد، پایایی W تحت T تغییر ماتریسی ساده‌ای دارد و شاید بهتر باشد که آن را در اینجا ذکر کنیم. فرض کنیم پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V چنان انتخاب کرده باشیم که $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه مرتبی برای W باشد $A = [T]_{\mathcal{B}}$ و از آنجا $(r = \dim W)$

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i.$$

چون W تحت T پایاست، به ازای $r \leq j$ بردار $T\alpha_j$ به W تعلق دارد. این بدان معنی است که

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^r A_{ij} \alpha_i, \quad j \leq r. \quad (9-6)$$

به عبارت دیگر، هرگاه $r \leq j$ و $i > r$ ، $A_{ij} = 0$.

از نظر ظاهر، A به صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (10-6)$$

است، که در آن B ماتریسی $r \times r$ ، C ماتریسی $r \times (n-r)$ و D ماتریسی $(n-r) \times (n-r)$ است. خواسته توجه دارده که بنابر (۹-۶)، ماتریس B دقیقاً ماتریس عملگر القا شده $T_{\#}$ در پایه مرتب \mathcal{B}' است.

اکثر اوقات، بحث در خصوص T و $T_{\#}$ را بدون استفاده از صورت بلوکی ماتریس A در (۱۰-۶) انجام می‌دهیم. اما، به این نکته که روابط معین بین T و $T_{\#}$ و چگونه از این صورت بلوکی دیده می‌شوند باید توجه کرد.

لهم، فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T باشد. چندجمله‌ای سرشت نهای عملگر

تحدیدی $T_{\#}$ چندجمله‌ای سرشت نمای T را عاد می‌کند، و نیز چندجمله‌ای مینیمال $T_{\#}$ چندجمله‌ای مینیمال T را اثبات داریم.

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

که در آن $A = [T]_{\#}$ و $B = [T_{\#}]_{\#}$. به واسطه صورت بلوکی این ماتریس

$$\det(xI - A) = \det(xI - B) \det(xI - D).$$

این تساوی، حکم در خصوص چندجمله‌ایهای سرشت نمای را اثبات می‌کند. توجه داشته باشید که I برای فمایش ماتریسهای همانی با سه اندازه مختلف، به کار رفته است. کمین توان ماتریس A دارای صورت بلوکی

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

است که در آن $C_k = (n-r) \times r$ است. بنابراین، هر چند جمله‌ای که A را پوچ سازد B را نیز (و ایضاً D را) پوچ می‌سازد. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال B چندجمله‌ای مینیمال A را عاد می‌کند. \square

مثال ۱۵. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V زیرفضای پدیدآمده توسط همه بردارهای سرشت نمای T و c_1, c_2, \dots, c_r مقادیر سرشت نمای متمایز T باشند. به ازای هر i ، گیریم W_i فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i و B_i پایه مرتبی برای W_i باشد. لم پیش از قضیه ۲ می‌گوید که $B' = (B_1, \dots, B_k)$ پایه مرتبی برای W است. بویژه

$$\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_k.$$

فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = B'$ به صورتی باشد که چند α_i نخست آن پایه B_1, B_2 چند تای بعدی پایه B_2 و به همین نحو بقیه را تشکیل دهند. با این قرار

$$T\alpha_i = t_i \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r$$

که در آن $(c_1, c_2, \dots, c_r) = (t_1, t_2, \dots, t_r)$ و این در حالی است که c_i به تعداد $\dim W_i$ بار تکرار شده باشد. حال W تحت T پایاست، چراکه به ازای هر α در W داریم

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_r \alpha_r$$

$$T\alpha = t_1 x_1 \alpha_1 + \dots + t_r x_r \alpha_r.$$

بردارهای دیگری چون $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ را در V به نحوی انتخاب می‌کنیم که $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. ماتریس T نسبت به \mathcal{B} صورت بلوکی (۱۰-۶) را دارد و ماتریس عملگر تحدیدی T_W نسبت به پایه \mathcal{B} برابر با

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_r \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای B (یعنی، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_W) عبارت است از

$$g = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$$

که در آن $e_i = \dim W_i$. از این گذشته، g چندجمله‌ای سرشت‌نمای f از T را عاد می‌کند. بنا بر این، چندگانگی c_i ، به عنوان ریشه‌ای از f ، حداقل برا بر $\dim W_i$ است. این مطلب باید قضیه ۲ را روشن کرده باشند. قضیه مذکور صرفاً بیان می‌کند که T قطری شدنی است اگر و تنها اگر $n = r$ یا اگر و تنها اگر $e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$. در حالت قطری نشدنی این مطلب کمک زیادی نمی‌کنند، چرا که ماتریسهای C و D در (۱۰-۶) را نمی‌شناسیم.

تعريف. فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T و α بردادی از V باشد. $-$ هادی α در W عبارت است از مجموعه $S_T(\alpha; W)$ متشکل از همه چندجمله‌ایهای g (بردوی هیأت اسکالری) که $g(T)\alpha$ متعلق به W باشد.

چون عملگر T در بیشتر مباحث ثابت است، معمولاً "زیرنما" T را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم $S(\alpha; W)$. مؤلفین معمولاً این دسته از چندجمله‌ایها را "پرکننده" (ایدال پرکننده) می‌نامند. «هادی» اصطلاح متداول‌تری است که مورد ترجیح کسانی است که عملگر نه چندان مهاجم $(T)g$ را در تصور دارند که با ملایمت بردار α را به W سوق می‌دهد. در حالت خاص $\{0\} = W$, هادی را $-$ پوچساز α می‌نامیم.

لم. اگر W زیرفضایی پایایی برای T باشد، آنگاه W تحت هرچندجمله‌ای α دارای است. پس، به ازای هر α در V , هادی $S(\alpha; W)$ ایدآلی در جرچندجمله‌ای $F[x]$ است.

ثبات. اگر β در W باشد، آنگاه $T\beta$ متعلق به W است. در نتیجه،

نظر گرفتن ترکیبات خطی، دیده می‌شود که بهازای هر k ، بردار $T^k \beta$ در W است. بادر W متعلق به $f(T)\beta$ است. این است.

اگر W زیر مجموعهٔ دلخواهی از V باشد، تعریف $S(\alpha; W)$ با معنی است. اگر W یک زیر فضای باشد، آنگاه $S(\alpha; W)$ هم زیر فضایی از $F[x]$ است، زیرا

$$(cf + g)(T) = cf(T) + g(T).$$

در صورتی که W تحت T نیز پایا باشد، g را یک چندجمله‌ای در $(S(\alpha; W))$ می‌گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم α کنیم $g(T)$ در W باشد. اگر f یک چندجمله‌ای دلخواه باشد، آنگاه $f(T)[g(T)\alpha]$ در W است. چون

$$(fg)(T) = f(T)g(T)$$

f متعلق به $S(\alpha; W)$ است. پس مجموعهٔ هادی، عمل ضرب در هر چندجمله‌ای دلخواه را پذیر است. \square

یکتا مولد تکین ایدآل $(S(\alpha; W), T)$ -هادی α در W پوچاساز، در حالت $\{0\} \neq (W)$ نیز نامیده می‌شود. T -هادی α در W چندجمله‌ای تکینی مانند g باکمترین درجه است که $g(T)\alpha$ در W باشد. چندجمله‌ای f در $(S(\alpha; W))$ است اگر و تنها اگر g چندجمله‌ای f را عاد کند. توجه کنید که هادی $S(\alpha; W)$ همواره چندجمله‌ای مینیمال T را شامل است؛ از این‌رو، هر T -هادی چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

به عنوان اولین مثال از چگونگی استفاده از هادی $S(\alpha; W)$ ، عملگرهای مثلثی شونده را سرشتمانی می‌کنیم. عملگر خطی T مثلثی شونده نامیده می‌شود، هرگاه پایه مرتبی وجود داشته باشد که در آن T با ماتریسی مثلثی نمایش داده شود.

لم. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بردی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی بهجود است

$$F = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

باشد. همچنین فرض کنیم W زیرفضایی سره $(W \neq V)$ از V باشد که تحت T پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که

$$(الف) \alpha \in W$$

(ب) بهازای یک مقدار سرشتمانی c از عملگر T ، بردار $(T - cI)\alpha$ متعلق به W است.

آنچه را که (الف) و (ب) بیان می‌کنند این است که T -هادی α در W یک چندجمله‌ای خطی است. گیریم β برداری در V باشد که در W نباشد و g برای T -هادی β در W باشد. در این صورت g چندجمله‌ای مینیمال p از T را عاد می‌کند.

چون β در W قرار ندارد، چندجمله‌ای g ثابت نیست. بنا بر این،

$$g = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

که در آن حداقل یکی از اعداد صحیح r_i مثبت است. g را طوری انتخاب می‌کنیم که e_j . در این صورت $(x - c_j)$ چندجمله‌ای g را عاد می‌کند:

$$g = (x - c_j)h.$$

با بر تعریف g ، بردار $\alpha = h(T)\beta$ نمی‌تواند در W باشد. اما

$$\begin{aligned} (T - c_j I)\alpha &= (T - c_j I)h(T)\beta \\ &= g(T)\beta \end{aligned}$$

متعلق به W است. \square

قضیه ۵. فرض کنیم V -فضایی برداری با بعدمتناهی بردی هیأت F و T عملگری خطی دوی V باشد. در این صورت T مثلثی شونده است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضروبی از چندجمله‌ایهای خطی بردی F باشد.

اثبات. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال، به صورت

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

به‌سازه‌ها تجزیه شود. با به‌کاربستن مکرر لم بالا، به‌پایه مرتب دست می‌یابیم که در آن نمایش ماتریسی T بالامثلی است:

$$[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (11-6)$$

(11-6) صرفأً بیان می‌کند که

$$T\alpha_j = a_{1j}\alpha_1 + \cdots + a_{jj}\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (12-6)$$

یعنی، $T\alpha_j$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ قرار دارد. برای یافتن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ با به‌کاربردن لم درمورد زیرفضای $W = \{\alpha_j\}$ را بدست می‌آوریم. آنگاه لم را درمورد W ، فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ به کار می‌بندیم تا α_2 را بدست آوریم. سپس لم را درمورد W_2 ، فضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 به کار می‌بندیم، و

به همین طریق ادامه می‌دهیم. یک نکته را هم باید مذکور شویم. پس از اینکه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را یافتیم، این روابط مثلث‌گونه $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 + 2\sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j$ را بازیابی کنیم. هستند که متضمن پایا بودن زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ تحت عملگر T هستند.

اگر T مثلثی شونده باشد، بدینهی است که چندجمله‌ای سرشت نمای T به صورت

$$F(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

است. اکنون به ماتریس مثلثی $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ توجه کنید. درایه‌های قطری $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ مقادیر سرشت نمای هستند که c_i به تعداد d_i بار تکرار می‌شود. اما، اگر f بتواند بدین صورت تجزیه شود، چندجمله‌ای مینیمال p نیز این طور تجزیه می‌شود، چرا که p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. \square

نتیجه. فرض کنیم F یک هیأت بسته جبری، چون هیأت اعداد مختلط باشد. هر ماتریس $n \times n$ بر روی F ، با یک ماتریس مثلثی بر روی F متشابه است.

قضیه ۶. فضای برداری با بعد متناهی V بر روی هیأت F و عملگرخطی T بر روی V داده شده‌اند. قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T به صورت

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$$

باشد که در آن c_1, \dots, c_k عنصری متمایز از F هستند. اثبات. قبل از اینکه اگر T قطری شدنی باشد، چندجمله‌ای مینیمال آن حاصل ضربی از سازه‌های خطی متمایز است (ر. ل. بحث پیش از مثال ۴). برای اثبات حالت عکس، W را زیر فضای پدیدآمده توسط همه بردارهای سرشت نمای T می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W \neq V$. بنا بر لمی که در اثبات قضیه ۵ به کار رفت، برداری چون α که در W نیست و نیز مقدار سرشت نمایی چون c_i از T وجود دارد که بردار

$$\beta = (T - c_i I)\alpha$$

در W قرار می‌گیرد. چون β در W است،

$$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k$$

که در آن $c_i \beta_i = 0$ و بنابراین به ازای هر چندجمله‌ای h ، بردار

$$h(T)\beta = h(c_1)\beta_1 + \cdots + h(c_k)\beta_k$$

در W قرار دارد.

حال، یک چندجمله‌ای چون q وجود دارد که $p = (x - c_j)q$. همچنین

$$q - q(c_j) = (x - c_j)h.$$

پس، داریم

$$q(T)\alpha - q(c_j)\alpha = h(T)(T - c_j I)\alpha = h(T)\beta.$$

اما $h(T)\beta$ متعلق به W است و چون

$$\circ = p(T)\alpha = (T - c_j I)q(T)\alpha$$

بردار $q(T)\alpha$ در W قرار دارد. بنا بر این، $\alpha = q(c_j)\alpha$ هم در W است. چون α در W نیست، $\circ = p(c_j)\alpha$. این مطلب متناقض با این واقعیت است که p ریشه‌های متمازی دارد. \square

در انتها بخش ۷.۶، اثبات متفاوتی از قضیه ۴ علاوه بر اینکه نتیجه زیبایی است، از تظر محاسباتی نیز مفید است. فرض کنیم عملگر خطی T که در پایه مرتبی با ماتریس A نمایش داده می‌شود در دست باشد و بخواهیم بدانیم که آیا T قطری شدنی است یا نه. چند جمله‌ای سرشت نمای f را محاسبه می‌کنیم. اگر بتوانیم f را به سازه‌ها نجزیه کنیم:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

دو روش متفاوت برای تعیین اینکه آیا T قطری شدنی است یا نه، در اختیار داریم. یک روش این است که بینهم آیا می‌توانیم به ازای هر i ، تعداد d_i بردار سرشت نمای مستقل، وابسته به مقدار سرشت نمای c_i ، بپاییم یا نه. روش دیگر، بررسی این مطلب است که آیا $(T - c_1 I) \cdots (T - c_k I)$ عملگر صفر هست یا نه.

قضیه ۵، اثبات متفاوتی از قضیه کیلی-همیلتون به دست می‌دهد. قضیه اخیر در مورد ماتریسهای مثلثی آسان است. از این‌رو، به واسطه قضیه ۵، نتیجه را برای هر ماتریس دلخواه بر روی هیأتی بسته جبری، به دست می‌آوریم. هر هیأت، زیرهیأتی از یک هیأت بسته جبری است. با دانستن این قضیه، اثباتی برای قضیه کیلی-همیلتون برای ماتریسهای بر روی هیأتی دلخواه به دست می‌آید. اگر در این بحث، دست کم قضیه بینایی جبر (هیأت اعداد مختلط بسته جبری است) را پذیریم، آنگاه قضیه ۵ اثباتی از قضیه کیلی-همیلتون برای ماتریسهای مختلط هم فراهم می‌آورد و این اثبات مستقل از اثباتی است که قبلاً ارائه کردیم.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه مرتب استاندہ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

است.

(الف) ثابت کنید تنها زیرفضاهای R^2 که تحت T یا هستند، R^2 و زیرفضای

صفر می‌باشد.

(ب) اگر ماتریس عملگر خطی U روی C^2 در پایه مرتب استانده A باشد، نشان دهید U دارای زیرفضاهای پایای یک بعدی است.

۳. فرض کنید W زیرفضای پایایی برای T باشد. بدون رجوع به ماتریسها، ثابت کنید که چندجمله‌ای مینیمال عملگر تحدیدی $T_{\#}$ ، چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

۴. را یک مقدار سرشت‌نمای T و W را فضای بردارهای سرشت‌نمای واپس به مقدار سرشت‌نمای C بگیرید. عملگر تحدیدی $T_{\#}$ چیست؟

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی مثلثی متشابه است؟ اگر این طور باشد، چنین ماتریس مثلثی را بیابید.

۶. هر ماتریس A ، با این خاصیت که $A = A^2$ ، با ماتریسی قطری متشابه است.

۷. فرض کنید T یک عملگر خطی قطری شدنی روی فضای برداری V بعدی V باشد. اگر W زیرفضایی باشد که تحت T پایاست، ثابت کنید عملگر تحدیدی $T_{\#}$ قطری شدنی است.

۸. فرض کنید T عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ثابت کنید T قطری شدنی است اگر و تنها اگر T توسط یک چندجمله‌ای بر روی C با ریشه‌های متمایز، پوچ شود.

۹. فرض کنید T عملگر خطی روی V باشد. اگر هر زیرفضای V تحت T پایا باشد، آنگاه T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۱۰. فرض کنید T عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

روی فضای توابع پیوسته روی فاصله $[0, 1]$ باشد. آیا فضای توابع چندجمله‌ای

تحت T پایا است؟ فضای توابع مشتق‌پذیر چطور؟ فضای توابعی که در $1/2 = x$ صفر می‌شوند چطور؟

۱۰. فرض کنید A ماتریسی 3×3 با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید که اگر A بر روی R با ماتریسی مثلثی متشابه نباشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. این حکم درست است یا غلط: اگر ماتریس مثلثی A با ماتریسی قطری متشابه باشد، آنگاه A خود قطری است.

۱۲. فرض کنید T عملگری خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بسته جبری F ، و f یک چندجمله‌ای بر روی F باشد. ثابت کنید c یک مقدار سرشت نمای $f(T)$ است اگر و تنها اگر $f(t) = c$. در اینجا t یک مقدار سرشت نمای T است.

۱۳. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی V باشد. فرض کنید T و U عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

$$U(B) = AB - BA$$

باشند.

(الف) این حکم درست است یا غلط: اگر A (بر روی F) قطری شدنی باشد، آنگاه T قطری شدنی است.

(ب) این حکم درست است یا غلط: اگر A قطری شدنی باشد، آنگاه U نیز قطری شدنی است.

۵.۶. مثلث‌بندی همزمان؛ قطری سازی همزمان

فرض کنیم V فضایی با بعد متناهی و \mathcal{H} خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی V باشد. می‌خواهیم بدایم کی می‌توانیم عملگرهای واقع در \mathcal{H} را به‌طور همزمان مثلث‌بندی کنیم یا قطری سازیم؛ یعنی، پایه‌ای چون B یا ییم که همه ماتریسهای $[T]$ در \mathcal{H} ، مثلثی (یا قطری) باشند. در مورد قطری سازی، لازم است \mathcal{H} خانواده‌ای از عملگرهای جا بجا شونده باشد: به ازای هر T و U در \mathcal{H} ، $UT = TU$. این مطلب، از این واقیت ناشی می‌شود که همه ماتریسهای قطری جا بجا می‌شوند. البته، این نیز لازم است که هر عملگر در \mathcal{H} ، عملگری قطری شدنی باشد. برای مثلث‌بندی همزمان، هر عملگر در \mathcal{H} باید مثلثی-

شوندگی باشد. لازم نیست که \mathcal{F} خانواده‌ای جا بجا شوندگی باشد؛ هرچند، این شرط (که هر T به تنها یک می‌تواند مثلث‌بندی شود) برای مثلث‌بندی همزمان کافی است. این نتایج، از تغییراتی جزئی در اثبات قضایای ۵ و ۶ حاصل می‌شوند.

زیرفضای \mathcal{F} تحت (خانواده عملگرهای \mathcal{F}) پایاست، هرگاه W تحت هر یک از عملگرهای واقع در \mathcal{F} پایاست.

لم. گیریم \mathcal{F} خانواده جا بجا شوندگی از عملگرهای خطی مثلثی شوندگی روی V باشد. فرض کنیم W زیرفضای سره از V باشد که تحت \mathcal{F} پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که

(الف) α در W نیست؟

(ب) به ازای هر T در \mathcal{F} ، بردار $T\alpha$ در زیرفضای پدیدآمده قوس طرف α در W قرار دارد.

اثبات. به دلیل مشاهده ذیل هرگاه فرض کنیم \mathcal{F} فقط شامل تعدادی متناهی عملگر باشد از عمومیت مسئله نکاسته ایم. گیریم $\{T_1, \dots, T_n\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی ماکسیمال \mathcal{F} ، یعنی پایه‌ای برای زیرفضای پدیدآمده توسط \mathcal{F} باشد. اگر α برداری باشد که برای آن شرط (ب) به ازای هر T برقرار باشد، آنگاه (ب) به ازای هر عملگری که ترکیبی خطی از T_1, \dots, T_n باشد نیز برقرار است.

بنا بر لم قبل از قضیه ۵ (همین لم برای تنها یک عملگر) می‌توانیم برداری چون β (که در W نیست) و اسکالری چون c_1 بایسیم که $(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W باشد. گیریم V_1 دسته همه بردارهایی چون β در V باشد که $(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است. در این صورت V_1 زیرفضایی از V است که به طور سره بزرگتر از W می‌باشد. از این گذشتہ، V_1 بحث \mathcal{F} پایاست؛ زیرا، اگر T با T_1 جا بجا شود، آنگاه

$$(T_1 - c_1 I)(T\beta) = T(T_1 - c_1 I)\beta.$$

اگر β در V_1 باشد، آنگاه $(T_1 - c_1 I)\beta$ در W است. چون W تحت هر T در \mathcal{F} پایاست، $T(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است؛ یعنی، به ازای هر β در V_1 و هر T در \mathcal{F} ، $T\beta$ در V_1 قرار دارد.

حال W زیرفضایی سره از V_1 است. گیریم U_2 عملگر خطی روی V_1 باشد که از تحدید T_2 به زیرفضای V_1 حاصل می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال U_2 چندجمله‌ای مینیمال T_2 را تقسیم می‌کند. بنابراین، می‌توانیم لم قبل از قضیه ۵ را در مورد این عملگر و زیرفضای پایایی W به کار بندیم. برداری چون β_2 در V_1 (و نه در W) و اسکالری چون c_2 را بدست می‌آوریم که $(T_2 - c_2 I)\beta_2$ در W باشد. توجه کنید که

(الف) β_2 متعلق به W نیست؛

(ب) $(T_1 - c_1 I)\beta_2$ در W است؛

(پ) $(T_2 - c_2 I)\beta_2$ هم در W است.

فرض کنیم V_2 مجموعه همه بردارهای β در V_1 باشد که $\beta = (T_2 - c_2 I)\beta$ در W است. در این صورت V_2 تحت \mathcal{F} پایاست. لم قبل از قضیه ۵ را در مورد U_3 ، تحدید T_3 به V_2 ، به کار می بندیم. اگر بدین طریق ادامه دهیم به برداری چون $\alpha = \beta$ (که در W نیست) خواهیم رسید که $(T_j - c_j I)\alpha = 0$ ، در $j = 1, \dots, r$. \square

قضیه ۷. فرض کنیم \mathcal{V} فضایی برداری با بعد متناهی بر دوی هیأت F خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی \mathcal{V} باشد. پسایه موقبی برای \mathcal{V} وجود دارد که در آن پایه، هر عملگر واقع در \mathcal{F} توسط ماتریسی مثلثی نمایش داده می‌شود. اثبات. با در اختیار داشتن لمحی که هم اکنون اثبات شد، چنانچه \mathcal{F} جایگزین T گردد، آنگاه این قضیه همان اثبات قضیه ۵ را خواهد داشت. \square

نتیجه. گیریم \mathcal{F} خانواده جابجا شونده‌ای از ماتریسهای $n \times n$ بر دوی هیأت بسته F باشد. ماتریس $n \times n$ نامنفردی چون P ، با درایه‌های متعلق به F وجود دارد که به ازای هر ماتریس A در \mathcal{F} ، ماتریس $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است.

قضیه ۸. فرض کنیم \mathcal{F} خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی قطری شدنی روی فضای برداری با بعد متناهی \mathcal{V} باشد. پایه موقبی برای \mathcal{V} وجود دارد که در آن پایه، هر عملگر واقع در \mathcal{F} توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود.

اثبات. همچنان که قضیه ۶ را با اقتباس از لم قبل از قضیه ۵ برای حالت قطری شدنی ثابت کردیم، می‌توانیم این قضیه را هم با اقتباس لم قبل از قضیه ۷ برای حالت قطری شدنی اثبات کنیم. ولی، در این مرحله ساده‌تر آن است که با استقرار روی بعد \mathcal{V} به پیش برویم. اگر $= 1$ بعد (\mathcal{V}) چیزی برای اثبات یا قسی نمی‌ماند. قضیه را برای فضاهای برداری با ابعاد کمتر از n فرض می‌کنیم و \mathcal{V} را فضای n بعدی می‌گیریم. عنصری چون T از \mathcal{F} انتخاب می‌کنیم که مضری اسکالری از عصر همانی نباشد. اسکالرهای $1, 2, \dots, n$ را مقادیر سرشت نمایی متمایز T ، و (به ازای هر i) W_i را فضای پوچ $T - c_i I$ فرض می‌کنیم. نمایه‌ای چون \mathcal{F} را تشییت می‌کنیم. در این صورت \mathcal{F} تحت هر عملگری که با T جابجا شود پایاست. \mathcal{F} را خانواده عملگرهای خطی روی W_i می‌گیریم که از تحدید عملگرهای در \mathcal{F} به زیر فضاهای (پایه) W_i حاصل بشوند. هر عملگر متعلق به \mathcal{F} قطری-شدنی است، زیرا چندجمله‌ای مینیمال عملگر متناظرش در \mathcal{F} را عادمی کند. چون $\dim W_i < \dim V$ ، عملگرهای W_i دارد، مشکل از بردارهایی که همزمان بردارهای شوند. به بیان دیگر، W_i پایه‌ای چون \mathcal{B}_i دارد، سرشت نمایی هر یک از عملگرهای متعلق به \mathcal{F} هستند.

چون T قطری شدنی است، لم قبل از قضیه ۲ می‌گوید که $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ پایه‌ای برای V است. این همان پایه‌ای است که در جستجویش هستیم. \square

تمرین

۱. ماتریس حقیقی معکوس پذیری چون P بیاید که $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ هر دو قطری-شدتی باشند. در اینجا A و B ماتریسهای حقیقی زیر هستند.

$$\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۲. فرض کنید هر خانواده جا بجا شونده‌ای از ماتریسهای مختلط 3×3 باشد. خانواده‌ی چند ماتریس مستقل خطی را می‌تواند شامل باشد؟ در حالت $n \times n$ چه می‌توان گفت؟

۳. T را عملگری خطی روی فضایی n بعدی بگیرید و فرض کنید T دارای n مقدار سرشت نمای متایز باشد. ثابت کنید هر عملگر خطی که با T جا بجا شود، یک چند جمله‌ای بر حسب T است.

۴. فرض کنید A ، B ، C ، و D چهار ماتریس مختلط $n \times n$ باشند که (با یکدیگر) جا بجا می‌شوند. فرض کنید E ماتریس $2n \times 2n$

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $\det E = \det(AD - BC)$

۵. فرض کنید F یک هیأت، n عددی صحیح مثبت، و V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. اگر A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد، T_A را عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $T_A(B) = AB - BA$ بگیرید. خانواده عملگرهای خطی T_A را که با تغییر A روی همه ماتریسهای قطری، حاصل می‌شود در نظر بگیرید. ثابت کنید عملگرهای واقع در این خانواده همزمان قطری شدنی هستند.

۶.۶ تجزیه به مجموع مستقيمه

همچنان که به تحلیل خود از یک تک عملگر خطی ادامه می‌دهیم، ایده‌ها یمان را به طریقی استادانه‌تر-کمتر بر حسب ماتریسهای بیشتر بر حسب زیرفضاهای تنظیم می‌کنیم. در آغاز این فصل هدف خود را بدین صورت تشریح کردیم: یافتن پایه مرتبی که در آن ماتریس T

شکل ساده خاصی به خود بگیرد. اکنون، هدف خود را به صورت زیر تشریح می‌کنیم: تجزیهٔ فضای زمینهٔ V به مجموع از زیرفضاهای پایا برای T به طوری که عملگرهای تحدیدی روی این زیرفضاهای ساده باشند.

تعریف. گیریم W_1, \dots, W_k زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. گوییم W_1, \dots, W_k مستقل هستند، آنگاه

$$W_1 + \dots + W_k = 0$$

ایجاب کند که همهٔ α_i ‌ها صفر باشند.

به ازای $k=2$ ، معنی استقلال همان $\{0\}$ بودن اشتراک است، به عبارت دیگر، $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. اگر $k > 2$ ، استقلال W_1, \dots, W_k بیانگر مطالب بسیار بیشتری از $W_1 \cap \dots \cap W_k = \{0\}$ است. این استقلال بیان می‌کند که هر W با مجموع زیرفضاهای دیگر W تنها در بردار صفر شریک است.

اهمیت استقلال در نکتهٔ زیرنچهته است. گیریم $W = W_1 + \dots + W_k$ زیرفضای پدید آمده توسط W_1, \dots, W_k باشد. هر بردار α در W را می‌توان به صورت مجموعی چون

$$W_1 + \dots + W_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

نوشت. اگر W_1, \dots, W_k مستقل باشند، آنگاه این عبارت برای α یکتا است؛ زیرا اگر

$$W_1 + \dots + W_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$$

آنگاه $(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + (\alpha_k - \beta_k) = 0$ ، وازاین‌روه $\alpha_i - \beta_i = 0$ ، $i=1, \dots, k$ ، وقتی که W_1, \dots, W_k مستقل باشند، به همان طریقی که با بردارهای R^k بهمراه k تابیهایی از اعداد رفتار می‌کردیم، می‌توانیم با بردارهای W نیز به صورت k تابیهای $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ رفتار کنیم.

۱م. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی باشد. W_1, \dots, W_k از زیرفضاهایی از V می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W = W_1 + \dots + W_k$. احکام زیر هم ارزند.

(الف) W_1, \dots, W_k مستقل هستند.

(ب) به ازای هر $j \leq k$ ، $W_j \leq W_1 + \dots + W_{j-1}$.

$$W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(پ) اگر B_1, \dots, B_k پایهٔ مرتبی برای W_1, \dots, W_k باشد آنگاه B_1, \dots, B_k پایهٔ مرتبی برای W است.

اثبات. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم α برداری در اشتراک

مثال ۱۰. گیریم $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1})$ باشد. در این صورت بردارهای چون $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ که α_i در W_i است، وجود دارد که $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} + (-\alpha)$. چون $\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} + (-\alpha) + \dots + 0 = 0$.

وازطرفی $W_1 + \dots + W_k$ مستقل هستند، باید اشته باشیم $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} = \alpha$ کنیم که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم اکنون ثابت می‌کنیم که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند.

$$\cdot W_i \quad \alpha_i = 0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

j را بزرگترین عدد صحیح i می‌گیریم که $\alpha_i \neq 0$ ، در این صورت $0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_j, \alpha_j \neq 0$.

پس $\alpha_1 + \dots + \alpha_j - \alpha_i = -\alpha_i$ بردار غیر صفری در $(W_1 + \dots + W_{j-1})$ است.

تا اینجا می‌دانیم که (الف) و (ب) یکی هستند، بینیم چرا (الف) و (ب) هم ارزند. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم B_i پایه‌ای برای W_i باشد و $B = (B_1, \dots, B_k)$ هر رابطه خطی بین بردارهای B صورت

$$\beta_1 + \dots + \beta_k = 0$$

را دارد که در آن β_i ترکیبی خطی از بردارهای متعلق به B_i است. چون W_1, \dots, W_k مستقل هستند، هر β_i برابر ۰ است. چون هر B_i مستقل است، رابطه‌ای که بین بردارهای واقع در B داریم رابطه‌ای بدیهی است. اثبات این که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند به تمرین (تمرین ۲) ارجاع می‌شود. \square

اگر هر یک از (و در نتیجه همه) شرایط لم اخیر برقرار باشد، گوییم مجموع $W = W_1 + \dots + W_k$ مستقیم است یا W مجموع مستقیم W_1, \dots, W_k است و می‌نویسیم

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

خواسته ممکن است در نوشتارهای ریاضی این مجموع مستقیم را با عناوین مجموع مستقل یا مجموع مستقیم دوختی W_1, \dots, W_k هم بیا بد.

مثال ۱۱. گیریم V فضای برداری با بعد متناهی بروی هیأت F و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اگر W زیرفضای یک بعدی پدیدآمده توسط α_i باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$.

مثال ۱۲. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت، F زیر هیأتی از اعداد مختلف، و V

فضای همه ماتریس‌های $n \times n$ بر روی F باشد. گیریم W_1 زیرفضای همه ماتریس‌های متقارن، یعنی ماتریس‌ایی چون A با شرط $A^t = A$ ، و W_2 زیرفضای همه ماتریس‌های متقارن کج، یعنی ماتریس‌ایی چون A با شرط $A^t = -A$ باشند. در این صورت اگر A ماتریسی دلخواه در V باشد، عبارت یکتا بی که A را به صورت مجموعی از ماتریسها، یکی در W_1 و دیگری در W_2 ، بیان کند عبارت است از

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

مثال ۱۳. فرض کنیم T عملگر خطی دلخواهی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم c_1, c_2, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T ، و W_i فضای بردارهای سرشت نمای واپسی به مقدار سرشت نمای c_i باشند. در این صورت W_1, W_2, \dots, W_k مستقل اند. به لم قبل از قضیه ۲ مراجعه کنید. بخصوص، اگر T قطری شدنی باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

تعريف. اگر V فضایی بودای باشد، یک تصویر T عملگر خطی چون E دوی است که $E^2 = E$.

فرض کنیم E یک تصویر باشد. R را برد E و N را فضای پروج E می‌گیریم.
۱. بردار β در برد R است اگر و تنها اگر $E\beta = \beta$. اگر $\beta = E\alpha$ ، آنگاه $E\beta = E\alpha = E\alpha = \beta$. عکس، اگر $\beta = E\alpha$ ، آنگاه ($E\alpha$) در برد E قرار دارد.
 $V = R \oplus N$. ۲

۳. عبارت یکتا بی α به صورت مجموعی از بردارهای در R و N عبارت است از $\alpha = E\alpha + (\alpha - E\alpha)$

از (۱)، (۲) و (۳) بسادگی دیده می‌شود که اگر R و N دو زیرفضای V باشند و $V = R \oplus N$ ، یک و تنها یک عملگر تصویر E وجود دارد که بردش R و فضای پوچش N باشد. این عملگر، تصویر روی R در راستای N نامیده می‌شود.

هر تصویر E (به طور بدیهی) قطری شدنی است. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه‌ای برای R و $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای N باشد، آنگاه پایه $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ماتریس E را قطری می‌کند:

$$[E]_B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

۱. این اصطلاح را یک عملگر تصویری یا پهلوان خلاصه یک تصویری می‌نامند. ۲.

در اینجا I ماتریس همانی $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ است. این موضوع به تفسیر برخی از اصطلاحات درباره تصویرها کمک می‌کند. خواننده باید حالات گوناگون در صفحه R^3 (یا فضای بعدی R^3) را بررسی و خود را مقاعد کند که تصویر روی R در راستای N ، هر بردار را با تصویر کردنش بهموزات N ، در R می‌فرستد.

از تصویرها می‌توان در تشریح تجزیه به مجموعهای مستقیم فضای V استفاده کرد. زیرا، گیریم $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. به ازای هر j عملگری چون E_j روی V تعریف می‌کنیم. فرض کنیم α در V باشد؛ مثلاً فرض کنیم $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ و α_i در W_i باشد. بنا به تعریف می‌گیریم $E_j\alpha = \alpha_j$. در این صورت E_j قاعده‌ای خوش تعریف است. بسادگی دیده می‌شود که E_j خطی است، برای E_j برای W_j است و $E_j = E_j$. فضای پوچ E_j برابر است با زیرفضای

$$(W_1 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_k)$$

زیرا، حکم $E_j\alpha = 0$ ، چیزی جز $\alpha_j = 0$ نیست؛ یعنی، α عملاً مجموعی از بردارهای واقع در فضاهای W_i با $j \neq i$ است. برحسب تصویرهای E_j به ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \dots + E_k\alpha.$$

مطلوبی که (۱۳-۶) بیان می‌کند این است

$$I = E_1 + \dots + E_k.$$

توجه نیزداشته باشید که اگر $j \neq i$ ، آنگاه $E_i E_j = 0$ است. اگر $j = i$ ، آنگاه E_i زیرفضای W_j است که مشمول در فضای پوچ E_j است. اکنون یافته‌های خود را خلاصه و عکس قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹. اگر k عملگرخطی E_1, \dots, E_k دوی $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ باشد، آنگاه E_1, \dots, E_k وجود دارند که

$$(1) \quad \text{هر } E_i \text{ یک تصویر است: } (E_i = E_i);$$

$$(2) \quad \text{هرگاه } i \neq j, \text{ هرگاه } E_i E_j = 0;$$

$$(3) \quad I = E_1 + \dots + E_k;$$

$$(4) \quad \text{برای } E_i \text{ بروای } W_i \text{ است.}$$

بعكس، اگر E_1, \dots, E_k عملگرهاي خطی دوی V باشند که در شرایط (۱)، (۲)، و (۳) صدق کنند و اگر E_i بروای W_i باشد، آنگاه E_1, \dots, E_k عملگرهاي خطی روی V باشند که سه شرط اول را بر می آورند و همچنین فرض می کنیم E_i بروای W_i باشد. در این صورت یقیناً

$$V = W_1 + \dots + W_k;$$

زیرا، بنا بر شرط (۳)، به ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha$$

و $E_i\alpha$ هم در W_i قرار دارد. این عبارت برای α یکنایست، زیرا اگر

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$$

و α_i در W_i باشد، مثلاً $\alpha_i = E_i\beta_i$ آنگاه با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned} E_j\alpha &= \sum_{i=1}^k E_j\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^k E_j E_i \beta_i \\ &= E_j \beta_j \\ &= E_j \beta_j \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که V مجموع مستقیم W_i ‌هاست. \square

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1 زیرفضایی از V باشد. ثابت کنید زیرفضایی چون W_2 از V وجود دارد که $V = W_1 \oplus W_2$.

۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1, \dots, W_k زیرفضاهایی از V باشند که $V = W_1 + \cdots + W_k$ و بعد $(V) = (W_1 + \cdots + W_k)$ بعد (V) . ثابت کنید $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

۳. تصویر E را بیاورد که R^2 را بر روی زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, -1)$ در راستای زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, 1)$ تصویر کند.

۴. این حکم درست است یا غلط: اگر E_1 و E_2 تصویرهایی بر روی زیرفضاهایی مستقل باشند، آنگاه $E_1 + E_2$ یک تصویر است.

۵. اگر E یک تصویر و f یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(E) = aI + bE$. مقادیر a و b بر حسب ضرایب f چه هستند؟

۶. این حکم درست است یا غلط: اگر عملگری قطری شدنی تنها دارای مقادیر سرشت.

نمای ۵ و ۱ باشد، یک تصویر است.

۷. ثابت کنید که اگر E تصویر روی R در راستای N باشد، آنگاه $(I - E)$ تصویر روی N در راستای R است.

۸. فرض کنید E_1, E_2, \dots, E_k عملگرهای خطی روی فضای V باشند و $E_1 + \dots + E_k = I$

(الف) ثابت کنید که اگر بهازای $j \neq i$ داشته باشیم $E_i E_j = 0$ آنگاه بهازای هر

$$E_i^2 = E_i, i$$

(ب) در حالت ۲ $k = 2$ ، عکس (الف) را اثبات کنید؛ یعنی، اگر $I = E_1 + E_2$ داشت

$$E_1 E_2 = E_2, E_2 E_1 = E_1$$

۹. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی و E یک عملگر خطی خود توان روی V ، یعنی یک تصویر باشد. ثابت کنید $(I + E)$ معکوس پذیر است. $(I + E)^{-1}$ را نیز بیابید.

۱۰. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط (یا، هر هیأتی با سرشناسی صفر) و V یک فضای برداری با بعدمترانه بروی F باشد. فرض کنید E_1, E_2, \dots, E_k تصویرهایی از V باشند و $E_1 + \dots + E_k = I$. ثابت کنید به ازای $j \neq i$ ، $E_i E_j = 0$ (اهمیاتی: ازتابع رد استفاده کنید، و از خود سؤال کنید که رد هر تصویر چیست).

۱۱. فرض کنید V فضایی برداری و W_1, W_2, \dots, W_k زیرفضاهایی از V باشند. فرض کنید

$$V_j = W_1 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_k.$$

همچنین فرض کنید که $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. ثابت کنید فضای دوگان V^* به مجموع مستقیم $V^* = V_1^* \oplus \dots \oplus V_k^*$ تجزیه می شود.

۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا

ما در وهله نخست به تجزیه به مجموع مستقیم $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ، که در آن هر یک از زیرفضاهای W_i تحت عملگر خطی مفروض T پایا باشد، علاقه مندیم. با در دست بودن چنین تجزیه ای از V ، T به وسیله تحدید، عملگر خطی چون T_i روی هر W_i القا می کند. پس، کتش T عبارت از این است که اگر α برداری از V باشد بردارهای یکتاپی چون $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ باشد در W_i داریم که

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k.$$

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k.$$

و در این صورت

$$T\alpha = T_1\alpha_1 + \cdots + T_k\alpha_k.$$

این وضعیت را با گفتن اینکه T مجموع مستقیم عملگرهای T_1, \dots, T_k است توصیف می‌کنیم. در استفاده از این اصطلاح، باید به خاطرداشت که T_i ها عملگرهایی خطی روی فضای V نیستند، بلکه عملگرهایی خطی روی زیرفضاهای مختلف W_i هستند. این حقیقت که $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ ، ما را قادر می‌سازد که به هر $\alpha \in V$ تابی یکتا بی چون $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ از بردارهای α_i واقع در W_i (بنابراین $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$) را به طریقی وابسته سازیم که بتوانیم اعمال خطی در V را با کار روی تک زیرفضاهای W_i انجام دهیم. این واقعیت که هر T تحت W_i پایاست، اجازه می‌دهد که به کنش T به صورت کنشهای مستقل عملگرهای T_i روی زیرفضاهای W_i بنگریم. هدف ما مطالعه T ، با یافتن تجزیه به مجموع مستقیم پایایی است که در آن عملگرهای T_i از نوعی ابتدایی باشند.

پیش از ذکریک مثل، اجازه دهید به نظریه ماتریسی این وضعیت پردازیم. فرض کنیم پایه مرتبی چون B را برای هر W_i انتخاب، و برای اینکه B مشکل از اجتماع B_i ها پایه مرتبی برای V یاشد آنها را با ترتیب B_1, \dots, B_k مرتب کرده باشیم. از بحثی که در باره نظریه ماتریسی یک زیرفضای پایایی تنها کردیم بسادگی مشهود است که اگر $A = [T_i]$ و $A_i = [T_{ij}]$ آنگاه A دارای صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \quad (14-6)$$

است. در (14-6)، A_i ماتریسی $d_i \times d_i$ است و $d_i = \dim W_i$ است. در (14-6) را با اندازه‌های d_i با اندازه‌های مختلف هستند. بعلاوه، به نظر مناسب می‌رسد که (14-6) را با گفتن اینکه A مجموع مستقیم ماتریسهای A_1, \dots, A_k است توصیف کنیم.

بسیاری از اوقات، زیرفضای W_i را با تصویرهای وابسته E_i (قضیه ۹) توصیف خواهیم کرد. بنابراین، ضرورت دارد که بتوانیم پایایی زیرفضاهای W_i را بر حسب E_i بیان کنیم.

قضیه ۱۰. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V و W_1, \dots, W_k و نیز E_1, \dots, E_k به صورتی که در قضیه ۹ آمده‌اند، باشند. در این صورت، شرطی لازم و کافی برای اینکه هر زیرفضای W_i تحت T پایا باشد این است که T با هریک از تصویرهای E_i جابجا شود؛ یعنی،

$$TE_i = E_i T, \quad i = 1, \dots, k.$$

اثبات. فرض کنیم T با هر E_i جابجا شود و α در V باشد. در این صورت $E_i\alpha = \alpha$

$$T\alpha = T(E_i\alpha)$$

$$= E_j(T\alpha)$$

که نشان می‌دهد $T\alpha$ در برد E_j قرار دارد؛ یعنی، $T\alpha$ تحت E_j پایاست.

اکنون فرض می‌کنیم هر E_i در V پایا باشد، نشان خواهیم داد که $T E_i = E_i T$ که نشان می‌دهد T برداری در V باشد. در این صورت $\alpha = E_1\alpha + \dots + E_k\alpha$

$$T\alpha = T(E_1\alpha + \dots + E_k\alpha) \\ = T E_1\alpha + \dots + T E_k\alpha.$$

چون $E_i\alpha$ در E_i تحت T پایاست قرارداد، باید به ازای برداری β_i داشته باشیم $T(E_i\alpha) = E_i\beta_i$.

$$E_j T E_i \alpha = E_j E_i \beta_i$$

$$= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E_j \beta_i & i = j \end{cases}$$

و بنابراین

$$E_j T \alpha = E_j T E_1 \alpha + \dots + E_j T E_k \alpha \\ = E_j \beta_j \\ = T E_j \alpha.$$

این رابطه به ازای هر α در V برقرار است و از این رو، $E_j T = T E_j$.

اکنون عملگری قطری شدنی چون T را به زبان تجزیه به مجموع مستقیم پایا (تصویرهایی که با T جایجا می‌شوند) توصیف می‌کنیم. این مطلب بعدها کمک شایانی در فهم چند قضیه عمیق تجزیه فضاهای خواهد کرد. خواننده ممکن است تصور کند که توصیفی که در صدق عرضه آن هستیم، در مقایسه با فرمولیندی ماتریسی، یا این بیان ساده‌که بردارهای سرشتمای T فضای زمینه را پدیدمی‌آورند، نسبتاً پیچیده است. ولی، باید در نظرداشته باشد که این اولین نظر اجمالی ما به روش بسیار مؤثر است که به وسیله آن می‌توانیم مسائل مختلفی در رابطه با زیرفضاهای، پایه‌ها، ماتریسها، و نظایر آنها را به محاسبات جبری عملگرهای خطی، تحویل کنیم. با اندکی تجربه، کارآیی، و ظرفات این روش استدلال آشکار خواهد شد.

قضیه ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. اگر T قطری شدنی و c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T باشند، آنگاه عملگرهای خطی چون E_1, \dots, E_k روی V وجود دارند که

$$T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k \quad (1)$$

$$I = E_1 + \dots + E_k \quad (2)$$

$$E_i E_j = 0 \quad (3) \quad i \neq j$$

$$(E_i) E_i^* = E_i \quad (4)$$

(۵) بود، فضای سرشت نمای T وابسته به c_i است:

پس، اگر k اسکالر متمایز c_1, \dots, c_k و k عملگر خطی غیر صفر E_1, \dots, E_k موجود باشند که شرایط (۱)، (۲)، و (۳) را برآورند، آنگاه T قطری شدنی است؛ c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T هستند؛ و شرایط (۴) و (۵) نیز برقرارند.

اثبات. فرض کنیم T قطری شدنی و با مقادیر سرشت نمای متمایز c_1, \dots, c_k باشد. گیسرا W فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i باشد. همان طور که قبل دیده ایم

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

گیسرا E_1, \dots, E_k همچون در قضیه ۹ تصویرهای وابسته به این تجزیه باشند. در این صورت (۲)، (۳)، (۴)، و (۵) برقرارند. برای اثبات (۱) به شرح زیر عمل می کنیم.

با ازای α در V

$$\alpha = E_1 \alpha + \dots + E_k \alpha$$

و ازاین رو

$$T\alpha = T E_1 \alpha + \dots + T E_k \alpha$$

$$= c_1 E_1 \alpha + \dots + c_k E_k \alpha.$$

به بیان دیگر، $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$. حال فرض کنید عملگری خطی چون T ، همراه با اسکالرهای متمایز c_i و عملگرهای غیر صفر E_i که (۱)، (۲)، و (۳) را بر می آورند داده شده باشند. چون با ازای $j \neq i$ ، $E_i E_j = 0$ ، دوطوف $E_i E_j = 0$ را که در $I = E_1 + \dots + E_k$ در E_i ضرب کنیم بلافاصله $E_i^* E_i = E_i$ را بدست می آوریم. با ضرب $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ در E_i خواهیم داشت $TE_i = c_i E_i$ ، که نشان می دهد هر بردار در برد E_i ، در فضای پوج $(T - c_i I)$ نیز $(T - c_i I)$ و جسود دارد؛ بدین معنی که c_i یک مقدار سرشت نمای T است. فضای پوج $(T - c_i I)$ بعلاوه، c_i ها کل مقادیر سرشت نمای T هستند؛ زیرا، اگر c اسکالری دلخواه باشد، آنگاه

$$T - cI = (c_1 - c)E_1 + \dots + (c_k - c)E_k$$

لذا اگر $(T - cI)\alpha = 0$ باید داشته باشیم $\circ E_i\alpha \neq 0$. اگر α بردار صفر نباشد، آنگاه α هست که $E_i\alpha \neq 0$ ، و از این رو به ازای این α داریم $c_i - c = 0$. مطمئناً T قطری شدنی است، زیرا نشان داده ایم که هر بردار غیر صفر در E_i ، یک بردار سرشت نمای T نیز هست و این واقعیت که $I = E_1 + \dots + E_k$ نشان می دهد که این بردارهای سرشت نمای T را پدید می آورند. آنچه برای اثبات باقی می ماند این است که فضای پوچ $(T - c_i I)$ دقیقاً بر E_i است. اما این موضوع واضح است، چرا که اگر آنگاه $T\alpha = c_i\alpha$

$$\sum_{j=1}^k (c_j - c_i)E_j\alpha = 0.$$

از این رو

$$(c_j - c_i)E_j\alpha = 0 \quad \text{به ازای هر } j,$$

و آنگاه

$$E_j\alpha = 0, \quad j \neq i.$$

چون $\alpha = E_1\alpha + \dots + E_k\alpha = 0$ ، و به ازای $j \neq i$ ، $E_j\alpha = 0$ ، پس داریم α در بر E_i است. \square که خود نشان می دهد که α در بر E_i است.

بخشی از قضیه ۹ بیان می کند که برای عملگری قطری شدنی چون T ، اسکالرهای c_1, \dots, c_k و عملگرهای E_1, \dots, E_k به طور یکتا به وسیله شرایط $(1), (2), (3)$ ، این شرط که c_i ها متایزند و این شرط که E_i ها غیر صفرند، تعیین می شوند. یکی از خواص جالب تجزیه $T = c_1E_1 + \dots + c_kE_k$ است که اگر g چندجمله ای دلخواهی بر روی هیأت F باشد، آنگاه

$$g(T) = g(c_1)E_1 + \dots + g(c_k)E_k.$$

جزئیات اثبات را به خواننده وامی گذاریم. برای مشاهده چگونگی اثبات این مطلب، تنها نیازمند به محاسبه T^γ ، به ازای هر عدد صحیح γ ، هستیم. به عنوان نمونه

$$\begin{aligned} T^\gamma &= \sum_{i=1}^k c_i E_i \sum_{j=1}^k c_j E_j \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j E_i E_j \\ &= \sum_{i=1}^k c_i^\gamma E_i^\gamma \\ &= \sum_{i=1}^k c_i^\gamma E_i. \end{aligned}$$

لازم است خواننده این را با $(A)g$ که در آن A ماتریسی قطری است مقایسه کند؛ زیرا در این صورت $(A)g$ چیزی جز ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $(A_{11}, g(A_{11}), \dots, g(A_{nn}))$ نخواهد بود.

در حالت خاص، مایلیم بدانیم هنگام به کار بردن چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با اسکالرهای c_1, \dots, c_k ،

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}$$

چه رخدادی دارد. داریم $p_j(c_i) = \delta_{ij}$ ، یعنی

$$p_j(T) = \sum_{i=1}^k \delta_{ij} E_i$$

$$= E_j.$$

پس، تصویرهای E_j نه تنها با T جایجا می‌شوند، بلکه چندجمله‌ایهای بر حسب T هستند. از این‌گونه محاسبات با چندجمله‌ایهای بر حسب T می‌توان برای اثبات اثباتی دیگر از قضیه ۶ که عملگرهای قطری شدنی را بر حسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان سرشتمانی می‌کند، استفاده کرد. این اثبات کاملاً مستقل از اثبات قبلی است. اگر T قطری شدنی باشد، $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ ، آنگاه به ازای هر چند جمله‌ای g

$$g(T) = g(c_1) E_1 + \dots + g(c_k) E_k.$$

پس، $\circ = g(T)$ اگر و تنها اگر به ازای هر i ، $\circ = g(c_i)$. بخصوص، چندجمله‌ای مینیمال عبارت است از T

$$p = (x - c_1) \dots (x - c_k).$$

حال فرض کنیم T عملگری خطی با چندجمله‌ای مینیمال $(x - c_k) \dots (x - c_1)$ باشد و c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از هیأت اسکالری. چندجمله‌ایهای لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}.$$

از فصل ۴ یادآوری می‌کنیم که $\delta_{ij} = p_j(c_i)$ و به ازای هر چندجمله‌ای g با درجهٔ حداقل $(k-1)$ ، داریم

$$g = g(c_1) p_1 + \dots + g(c_k) p_k.$$

اگر g را چندجمله‌ای اسکالری ۱ و سپس چندجمله‌ای x بگیریم، داریم

$$1 = p_1 + \cdots + p_k \quad (15-6)$$

$$x = c_1 p_1 + \cdots + c_k p_k.$$

(خواننده زیرا که خواهد کرد که ممکن است استفاده از x درست نباشد، چرا که k ممکن است ۱ باشد. اما اگر $k = 1$ مضری اسکالری از عنصرهایی است و لذا قطری شدنی). حال فرض کنیم $(T_j = p_j)(T) = E_j$. بنابر (۱۵-۶) داریم

$$I = E_1 + \cdots + E_k$$

$$(16-6)$$

$$T = c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k.$$

توجه کنید که اگر $j \neq i$ ، آنگاه $p_i p_j$ بر چندجمله‌ای مینیمال p بخش‌بندی را داشته باشیم $(x - c_r)$ ها را به عنوان سازه‌ای شامل است. پس

$$E_i E_j = 0, \quad i \neq j. \quad (17-6)$$

مطلوب دیگری را که باید نشان دهیم این است که به ازای هر i ، $E_i \neq 0$. اما این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که p چندجمله‌ای مینیمال T است، و از این رو نمی‌توانیم داشته باشیم $0 = p_i(T)$ ، چرا که درجه p_i از درجه p کمتر است. این نکته آخر، همراه با (۱۶-۶)، (۱۷-۶)، و این امر که c_i ها متمایزند، ما را قادر می‌سازد که قضیه ۱۱ را به کار بندیم و نتیجه بگیریم که T قطری شدنی است. \square

تمرین

۱. فرض کنید E یک تصویر V و T عملگری خطی روی V باشد. ثابت کنید که برد E تحت T پایاست اگر و تنها اگر $ETE = TE$. همچنین ثابت کنید که برد فضای پوج هردو تحت T پایا هستند اگر و تنها اگر $ET = TE$.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه مرتب استاندۀ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. فرض کنید W زیرفضایی از R^2 پدیدآمده توسط بردار $(1, 0) = e_1$ باشد.
(الف) ثابت کنید W تحت T پایاست.

(ب) ثابت کنید هیچ زیرفضایی از W وجود ندارد که تحت T پایا و مکمل باشد: W^\perp .

$$R^2 = W_1 \oplus W_2.$$

(با تمرین ۱ از بخش ۵.۶ مقایسه شود.)

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشد. فرض کنید R برد T و N فضای پوچ T باشد. ثابت کنید R و N مستقل هستند اگر و تنها اگر $.V = R \oplus N$

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد و نیز $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ که هر i تحت T پایاست. فرض کنید T_i عملگر (تحدیدی) القا شده روی W_i باشد.

$$\text{(الف)} \quad \text{ثابت کنید} \quad \det(T) = \det(T_1) \cdot \det(T_2) \cdot \dots \cdot \det(T_k)$$

$\text{(ب)} \quad \text{ثابت کنید} \quad \text{که} \prod_{i=1}^k T_i \text{ سرشت نمای} f \text{ عبارت است از حاصل ضرب چند جمله‌ایهای سرشت نمای} f_1, f_2, \dots, f_k.$

$\text{(پ)} \quad \text{ثابت کنید} \quad \text{چند جمله‌ای مینیمال} T \text{ کو چکترین مضرب مشترک} \prod_{i=1}^k T_i \text{ است. (اهنامی: احکام متاظر مربوط به مجموع مستقیم ماتریسها را اثبات کنید و سپس آنها را به کار بندید.)}$

۵. فرض کنید T عملگری خطی قطری‌شدنی روی R^3 باشد که در مثال ۳ از بخش ۲.۶ مورد بحث قرار گرفت. چند جمله‌ایهای لاگرانژ را به کار بگیرید تا ماتریس نمایش A را به صورت $E_1 + E_2 + E_3 = I$ ، $A = E_1 + 2E_2$ و E_1, E_2, E_3 بنویسید.

۶. دو ماتریس 4×4 در مثال ۵ از بخش ۳.۶ بگیرید. ماتریس‌هایی چون E_1, E_2, E_3 و E_4 باید که

$$\cdot i \neq j, E_i E_j = 0, E_1 + E_2 + E_3 = I, A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3$$

۷. در تمرینهای ۵ و ۶ توجه کنید که (به ازای هر n) فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c توسط بردارهای ستونی ماتریس‌های مختلف E_i با $i \neq j$ پدید می‌آید. آیا این امر تصادفی است؟

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که با هر عملگر تصویری روی V جا بجا شود. ذمود T چه می‌توان گفت؟

۹. فرض کنید V فضای برداری توابع (با مقدار) حقیقی بیوسته روی فاصله $[1, -1]$ از خط حقیقی باشد. همچنین فرض کنید W زیرفضای توابع زوج، $f(-x) = f(x)$ باشد. و W زیرفضای توابع فرد، $f(-x) = -f(x)$ باشد.

$$\text{(الف)} \quad \text{شان دهید} \quad V = W_e \oplus W_o$$

$\text{(ب)} \quad \text{اگر } T \text{ عملگر انتگرال نامعین}$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

باشد، آیا W_e و W_o تحت T پایا هستند؟

۸.۶ قضیه تجزیه اولیه

کوشش ما در این بخش این است که عملگر خطی T روی فضای با بعد متناهی V را از طریق تجزیه T به مجموعی مستقیم از عملگرهایی که به معنایی ابتدایی هستند، مطالعه کنیم. می‌توانیم این کار را در برخی از حالات خاص معین، مثلاً هنگامی که چندجمله‌ای مینیمال T بر روی هیأت اسکالری F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای تکین متمایز از درجه ۱ تجزیه شود، از طریق بردارها و مقادیر سرشت نمای T انجام دهیم. در حالت کلی چه می‌توانیم بکنیم؟ در صورتی که سعی کنیم T را با استفاده از مقادیر سرشت نمای مطالعه کنیم با دو مسئله روی رو خواهیم شد. اول آنکه، T ممکن است حتی یک مقدار سرشت نمای هم نداشته باشد؛ این وضع، در واقع نقیصه‌ای است از هیأت اسکالری، بدین معنی که این هیأت بسته جبری نیست. دوم، حتی اگر چندجمله‌ای سرشت نمای به طور کامل بر روی F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای درجه ۱ تجزیه شود، ممکن است برای T به اندازه کافی بردار سرشت نما جهت پدید آوردن فضای V موجود نباشد؛ واضح است که این وضع نقیصه‌ای از T است. وضعیت دوم، با عملگر T روی F^3 (هیأتی دلخواه) که در پایه استاندۀ توسط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، تشریح می‌گردد. چندجمله‌ای سرشت نمای A عبارت است از $(x+2)^2(x-2)$ که بوضوح چندجمله‌ای مینیمال A (یا T) نیز هست. پس، T قطری-شدتی نیست. واضح است که این واقعه به دلیل اینکه بعد فضای پوچ $(T-2I)$ یک است، رخ می‌دهد. از طرف دیگر، فضای پوچ $(T+I)$ و فضای پوچ $(T-2I)$ با هم V را پدید می‌آورند؛ اولی زیرفضای پدید آمده توسط \mathbb{C}_4 ، و دومی زیرفضای پدید آمده توسط \mathbb{C}_4 است.

این روش، کم و بیش روشنایی در مردم دومین مسئله است. اگر چندجمله‌ای مینیمال T به صورت زیر تجزیه شود (به خاطر داشته باشید که این فرض است)

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

و c_1, \dots, c_k عناصر متمایز F باشند، آنگاه نشان خواهیم داد که فضای V مجموع

مستقیم فضاهای پوچ عملگرهاي $(T - c_i I)^{r_i}$ ، $k = 1, \dots, n$ است. اين فرض در مورد p با اين حقیقت هم ارز است که T مثلثی شونده است (قضیه ۵)؛ گرچه، علم به اين واقعیت هم کمکی به ما نخواهد کرد.

قضیه‌ای را که اثبات می‌کنیم، عمومی تر از مطلبی است که تشریح کردیم، چراکه این قضیه به تجزیه اولیه چندجمله‌ای مینیمال مر بوط است، خواه سازه‌های اولی کسه در کار وارد می‌شوند همگی از درجه یکم باشند خواه نباشند. برای خواننده مفید است که حالت خاصی را که سازه‌های اول از درجه ۱ باشند و حتی به طور اخص اثبات تصویری گونه قضیه ۶ را که حالت خاصی از این قضیه است، به تصور آورد.

قضیه ۱۳. (قضیهٔ تجزیهٔ اولیه). فرض کنیم T عملگری خطی در فضای بوداری بعدمنتهای V بروی هیأت F ، و p چندجمله‌ای مینیمال

$$p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

باشد. در اینجا p_i ‌ها چندجمله‌ایهای تکین تحویل ناپذیر متمايزی بروی F دارند، اعداد صحیح مثبتی هستند. گیریم W فضای پوچ $(T - p_i I)^{r_i}$ باشد. در این صورت

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \quad (1)$$

(۲) همه W_i ‌ها تحت T پایا هستند.

(۳) اگر T عملگر القا شده توسط T در W باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ اثبات. طرح اثبات چنین است. اگر تجزیه به مجموع مستقیم (۱) معتبر باشد، چگونه

می‌توانیم تصویرهای E_1, \dots, E_k وابسته به این تجزیه را به دست آوریم؟ تصویر E_i روی W_i ، عنصر همانی و روی دیگر W_j ‌ها صفر است. یک چندجمله‌ای چون h_i می‌باشیم که $(T - h_i)_{|W_i}$ روی W_i عنصر همانی و روی W_j ‌ها دیگر صفر باشد و بعلاوه $+h_i(T) + \cdots + h_k(T) = I$ وغیره. به ازای هر زیرفضا f_i ، فرض کنیم

$$f_i = \frac{p}{p_i^{r_i}} = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}.$$

چون p_i چندجمله‌ایهای اول متمايزی هستند، چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_k نسبت به هم اول می‌باشند (قضیه ۱۰، فصل ۴). پس، چندجمله‌ایهایی چون g_1, \dots, g_k وجود دارند که

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1.$$

بعلاوه توجه کنید که اگر $j \neq i$ ، آنگاه f_i بر چندجمله‌ای p تقسیم پذیر است، زیرا $f_i | f_j$.

هر p_m^r را به عنوان سازه‌ای در بردارد. نشان خواهیم داد که چند جمله‌ایهای $h_i := f_i g_i$ هم به همان طریقی که در اولین بند اثبات تشریح شد، عمل می‌کنند.

فرض کنیم $E_i = h_i(T) = f_i(T)g_i(T)$. چون $1 + h_k + \dots + h_i + \dots + p$ بازای $j \neq i$ را عاد می‌کند، داریم

$$E_1 + \dots + E_k = I$$

$$\cdot E_i E_j = 0, \quad i \neq j$$

پس، E_i ‌ها تصویرهای هستند که با تجزیه‌ای به مجموع مستقیم از فضای V در تاظر می‌باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که برد E_i دقیقاً همان زیرفضای W_i است. واضح است که هر بردار در برد E_i در W_i نیز هست، زیرا اگر $\alpha = E_i \alpha$ باشد، آنگاه $\alpha = E_i \alpha$ و لذا

$$\begin{aligned} p_i(T)^{r_i} \alpha &= p_i(T)^{r_i} E_i \alpha \\ &= p_i(T)^{r_i} f_i(T) g_i(T) \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

چرا که $p_i^{r_i} f_i g_i$ بر چندجمله‌ای مینیمال p تقسیم پذیر است. بعکس، فرض کنیم α در فضای E_i بود. اگر $i \neq j$ ، آنگاه $f_j g_j$ بر $p_i^{r_i}$ تقسیم پذیر است و لذا $E_i \alpha = 0$ (یعنی، بازای $j \neq i$ ، $E_j \alpha = 0$). اما در این صورت، ضروری است

که $E_i \alpha = \alpha$ در برد E_i باشد. این مطلب اثبات حکم (۱) را کامل می‌کند.

به طور حتم واضح است که زیرفضاهای W_i تحت T پایا هستند. اگر T عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه بدینهی است که $0 = p_i(T)^{r_i} \alpha = p_i(T)^{r_i} \alpha$ روی زیرفضای W_i برابر ۰ است. این مطلب نشان می‌دهد که چندجمله‌ای مینیمال T چندجمله‌ای $p_i^{r_i}$ را عاد می‌کند. بعکس، فرض کنیم g بیک چندجمله‌ای باشد که $p_i(T)^{r_i} g(T) f_i(T) = 0$. در این صورت $g(T) f_i(T) = 0$ (یعنی، $g(T) f_i(T) = 0$). بروز چندجمله‌ای مینیمال T ، یعنی $p_i^{r_i}$ تقسیم پذیر است (یعنی، $p_i^{r_i} f_i g$ را عاد می‌کند). بسادگی دیده می‌شود که $p_i^{r_i} g$ را عاد می‌کند. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از $p_i^{r_i}$. \square

نتیجه. اگر E_1, E_2, \dots, E_k تصویرهای وابسته به تجزیه اولیه T باشند، آنگاه هر یک چندجمله‌ای پر حسب T است و لذا اگر عملگر خطی U با T جا بجا شود، آنگاه U با هر یک از E_i ‌ها جا بجا می‌شود، و در نتیجه هر زیرفضای W تحت U پایا است.

بر حسب نماد گذاری اثبات قضیه ۱۲، نظری می‌کنیم به حالت خاصی که در آن چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای درجه یکم باشد، یعنی حالتی که در آن هر p_i به صورت $p_i = x - c_i$ است. حال برد E_i عبارت است از W_i ، یعنی فضای پوج

قضیه ۱۱. $D = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$. بنابر قضیه ۱۱، $D - c_i I$ عملگری قطعی شدنی است که آن را جزء قطعی شدنی T می‌نامیم. به عملگر $N = T - D$ توجه کنید. داریم

$$T = TE_1 + \dots + TE_k$$

$$D = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$$

لذا

$$N = (T - c_1 I)E_1 + \dots + (T - c_k I)E_k.$$

خواهشندگان باید تاکنون به قدر کافی با تصویرها آشنایی پیدا کرده باشد که بینند

$$N^* = (T - c_1 I)^* E_1 + \dots + (T - c_k I)^* E_k$$

و در حالت کلی

$$N' = (T - c_1 I)' E_1 + \dots + (T - c_k I)' E_k.$$

وقتی به ازای هر $r_i \geqslant r_i$ آنگاه $N' = 0$ ، چرا که در این صورت عملگر $(T - c_i I)^r$ روی بردار E_i برابر 0 است.

تعریف. فرض کنیم N عملگری خطی روی فضای بوداری V باشد. گوییم N پوج توان است، هرگاه عدد صحیح مثبتی چون r وجود داشته باشد که $N^r = 0$.

قضیه ۱۳. گیریم T عملگری خطی روی فضای بوداری بعدمتناهی V بروی هیأت F باشد. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال T ، بروی F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای خطی تجزیه شود. در این صورت عملگری قطعی شدنی چون D روی V و عملگر پوج توانی چون N روی V وجود دارد که

$$T = D + N \quad (1)$$

$$DN = ND \quad (2)$$

عملگر قطعی شدنی D و عملگر پوج توان N توسط (۱) و (۲) به طور یکتا تعیین می‌شوند و هر یک از آنها یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

البتهات. قریباً مشاهده کردیم که می‌توانیم بنویسیم $T = D + N$; در اینجا D قطعی شدنی و N پوج توان است و نیز D و N نه تنها جا بجا می‌شوند بلکه چندجمله‌ایهای بر حسب T هستند. حال فرض کنیم $T = D' + N'$ را هم داریم که در آن D' قطعی شدنی و N' پوج توان است و $D'N' = N'D'$. ثابت خواهیم کرد که $D = D'$ و $N = N'$. با یکدیگر جا بجا می‌شوند و $T = D' + N'$ می‌بینیم که D' و N' با T هم جا بجا می‌شوند. پس، D' و N' با هر چندجمله‌ای بر حسب T جا بجا می‌شوند؛ از این رو، آنها با D و N نیز جا بجا می‌شوند. حال داریم

$$D + N = D' + N'$$

با

$$D - D' = N' - N$$

و این چهار عملگر همه با هم جا بجا می شوند. چون D و D' هردو قطری شدنی هستند و باهم جا بجا می شوند، همزمان نیز قطری شدنی هستند و $D - D'$ هم قطری شدنی است. چون N و N' هردو پوج توان هستند و با هم جا بجا می شوند، عملگر $(N - N')$ پوج توان است؛ زیرا، با استفاده از این حکم که N و N' با هم جا بجا می شوند

$$(N' - N)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (N')^{r-j} (-N)^j$$

ولذا وقتی که r به اندازه کافی بزرگ باشد هر جمله در این بسط $(N' - N)^r$ برابر است. (در واقع، مین توan هر عملگر پوج توان روی فضایی n بعدی باید باشد. در اینجا اگر $r = 2n$ فرض شود، r به اندازه کافی بزرگ است و از اینجا نتیجه می شود که $r = n$ هم به اندازه کافی بزرگ است؛ اما این مطلب از عبارت بالا آشکار نیست.) حال $D - D'$ عملگری قطری شدنی است که پوج توان نیز هست. چنین عملگری بوضوح عملگر صفر است؛ زیرا به علت پوج توان بودن، r هست که $n \leq r$ و چند جمله‌ای مینیمالش به صورت x^n باشد. اما در این صورت، چون این عملگر قطری شدنی است، چند جمله‌ای مینیمال آن نمی تواند ریشه‌ای مکرر داشته باشد؛ از این رو، $r = 1$ و چند جمله‌ای مینیمال چیزی جز x نیست، و این خود حاکی است که این عملگر 0 است. پس، می بینیم که $D = D'$ و $\square \cdot N = N'$

نتیجه. گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بسته جبری F ، مثلا هیأت اعداد مختلط، باشد. در این هوت هر عملگر خطی T روی V می تواند به صورت مجموع یک عملگر قطری شدنی D و یک عملگر پوج توان N که با یکدیگر جا بجا می شوند، نوشته شود. این عملگرهای D و N یکتا هستند و هر یک از آنها یک چند جمله‌ای بر حسب T است.

از این نتایج مشهود است که مطالعه عملگرهای خطی روی فضاهای برداری بر روی هیأت بسته جبری، اساساً به مطالعه عملگرهای پوج توان تحويل می شود. برای فضاهای برداری بر روی هیأت بسته جبری که بسته جبری نباشد، هنوز هم لازم است جانشینی برای بردارها و مقادیر سرشت ناما بیایم. نکته بسیار جالب در اینجاست که این دو مسئله می توانند همزمان مورد بررسی قرار گیرند، و این مطلبی است که در فصل بعد به اینجام آن خواهیم پرداخت. در خاتمه این بخش، مایلیم مثالی عرضه کنیم که برخی از ایده‌های قضیه تجزیه اولیه را تشریح می کنند. چون این مثال با معادلات دیفرانسیل سروکار دارد، و از این نظر به طور مطلق جبر خطی نیست، اراده آن را به انتهای بخش موکول کردیم.

مثال ۱۶ در قضیه تجزیه اولیه لازم نیست که فضای برداری V با بعد متناهی باشد، و نیز در قسمتهای (۱) و (۲) لازم نیست که p چندجمله‌ای مینیمال T باشد. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری دلخواهی باشد و اگر چندجمله‌ای تکیتی چون p وجود داشته باشد که $p(T) = 0$ ، آنگاه با اثباتی که ارائه کردیم، قسمتهای (۱) و (۲) قضیه ۱۲ برای T هم مععتبر هستند.

گیریم n عددی صحیح مثبت و V فضای همه توابع n بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی خط حقیقی باشد که در معادله دیفرانسیل f

$$\frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = 0 \quad (18-6)$$

صدق می‌کنند. در اینجا a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ثابت‌های مشخصی هستند. اگر C_n فضای توابع n بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر را نشان دهد، آنگاه V ، فضای جوابهای این معادله دیفرانسیل، زیرفضایی از C_n است. اگر D عملگر مشتق‌گیری را نشان دهد و p چندجمله‌ای

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

باشد، آنگاه V فضای پوج عملگر $(D)^p$ است، زیرا (۱۸-۶) بسادگی بیان می‌کند که $p(D)f = 0$. بنابراین، V تحت D پایاست. اکنون D را به عنوان عملگری خطی روی زیرفضای V محسوب می‌کنیم. در این صورت $p(D) = 0$.

اگر تابع مختلط (مقدار) مشتق‌پذیر مورد بحث باشند، آنگاه C_n و V دو فضای برداری مختلط هستند و a_0, a_1, \dots, a_{n-1} می‌توانند اعداد مختلط دلخواهی باشند. اکنون با فرض اینکه c_1, c_2, \dots, c_k اعداد مختلط متمایزی باشند می‌توانیم

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}.$$

اگر r_j فضای پوج $(D - c_j I)^{r_j}$ باشد، آنگاه قضیه ۱۲ بیان می‌کند که

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

به بیان دیگر، اگر f در معادله دیفرانسیل (۱۸-۶) صدق کند، آنگاه f به طور یکتا به صورت

$$f = f_1 + \cdots + f_k$$

قابل توصیف است و هر f_j در معادله دیفرانسیل $(D - c_j I)^{r_j} f_j = 0$ صدق می‌کند. بنابراین، مطالعه جوابهای معادله (۱۸-۶)، به مطالعه فضای جوابهای معادله دیفرانسیلی به صورت

$$(D - c_j I)^{r_j} f_j = 0 \quad (19-6)$$

تحویل می‌شود. این تحویل، با روش عمومی جبر خطی، یعنی با قضیه تجزیه اولیه، صورت گرفته است.

برای توصیف فضای جوابهای (۱۹-۶) باید مطالبی درمورد معادلات دیفرانسیل بدانیم؛ یعنی باید درمورد D مطالبی سوای این واقعیت که عملگری خطی است بدانیم. با این وجود، نیازی به دانستن مطالب زیادی نداریم. با استغوا روی ۲ پسیار آسان می‌توانیم ثابت کنیم که اگر f در C باشد، آنگاه

$$(D - cI)^r f = e^{ct} D^r (e^{-ct} f)$$

یعنی،

$$\frac{df}{dt} - cf(t) = e^{ct} \frac{d}{dt} (e^{-ct} f)$$

پس، $D^r g = 0$ اگر و تنها اگر $D(e^{-ct} f) = 0$. تابعی چون g که $D^r g = 0$ یعنی $\frac{d^r g}{dt^r} = 0$ ، باید تابعی چندجمله‌ای از درجه $(r-1)$ یا کمتر باشد:

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{r-1} t^{r-1}.$$

پس f در (۱۹-۶) صدق می‌کند اگر و تنها اگر f به صورت

$$f(t) = e^{ct} (b_0 + b_1 t + \dots + b_{r-1} t^{r-1})$$

باشد. بنابراین، «توابع» $e^{ct}, e^{ct}, \dots, e^{ct}, t e^{ct}, \dots, t^{r-1} e^{ct}$ فضای جوابهای (۱۹-۶) را پدید می‌آورند. چون توابع $1, t, t^2, \dots, t^{r-1}$ مستقل خطی هستند و تابع نمایی صفسر ندارد، این r تابع $t^j e^{ct}, 1 \leq j \leq r-1$ پایه‌ای برای فضای جوابهای (۱۸-۶) تشکیل می‌دهند. با بازگشت به معادله دیفرانسیل (۱۸-۶) که همان معادله

$$p(D)f = 0$$

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

است، می‌بینیم که n تابع $t^j e^{ct}, 1 \leq j \leq k$ و $m \leq r_j - 1$ ، پایه‌ای برای فضای جوابهای (۱۸-۶) تشکیل می‌دهند. بخصوص، فضای جوابهای (۱۸-۶) است و بعدش برابر با درجه چندجمله‌ای p است.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال p از T را به صورت $p = p_1 p_2$ ، که در آن

p_1 و p_2 تکین و بر روی هیأت اعداد حقیقی تحویل ناپذیر باشند، بیان کنید. گیریم T فضای پوچ (T) باشد. پایه‌های \mathcal{B}_i برای فضاهای W_1 و W_2 را باید. اگر T عملاً القا شده توسط T روی W_i باشد، ماتریس T در پایه \mathcal{B}_i (در بالا) را باید.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در پایه مرتب استاند نمایش داده می‌شود. نشان دهید عملگری قطری شدنی چون D روی R^3 و عملگری پوچ توان چون N روی R^3 وجود دارد که $T = D + N$ و $DN = ND$. ماتریسهای D و N را در پایه استاند بیا بید. (عیناً اثبات قضیه ۱۲ را برای این حالت خاص تکرار کنید).

۳. اگر V فضای همه چندجمله‌ایهای از درجه n یا کمتر بر روی هیأت F باشد، ثابت کنید که عملگر مشتق گیری روی V پوچ توان است.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ای مینیمال

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

باشد. و نیز فرض کنید W فضای پوچ $(T - c_i I)^{r_i}$ باشد.

(الف) ثابت کنید W مجموعه همه بردارهای α در V است که بهازای عدد

صحیح مثبتی چون m (که ممکن است به α وابسته باشد) $(T - c_i I)^m \alpha = 0$.

(ب) ثابت کنید بعد W برای d_i است. (داهمنا ای: اگر T عملگر القا شده توسط T روی W باشد، آنگاه $T - c_i I$ پوچ توان است. پس، چندجمله‌ای سرشت‌نمای $T - c_i I$ باید x^{d_i} ، که در آن e_i بعد W است، باشد (اثبات؟). بدینسان، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از $(x - c_i)^{d_i}$). حال این واقعیت را که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T حاصل ضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای T است به کار گیرید و نشان دهید که $e_i = d_i$).

۵. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V و D جزء قطری شدنی T باشد. ثابت کنید که اگر T

یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، آنگاه جزء قطری شدنی $(T)g$ عبارت است از $.g(D)$

۶. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد و داشته باشیم $1 = \text{رتبه } (T)$. ثابت کنید که یا T قطری شدنی است یا پوچ توان، ولی نه هردو.

۷. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بروی F و T عملگری خطی روی V باشد. فرض کنید T با هر عملگر خطی قطری شدنی روی V جابجا شود. ثابت کنید T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۸. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بروی هیأت F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بروی F باشد. عملگر خطی T روی V را طبق $T(B) = AB - BA$ تعریف کنید. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پوچ توان باشد، آنگاه T عملگری پوچ توان است.

۹. دو ماتریس پوچ توان 4×4 مثال بزنید که دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند (لزوماً چندجمله‌ایهای سرشتمای مساوی هم دارند)، اما متشابه نباشند.

۱۰. گیریم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و $p_{k^k} \dots p_1$ چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنید $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ تجزیه اولیه T ، یعنی V فضای پوچ $\mathcal{Z}(T)$ باشد. همچنین فرض کنید W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. ثابت کنید

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k).$$

۱۱. اشتباه «اثبات» زیر برای قضیه ۱۳ در کجاست؟ فرض کنید چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از سازه‌های خطی باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۵، T مثلثی‌شونده است. B را پایه مرتبی بگیرید که $[A] = [T]$ از بالا مثلثی باشد. گیریم D ماتریس قطری با درایه‌های قطری $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ باشد. در این صورت $N = A + D$ ، که در آن N اکیداً از بالا مثلثی است. بدیهی است که N پوچ توان است.

۱۲. اگر درباره تمرين ۱۱ فکر کرده‌اید، پس از مشاهده آنچه که قضیه ۷ درباره اجزای قطری شدنی و پوچ توان T می‌گوید، دوباره روی آن فکر کنید.

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله‌ای مینیمال آن به صورت p و p بروی هیأت اسکالری مربوط تحویل ناپذیر باشد. نشان دهید برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچ‌ساز α برابر p باشد.

۱۴. قضیه تجزیه اولیه و نتیجه تمرین ۱۳ را برای اثبات حکم زیر به کار گیرید. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، آنگاه برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچساز آن چندجمله‌ای مینیمال است.

۱۵. اگر N عملگر خطی پوچتوانی روی یک فضای برداری بعدی باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای N عبارت است از $\text{sgn}x$.

فرمایه‌گویا و ژوردان

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰. زیرفضاهای دوری و پوچسازها

یکبار دیگر V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگر خطی ثابتی (اما دلخواه) روی V فرض می‌شود. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، کوچکترین زیرفضایی از V که تحت T پایا و شامل α نیز باشد، وجود دارد. این زیرفضای را می‌توان به صورت اشتراک همه زیرفضاهای T -پایا که شامل α نیز باشند، تعریف کرد؛ اما، اگر نون مناسبتر است که به روش زیر به مطلب بنگریم. اگر W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایا و شامل α باشد، آنگاه W باید شامل بردار $T\alpha$ نیز باشد؛ از این‌رو، W باید شامل چند جمله‌ای g بر روی F ، شامل $(T\alpha)$ g نیز باشد. به بیان دیگر، W باید به ازای هر زیرفضای T -پایایی است که شامل α است.

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، زیرفضای T -دوری تولید شده توسط عبارت است از زیرفضای $Z(\alpha; T)$ متشکل از همه بردارهای به صورت α g ، که g در $[F[x], g]$ است. اگر V ، آنگاه α یک بردار دوری برای T نامیده می‌شود. طریق دیگر توصیف زیرفضای $Z(\alpha; T)$ این است که $Z(\alpha; T)$ زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $\alpha, T^k \alpha, \dots, T^k \alpha$ است، و از این قرار α برداری دوری برای T است.

اگر و تنها اگر این بردارها V را پدید آورند. به خواننده هشدار می‌دهیم که در حالت کلی عملگر T ممکن است بردار دوری نداشته باشد.

مثال ۱. به ازای هر T ، زیرفضای T -دوری تولید شده توسط بردار صفر عبارت است از زیرفضای صفر. فضای $Z(\alpha; T)$ یک بعدی است اگر و تنها اگر α یک بردار سرشت نمای T باشد. برای عملگر همانی، هر بردار غیرصفر زیرفضای دوری و یک بعدی تولید می‌کند؛ پس، اگر $\dim V > 1$ ، عملگر همانی دارای بردار دوری نیست. عملگر خطی T روی F^2 که در پایه مرتب استاند با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، مثالی از عملگری است که برداری دوری دارد. در اینجا بردار دوری (یک بردار دوری) ϵ_1 است؛ زیرا، اگر $\beta = (a, b)$ ، آنگاه در ازای α داریم $\beta = g(T)\alpha = g(a, b) = a + bx$ ، زیرا همین عملگر T ، زیرفضای دوری تولید شده توسط ϵ_1 ، فضای یک. بعدی پدید آمده توسط ϵ_2 است، چرا که ϵ_2 یک بردار سرشت نمای T است.

به ازای هر T و هر α ، بروابط

$$c_0\alpha + c_1T\alpha + \dots + c_kT^k\alpha = 0$$

بین بردارهای $T^j\alpha$ ، یعنی، به چند جمله‌ای‌های $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ که دارای خاصیت $g(T)\alpha = 0$ باشند، علاقمند هستیم. مجموعه همه‌گاهی متعلق به $F[x]$ به طوری که $g(T)\alpha = 0$ ، بوضوح یک ایدآل $F[x]$ است. این مجموعه همچنین یک ایدآل غیرصفر است، زیرا که شامل چند جمله‌ای مینیمال p از عملگر T است (به ازای هر α در V ، $(p(T)\alpha = 0)$.

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، T -پوچساز α عبارت است از ایدآل $M(\alpha; T) \subset F[x]$ متشکل از همه چند جمله‌ای‌های g بر روی F با شرط $g(T)\alpha = 0$. چند جمله‌ای تکین یکتای p_α که این ایدآل را تولید می‌کند، نیز T -پوچساز α نامیده می‌شود.

همچنان که در بالا نشان دادیم، T -پوچساز p_α ، چند جمله‌ای مینیمال عملگر T را عاد می‌کند. خواننده باید همچنین توجه کند که $\deg(p_\alpha) > 0$ ، مگر آنکه α بردار صفر باشد.

قضیه ۱. گیریم α بردار غیرصفر دلخواهی از V و T ، p_α -پوچساز α باشد.
(۱) درجه p_α برابر است با بعد ذیرفضای دوری $Z(\alpha; T)$.

(۲) اگر درجه p_α برای k باشد، آنگاه بردارهای $\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha, T^k\alpha$ پایهای برای $Z(\alpha; T)$ تشکیل می‌دهند.

(۳) اگر U عملگر خطی القا شده توسط T روی $Z(\alpha; T)$ باشد، آنگاه چندجملهای مینیمال U برای p_α است.

اثبات. فرض کنیم g یک چندجملهای بر روی هیأت F باشد. می‌نویسیم

$$g = p_\alpha q + r$$

که در آن یا $r = 0$ یا $\deg(r) < \deg(p_\alpha) = k$ در T -پوچساز α قرار دارد و لذا

$$g(T)\alpha = r(T)\alpha.$$

چون $\deg(r) < k$ یا $r = 0$ ، بردار $\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha, \dots, T^k\alpha$ ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha, \dots, T\alpha$ است و چون $\deg(g(T)\alpha) < k$ است، این مطلب نشان می‌دهد که این k بردار $Z(\alpha; T)$ را پدید می‌آورند. این بردارها یقیناً مستقل خطی هستند، زیرا هر رابطه خطی غیر بدیهی بین آنها، چندجملهای غیر صفری چون g را که $g(T)\alpha = 0$ دارد بهما خواهدداد، که خود بی معنی است. این مطلب (۱) و (۲) را اثبات می‌کند.

U را عملگر خطی روی $Z(\alpha; T)$ حاصل از تحدید T به آن زیرفضا فرض می‌کنیم. اگر g چندجملهای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} P_\alpha(U)g(T)\alpha &= p_\alpha(T)g(T)\alpha \\ &= g(T)p_\alpha(T)\alpha \\ &= g(T)\circ \\ &= \circ. \end{aligned}$$

بنابراین عملگر $P_\alpha(U)$ هر بردار در $Z(\alpha; T)$ را به \circ می‌فرستد و از این رو، روی $Z(\alpha; T)$ عملگر صفر است. بعلاوه، اگر چندجملهای h از درجه کمتر از k باشد، نمی‌توانیم داشته باشیم $h(U) = h(T)\alpha = 0$ ، زیرا در آن صورت $h(U)\alpha = h(T)\alpha = 0$ که متناقض با تعریف p_α است. این نشان می‌دهد که P_α چندجملهای مینیمال U است. \square

یک پیامد خاص این قضیه چنین است: اگر α بر حسب اتفاق برداری دوری برای T باشد، آنگاه چندجملهای مینیمال T باید درجه‌ای برای α باشد که بعد فضای V داشته باشد؛ از این رو، قضیه کیلی-همیلتون حاکی است که چندجملهای مینیمال T همان چندجملهای سرشت نمای T است. بعداً ثابت خواهیم کرد که برای هر T برداری چون α در V وجود دارد که چندجملهای مینیمال T را به عنوان پوچساز خود داراست. پس، نتیجه خواهد شد که T دارای برداری دوری است اگر و تنها اگر چندجملهایهای مینیمال و سرشت نمای

مساوی باشند. اما تا دیدن این مطلب کمی کار در پیش است.

نقشه ما مطالعه T عمومی با استفاده از عملگرها بی است که برداری دوری داشته باشند. لذا، به عملگر خطی U روی فضای W با بعد k که برداری دوری چون α داشته باشد، توجه می کنیم. بنا بر قضیه ۱، بردارهای $\alpha, \alpha, \dots, \alpha$ پایه ای برای فضای W تشکیل می دهند و پوچساز p از α ، چندجمله ای مینیمال U (و از این رو، همچنین چندجمله ای سرشت نمای U) است. اگر $\alpha_i = U^{i-1}\alpha$ ، $i=1, \dots, k$ ، $\alpha_k = U^{k-1}\alpha$ باشد، آنگاه عبارت از کنش U روی پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha, \dots, \alpha_k\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} U\alpha_i &= \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1 \\ U\alpha_k &= -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \dots - c_{k-1}\alpha_k \end{aligned} \quad (1-7)$$

البته $p_\alpha = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$. عبارت داده شده برای $U\alpha_i$ از این حکم که $p_\alpha(U) = 0$ ، یعنی

$$U^k\alpha + c_{k-1}U^{k-1}\alpha + \dots + c_1U\alpha + c_0\alpha = 0$$

نتیجه می شود. این مطلب حکم می کند که ماتریس U در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت باشد از

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{k-1} \end{array} \right] \quad (2-7)$$

ماتریس (۲-۷)، ماتریس همدم چندجمله ای تکین p نامیده می شود.

قضیه ۳. اگر U عملگری خطی روی فضای بعد متناهی W باشد، آنگاه U دادای برداری ددی است، اگر و تنها اگر پایه مرتبی برای W وجود داشته باشد که در آن U توسط ماتریس همدم چندجمله ای مینیمال U نمایش داده شود.

اثبات. قریباً مشاهده کردیم که اگر U دارای برداری دوری باشد، آنگاه چنین پایه مرتبی برای W وجود دارد. بعکس، اگر پایه مرتبی چون $\{\alpha, \dots, \alpha_k\}$ برای W داشته باشیم که در آن U توسط ماتریس همدم چندجمله ای مینیمال نمایش داده شود، روش است که α_1 برداری دوری برای U است. \square

نتیجه. اگر A ماتریس همدم چندجمله ای تکین p باشد، آنگاه p هم چندجمله ای مینیمال و هم چندجمله ای سرشت نمای A است.

اثبات. یک راه برای دیدن این مطلب، این است که U را عملگری خطی روی F^k بگیریم که در پایه مرتب استانده با A نمایش داده می‌شود و قضیه ۱ را همراه با قضیه کیلی-همیلتون مورد استفاده قرار دهیم. روش دیگر این است که با استفاده از قضیه ۱ نشان دهیم p چندجمله‌ای مینیمال A است و با محاسبه‌ای مستقیم بررسی کنیم که p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A نیز است. \square

توضیح آخر - اگر T عملگر خطی دلخواهی روی فضای V و α هر برداری از V باشد، آنگاه عملگر U که روی زیرفضای دوری $Z(\alpha; T)$ القا می‌کند دارای برداری دوری، مثلاً α' است. پس، $Z(\alpha'; T)$ دارای پایه مرتبی است که در آن U توسط ماتریس همدم T ، p_α ، پوچساز α' ، نمایش داده می‌شود.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد. ثابت کنید هر بردار غیرصفری که بردار سرشت‌نمای T نباشد برای T برداری دوری است. از اینجا ثابت کنید که یا T برداری دوری دارد یا اینکه T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۲. T را عملگری خطی روی R^3 بگیرید که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. ثابت کنید T هیچ بردار دوری ندارد. زیرفضای T -دوری تولید شده توسط بردار $(1, -1, 3)$ چیست؟

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی C^3 باشد که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. T -پوچساز بردار $(0, 1, 0)$ و نیز T -پوچساز $(1, 0, 0)$ را بیابید.

۴. ثابت کنید که اگر T^n برداری دوری داشته باشد، آنگاه T هم برداری دوری دارد.
آیا عکس مطلب درست است؟

۵. فضای برداری V بعدی F و عملگر خطی پروژه توان N روی V داده شده‌اند. فرض کنید $\alpha \neq N^{n-1} \alpha$. ثابت کنید α برداری از V باشد که $N^{n-1} \alpha = \alpha$.
برداری دوری برای N است. ماتریس N در پایه مرتب $\{\alpha, N\alpha, \dots, N^{n-1}\alpha\}$ دقیقاً چیست؟

۶. اثباتی مستقیم از این مطلب که اگر A ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p باشد، آنگاه p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است، ارائه کنید.

۷. فضای برداری V بعدی F و عملگر خطی T روی V مفروض‌اند. فرض کنید T قطری-شدتی باشد.

(الف) اگر T برداری دوری داشته باشد، نشان دهید T^n مقدار سرشت‌نمای متمایز دارد.

(ب) اگر T دارای n مقدار سرشت‌نمای متمایز، و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای از بردارهای سرشت‌نمای T باشد، نشان دهید $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha$ برداری دوری برای T است.

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و T دارای برداری دوری باشد. ثابت کنید اگر U عملگری خطی باشد که با T جابجا می‌شود، آنگاه U یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

۳.۷. تجزیه‌های دوری و فرم گویا

هدف اصلی این بخش اثبات این مطلب است که اگر T عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی مانند V باشد، آنگاه بردارها بی‌چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ در V وجود دارند که

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_n; T).$$

به بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که V مجموع مستقیمی از زیرفضاهای T -دوری است. این مطلب نشان می‌دهد که T مجموع مستقیم تعدادی متناهی از عملگرهای خطی است که هر یک دارای برداری دوری است. نتیجه این مطلب، تحویل پرسشهای بسیاری درباره عملگر خطی عمومی به پرسشهای مشابهی است درمورد عملگری که برداری دوری داشته باشد. قضیه‌ای را که اثبات خواهیم کرد (قضیه ۳) یکی از عمیق‌ترین نتایج جبر خطی و دارای نتیجه‌های جالب بسیاری است.

قضیه تجزیه دوری در رابطه نزدیک با سؤال زیر است. کدام یک از زیرفضاهای

-پایسای W دارای این خاصیت است که زیرفضای T -پایایی چون W' با شرط $V = W \oplus W'$ وجود داشته باشد؟ اگر W زیرفضایی دلخواه از فضای با بعد متناهی V باشد، آنگاه زیرفضایی چون W' وجود دارد که $V = W \oplus W'$ این گونه زیرفضاهای W زیادند، و هر یک از آنها مکمل W نامیده می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چه وقت زیرفضایی T -پایایی، زیرفضای مکملی دارد که تحت T پایا هم است.

فرض می‌کنیم $V = W \oplus W'$ و در آن W و W' هردو تحت T پایا باشند. حال بینیم درباره زیرفضای W چه مطالعی را می‌توانیم کشف کنیم. هر بردار β در V به صورت $\beta = \gamma + \gamma'$ است، که γ در W و γ' در W' است. اگر f یک چندجمله‌ای برروی هیأت اسکالری باشد، آنگاه

$$f(T)\beta = f(T)\gamma + f(T)\gamma'.$$

چون W و W' تحت T پایا هستند، بردار γ در W و بردار γ' در W' قرار دارد. بنابراین، $f(T)\beta$ در W است اگر و تنها اگر $\gamma = \gamma'$. آنچه توجه ما را جلب می‌کند این حقیقت به ظاهر ساده است که اگر β در W باشد، آنگاه $f(T)\beta = f(T)\gamma$.

تعريف. گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری V و زیرفضایی از V باشد. گوییم W زیرفضایی T -مجاز است،

(۱) اگر W تحت T پایای باشد؛

(۲) و اگر $f(T)\beta \in W$ باشد، آنگاه برداری چون $\gamma \in W$ وجود داشته باشد که $f(T)\beta = f(T)\gamma$

چنانکه قریباً نشان دادیم اگر W پایای و دارای زیرفضای پایای مکملی باشد، آنگاه W مجاز است. یکی از پیامدهای قضیه ۳ عکس این مطلب است، و از آنجا مجاز بودن زیرفضاهای پایایی را که دارای زیرفضای پایای مکمل هستند مشخص می‌کند.

حال نشان می‌دهیم خاصیت مجاز بودن چگونه وارد تلاش ما در به دست آوردن

تجزیه‌ای چون

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T)$$

می‌شود. روش اساسی برای دست یافتن به چنین تجزیه‌ای، انتخاب از راه استقرار بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ است. فرض کنیم به گونه‌ای $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ را انتخاب کرده باشیم و زیرفضای

$$W_j = Z(\alpha_1; T) + \cdots + Z(\alpha_j; T)$$

سره باشد. علاقهمندیم بردار غیرصفری چون α_{j+1} بیاییم که

$$W_j \cap Z(\alpha_{j+1}; T) = \{0\}.$$

زیرا در این صورت زیرفضای $(W_{j+1} = W_j \oplus Z(\alpha_{j+1}; T))$ دست کم یک بعد به تکمیل

V نزدیکتر خواهد بود. اما چرا باید چنین α_{j+1} موجود باشد؟ اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ طوری انتخاب شده باشند که W زیرفضایی T -مجاز باشد، آنگاه نسبتاً بسادگی دیده می‌شود که می‌توانیم α_{j+1} مناسبی بیابیم. حتی اگر نحوه بیان استدلال ما هم چنین نباشد، درواقع این همان مطلبی است که کار اثبات قضیه ۳ را به پیش می‌برد. گیریم W زیرفضای T -پایای سرهای باشد. سعی می‌کنیم بردار غیرصفری چون α بیابیم که

$$W \cap Z(\alpha; T) = \{0\}. \quad (3-7)$$

می‌توان برداری چون β را انتخاب کرد که در W نباشد. فضای T -هادی $S(\beta; W)$ را که مشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای γ است که $\beta = g(T)\gamma$ در W قراردارد، درنظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای تکین $f = s(\beta; W)$ که ایدآل $S(\beta; W)$ را تولید می‌کند نیز T -هادی β در W نامیده می‌شود. بردار $\beta = f(T)\beta$ در W است. حال، اگر T -مجاز باشد، عنصری چون γ در W قراردارد که $\gamma = f(T)\beta = f(T)\alpha = f(T)\beta - f(T)\alpha = \beta - \alpha$. و γ چندجمله‌ای دلخواهی باشد. چون $\beta - \alpha$ در W قراردارد، $\beta - \alpha = g(T)\gamma$ در W است اگر و تنها اگر γ در W باشد؛ به بیان دیگر، $S(\alpha; W) = S(\beta; W)$ پس، چندجمله‌ای f نیز T -هادی α در W است. اما $f(T)\alpha = 0$. این موضوع می‌رساند که $g(T)\alpha$ در W است اگر و تنها اگر $g(T)\alpha = 0$ ؛ در اینجا، زیرفضاهای $Z(\alpha; T)$ و $Z(\beta; T)$ مستقل هستند (۳-۷) و f همان T -پوچساز α است.

قضیه ۳ (قضیهٔ تجزیه دوری). گیریم T عملگری خطی دوی فضای برداری بعد متناهی V دارد. W زیرفضای T -مجاز سرهای از V باشد. بردارهای غیرصفری چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V بترتیب با T -پوچسازهای p_1, \dots, p_r وجود دارند که

$$V = W \oplus Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T) \quad (1)$$

(۲) p_k چندجمله‌ای p_{k-1}, \dots, p_1 اعاده می‌کند، $r = k, \dots, 1$.

علاوه، عدد صحیح r و پوچسازهای p_1, \dots, p_r توسط (۱) و (۲) و این واقعیت که هیچ یک از α_k ‌ها حفظ نیستند، به طور یکنواختی تعیین می‌شوند. اثباتات نسبتاً طولانی است؛ از این‌رو، آن را به‌چهار مرحله تقسیم می‌کنیم. گرچه در مطالعه اول، ممکن است فرض $\{0\} = Z(\beta_1; T) + \dots + Z(\beta_r; T)$ اثبات را ساده‌تر جلوه دهد، اما واقعاً این فرض سادگی عملدهای را سبب نمی‌شود. در سرتاسر اثبات، $f(T)\beta$ را با اختصار به صورت $f\beta$ می‌نویسیم.

مرحله ۱. بردارهای غیرصفری چون β_1, \dots, β_r وجود دارند که

$$(الف) V = W \oplus Z(\beta_1; T) + \dots + Z(\beta_r; T) \quad (2)$$

(ب) اگر $1 \leq k \leq r$

$$W_k = W \oplus Z(\beta_1; T) + \dots + Z(\beta_k; T)$$

آنگاه درجه هادی $(p_k) = s(\beta_k; W_{k-1})$ بیش همهٔ T -هادیهای در زیرفضای W_{k-1}

ماکسیمم است؛ یعنی، به ازای هر α

$$\deg p_k = \max_{\alpha} \deg s(\alpha; W_{k-1}).$$

این مرحله تنها باین امر مستگی دارد که W زیرفضای پایایی است. اگر W زیرفضای T -پایای سره‌ای باشد، آنگاه

$$\circ < \max_{\alpha} \deg s(\alpha; W) \leq (V) \quad \text{بعد}$$

و می‌توانیم برداری چون β انتخاب کنیم که $\deg s(\beta; W)$ همان ماکسیمم باشد. در این صورت زیرفضای $(W + Z(\beta); T)$ -پایا و دارای بعدی بزرگتر از بعد (W) است. این فرایند را برای به دست آوردن β_1 روی $W = W + Z(\beta_1; T)$ به کار می‌بندیم. اگر β_2 روی $W_1 = W + Z(\beta_1; T)$ هنوز هم سره باشد، آنگاه فرایند را برای به دست آوردن β_2 به کار می‌بریم. این روش را ادامه می‌دهیم. چون بعد (W_{k-1}) بعد (W_k) باشد در حداکثر بعد (V) مرحله به $W_r = V$ بررسیم.

مرحله ۲. گیریم β_1, \dots, β_r بردارهای غیرصرفی باشند که شرایط (الف) و (ب) از مرحله ۱ دارند. $k = 1$ ثابت می‌گیریم، $r \leq k$. فرض می‌کنیم β برداری دلخواه از V باشد و می‌نویسیم $f = s(\beta; W_{k-1})$. اگر

$$f\beta = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} g_i \beta_i, \quad W_i \beta_i \text{ در } \beta_i$$

آنگاه f همه چندجمله‌ایهای g (اعاد می‌کند و با فرض این که γ دد W باشد)، $\beta_0 = f\gamma$.

اگر $k = 1$ ، این حکم عین این است که W زیرفضایی T -مجاز باشد. جهت اثبات حکم برای $k > 1$ آلگوریتم تقسیم را به کار می‌بندیم:

$$\deg r_i < \deg f \quad r_i = 0, \quad g_i = fh_i + r_i \quad (4-7)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر i ، $r_i = 0$. فرض کنید

$$\gamma = \beta - \sum_{i=1}^{k-1} h_i \beta_i. \quad (5-7)$$

چون $\beta - \gamma$ در W_{k-1} است

$$s(\gamma; W_{k-1}) = s(\beta; W_{k-1}) = f.$$

بعلاوه

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k-1} r_i \beta_i. \quad (6-7)$$

تصور کنید یکی از r_j ها مخالف \circ باشد. در این حال تناقضی به دست خواهیم آورد. گیریم j بزرگترین نمایه \circ باشد که به ازای آن $\neq r_j$. در این صورت

$$\deg r_j < \deg f \quad \text{و} \quad r_j \neq \circ, \quad f\gamma = \beta_0 + \sum_i r_i \beta_i \quad (7-7)$$

$f = s(\gamma; W_{k-1}, \dots, p, \dots, W_{j-1})$ شامل W_{j-1} است، هادی p را عاد کنند:

$$p = fg.$$

$g(T)$ را بر هر دو طرف (7-7) به کار می بندیم:

$$p\gamma = gf\gamma = gr_j\beta_j + g\beta_0 + \sum_{1 \leq i < j} gr_i\beta_i. \quad (8-7)$$

بنابر تعریف، $p\gamma$ در W_{j-1} است و دو جمله آخر سمت راست (8-7) نیز متعلق به W_{j-1} است. بنابراین، $gr_j\beta_j$ هم در W_{j-1} قرار دارد. حال از شرط (ب) مرحله ۱ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \deg(gr_j) &\geq \deg s(\beta_j; W_{j-1}) \\ &= \deg p_j \\ &\geq \deg s(\gamma; W_{j-1}) \\ &= \deg p \\ &= \deg(fg). \end{aligned}$$

پس f ، $\deg r_j \geq \deg f$ ، و این موضوع با انتخاب j تناقض دارد. تاینجا می دانیم که همه g ها را عاد می کند و از این رو $\beta_0 = f\gamma$. چون W زیرفضایی T -مجاز است، با فرض اینکه γ در W باشد، $\beta_0 = f\gamma$. ضمناً متذکر می شویم که مرحله ۲ صورت قویتری از این حکم است که هر یک از زیرفضاهای W_1, W_2, \dots, W_r زیرفضایی T -مجاز است.

مرحله ۳. بردارهای غیرصفیری چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V وجود دادند که ده شرایط (۱) و (۲) قضیه ۳ صدق می کنند.

همچون مرحله ۱، با بردارهای β_1, \dots, β_r آغاز می کنیم و k را ثابت نگه می داریم، $1 \leq k \leq r$. مرحله ۲ را بر بردار $\beta = \beta_k$ و $f = p_k$ -هادی به کار می بندیم.

$$p_k \beta_k = p_k \gamma_0 + \sum_{1 \leq i < k} p_k h_i \beta_i \quad (9-7)$$

که در آن γ در W است و h_1, \dots, h_{k-1} چند جمله ایهایی هستند. می نویسیم

$$\alpha_k = \beta_k - \gamma_0 - \sum_{1 \leq i \leq k} h_i \beta_i. \quad (10-7)$$

چون $\alpha_k - \beta_k - \gamma_0$ در W_{k-1} است

$$s(\alpha_k; W_{k-1}) = s(\beta_k; W_{k-1}) = p_k \quad (11-7)$$

و چون $p_k \alpha_k = 0$, داریم

$$W_{k-1} \cap Z(\alpha_k; T) = \{0\}. \quad (12-7)$$

چون همه α_i ها (۱۱-۷) و (۱۲-۷) را برمی‌آورند، نتیجه می‌گیریم که

$$W_k = W_0 \oplus Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_k; T).$$

و p_k چندجمله‌ای T -پوچساز α_k است. بهیان دیگر، بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_k$ همان دنباله از زیرفضاهای W_1, W_2, \dots را تعریف می‌کنند که بردارهای $\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_k$ و نیز T -هادیهای $p_k = s(\alpha_k; W_{k-1})$ همان خواص ماکسیمال بودن (شرط (ب) مرحله ۱) را دارا هستند. بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_k$ دارای این خاصیت اضافی هم هستند که زیرفضاهای $Z(\alpha_1; T), Z(\alpha_2; T), \dots, Z(\alpha_k; T)$ مستقل هستند. بنابراین بررسی شرط (۲) در قضیه ۳ آسان است. چون به ازای هر i , $p_i \alpha_i = 0$, رابطه بدیهی

$$p_k \alpha_k = 0 + p_1 \alpha_1 + \cdots + p_{k-1} \alpha_{k-1}$$

در دست است. مرحله ۲ را با گذاشتن $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k$ و با p_k به جای α_k و β_k به کار می‌بندیم. نتیجه: p_k هر را به ازای $k < i$, عاد می‌کند.

مرحله ۴. عدد r و چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_r به طور یکتا توسط شرایط قضیه ۳ تعیین می‌شوند.

فرض می‌کنیم علاوه بر بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_k$ در قضیه ۳، بردارهای غیر صفر $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ بترتیب با T -پوچسازهای g_1, \dots, g_s را هم داریم به طوری که

$$V = W_0 \oplus Z(\gamma_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\gamma_s; T) \quad (13-7)$$

و نیز به ازای s , g_k , $k = 1, \dots, s$, چندجمله‌ای g_{k-1} را عاد می‌کند

نشان خواهیم داد که $s = r$, و به ازای هر i , $p_i = g_i$.

بسادگی دیده می‌شود که $p_1 = g_1$. چندجمله‌ای g_1 به عنوان T -هادی V در W_0 از (۱۳-۷) حاصل می‌شود. گیریم $S(V; W_0)$ دسته‌ای از چندجمله‌ایهایی چون f است که بردارهای β در V , بردار $f\beta$ در W_0 باشد؛ یعنی، چندجمله‌ایهایی چون f است که بر $f(T)$ مشمول در W_0 باشد. آنگاه $(V; W_0)$ ایدآل غیرصفیری در جبر چندجمله‌ایها است. به دلیل زیر، چندجمله‌ای g_1 مولده تکین این ایدآل است. هر β در V به صورت

$$\beta = \beta_0 + f_1 \gamma_1 + \cdots + f_s \gamma_s$$

است؛ ولذا

$$g_1\beta = g_1\beta_0 + \sum_i g_1f_i\gamma_i.$$

چون هر g_i چندجمله‌ای g_i را عاد می‌کند، به ازای همه γ_i ها داریم $g_i\gamma_i = 0$ و نیز $g_1\beta = g_1\beta_0$ متعلق به W است. پس g_1 در $S(V; W)$ قرار دارد. چون g_1 چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجه است که γ_i را در W می‌فرستد، می‌بینیم که $g_1\beta$ چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجه موجود در آیدآل $S(V; W)$ است. با همین استدلال،

p_1 مولود این آیدآل است و از اینجا $p_1 = g_1$.

اگر f یک چندجمله‌ای و W زیرفضایی از V باشد، مجموعه همه بردارهای $f\alpha$ به ازای α در W را با اختصار به صورت fW می‌نویسیم. اثبات سه حکم زیر را به عنوان تمرین و اگذار می‌کنیم.

$$\cdot fZ(\alpha; T) = Z(f\alpha; T).$$

$$\cdot 2. \text{ اگر } V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \text{ و هر } V_i \text{ تحت } T \text{ پایا باشد، آنگاه}$$

$$fV = fV_1 \oplus \cdots \oplus fV_k.$$

۳. اگر α, γ, T -پوچسازهای مساوی داشته باشند، آنگاه $f\alpha = f\gamma$ و $f\alpha = f\gamma$ -پوچسازهای مساوی دارند و (بنابراین)

$$\text{بعد } (Z(f\alpha; T)) = \text{بعد } (Z(f\gamma; T)).$$

اکنون، برای اینکه نشان دهیم $r = s$ و به ازای $i = 2, \dots, r$ به استقرار به پیش می‌رویم. برخان بر شمارش ابعاد به طریق درست استوار است. ما اثبات این مطلب را که اگر $2 \geqslant r$ آنگاه $p_2 = g_2$ ارائه می‌دهیم و امیدواریم استقرار از آن دیده شود. فرض کنیم $2 \geqslant r$. در این صورت

$$\text{بعد } (V) < \text{بعد } ((Z(\alpha_1; T)) + (Z(\gamma_1; T))).$$

چون می‌دانیم $p_1 = g_1$ ، نتیجه می‌گیریم که بعدهای $Z(\alpha_1; T)$ و $Z(\gamma_1; T)$ مساوی‌اند. بنابراین

$$\text{بعد } (V) < \text{بعد } ((Z(\alpha_1; T)) + (Z(\gamma_1; T))).$$

که نشان می‌دهد $2 \geqslant s$. اکنون می‌توانیم بپرسیم که آیا $p_2 = g_2$ یا نه. از دو تجزیه V ، دو تجزیه هم برای زیرفضای p_2V به دست می‌آوریم:

$$p_2V = p_2W_0 \oplus Z(p_2\alpha_1; T) \quad (14-7)$$

$$p_2V = p_2W_0 \oplus Z(p_2\gamma_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(p_2\gamma_s; T).$$

در اینجا از احکام (۱) و (۲) بالا استفاده کرده و این حقیقت را هم که $Z(p_2\alpha_1; T)$ به کار برده‌ایم. چون می‌دانیم $p_1 = g_1$ ، حکم (۳) بالا می‌گوید که بعدهای $Z(p_2\alpha_1; T)$ و $Z(p_2\gamma_1; T)$ مساوی‌اند. از این‌رو، از (۱۴-۷) آشکار است که

$$(Z(p_2\gamma_i; T) = 0, \quad i \geq 2.$$

نتیجه اینکه $p_2\gamma_2 = 0$ و g_2 چندجمله‌ای p_2 را عاد می‌کند. این برهان را می‌توان معکوس کرد و نشان داد که p_2 نیز g_2 را عاد می‌کند. بنابراین $g_2 = p_2 \cdot g_2$. \square

نتیجه. اگر T عملگری خطی (دی) فضای برداری باشد، آنگاه هر زیرفضای T -مجاز ذیرفضای مکملی دارد که تحت T پایاست. اثبات. گیریم W زیرفضای مجازی از V باشد. اگر $V = W \oplus W^\circ$ مکملی که در جستجوی آن هستیم $\{0\}$ است، و اگر W سره باشد، قضیه ۳ را به کار می‌بندیم و می‌نویسیم

$$W' = Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T).$$

$$\square \cdot V = W \oplus W'.$$

در این صورت W' تحت T پایاست و

نتیجه. فرض کنیم T عملگری خطی (دی) فضای برداری بعد متناهی V باشد.

(الف) برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچساز α چندجمله‌ای مینیمال T است.

(ب) برداری دوی دارد اگر و تنها اگر چندجمله‌ایهای سروش نما و مینیمال T مساوی باشند.

اثبات. اگر $\{0\} = V$ تنایع به طور بدیهی درست هستند. اگر $\{0\} \neq V$ ، فرض می‌کنیم

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T). \quad (15-7)$$

در اینجا T -پوچسازهای p_1, p_2, \dots, p_r طوری هستند که به ازای $1 \leq k \leq r-1$ ، $1 \leq l \leq k+1$ چندجمله‌ای p_k را عاد می‌کند. همچنان که در اثبات قضیه ۳ ملاحظه کردیم، بسادگی نتیجه می‌شود که p_1 چندجمله‌ای مینیمال T ، یعنی T -هادی V در $\{0\}$ است. پس (الف) را اثبات کردیم.

در بخش ۱.۷ دیدیم که اگر T دارای دوری باشد چندجمله‌ای مینیمال T بر چندجمله‌ای سروش نما منطبق است. حکم (ب) عکس این حالت را هم در بر دارد. هر α_i را همچون در (الف)، انتخاب کنیم. اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال برابر بعد باشد، آنگاه (V)

$$\square \cdot V = Z(\alpha; T).$$

قضیه ۴ (تعمیم قضیه کیلی-میلان). فرض کنیم T عملگری خطی (دی) فضای برداری بعد متناهی V باشد. p و f ابتقیب چندجمله‌ایهای مینیمال و سروش نمای T می‌گیریم.

(۱) p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند.

(۲) سازه‌های اول p و f مساوی اند، ولی ممکن است چندگا ذگیهای مختلف داشته باشند.

(۳) اگر

$$p = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k} \quad (16-7)$$

تجزیه p به سازه‌های اول باشد، آنگاه

$$f = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k} \quad (17-7)$$

که در آن d_i پوچی $f_i(T)$ تقسیم بوده‌جهه f است.

اثبات. حالت بدیهی $\{0\} = V$ را منظور نمی‌کنیم. برای اثبات (۱) و (۲) تجزیه‌ای دوری چون (۱۵-۷) از V را که از قضیه ۳ به دست می‌آید در نظر می‌گیریم. همچنان که در اثبات نتیجه دوم ملاحظه کردیم $p_i = p_i \cdot 1$. گیریم U تحدید T بر $Z(\alpha_i; T)$ باشد. در این صورت U برداری دوری دارد ولذا p_i هم چندجمله‌ای مینیمال وهم چندجمله‌ای سرشت نمای U است. بنابراین، چندجمله‌ای سرشت نمای f عبارت است از حاصل ضرب $p_i = p_i \cdots f$. این مطلب از صورت بلوکی (۱۴-۶)، که ماتریس T در پایه مناسبی می‌باشد، آشکار است. واضح است که $p_i = p_i \cdots f$ را عاد می‌کند، و (۱) اثبات می‌شود. بدیهی است که هر مقسوم علیه اول p_i ، مقسوم علیه اول f هم هست. عکس، هر مقسوم علیه اول $p_i = p_i \cdots f$ باید یکی از سازه‌های p_i را عاد کنداواین بدنوبه خود p_i را هم عاد می‌کند.

فرض کنیم (۱۶-۷) تجزیه به سازه‌های اول p باشد. قضیه تجزیه اولیه (قضیه ۱۶-۶) را به کار می‌بریم. آن قضیه حاکمی است که اگر V فضای پوچی $f_i(T)$ باشد، آنگاه

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \quad (18-7)$$

و f چندجمله‌ای مینیمال عملکرگر T حاصل از تحدید T بر زیر فضای (پایای) V است. حال قسمت (۲) قضیه حاضر را در مورد عملکرگر T به کار می‌بندیم. چون چندجمله‌ای مینیمال آن تووانی از سازه اول f است، چندجمله‌ای سرشت نمای T به صورت $f_i^{d_i}$ است، که در آن $d_i \geq r$. آشکار است که

$$d_i = \frac{(V_i)}{\deg f_i}$$

و (نحویاً طبق تعریف)، پوچی $(f_i(T))$ $\dim V_i = (f_i(T))$. چون T مجموع مستقیم عملکرگرهای T_1, \dots, T_k است، چندجمله‌ای سرشت نمای f عبارت از حاصل ضرب

$$f = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k}. \square$$

نتیجه. اگر T عملکر خطي پوچ‌دوازی دوی فضایی بوداری با بعد n باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت نمای T عبارت است از x^n .

اکنون به نظریه ماتریسی قضیه تجزیه دوری می‌پردازیم. اگر عملگر T و تجزیه به مجموع مستقیم قضیه ۳ داده شده باشد، فرض می‌کنیم B «پایه مرتب دوری»

$$\{\alpha_i, T\alpha_i, \dots, T^{k_i-1}\alpha_i\}$$

برای $Z(\alpha_i; T)$ باشد. در اینجا k_i بعد $Z(\alpha_i; T)$ ، یعنی درجه پوچساز p_i را نشان می‌دهد. ماتریس عملگر القا شده T در پایه مرتب B ماتریس همدم چندجمله‌ای p_i است. پس، اگر B را پایه مرتب V حاصل از تلفیق اجتماع B_1, \dots, B_r ، بر ترتیب B_1, \dots, B_r ، فرض کنیم، آنگاه ماتریس T در پایه مرتب B به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \quad (19-7)$$

که در آن A_i ماتریس همدم $k_i \times k_i$ برای p_i است. گوییم یک ماتریس $n \times n$ در فرم‌گویا است، هرگاه A مجموع مستقیم (۱۹-۷) از ماتریسهای همدم چندجمله‌ایها تکین غیراسکالری p_1, \dots, p_r باشد که به ازای $1 \leq i \leq r$ ، p_{i+1}, \dots, p_r ، چندجمله‌ای p_i را عاد می‌کند. قضیه تجزیه دوری درباره ماتریسهای مطلب زیر را بیان می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنیم F یک هیأت و B ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد. در این صورت B بر روی هیأت F باشد و تنها یک هاتوپیس در فرم‌گویا متشابه است. اثبات. T را عملگری خطی روی F می‌گیریم که در پایه مرتب استاند B نمایش داده می‌شود. همچنان که قریباً ملاحظه کردیم، پایه مرتبی برای F وجود دارد که در آن T با ماتریسی چون A که در فرم‌گویا است، نمایش داده می‌شود. در این صورت B با این ماتریس A متشابه است. فرض کنیم B بر روی F با ماتریس دیگری چون C هم که در فرم‌گویاست متشابه باشد. و این بدین معنی است که پایه مرتبی برای F وجود دارد که در آن عملگر T با ماتریس C نمایش داده می‌شود. اگر C مجموع مستقیم ماتریسهای همدم از چندجمله‌ایها تکین g_1, \dots, g_s باشد که به ازای $1 \leq i \leq s$ ، β_i چندجمله‌ای g_i را عاد کند، آنگاه آشکار است که بردارهای غیرصفر β_1, \dots, β_s در F ، بر ترتیب با T -پوچسازهای g_1, \dots, g_s ، وجود دارند که

$$V = Z(\beta_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\beta_s; T).$$

اما در این صورت بنا بر حکم یکتاپی در قضیه تجزیه دوری، چندجمله‌ایها g_i با چندجمله‌ایها p_i که ماتریس A را تعریف می‌کنند مساوی هستند. پس، $C = A$. \square

چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_r سازه‌های پایای ماتریس B نامیده‌می‌شوند. در بخش ۴.۷ برای محاسبه سازه‌های پایای ماتریس مفروضی چون B آلگوریتمی به دست خواهیم داد. وجه تسمیه فرم گویا از این واقعیت ناشی می‌شود که توسط تعداد متناهی عمل گویا روی درایدهای B محاسبه این چندجمله‌ایها امکان‌پذیر است.

مثال ۲. فرض کنیم فضای برداری دو بعدی V بر روی هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. امکانات برای تجزیه کردن T به زیر فضاهای دوری بسیار محدود است. زیرا، اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال T باشد، خود با چندجمله‌ای سرشت نمای T برابر است و T دارای برداری دوری است. پس، پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریس همدم چندجمله‌ای سرشت نمایش نشان داده می‌شود. از طرف دیگر، اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال T يك باشد، آنگاه T مصربي اسکالری از عملگر همانی است. اگر $T = cI$ ، آنگاه به ازای هردو بردار مستقل خطی α_1 و α_2 در V ، داریم

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus Z(\alpha_2; T)$$

$$p_1 = p_2 = x - c.$$

در مورد ماتریسهای، این تحلیل حاکی است که هر ماتریس 2×2 بر روی هیأت F ، دقیقاً با یکی از ماتریسهای از نوع

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

بر روی F متشابه است.

مثال ۳. گیریم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندۀ باما تریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. قبل محاسبه کرده‌ایم که چندجمله‌ای سرشت نمای T برای $f = (x-1)(x-2)$ ، و چندجمله‌ای مینیمال T برای $(x-1)(x-2)$ است. بدینسان می‌دانیم که در تجزیه دوری برای T ، اولین بردار α_1 ، p_1 را به عنوان T -پوچساز خود خواهد داشت. چون در فضایی سه بعدی کار می‌کنیم، تنها یک بردار دیگر چون α_2 می‌تواند در آن وجود داشته باشد. این بردار باید زیر فضایی دوری باشد. پوچساز p_2 را تولید کنند؛ یعنی، باید برداری سرشت نمای برای T باشد. پوچساز p_2 باید $(x-2)$ باشد؛ زیرا باید داشته باشیم $pp_2 = f$. توجه کنید که این مطلب بلا فاصله حاکی است که ماتریس A با ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

متشابه است؛ بدین معنی که T در پایه مرتبی توسط B نمایش داده می‌شود. چگونه‌می‌توانیم بردارهای مناسب α_1 و α_2 را بیا بیم؟ خوب، می‌دانیم هر برداری که زیر فضای T -دوری از بعد ۲ را تولید کند، α_1 مناسی است. از این‌رو، بباید ϵ را بیازماییم. داریم

$$T\epsilon_1 = (5, -1, 3)$$

که مضری اسکالری از ϵ نیست؛ پس $Z(\epsilon_1; T)$ دارای بعد ۲ است. این فضا مشکل است از همه بردارهای $a\epsilon_1 + b(T\epsilon_1)$:

$$a(1, 0, 0) + b(5, -1, 3) = (a + 5b, -b, 3b)$$

یا همه بردارهای (x_1, x_2, x_3) که در شرط $x_3 = -3x_2 - 2x_1$ صدق کنند. اکنون به برداری چون α_2 نیاز داریم که $T\alpha_2 = 2\alpha_2$ باشد، $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\epsilon_1; T)$ باشد. چون α_2 باید برداری سرشت‌نمای برای T باشد، فضای $Z(\alpha_2; T)$ چیزی جز فضای یک بعدی پدید آمده توسط α_2 نخواهد بود؛ ولذا شرط ما این است که α_2 در $Z(\epsilon_1; T)$ نباشد. اگر $(x_1, x_2, x_3) = \alpha_2$ باشد گویی می‌توان نشان داد که $T\alpha_2 = 2\alpha_2$ در $x_3 = 2x_2 + 2x_1$. پس، $(0, 1, 0) = 2\alpha_2$ در $\alpha_2 = (2, 1, 0)$. پس، $Z(\epsilon_1; T)$ تولید می‌نماید. خواننده باید مستقیماً نشان دهد که ماتریس T -دوری مجزا از $Z(\epsilon_1; T)$ در پایه مرتب

$$\{(1, 0, 0), (5, -1, 3), (0, 1, 0)\}$$

ماتریس B بالا است.

مثال ۴. فرض کنیم T یک عملگر خطی قطری شدنی روی V باشد. این جالب است که تجزیه‌ای دوری برای T را به پایه‌ای که ماتریس T را قطری می‌کند مربوط بسازیم. c_1, c_2, \dots, c_k را مقادیر سرشت‌نمای متمایز T و V را فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c_i می‌گیریم. در این صورت

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

و اگر بعد $d_i = (V_i)$ آنگاه

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است. اگر α برداری از V باشد، مربوط ساختن زیر فضای دوری $Z(\alpha; T)$ بذیر فضاهای V_1, \dots, V_k آسان است. بردارهای یکتا بی چون وجود دارند که β_i در V_i باشد و β_k, \dots, β_1

$$\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k.$$

چون $T\beta_i = c_i\beta_i$ ، به ازای هر چندجمله‌ای f داریم

$$f(T)\alpha = f(c_1)\beta_1 + \cdots + f(c_k)\beta_k. \quad (20-7)$$

با مفروض بودن اسکالرهاي t_1, \dots, t_k چندجمله‌ایسي $\sum_{i=1}^k t_i \leqslant 1$. بنا بر این، $f(c_i) = t_i$ عیناً زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای β_1, \dots, β_k است. پوچساز α چیست؟ بنا بر (۲۰-۷)، $f(T)\alpha = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر i $f(c_i)\beta_i = 0$. به بیان دیگر، $f(T)\alpha = 0$ مشروط براینکه به ازای $\beta_i \neq 0$ داشته باشیم $f(c_i)\beta_i = 0$. از این‌رو، پوچساز α عبارت است از حاصل ضرب

$$\prod_{\beta_i \neq 0} (x - c_i). \quad (21-7)$$

حال، $\mathcal{B}_i = \{\beta_1^i, \dots, \beta_{d_i}^i\}$ را پایه مرتبی برای V می‌گیریم و می‌نویسیم

$$r = \max_i d_i.$$

بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ را توسط

$$\alpha_j = \sum_{d_i \geqslant j} \beta_j^i, \quad 1 \leqslant j \leqslant r \quad (22-7)$$

تعریف می‌کنیم. زیرفضای دوری $Z(\alpha_j; T)$ عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای β_j^i با این شرط که β_j^i نمایه‌هایی را پذیرد که به ازای آنها $j \geqslant d_i$. $p_j = \prod_{d_i \geqslant j} (x - c_i)$

$$(23-7)$$

است. همچنین

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T)$$

زیرا هر β_j^i به یکی و تنها یکی از زیرفضاهای $Z(\alpha_1; T), \dots, Z(\alpha_r; T)$ تعلق دارد و $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ پایه‌ای برای V است. طبق (۲۳-۷)، p_{j+1}, \dots, p_r چندجمله‌ای را نیز عاد می‌کند.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد، که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\alpha_1 = (0, 0, 1)$. نشان دهید $Z(\alpha_1; T) \neq Z(\alpha_2; T)$ و هیچ بردار غیر صفری چون α_2 در F^3 وجود ندارد که $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\alpha_1; T)$ باشد.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و R برد T باشد.

(الف) ثابت کنید R زیرفضای T -پایای مکملی دارد اگر و تنها اگر R مستقل از فضای پوج N از T باشد.

(ب) اگر R و N مستقل باشند، ثابت کنید N یکتا زیر فضای T -پایای مکمل است.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندہ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوج $T - 2I$ باشد. ثابت کنید W هیچ زیرفضای T -پایای مکملی ندارد. (داهنما بی: فرض کنید $\epsilon_1 = \beta, \epsilon_2 = \alpha$ ، و مشاهده کنید که $(T - 2I)\beta$ در W است. ثابت کنید هیچ α بی در W وجود ندارد که $(T - 2I)\beta = (T - 2I)\alpha$

۶. فرض کنید T عملگری خطی روی F^4 باشد که در پایه مرتب استاندہ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوج $T - cI$ باشد.

(الف) ثابت کنید W زیرفضای پدید آمده توسط ϵ_4 است.

(ب) مولدهای تکین ایدآل‌های $(\epsilon_1; W), (\epsilon_2; W), (\epsilon_3; W), (\epsilon_4; W)$ را بیابید.

۷. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V بر روی هیأت F باشد. اگر چندجمله‌ای f بر روی F و α در V باشد، می‌نویسیم $f\alpha = f(T)\alpha$.

۶. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ ، V_1, \dots, V_k زیرفضاهایی T -پایا باشند و $fV = fV_1 \oplus \cdots \oplus fV_k$.

۷. V, T, F را همچون در تمرین ۵ بگیرید. فرض کنید α و β بردارهایی از V باشند که T -پوچسازهای مساوی دارند. ثابت کنید که به ازای هر چندجمله‌ای f ، $f\alpha$ و $f\beta$ نیز T -پوچسازهای مساوی دارند.

۸. چندجمله‌ایهای مینیمال و فرمهای گویای هریک از ماتریسهای حقیقی زیر را بباید

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

۹. گیریم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استانده با

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بردارهای غیر صفر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را که در شرایط قضیه ۳ صدق می‌کنند بباید.

۱۰. ماتریس حقیقی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

داده شده است. ماتریس حقیقی 3×3 معکوس پذیری چون $P^{-1}AP$ باید که به فرم گویا باشد.

۱۱. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط و T عملگری خطی روی F^4 باشد که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را باید. حالات $a = b = 1$ و $a = b = 0$ را در نظر بگیرید. در هریک از این حالات، چندجمله‌ای مینیمال T و بردارهای غیر صفر $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ را که در شرایط قضیه ۴ صدق می‌کنند. باید.

۱۱. ثابت کنید که اگر A و B ماتریس‌های 3×3 برروی هیأت F باشند، شرطی لازم و کافی برای اینکه $A \otimes B$ برروی F متشابه باشند این است که آنها دارای چندجمله‌ای‌های سرشت‌نمای مساوی و چندجمله‌ای‌های مینیمال مساوی باشند. مثالی بیاورید که نشان دهد این موضوع برای ماتریس‌های 4×4 غلط است.

۱۲. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط W و A و B ماتریس‌های $n \times n$ برروی F باشند: ثابت کنید که اگر A و B برروی هیأت اعداد مختلط متشابه باشند، آنگاه برروی F نیز متشابه‌اند. (داهنایی: ثابت کنید که فرم‌گویای A ، چه A به عنوان ماتریسی روی F در نظر گرفته شود و چه ماتریسی روی C ، یکی است؛ و به همین نحو برای B .)

۱۳. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد. ثابت کنید که اگر همه مقادیر سرشت‌نمای A ، حقیقی باشند، آنگاه A با ماتریسی با درایه‌های حقیقی متشابه‌است.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. ثابت کنید برداری چون α با خاصیت زیر در V وجود دارد. اگر f یک چندجمله‌ای باشد و $f(T)\alpha = 0$ آنگاه $f(T) = 0$. (برداری چون α ، یک بردار جدا از کننده برای جبر چندجمله‌ای‌های در T نامیده می‌شود.) هنگامی که T برداری دوری داشته باشد، اثباتی مستقیم از این مطلب که هر بردار دوری برداری جدا از کننده برای جبر چندجمله‌ای‌های در T نیز هست، ارائه کنید.

۱۵. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، A ماتریسی $n \times n$ برروی F ، و p چندجمله‌ای مینیمال A باشد. اگر A را به عنوان ماتریسی برروی C محسوب کنیم، آنگاه A به عنوان ماتریسی $n \times n$ برروی C چندجمله‌ای مینیمالی چون f دارد. از قضیه‌ای درباره معادلات خطی جهت اثبات $f = p$ استفاده کنید. آیا همچنین می‌توانید دریابید که این مطلب از قضیه تجزیه دوری چگونه نتیجه می‌شود؟

۱۶. فرض کنید ماتریس A ی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی چنان باشد که $A^2 + I = 0$. ثابت کنید n زوج است و اگر $n = 2k$ فرض شود، آنگاه A برروی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی به صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن I ماتریس همانی $k \times k$ است، متشابه است.

۱۷. عملگر خطی T روی فضای برداری بعد متناهی V داده شده است. فرض کنید

(الف) چندجمله‌ای مینیمال T توانی از یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر باشد؛

(ب) چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای سرشت نما برابر باشد.

شان دهید که هیچ زیرفضای T -پایای غیربدیهی، یک زیرفضای T -پایای مکمل ندارد.

۱۸. اگر T یک عملگر خطی قطری‌شدنی باشد، آنگاه هر زیرفضای T -پایای یک زیرفضای

T -پایای مکمل نیز دارد.

۱۹. گیریم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. ثابت کنید T برداری

دوری دارد اگر و تنها اگر مطلب زیر درست باشد: هر عملگر خطی U که با T جا بجا

شود یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

۲۰. فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی

روی V باشد. می‌پرسیم چه وقت این مطلب درست است که هر بردار غیرصفر در V

برداری دوری برای T است. ثابت کنید وضع چنین است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای

سرشتنمای T بر روی F تحویل ناپذیر باشد.

۲۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. فرض کنید T عملگری خطی

روی R باشد که توسط A در پایه مرتب استانده نماش داده می‌شود و U عملگری

خطی روی C باشد که آن هم در پایه مرتب استانده با A نماش داده می‌شود. برای

اثبات مطلب زیر از نتیجه تمرین ۲۰ استفاده کنید: اگر زیرفضاهای پایای تحت T

تنها R و زیرفضای صفر باشند، آنگاه U قطری‌شدنی است.

۳۰۷. فرم ژوردان

فرض کنیم N عملگر خطی پوج توانی روی فضای با بعد متناهی V باشد. تجزیه دوری

N حاصل از قضیه ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. عدد صحیح مثبتی چون r ، s و t بردار

غیرصفر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ در V با N -پوچسازهای p_1, p_2, \dots, p_s که

$$V = Z(\alpha_1; V) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; V)$$

و به ازای $1 \leq i \leq r$ ، p_{i+1}, \dots, p_{r+s} چندجمله‌ای p_i را عاد می‌کند وجود دارند. چون

N پوچ توان است، k_i بی هست که $n \leq k_i$ و چندجمله‌ای مینیمال N به صورت x^{k_i} باشد. پس، هر $p_i = x^{k_i}$ است و شرط تقسیم‌پذیری چیزی جز شرط

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$$

نیست. بدیهی است که $k_1 = k$ و $k_r \geq 1$. ماتریس همدم x^k عبارت است از ماتریس $k_i \times k_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24-7)$$

بدینسان قضیه ۳ پایه مرتبی برای V بددست می‌دهد که نسبت به آن ماتریس N مجموع مستقیم ماتریسهای پوچ توان مقدماتی (۲۴-۷) است که وقتی α افزایش یابد اندازه‌شان کاهش می‌یابد. از این مطلب دیده می‌شود که به هر ماتریس $n \times n$ پوچ توانی عدد صحیح مشبی چون r عدد صحیح مشبی k_1, k_2, \dots, k_r طوری وابسته‌اند که $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ و $k_{r+1} \geq k_r$ و نیز این اعداد صحیح مشبی فرم گویای ماتریس را تعیین؛ یعنی، ماتریس را تا میزان تشابه معین می‌کنند.

در مورد عملگر پوچ توان فوق مطلوبی وجود دارد که باید آن را در اینجا خاطرنشان سازیم. عدد صحیح مشبی r دقیقاً برابر پوچی N است؛ در واقع، فضای پوچ، پایه‌ای مشتمل بر r بردار

$$N^{k_i-1} \alpha_i \quad (25-7)$$

دارد. زیرا، فرض می‌کنیم α در فضای پوچ N باشد. حال α را به صورت

$$\alpha = f_1 \alpha_1 + \dots + f_r \alpha_r$$

که در آن f_i یک چندجمله‌ای است و درجه آن را می‌تران کمتر از k_i فرض کرد، می‌نویسیم. چون $N\alpha = 0$ ، به ازای هر i داریم

$$0 = N(f_i \alpha_i)$$

$$= Nf_i(N)\alpha_i$$

$$= (x f_i) \alpha_i.$$

پس، $x f_i$ بر x^k تقسیم‌پذیر است، و چون $\deg(f_i) < k_i$ ، این بدان معنی است که به ازای

اسکالری چون c_i

$$f_i = c_i x^{k_i - 1}.$$

ولی آنگاه

$$\alpha = c_1(x^{k_1 - 1}\alpha_1) + \cdots + c_r(x^{k_r - 1}\alpha_r)$$

که نشان می‌دهد بردارهای $(25-7)$ پایه‌ای برای فضای پوج N تشکیل می‌دهند. خواننده باید توجه داشته باشد که این حکم از دیدگاه ماتریسی نیز کاملاً روش است. اکنون مایلیم یافته‌های خود درمورد عملگرها یا ماتریسهای پوج توان را با قضیه تجزیه اولیه از فصل ۶ تلقیق کنیم. وضع چنین است: فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشد و نیز چندجمله‌ای سرشت‌نمای T بر روی F به صورت زیر به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

در اینجا c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از F هستند و $1 \leq d_i \leq r_i$. در این صورت چند جمله‌ای مینیمال T

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

است که در آن $d_i \leq r_i \leq 1$. اگر W_i فضای پوج $(T - c_i I)^{r_i}$ باشد، آنگاه قضیه تجزیه اولیه حاکی است که

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

و نیز عملگر T ، الفا شده توسط T روی W_i ، دارای چندجمله‌ای مینیمال $(x - c_i)^{r_i}$ است. $N_i = T - c_i I$ تعریف شده توسط r_i می‌گیریم. در این صورت N_i پوج توان و دارای چندجمله‌ای مینیمال x^{r_i} است. عملگر T روی W_i مانند حاصل جمع N_i و c_i برابر عملگر همانی عمل می‌کند. فرض کنیم پایه‌ای برای ذیرفضای W_i ، متناظر به تجزیه دوری عملگر پوج توان N_i ، انتخاب کرده باشیم. در این صورت ماتریس T در این پایه مرتب، مجموع مستقیم ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & c & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c \end{bmatrix} \quad (26-7)$$

است که در هر یک $c = c_i$. بعلاوه، اندازه این ماتریسها وقتی از چپ به‌راست خواهد شوند، کاهش می‌یابند. ماتریسی به صورت $(26-7)$ ، یک ماتریس مقدماتی ژورдан به‌ازای

مقدار سرشت نمای c نامیده می‌شود. حال اگر همه پایه‌های W_i را پهلوی هم قرار دهیم، پایه مرتبی برای V به دست می‌آوریم. می‌خواهیم در این پایه مرتب ماتریس A از T را توصیف کنیم.

ماتریس A عبارت است از مجموع مستقیم ماتریسهای A_1, \dots, A_k

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & A_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & A_k \end{bmatrix}. \quad (27-7)$$

هم به صورت A_i

$$A_i = \begin{bmatrix} J_1^{(i)} & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & J_2^{(i)} & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & J_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

است که در آن هر $J_j^{(i)}$ یک ماتریس مقدماتی ژوردان به ازای مقدار سرشت نمای c است. همچنین، داخل هر A_i ، اندازه ماتریسهای $J_j^{(i)}$ با افزایش زکاهش می‌یابد. گوییم ماتریسی $n \times n$ ماتریس A به فرم ژوردان است هر گاه همه شرایط تشریح شده در این بند را (به ازای اسکالرهای متمایزی چون c_1, \dots, c_k) برآورد.

قریباً نشان دادیم که اگر T عملگری خطی باشد که چند جمله‌ای سرشت نمایش بر روی هیأت اسکالری، به طور کامل به سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریسی که به فرم ژوردان است نمایش داده می‌شود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این ماتریس، بدون احتساب ترتیبی که در آن مقادیر سرشت نمای T نوشته می‌شوند، به طور یکتا به T وابسته است. به بیان دیگر، اگر دو ماتریس به فرم ژوردان متشابه باشند؛ آنگاه می‌توانند تنها در ترتیب اسکالرهای c متفاوت باشند.

این یکتا بی به صورت زیر ثابت می‌شود. فرض کنیم پایه مرتبی برای V وجود داشته باشد که در آن T با ماتریس ژوردان A توصیف شده در بند قبل، نمایش داده شود. اگر A ماتریسی $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n$ باشد، آنگاه بوضوح d_1, d_2, \dots, d_n چندگانگی c به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای سرشت نمای A یا T است. به بیان دیگر، چند جمله‌ای سرشت نمای T عبارت است از

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $A = c_1, \dots, c_k$ بدون احتساب ترتیبی که آنها را می‌نویسیم، یکتا هستند. این واقعیت که A مجموع مستقیم ماتریسهای A_i است، تجزیه به مجموع مستقیمی چون $\oplus W_i$ را که تحت $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ پایاست ایجاد می‌کند. اکنون توجه کنید که W_i باید فضای پوچ $(T - c_i I)$ باشد؛ زیرا، روشن است که $A_i - c_i I$ پوچ توان و به ازای $i \neq j$ ، ماتریس $A_i - c_j I$ نامنفرد است. از این‌رو، می‌بینیم که زیرفضاهای W_i یکتا هستند. اگر T عملگر الفا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه ماتریس A_i ، به عنوان فرم گویای T ، به طور یکتا تعیین می‌شود.

اکنون می‌خواهیم درباره عملگر T و ماتریس ژورдан A که T را در پایه مرتبی نمایش می‌دهد به مشاهده بیشتری پردازیم. فهرست یک رشته از مشاهدات چنین است:

- (۱) هر درایه A که نه روی قطر اصلی باشد و نه بلافاصله زیر آن برابر است. روی قطر A_{ii} مقدار سرشت‌نمای متایز c_i, \dots, c_k از T قرار می‌گیرند. همچنین، c_i بـتعداد d_i بار تکرار می‌شود. در اینجا d_i چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای سرشت‌نمایست؛ یعنی، بعد $d_i = (W_i)$.

(۲) به ازای هر i ، ماتریس A مجموع مستقیم n_i ماتریس مقدماتی ژورдан $J_i^{(i)}$ به ازای مقدار سرشت‌نمای c_i است. عدد n_i دقیقاً بعد فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c_i است. زیرا، n_i تعداد بلوکهای پوچ توان مقدماتی در فرم گویای $(T_i - c_i I)$ است و از این قرار برابر بعد فضای پوچ $(T_i - c_i I)$ است. بخصوص توجه داشته باشید که T قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر به ازای هر i ، $n_i = d_i$.

(۳) به ازای هر i ، اولین بلوک $J_i^{(i)}$ در ماتریس A ماتریسی است r_i ، که در آن r_i چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمال T است. این مطلب از این واقعیت تبیجه می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال عملگر پوچ توان $(T_i - c_i I)$ عبارت است از x^r_i . البته طبق معمول این مطلب تبیجه ماتریسی ساده‌ای هم دارد. اگر B ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، و اگر چندجمله‌ای سرشت‌نمای B بر روی F به طور کامل به سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه B بر روی F با ماتریسی $n \times n$ چون A به فرم ژوردان متشابه است و A ، بدون احتساب پس و پیش کردن ترتیب مقادیر سرشت‌نمایش، یکتا است. را فرم ژوردان B می‌نامیم.

همچنین، توجه کنید که اگر F -هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه ملاحظات بالا در مورد هر عملگر خطی روی فضایی با بعد متناهی بر روی F ، یا بر هر ماتریس $n \times n$ بر روی F ، هم مصدق دارد. بدین‌سان، مثلاً، هر ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی اساساً یکتا در فرم ژوردان متشابه است.

مثال ۵. فرض کنیم T عملگری خطی روی C^2 باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T یا $(x - c_1)(x - c_2)$ است، که در آن c_1 و c_2 اعداد مختلط متایزی می‌باشند، یا

($x - c$)²). در حالت نخست T قطری شدنی است و در پایه مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. در حالت دوم، چندجمله‌ای مینیمال T ممکن است $(x - c)$ باشد که در این حالت $T = cI$ ، یا $(x - c)^2$ باشد که در این حالت T در پایه مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بدین‌سان، هر ماتریس 2×2 بروی هیأت اعداد مختلط، با ماتریسی از یکی از دونوع فوق، احتمالاً با $c_2 = c$ ، متشابه است.

مثال ۶. فرض کنیم A ماتریس 3×3 مختلط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$$

باشد. چندجمله‌ای سرشت نمای A به طور بدیهی عبارت است از $(1 + 2)(x + 1)^2(x - 2)$. یا این چندجمله‌ای مینیمال است، که در این حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

متشابه است، و یا اینکه چندجمله‌ای مینیمال $(1 + 2)(x + 1)(x - 2)(x - 2)$ است که در این حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

متشابه است. حال

$$(A - 2I)(A + I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و بنابراین، A با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر $a = 0$.

مثال ۷. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای سرشت نمای A عبارت است از $(x^4 - 2)$. چون A مجموع مستقیم دوماتریس 2×2 است، واضح است که $(x^4 - 2)$ چندجمله‌ای مینیمال A است. حال اگر $a = 0$ یا $a = 1$ ، آنگاه ماتریس A به فرم ژورдан است. توجه کنید دوماتریسی را که به ازای $a = 0$ و $a = 1$ به دست می‌آوریم، چندجمله‌ایهای سرشت نمای مساوی و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند، لکن مشابه نیستند. این دو ماتریس بدین دلیل متشابه نیستند که به ای او لین ماتریس فضای جواب $(A - 2I)$ بعد ۳ دارد، در حالی که برای دومین ماتریس بعدش ۲ است.

مثال ۸. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (مثال ۱۴ در فصل ۶) مثال خوبی از فرم ژوردان به دست می‌دهند. گیریم a_0, a_1, \dots, a_{n-1} اعدادی مختلف و V فضای همه توابع n بار مشتق پذیر f روی فاصله‌ای از خط حقیقی باشد که در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = 0$$

صدق می‌کند. D را عملگر مشتق گیری می‌گیریم. در این صورت V تحت D پایاست، چرا که V فضای پوچ $p(D)$ است که

$$p = x^n + \dots + a_n x + a_0$$

فرم ژوردان عملگر مشتق گیری روی V چیست؟

فرض کنیم c_1, c_2, \dots, c_k ریشه‌های مختلط متمایز باشند:

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}.$$

V را فضای پوچ $(D - c_i I)^{r_i}$ ، یعنی، مجموعه جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(D - c_i I)^{r_i} f = 0$$

می‌گیریم. در این صورت همان گونه که در مثال ۱۵ در فصل ۶ ملاحظه کردیم، قضیه تجزیه اولیه حاکمی است که

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

فرض کنیم N_i تحدید $D - c_i I$ به V باشد. در این صورت فرم ژوردان عملگر D (روی V) بهوسیله فرمهای گویای عملگرهای پوچ توان N_1, \dots, N_k روی فضاهای

از این رو، آنچه را که باید (به ازای مقادیر مختلف c) بدانیم، فرم گویای عملگر $N = (D - cI)$ است. روی فضای V است که مشکل از جوابهای معادله $(D - cI)^r f = 0$.

است. در فرم گویای N ، چندبلوک پوچ توان مقدماتی وجود دارد؟ تعداد آنها برابر پوچی N ، یعنی بعد فضای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای r ، خواهد بود. این بعد است، زیرا هر تابعی که در معادله دیفرانسیل

$$Df = cf$$

صدق کند، مضری اسکالری از تابع نمایی $h(x) = e^{cx}$ است. بنا بر این، عملگر N (روی فضای V) برداری دوری دارد. انتخابی مناسب برای برداری دوری عبارت است از $:g = x^{r-1}h$

$$g(x) = x^{r-1}e^{cx}.$$

از اینجا داریم

$$\begin{aligned} Ng &= (r-1)x^{r-2}h \\ &\vdots \\ N^{r-1}g &= (r-1)!h \end{aligned}$$

بند قبل به ما نشان می‌دهد که فرم ژورдан D (روی فضای V)، مجموع مستقیم k ماتریس مقدماتی ژوردان، یک ماتریس به ازای هر ریشه c ، است.

تمرین

۱. فرض کنید N_1 و N_2 ماتریسهای 3×3 پوچ توانی بر روی هیأت F باشند. ثابت کنید که N_1 و N_2 متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند.

۲. از نتیجه تمرین ۱ و فرم ژوردان برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: فرض کنید A و B ماتریسهایی $n \times n$ بر روی هیأت F باشند که چندجمله‌ایهای سرشت نمای مساوی

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند. اگر هیچ یک از d_i ها بزرگتر از ۳ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۳. اگر ماتریس 5×5 مختلط A با چندجمله‌ای سرشت نمای

$$f = (x - 2)^3(x + 7)^2$$

- و چندجمله‌ای مینیمال $p = (x-2)(x+7)^2$ باشد، فرم ژورдан A را بیابید؟
۴. چه تعداد فرم ژوردان ممکن، برای یک ماتریس مختلط $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $(1-x-2x^4)(x+2)^2$ داریم؟
۵. عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای از درجه نایشتر از ۳، در پایه مرتب «طبیعی» با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرم ژوردان این ماتریس کدام است؟ (F زیرهیاتی از اعداد مختلط است).

۶. فرض کنید A ماتریس مختلط

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد. فرم ژوردان A را بیابید.

۷. اگر A ماتریسی $n \times n$ بردوی هیأت F ، با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$ باشد، رد A را بیابید.
۸. بدون احتساب تشابه، همه ماتریسهای مختلط A ای 3×3 را که برای آنها $A^3 = I$ رده بندی کنید.

۹. بدون احتساب تشابه، همه ماتریسهای مختلف $A \in n \times n$ را که برای آنها $A^n = I$ رده بندی کنید.

۱۰. فرض کنید n عددی صحیح مثبت، $n \geq 2$ ، و N ماتریسی $n \times n$ برروی هیأت F باشد که $N^n = 0$ اما $N^{n-1} \neq 0$. ثابت کنید N ریشه دوم (جذر) ندارد، یعنی اینکه هیچ ماتریس $n \times n$ ی چون A وجود ندارد که $A^2 = N$.

۱۱. دوماتریس پوچ توان 6×6 برروی هیأت F هستند. فرض کنید N_1 و N_2 چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی و پوچی مساوی داشته باشند. ثابت کنید که N_1 و N_2 متشابه‌اند. نشان دهید که این مطلب درمورد ماتریسهای پوچ توان 7×7 درست نیست.

۱۲. نتیجه تمرین ۱۱ فرم ژوردان را برای اثبات مطلب ذیل به کار ببرید: فرض کنید A و B ماتریسهایی $n \times n$ برروی هیأت F باشند که دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. همچنین فرض کنید به ازای هر زیرفضاهای جواب $(B - c_i I)$ و $(A - c_i I)$ بعد مساوی داشته باشند. اگر هیچ یک از d_i ها بزرگتر از ۶ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۱۳. اگر N یک ماتریس $k \times k$ پوچ توان مقدماتی باشد؛ یعنی، $N^{k-1} \neq 0$ اما $N^k = 0$ نشان دهید N^k با N متشابه است. حال از فرم ژوردان استفاده و ثابت کنید هر ۱ ماتریس $n \times n$ مختلف با ترانهاده خودش متشابه است.

۱۴. چه اشتباهی در اثبات زیر وجود دارد؟ اگر A یک ماتریس $n \times n$ مختلف باشد و $A^t = -A$ ، $A^t = -A$ داریم $A^t = -J$. اما چون J متشابه است، $J^t = -J$ ایجاب می‌کند که همه درایه‌های J صفر باشند. چون $0 = J = A$ با J متشابه است، می‌بینیم که $0 = A$ (مثالی از یک A غیر صفر بیاورید که $A^t = -A$).

۱۵. اگر N ماتریس 3×3 پوچ توانی برروی C باشد، ثابت کنید که $A^2 = I + N - \frac{1}{\lambda} N^2$ در $A^2 = I + N$ صدق می‌کند؛ یعنی، A یک ریشه دوم است. رشته دوچمله‌ای برای $(I + N)^{1/2}$ را به کار ببرید و فرمول مشابهی برای یک ریشه دوم $I + N$ ، که در آن N ماتریس $n \times n$ پوچ توانی برروی C است، به دست آورید.

۱۶. نتیجهٔ تمرین ۱۵ را به کار ببرید و ثابت کنید که اگر c عدد مختلط غیرصفری و N ماتریس مختلط پوچ توانی باشد، آنگاه $(cI + N)$ ریشهٔ دومی دارد. حال فرم زوردان را جهت اثبات این حکم که هر ماتریس $n \times n$ مختلط نامنفرد ریشهٔ دوم دارد به کار ببرید.

۴.۷. محاسبهٔ سازه‌های پایا

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌هایی از هیأت F باشد. می‌خواهیم روشی برای محاسبهٔ سازه‌های پایایی p_1, p_2, \dots, p_r که فرم گویای A را تعریف می‌کنند، بیابیم. از حالتی بسیار ساده که در آن A ماتریس همدم (۲.۷) چندجمله‌ای تکینی چون

$$p = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$$

است، آغاز می‌کنیم. در بخش ۱.۷ دیدیم که p ، هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چندجمله‌ای سرشت‌نمای ماتریس همدم A است. اکنون، می‌خواهیم محاسبه‌ای مستقیم به دست دهیم که نشان می‌دهد p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است. در این حالت

$$xI - A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

x برابر سطر n را به سطر $(n-1)$ اضافه می‌کنیم. این عمل، x را از مکان $(n-1, n)$ برمی‌دارد، ولی دترمینان را تغییر نمی‌دهد. سپس x برا بر سطر $(1, n)$ جدید را به سطر $(2, n)$ اضافه می‌کنیم. این عمل را متوالیاً ادامه می‌دهیم تا با این فرایند همه x ‌های روی قطر اصلی برداشته شوند. نتیجه، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^n + \dots + c_1x + c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^{n-1} + \dots + c_2x + c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & x^{n-2} + \dots + c_3x + c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 + c_{n-1}x + c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$

است که دترمینانش با دترمینان $A - xI$ برابر است. بالاترین درایه سمت راست این ماتریس چندجمله‌ای p است. ستون آخر را، با افزودن مضربهای مناسبی از دیگرستونها به آن، ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

هر یک از $(n-1)$ ستون اول را در ۱ - ضرب، و سپس $(1-n)$ تعویض از ستونهای مجاور انجام می‌دهیم تا ستون n فعلی را به ستون اول برسانیم. اثر نهایی $2n - 2$ تغییر علامت این است که دترمینان را بدون تغییر باقی می‌گذارد. از اینجا ماتریس

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (28-7)$$

حاصل می‌شود. پس از این واضح است که $p = \det(xI - A)$. می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر ماتریسی $n \times n$ چون A ، یک توالی از اعمال سطری و ستونی وجود دارد که $xI - A$ را به ماتریسی بسیار شبیه به $(28-7)$ ، که در آن سازه‌های پایای A زیر قطر اصلی ظاهر می‌شوند، تبدیل می‌کند. اجازه دهید اعمالی را که به کار خواهیم برداشت، کاملاً روشن کنیم.

در اینجا با $F[x]^{m \times n}$ ، دسته ماتریسهای $m \times n$ با درایهای بیکه چندجمله‌ایهای بر روی هیأت F هستند، سروکار خواهیم داشت. اگر M چنین ماتریسی باشد، یک عمل سطری مقداماتی روی M یکی از اعمال زیر است:

۱. ضرب یک سطر از M در اسکالر غیر صفری از F ؛

۲. جایگزین کردن سطر دم M ، با سطر m باضافه f برابر سطروی، که در آن f

چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F است و $s \neq r$ ؛
۳. تعویض دو سطر M .

عمل معکوس یک عمل سطری مقدماتی نیز عملی است سطری مقدماتی واژ همان نوع. توجه کنید که اگر در (۱) چندجمله‌ایهای غیر اسکالری هم منظور می‌شدند، دادن چنین حکمی امکان نداشت. یک ماتریس مقدماتی $m \times m$ ، یعنی ماتریسی مقدماتی از $F[x]^{m \times m}$ ، ماتریسی است که بتواند از ماتریس همانی $m \times m$ به وسیله‌ی تنها یک عمل سطری مقدماتی حاصل بشود. واضح است که هر عمل سطری مقدماتی روی M می‌تواند از طریق ضرب M از چپ در ماتریس مقدماتی $m \times m$ مناسبی نتیجه‌بود؛ در واقع، اگر آن عمل باشد، آنگاه

$$e(M) = e(I)M.$$

گیریم M و N دوماتریس در $F[x]^{m \times n}$ باشند. گوییم N هم ارز سطری M است، هرگاه N بتواند توسط یک توالی متناهی از اعمال سطری مقدماتی از M حاصل شود:

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k = N.$$

بدیهی است که N هم ارز سطری M است اگر و تنها اگر M هم ارز سطری N باشد، بنابراین می‌توانیم اصطلاح « M و N هم ارز سطری هستند» را به کار گیریم. اگر N هم ارز سطری M باشد، آنگاه

$$N = PM$$

که در آن ماتریس P ای $m \times m$ ، حاصل ضریبی از ماتریسهای مقدماتی است:

$$P = E_1 \cdots E_k.$$

بخصوص، P ماتریسی است معکوس پذیر که معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}.$$

مسلمان، معکوس E از معکوس عمل سطری مقدماتی مربوط ناشی می‌شود. همه این مطالب، درست نظری همان مطلب در مرور ماتریسهای با ذایهای متعلق به F هستند. این مطالب با نتایج مقدماتی فصل ۱ مشابهت دارد. از این‌رو، مسئله بعدی که خود را می‌نمایاند، معرفی یک فرم تحويل شده سطری پلکانی برای ماتریسهای روی چندجمله‌ایهای است. در اینجا، به معنی جدید برمی‌خوردیم. چگونه چنین ماتریسی را تحويل سطری کنیم؟ اولین مرحله این است که درایه‌های ماتریس چندجمله‌ای باشند، (از و مآ) نمی‌توانیم این عمل را انجام دهیم. هر چند، فرم تحويل شده سطری کاملاً مناسبی برای ماتریسی عمومی از $F[x]^{m \times n}$ وجود ندارد، ولی بهطوری که در قضیه بعد خواهیم دید در حالات معینی می‌توان براین مشکل فایق آمد. هرگاه اعمال ستونی را هم معرفی و نوع

هم ارزی را که از پذیرش استفاده از هر دو نوع عمل نتیجه می‌شود مطالعه کنیم، می‌توانیم فرم استاندۀ بسیار مفیدی برای هر ماتریس به دست آوریم. ابزار اساسی لم زیر است.

لم. فرض کنیم M ماتریسی از $m \times n$ باشد که اولین ستونش درایه غیر صفری داشته، و p بزرگترین مقسوم علیه مشترک درایه‌های واقع در ستون اول M باشد. در این صورت M با ماتریسی چون N که

$$\begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

با عنوان اولین ستونش دارد، هم‌اوز سطري است.

اثبات. در اینجا به اثبات چیزی بیش از آنچه که بیان کردیم، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که الگوریتمی برای یافتن N ، یعنی دستور العملی که بتواند برای محاسبه N در تعدادی متناهی مرحله مورد استفاده یک ماشین قرار بگیرد، وجود دارد. ابتدا به نمادها بینیاز مندیم.

گیریم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های واقع در $F[x]$ باشد که اولین ستون غیر-صفری چون

$$M_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

دارد. تعریف می‌کنیم:

$$l(M_1) = \min_{f_i \neq 0} \deg f_i$$

(۲۹-۷)

$$p(M_1) = (f_1, \dots, f_m)$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (f_1, \dots, f_m) را نمایه‌ای می‌گیریم که $\deg f_j = l(M_1)$. جهت تصریح، فرض می‌کنیم f_j کوچکترین نمایه‌ای چون i باشد که برای آن $\deg f_i = l(M_1)$. می‌کوشیم تا f_i را بر f_j تقسیم کنیم:

$$\cdot \deg r_i < \deg f_j \quad r_i = 0, \quad f_i = f_j g_i + r_i \quad (30-7)$$

به ازای هر j غیر از j ، به جای سطره ماتریس M ، سطره منهای g_i برابر سطره r_i را قرار

می دهیم. سطرز را در عکس ضریب مقدم r_j ضرب و سپس سطرهای r_j و 1 را تعویض می کنیم. نتیجه همه این اعمال ماتریسی چون M' است که اولین ستونش

$$M'_1 = \begin{bmatrix} f_j \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{j-1} \\ r_1 \\ r_{j+1} \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (31-7)$$

است. در اینجا f_j چندجمله‌ای تکین حاصل از نرمال کردن r_j ، برای داشتن 1 به عنوان ضریب مقدم، است. تا اینجا، روشی خوش تعریف برای وابسته کردن ماتریسی چون M' با خواص زیر به هر ماتریس M عرضه کردیم:

(الف) M' هم ارز سطرهای M است.

(ب) $p(M'_1) = p(M_1)$.

(پ) یا $I(M'_1) < I(M_1)$ یا

$$M'_1 = \begin{bmatrix} p(M_1) \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}.$$

نشان دادن (ب) و (پ) اذ روی (۳۰-۷) و (۳۱-۷) آسان است. خاصیت (پ) درست راه دیگر بیان این مطلب است که یا زیست وجود دارد که $\deg r_i \neq \deg f_i$ و $\deg r_i < \deg f_i$ یا اینکه به ازای همه $r_i = 0$ و (با براین) f_i بزرگترین مقسوم-علیه مشترک f_m, f_{m-1}, \dots, f_1 است.

اکنون اثبات لم بسیار ساده می نماید. با ماتریس M شروع می کنیم و روش فوق جهت تحصیل M' را به کار می بندیم. خاصیت (پ) حاکی است که یا M' به جای ماتریس

N در لم به کار خواهد آمد یا اینکه $I(M'_1) < I(M'_1)$. در حالت دوم، روش را بر' $M' = M^{(2)}$ به کار می‌بندیم تا ماتریس' $M' = M^{(2)}$ را به دست آوریم. اگر N مناسی نباشد، $M' = M^{(3)}$ را تشکیل می‌دهیم، و به همین نحو ادامه می‌دهیم. نکته در اینجاست که نامساویهای اکید

$$I(M'_1) > I(M'_2) > I(M'_3) > \dots$$

نمی‌توانند همچنان ادامه داشته باشند. پس از حد اکثر (M'_1) بار تکرار این روش، باید به ماتریسی چون (k) که دارای خواص مبالغه است، دست یابیم. \square

قضیه ۶. فرض کنیم ماتریس $SP \times m$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ داده شده باشد. احکام زیر هم ارزند.

(۱) P معکوس پذیر است.

(۲) دترمینان P چندجمله‌ای اسکالری غیر صفری است.

(۳) P هم ارز سطرنی ماتریس همانی $m \times m$ است.

(۴) P حاصل ضربی اذ ماتریسهای مقدماتی است.

اثبات. واضح است که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود، چرا که تابع دترمینان دارای خاصیت ضربی است و تنها چندجمله‌ایهای معکوس پذیر در $F[x]$ چندجمله‌ایهای اسکالری غیر صفر هستند. حقیقت امر این است که در فصل ۵، برای اینکه نشان دهیم (۱) و (۲) هم ارزند، از الحقیقی کلاسیک استفاده کردیم. لذا بر همان اخیر، اثبات دیگری است از این مطاب که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. ما «چرخ فلك»

$$\begin{array}{c} (1) \rightarrow (2) \\ \downarrow \\ (4) \leftarrow (3) \end{array}$$

را تکمیل خواهیم کرد. تنها حکمی که بدیهی نیست، این است که (۳) از (۲) نتیجه می‌شود. (۲) را فرض می‌کنیم و او لیسن ستون P را در نظر می‌گیریم. این ستون شامل چندجمله‌ایهای معین p_1, p_2, \dots, p_m است و

$$1 = \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک} (p_1, \dots, p_m)$$

چرا که هر مقسوم علیه مشترک p_1, \dots, p_m باشد (اسکالر) $\det P$ را عاد کند. لم قبل را برای به دست آوردن ماتریسی چون

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 0 & & & \\ \vdots & & & B \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (32-7)$$

که هم ارز سطری P است بر P به کار می بندیم. هر عمل سطری مقدماتی، دترمینان ماتریس مفروضی را (حداکثر) در حد سازه اسکالری غیر صفری تغییر می دهد. پس، $\det Q$ یک چندجمله‌ای اسکالری غیر صفر است. بدینهی است که ماتریس B ای $(m-1) \times (m-1)$ در $(32-7)$ همان دترمینان Q را دارد. بنا بر این، می توانیم لم اخیر را در مورد B به کار ببریم. اگر این روش را تا m مرحله ادامه دهیم، ماتریسی بالامثلی چون

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 0 & 1 & \cdots & b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

را که هم ارز سطری P است، به دست می آوریم. معلوم است که R هم ارز سطری ماتریس $m \times m$ همانی است. \square

نتیجه. گیریم M و N دو ماتریس $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت N هم ارز سطری M است اگر و تنها اگر

$$N = PM$$

که در آن P ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری است با درایه‌های متعلق به $[x]$.

اکنون اعمال ستونی مقدماتی و هم ارزی ستونی را به صورتی شبیه به اعمال سطری و هم ارزی سطری تعریف می کنیم. نیازی به مفهومی جدید از ماتریس مقدماتی نداریم، زیرا رده ماتریسها بی که بتوانند به وسیله انجام یک عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس همانی به دست آیند، عیناً با رده‌ای که با استفاده از تنها یک عمل سطری مقدماتی حاصل می شود مساوی است.

تعریف. ماتریس N با ماتریس M هم ارز است، هرگاه بتوانیم از M به وسیله دنباله‌ای از اعمال

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_k = N$$

که هریک عملی سطری مقدماتی یا عملی ستونی مقدماتی است، به N برسیم.

قضیه ۷. فرض کنیم M و N دو ماتریس $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت N با M هم ارز است اگر و تنها اگر

$$N = PMQ$$

که در آن P ماتریسی معکوس پذیر در $F[x]^{n \times n}$ و $Q = F[x]^{m \times m}$ هاتریسی معکوس پذیر در $F[x]^{n \times n}$ است.

قضیه ۸. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد و p_1, p_2, \dots, p_r سازه‌های پایای A باشند، ماتریس $xI - A$ با ماتریس قطری $n \times n$ با درایه‌های قطری $p_1, p_2, \dots, p_r, 1, 1, \dots, 1$ هم‌ارز است. اثبات. ماتریس P معکوس پذیری چون P با درایه‌های متعلق به F وجود دارد که PAP^{-1} به فرم گویا، یعنی به صورت بلوکی

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_r \end{bmatrix}$$

است که در آن A_i ماتریس همدم چندجمله‌ای p_i است. بنابر قضیه ۷ ماتریس

$$P(xI - A)P^{-1} = xI - PAP^{-1} \quad (۳۴-۷)$$

با $xI - A$ همارز است. حال

$$xI - PAP^{-1} = \begin{bmatrix} xI - A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & xI - A_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & xI - A_r \end{bmatrix} \quad (۳۴-۷)$$

که در آن I های گوناگونی که به کار رفته است، ماتریسها بی همانی با اندازه‌های مناسب هستند. در آغاز این بخش نشان دادیم که $xI - A$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} p_i & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

هم‌ارز است. در این صورت از (۳۴-۷) و (۳۳-۷) واضح است که $xI - A$ همارز

ماتریسی قطری است که قطر اصلیش شامل چندجمله‌ایهای p و $(n-r)$ تا ۱ است. با چند تعویض متواتی سطراها و ستونها می‌توانیم این درایه‌های قطری را بهتر تبیی دلخواه، مثلًاً $\square, p_1, \dots, p_r, 1, 0, \dots, 0$ مرتب کنیم.

قضیه ۸ راه مؤثری برای محاسبه مقسوم علیه‌های مقدماتی p_1, \dots, p_r ارائه نمی‌کند، چرا که اثبات ما به قضیه تجزیه دوری وابسته است. اکنون آلگوریتمی صریح برای تحویل یک ماتریس چندجمله‌ای به فرم قطری ارائه می‌کنیم. قضیه ۸ می‌رساند که می‌توانیم ترتیبی دهیم که عناصر متواتی روی قطر اصلی یکدیگر را عاد هم بکنند.

تعریف. گیریم N ماتریسی در $F[x]^{m \times n}$ باشد. گوییم N به فرم نرمال (اسمیت^۱) است، هرگاه

(الف) هر دایه بیرون از قطر اصلی N برابر ۰ باشد؛

(ب) دری قطر اصلی N (بترتیب) چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_k که f_k چندجمله‌ای f_{k+1}, \dots, f_l (اعداد می‌کند، $1 \leq k \leq l$) ظاهر شوند.

در این تعریف، عدد l عبارت است از $l = \min(m, n)$. درایه‌ای قطر اصلی عبارتند از $N_{kk} = f_k, \dots, f_l, 0, \dots, 0$.

قضیه ۹. فرض کنیم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشد. داین صورت M با ماتریسی چون N که به فرم نرمال است هم‌ازد است. اثبات. اگر $M = 0$ چیزی برای اثبات نداریم. اگر $M \neq 0$ ، آلگوریتمی برای یافتن ماتریسی چون M' که با M همان‌ارز و به صورت

$$M' = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (35-7)$$

باشد، ارائه خواهیم کرد. در اینجا R ماتریسی است $(n-1) \times (m-1)$ و f_1 همه درایه‌های R را عاد می‌کند. در این صورت کار تمام است، چرا که می‌توان همین روش را بر R به کار بست و M' را به دست آورد، وغیره.

گیریم (M) امینیم درجات درایه‌های غیر صفر M باشد. اولین ستونی را که شامل درایه‌ای با درجه l است می‌باییم و این ستون را با ستون ۱ تعویض می‌کنیم. ماتریس

حاصل را $M^{(o)}$ نامیم. حال برای یافتن ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} g & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & & & \\ \vdots & & S & \\ \circ & & & \end{bmatrix} \quad (36-7)$$

که با $M^{(o)}$ هم ارز باشد، روشی را شرح می‌دهیم. با به کار بستن روش LM قبل از قضیه ع بر ماتریس $M^{(o)}$ ، روشی که ما آن را PL_6 خواهیم نامید^۱، کار خود را آغاز می‌کنیم.
حاصل کار ماتریسی چون

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} p & a & \cdots & b \\ \circ & c & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & e & \cdots & f \end{bmatrix} \quad (37-7)$$

است. اگر درایه‌های a, \dots, b همگی \circ باشند، عالی است. و گرنه، تغییر PL_6 را که می‌تواند PL_6 نامیله شود، درمورد اولین سطر به کار می‌بریم. نتیجه ماتریسی چون

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} g & \circ & \cdots & \circ \\ a' & c' & \cdots & e' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b' & d' & \cdots & f' \end{bmatrix} \quad (38-7)$$

است که در آن g بزرگترین مقسوم علیه مشترک p, a, \dots, b است. در استخراج $M^{(2)}$ این امکان هست که شکل خوب ستون ۱ بهم خورده باشد. در این صورت، یک بار دیگر PL_6 را می‌توان به کار بست. نکته در این جاست: در حداکثر $I(M)$ مرحله

$$M^{(o)} \xrightarrow{PL_6} M^{(1)} \xrightarrow{PL_6} M^{(2)} \xrightarrow{PL_6} \cdots \rightarrow M^{(t)}$$

باشد به ماتریسی چون $M^{(t)}$ که به صورت (۳۶-۷) است، دست یابیم، چرا که بین هر دو مرحله

۱. P. Procedure معنی روش و L. Lemma معنی LM است...م.

متواالی داریم $(M^{(k)}) \subset I(M^{(k+1)})$. روندی را که هم اکنون تعریف کردیم، P_{36-7} - P_{36-8} می‌نامیم:

$$M^{(0)} \xrightarrow{P_{36-7}} M^{(t)}.$$

در (۳۶-۷)، چندجمله‌ای g ممکن است همه درایه‌های Δ را عاد کند. در غیر این صورت، اولین ستونی را که درایه‌ای غیر قابل تقسیم برع داشته باشد می‌باییم و آن را بهستون ۱ اضافه می‌کنیم. ستون اول جدید، هم g را شامل است و هم درایه $gh+r$ را که در آن $\deg r = \deg g$ و $r \neq 0$ دارد. اکنون روند P_{36-7} را که به کار بندیم نتیجه ماتریس دیگری به صورت (۳۶-۷) خواهد بود که در آن درجه g مر بوط کاهش یافته است. حال باید آشکار باشد که در تعدادی متناهی مرحله، (۳۵-۷) را به دست خواهیم آورد؛ یعنی، به ماتریسی به صورت (۳۶-۷) خواهیم رسید، که در آن درجه g دیگر تقلیل پذیر نیست. \square

می‌خواهیم نشان دهیم که فرم نرمال وابسته به هر ماتریس M ، یکتاست. به دو مطلب برخورده‌ایم که راهنمایی در مورد چگونگی تعیین یکتاگونه چندجمله‌ای‌های f_1, f_2, \dots, f_r در قضیه ۹ توسط M به ما عرضه می‌کنند. اول آنکه، اعمال سطرنی و ستونی مقدماتی، دترمینان ماتریسی مربعی را بیش از سازه اسکالری غیر صفری تغییر نمی‌دهند. دوم، اعمال سطرنی و ستونی مقدماتی بزرگترین مقسوم علیه مشترک درایه‌های هیچ ماتریسی را تغییر نمی‌دهند

تعریف. فرض کنیم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشد. اگر $1 \leq k \leq \min(m, n)$ باشد، $\delta_k(M)$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دترمینانهای همه زیرماتریسهای $k \times k$ ای M تعریف می‌کنیم.

یادآور می‌شویم که یک زیرماتریس $k \times k$ ای M ماتریسی است که از حذف سطر و ستون $n-k$ پدید می‌آید. به بیان دیگر، تابیهای معین

$$I = (i_1, \dots, i_k) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$$

$$J = (j_1, \dots, j_k) \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$$

را انتخاب می‌کنیم و ماتریس مشکله از این سطرهای و این ستونهای M را در نظر می‌گیریم. دترمینانهای

$$D_{I,J}(M) = \det \begin{bmatrix} M_{i_1 j_1} & \cdots & M_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i_k j_1} & \cdots & M_{i_k j_k} \end{bmatrix} \quad (39-7)$$

مورد توجه ما هستند. وقتی که I و J روی تابیهای ممکن تغییر کنند، بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ای‌های (M) $D_{I,J}(M)$ است. $\delta_k(M)$

قضیه ۱۰.۱۰ اگر $M \times N$ ماتریس‌های $m \times n$ هم اد و با درایه‌های متعلق به $[x]$ باشند، آنگاه

$$\delta_k(M) = \delta_k(N), \quad 1 \leq k \leq \min(m, n). \quad (40-7)$$

اثبات. کافی است که نشان دهیم هیچ عمل سطحی مقدماتی، چون e ، δ_k را تغییر نمی‌دهد. چون معکوس e نیز عملی سطحی مقدماتی است، کافی است نشان دهیم که: اگر f چندجمله‌ای چون f ، به ازای همه k تاییهای I و J ، $D_{I,J}(M) = D_{I,J}(e(M))$ را عاد کند، آنگاه f چندجمله‌ایهای $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عاد می‌کند. چون عملی سطحی مورد توجه است، سطرهای M را $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ می‌نامیم و از نماد

$$D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = D_{I,J}(M)$$

نیز استفاده می‌کنیم. با مفروض بودن I و J چه رابطه‌ای بین $D_{I,J}(M)$ و $D_{I,J}(e(M))$ برقرار است؟ سه نوع عمل e را در نظر می‌گیریم:

- (الف) ضرب سطر r در اسکالر غیر صفری چون c ؛
- (ب) جایگزین کردن سطر r با سطر s باضافة g برابر s ؛ $r \neq s$ ؛
- (پ) تعویض سطرهای r و s ؛ $r \neq s$.

موقتاً عملهای نوع (پ) را فراموش و حواس خود را روی انواع (الف) و (ب) که تنها سطر r را تغییر می‌دهند، متمرکز می‌کنیم. اگر r هیچ یک از نمایه‌های i_1, \dots, i_k نباشد، آنگاه

$$D_{I,J}(e(M)) = D_{I,J}(M).$$

اگر r در بین نمایه‌های i_1, \dots, i_k باشد، آنگاه برای دو حالت فوق داریم

$$\begin{aligned} D_{I,J}(e(M)) &= D_J(\alpha_{i_1}, \dots, c\alpha_r, \dots, \alpha_{i_k}) \\ &= cD_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{i_k}) \\ &= cD_{I,J}(M) \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} D_{I,J}(e(M)) &= D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_r + g\alpha_s, \dots, \alpha_{i_k}) \\ &= D_{I,J}(M) + gD_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{i_k}) \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

در مورد عملهای از نوع (الف) واضح است هر f که $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عاد می‌کند. در مورد حالت عملی از نوع (ب) توجه کنید که

$$D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{i_k}) = 0 \quad s = i_j$$

و هرگاه به ازای هر j ، $s \neq i_j$ ،

I' در معادله آخر، تابی $i_k, \dots, s, \dots, i_1$ است که به ترتیب صعودی مرتب شده است. اکنون باید آشکار باشد که اگر f هر $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، آنگاه f هر $D_{I,J}(e)(M)$ را نیز عاد می‌کند.

عمل نوع (پ) را می‌توان، قطع نظر از جزئیات، با استدلال مشابهی و یا با استفاده از این واقعیت که چنین عملی می‌تواند حاصل دنباله‌ای از عملهای از نوع (الف) و (ب) باشد، مورد بررسی قرارداد. \square

نتیجه. هر ماتریس M در $F[x]^{m \times n}$ دقیقاً با یک ماتریس N که در فرم نرمال باشد هم‌ادراست. چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_m که در $F[x]^{n \times m}$ قطر اصلی N قرار می‌گیرند، عبارتند از

$$f_k = \frac{\delta_k(M)}{\delta_{k-1}(M)}, \quad 1 \leq k \leq \min(m, n)$$

که در آن، برای سهولت‌کار، $\delta_0(M) = 1$ تعریف می‌شود.
اینها اگر N در فرم نرمال و با درایه‌های قطری f_1, \dots, f_m باشد، بسیار ساده دیده می‌شود که

$$\delta_k(N) = f_1 f_2 \cdots f_k. \quad \square$$

بدیهی است که ماتریس N در نتیجه اخیر را فرم نرمال M بنامیم. چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_m غالباً سازه‌های پایای M نامیده می‌شوند.
فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F و p_1, \dots, p_m سازه‌های پایای A باشند. اکنون می‌بینیم که درایه‌های قطری فرم نرمال ماتریس $xI - A$ عبارتند از $p_1, \dots, p_m, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0$. نتیجه اخیر می‌فهماند که $(xI - A)^{-1} = p_m, \dots, p_1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0$. بر حسب زیرماتریس‌های مینیمال p_1 حاصل تقسیم چندجمله‌ای سرشتمانی A ، بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دترمینانهای همه زیرماتریس‌های $(1 \times (n-1))$ از $xI - A$ است، و الی آخر.

تمرین

۱. مطلب ذیل درست است یا غلط؟ هر ماتریس در $F[x]^{m \times n}$ هم ارز سطحی ماتریسی از بالا مثلى است.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی و A ماتریس T در پایه مرتباً باشد. در این صورت T برداری دوری دارد اگر و تنها اگر دترمینانهای زیرماتریس‌های $(1 \times (n-1))$ از $xI - A$ نسبت بهم اول باشند.

۳. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F و f_1, \dots, f_n درایه‌های

قطری فرم نرمال $A - xI$ باشند. برای کدام ماتریس A ، خاصیت $f \neq 1$ برقرار است.

۴. عملگری خطی چون T با چندجمله‌ای مینیمال $(x - 1)^2$ و چندجمله‌ای سرشت‌نمای $(x^3 - x)^4$ بسازید. تجزیه اولیه فضای برداری تحت T را توصیف کنید و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه را بیاورد. پایه‌ای بیاورد که در آن ماتریس T در فرم ژورдан باشد. همچنین تجزیه به مجموع مستقیم صریحی از فضای بهزیر فضاهای T -دوری همانند قضیه ۳ را پیدا کنید و سازه‌های پایا را به دست آورید.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی R^8 باشد که در پایه استاندۀ با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

(الف) چندجمله‌ای سرشت‌نمای و سازه‌های پایا را بیاورد.

(ب) تجزیه اولیه R^8 تحت T و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه را بیاورد. تجزیه دوری هر مؤلفه اولیه را، آن‌طور که در قضیه ۳ آمده است، پیدا کنید.

(پ) فرم ژوردان A را بیاورد.

(ت) یک تجزیه به مجموع مستقیم از R^8 بهزیر فضاهای T -دوری، همانند قضیه ۳ پیدا کنید. (داهنیایی: یک راه برای انجام این کار استفاده از نتایج در (ب) و نیز استفاده از تعمیمی مناسب از ایده‌های بحث شده در مثال ۴ است).

۵.۷ خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

در دو فصل اخیر با تک عملگری خطی چون T روی فضای برداری بعدمتأهی V سروکار داشتیم. بر نامۀ کار، تجزیه T به مجموعی مستقیم از عملگرهایی خطی با طبیعتی ابتدائی، بهمنظور کسب اطلاعاتی مفصل در این مورد که T روی فضای V چگونه «عمل می‌کند»،

بوده است. حال وضع فعلی را به طور خلاصه مرور می‌کنیم.

مطالعه T را با کمک مقادیر سرشت نما و بردارهای سرشت نما آغاز کردیم. عملگرهای قطری شدنی، یعنی عملگرها بی کش می‌توانند به طور کامل بر حسب مقادیر و بردارهای سرشت نما توصیف شوند، را معرفی کردیم. سپس مشاهده نمودیم که ممکن است T حتی یک بردار سرشت نما هم نداشته باشد. حتی در مورد هیأت اسکالاری بسته جبری نیز، که هر عملگر خطی به تحقیق دست کم یک بردار سرشت نما دارد، ملاحظه کردیم که بردارهای سرشت نما T لزوماً فضای را پدید نمی‌آورند.

سپس قضیه تجزیه دوری را اثبات کردیم که، بدون هیچ گونه فرضی در مورد هیأت اسکالاری، هر عملگر خطی را به صورت مجموع مستقیم عملگرهایی با یک بردار دوری، بیان می‌کرد. اگر U عملگری خطی با برداری دوری باشد، آنگاه پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با خاصیت

$$U\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$U\alpha_n = -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \dots - c_{n-1}\alpha_n$$

وجود دارد. از این روکش U روی این پایه، انتقال هر α_j به بردار بعدی α_{j+1} است، بجز اینکه $U\alpha_n$ ترکیب خطی مشخصی از بردارهای پایه است. چون عملگر خطی عمومی T مجموع مستقیم تعدادی متناهی از این گونه عملگرهای U است، توصیفی صریح و نسبتاً ابتدایی از کنش T به دست آوردیم.

آنگاه قضیه تجزیه دوری را روی عملگرهای پوچ توان به کار بستیم. در حالت هیأت اسکالاری بسته جبری، این موضع را با قضیه تجزیه اولیه تلفیق کردیم و فرم ژوردان را به دست آوردیم. فرم ژورдан، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای فضای V را به دست می‌دهد که به ازای هر زیرا، $\alpha_j T \alpha_i = c\alpha_j + \alpha_{j+1}$ است یا $T\alpha_j = c\alpha_j + \alpha_{j+1}$. چنین پایه‌ای به طور قطع کنش T را به طریقی صریح و ابتدایی توصیف می‌کند.

اهمیت فرم گویا (یا فرم ژوردان) از این واقعیت ناشی می‌شود که همواره وجود دارد و نه از اینکه در حالاتی خاص امکان محاسبه آن هست. بدینهی است که اگر عملگر خطی خاصی چون T مفروض باشد، و بتوان فرم ژوردان یا دوریش را محاسبه کرد، حتماً باید محاسبه را انجام داد؛ زیرا، با در دست داشتن چنین فرمی، می‌توان اطلاعات زیادی در مورد T جمع آوری کرد. در محاسبه این فرمهای استاندۀ دونوع اشکال بروزی کند. یک اشکال، مسلماً طولانی بودن محاسبات است. اشکال دیگر این است که حتی اگر کسی وقت و حوصله لازم را داشته باشد، ممکن است روشی برای انجام محاسبات وجود نداشته باشد. مثلاً، در تلاش برای یافتن فرم ژوردان ماتریسی مختلط اشکال دوم رخ می‌دهد. اصلاً روش خوش تعریفی برای تجزیه چندجمله‌ای سرشت نما به سازه‌ها وجود ندارد و بدینسان شخص در آغاز از کار بازمی‌ماند. فرم گویا از این اشکال حدده نمی‌بیند. همان‌طور که در بخش ۴.۷ نشان دادیم، روش تعریف برای یافتن فرم گویای هر ماتریس

$\times n$ مفروضی، وجود دارد؛ البته، معمولاً^۱ این گونه محاسبات بسیار طولانی هستند. در خلاصه قضایای این دو فصل آخر، تاکنون به یکی از قضایایی که اثبات کردیم اشاره‌ای نشده است. این قضیه حاکمی از این است که اگر T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه T به طور یکتا به صورت مجموع عملگری قطری شدنی و عملگری پوچ توان، که با یکدیگر جا بجا می‌شوند، قابل بیان است. این نتیجه با کمک قضیه تجزیه اولیه و اطلاعات معینی در مورد عملگرهای قطری شدنی، اثبات شد. قضیه اخیر به عمق قضیه تجزیه دوری ویا وجود فرم ڈورдан نیست، ولی یقیناً دارای کاربردهای مهم و مفیدی در بخشهای از ریاضیات هست. در خاتمه این فصل، بدون اینکه فرض کنیم هیأت اسکالری بسته جبری است، قضیه مشابهی را اثبات خواهیم کرد. با تعریف عملگرهایی که نقش عملگرهای قطری شدنی را بازی می‌کنند کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F ، و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T نیم‌ساده است هرگاه هر زیرفضای T -پایای دارای زیرفضای T -پایای مکملی باشد.

چیزی را که در شرک اثبات آن هستیم این است که با محدودیتهاي روی هیأت F ، هر عملگر خطی T به طور یکتا به صورت $T = S + N$ که در آن S نیم‌ساده است، N بوج توان است، و $SN = NS$ قابل بیان است. ابتدا، عملگرهای نیم‌ساده را با چند جمله‌ایهای مینیما لشان مشخص می‌کنیم. این مشخص‌سازی نشان خواهد داد که وقتی T بسته جبری باشد، عملگری مفروض نیم‌ساده است اگر و تنها اگر آن عملگر قطری شدنی باشد.

۱۰. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V تجزیه اولیه $T = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ باشد. به بیان دیگر، اگر p چندجمله‌ای مینیمال $p(T) = p_1 \dots p_k$ تجزیه p به سازه‌های اول باشد، آنگاه W_i فضای پوچ $p_i(T)$ است. بعلاوه، فرض می‌کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایای است. در این صورت

$$W = (W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k).$$

اثبات. برای اثبات، لازم است تبیجه‌ای از اثبات قضیه تجزیه اولیه مربوط به بخش ۸.۶ را یادآوری کنیم. اگر E_1, E_2, \dots, E_k تصویرهای وابسته به تجزیه

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

باشد، آنگاه هر E_j یک چندجمله‌ای در T است. یعنی، چندجمله‌ایها می‌چون h_1, h_2, \dots, h_k وجود دارند که $E_j = h_j(T)$.

حال زیرفضای W را که تحت T پایاست در نظر می‌گیریم. اگر α برداری دلخواه از W باشد، آنگاه $\alpha = \alpha_k + \dots + \alpha_1$ در T قراردارد. اما

$\alpha = E_j \alpha = h_j(T) \alpha$ و چون W تحت T پایاست، هر α_j نیز در W قرار دارد. پس، $W \cap W$ در α به صورت $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ است و α_j در اشتراک $W \cap W$ می باشد. این عبارت یکناسب، زیرا $W_1 \oplus \dots \oplus W_k = W$. بنابراین

$$W = (W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k). \square$$

لم. T را عملگری خطی دوی V می گیریم و فرض می کنیم چندجمله‌ای مینیمال بردوی هیأت اسکالری F تحویل ناپذیر باشد. در این صورت T نیمساده است.

اثبات. فرض کنیم زیرفضای W از V تحت T پایا باشد. باید ثابت کنیم W زیرفضای T -پایای مکملی دارد. بنا برنتیجه‌ای از قضیه ۳، کافی است ثابت کنیم که اگر f یک چندجمله‌ای و β برداری از V باشد که $f(T)\beta$ در W قرار بگیرد، آنگاه برداری چون α در W وجود دارد که $f(T)\beta = f(T)\alpha$. لذا فرض می کنیم β در V و f یک چندجمله‌ای باشد که $f(T)\beta$ در W قرار دارد. اگر $f(T)\beta = 0$ ، فرض می کنیم $\alpha = f(T)\beta = 0$ و در این صورت α برداری در W است و $f(T)\beta = f(T)\alpha$. اگر $f(T)\beta \neq 0$ ، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای مینیمال p از عملگر T تقسیم پذیر نیست. چون p اول است، این بدان معنی است که f و p نسبت بهم اول هستند و چندجمله‌ایها بیانی چون g و h وجود دارند که $1 = p(T)g(T) + ph(T)$. چون $0 = p(T)g(T) + ph(T)$ داشت $g(T)h(T) = I$. از این مطلب نتیجه می شود که بردار β خود باید در زیرفضای W باشد؛ زیرا

$$\begin{aligned} \beta &= g(T)f(T)\beta \\ &= g(T)(f(T)\beta) \end{aligned}$$

در حالی که $f(T)\beta$ در W قرار دارد و W تحت T پایاست. حال می گیریم $\alpha = \beta$ \square .

قضیه ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی دوی فضای برداری بعدمتناهی V باشد. یک شرط لازم و کافی برای اینکه T نیمساده باشد این است که چندجمله‌ای مینیمال p از T به صورت $p_k \dots p_1$ باشد و p_k نیز چندجمله‌ایها بیانی تحویل ناپذیر متمایزی بردوی هیأت اسکالری F باشد.

اثبات. فرض کنیم T نیمساده باشد. نشان خواهیم داد که در تجزیه چندجمله‌ای مینیمال p به سازه‌های اول، هیچ چندجمله‌ای تحویل ناپذیری تکرار نمی شود. خلاف این را فرض کنیم. آنگاه یک چندجمله‌ای تکین غیراسکالاری چون g وجود دارد که g چندجمله‌ای p را عاد می کند. گیریم W فضای پوچ عملگر $(g(T))$ باشد. در این صورت W تحت T پایاست. حال چندجمله‌ای مانند h هست که $h = g^*h$. چون g یک چندجمله‌ای اسکالاری نیست، عملگر $g(T)h(T)$ عملگر صفر نیست و برداری چون β در V وجود دارد که $0 = g(T)h(T)\beta \neq 0$ (یعنی $gh\beta \neq 0$). حال β در زیرفضای W قرار دارد، چون $g(T)h(T)\beta = gh\beta = g^*h\beta = p\beta = 0$. اما هیچ برداری چون α در W وجود ندارد که $gh\beta = g\alpha$ ؛ زیرا، اگر α در W باشد

$$(gh)\alpha = (hg)\alpha = h(g\alpha) = h(\circ) = \circ.$$

پس، W نمی‌تواند زیرفضای T -پایای مکملی داشته باشد؛ و این خود متناقض این فرض است که T نیمساده است.

حال فرض کنیم تجزیه p به سازه‌های اول به صورت $p_k = p_1 \oplus \dots \oplus p_n$ باشد و p_k هم چندجمله‌ایهای تکین (غیر اسکالری) تحويل ناپذیر متمازی باشند. گیریم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. ثابت خواهیم کرد که W زیرفضای T -پایای مکملی دارد. $V = W \oplus \dots \oplus W_k$ را تجزیه اولیه برای T می‌گیریم؛ یعنی، V را فضای پوچ $p_j(T)$ فرض می‌کنیم. T را عملگر خطی القا شده توسط T روی V می‌گیریم. در این صورت چندجمله‌ای مینیمال T_j چندجمله‌ای اولی چون V_j است. حال $W \cap V_j$ زیرفضایی از V_j است که تحت T_j (یا تحت T) پایاست. بنابر آخرین لم زیرفضایی چون V_j از W_j وجود دارد که $V_j = (W \cap V_j) \oplus W_j$ و V_j تحت T_j (و از این‌رو تحت T) پایاست. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} V &= W_1 \oplus \dots \oplus W_k \\ &= (W \cap W_1) \oplus V_1 \oplus \dots \oplus (W \cap W_k) \oplus V_k \\ &= (W \cap W_1) + \dots + (W \cap W_k) \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k. \end{aligned}$$

بنابر اولین لام فوق، $(W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k) = W$ و از اینجا، اگر $V = W \oplus W'$ ، $W' = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ آنگاه، T نیمساده است اگر و تنها اگر T قطری شدنی باشد. \square

نتیجه. اگر T عملگر خطی روی فضایی بوداری با بعد متناهی بروی هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه T نیمساده است اگر و تنها اگر T قطری شدنی باشد. اثبات. اگر هیأت اسکالری F بسته جبری باشد، چندجمله‌ایهای اول تکین بروی همان چندجمله‌ایهای $x - c$ هستند. در این حالت، T نیمساده است، اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T برای $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ باشد، که در آن c_1, \dots, c_k عناصر متمازی از F هستند. این دقیقاً همان معیاری است که در فصل ۶ جهت قطری شدن T به دست آوردم. \square

باید خاطر نشان کنیم که T نیمساده است اگر یک چندجمله‌ای چون f ، که حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای اول متمازی است، وجود داشته باشد به طوری که $f(T) = 0$. تفاوت این حکم با این شرط که چندجمله‌ای مینیمال، حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای اول متمازی باشد فقط ظاهری است.

اکنون بازمی‌گردیم باینکه، عملگر خطی را به صورت مجموع عملگری نیمساده و عملگری پوچ توان که با یکدیگر جا بجا هم می‌شوند، بیان کنیم. در این مورد، هیأت اسکالری را به زیرهیأتی از اعداد مختلط محدود می‌کنیم. خواننده آگاه توجه دارد که آنچه

مهم است این است که هیأت F هیأتی با سرشت‌نمای صفر باشد؛ یعنی اینکه، به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، مجموع $1 + \dots + n$ (بار) هیچگاه در F برابر 0 نباشد. برای هر چندجمله‌ای f بر روی F ، کمین مشتق صوری f را با $f^{(k)}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر، $f^{(k)} = D^k f$ که در آن D عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ای‌هاست. اگر g چندجمله‌ای دیگری باشد، $(g)f$ نتیجهٔ قراردادن g در f را، یعنی چندجمله‌ای حاصل از کاربست f به عنصر g در جبر خطی $F[x]$ را، نشان می‌دهد.

لم (فرمول تیلور). فرض کنیم F هیأتی با سرشت‌نمای صفر و g و h دو چندجمله‌ای بر روی F باشند. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F با $\deg f \leq n$ باشد، آنگاه

$$f(g) = f(h) + f'(h)(g-h) + \frac{f''(h)}{2!}(g-h)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}(g-h)^n.$$

اثبات. چیزی را که می‌خواهیم اثبات کنیم تعیینی از فرمول تیلور است. خواننده احتمالاً با حالت خاصی که در آن $c = h$ چندجمله‌ای اسکالاری، و $x = g$ باشد، آشناست. در این حالت فرمول بیان می‌کند که

$$f = f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

اثبات فرمول عمومی، دقیقاً کار بر دی از قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(a+b)^k = a^k + k a^{k-1} b + \frac{k(k-1)}{2!} a^{k-2} b^2 + \dots + b^k$$

است. زیرا، همان طور که خواننده می‌داند چون جایگزینی و مشتق‌گیری فرایندهایی خطی هستند فقط لازم است فرمول را برای حالتی که در آن $x^k = f$ اثبات کنیم. این فرمول در مورد $f = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ با کمال تر کیب خطی نتیجهٔ می‌شود. در حالت $f = x^k$ با شرط $k \leq n$ فرمول حاکی است که

$$g^k = h^k + k h^{k-1} (g-h) + \frac{k(k-1)}{2!} h^{k-2} (g-h)^2 + \dots + (g-h)^k$$

و این دقیقاً بسط دو جمله‌ای

$$g^k = [h + (g-h)]^k$$

است. \square

لم، فرض کنيم F زيرهياطي از هيأت اعداد مختلط، f يك چندجمله‌اي بردوی F ، f' مشتق f باشد. احکام زير هم از زند:

(الف) f حاصل ضرب چندجمله‌ايهاي تحويل ناپذير متمايزی بردوی F است.

(ب) f و f' نسبت بهم اول هستند.

(پ) f به عنوان يك چندجمله‌اي با ضرايب مختلط، هيج (يشه تکراری نداده).
اثبات. ابتدا ثابت می کنيم که (الف) و (ب) احکامی هم ارز درباره f هستند.
فرض کنيم در تجزیه اولیه f بر روی هيأت F ، چندجمله‌اي اولی (غیر اسکالری) چون p تکرار بشود. آنگاه h در $F[x]$ هست که $f = p^2 h + 2pp'h$.

$$f' = p^2 h' + 2pp'h$$

ولذا p مقسم عليهی از f' نیز هست. از این رو، f و f' نسبت بهم اول نیستند. از اینجا نتیجه می گیریم که (ب)، حکم (الف) را ایجاد می کند.
حال فرض کنيم $p_k f = p_1 \dots p_k f$ و p_k, p_1, \dots, p_k چندجمله‌ايهاي تحويل ناپذير غیر اسکالری متمايزی بر روی F باشند. گيريم $z = f/p_j$. در اين صورت

$$f' = p'_1 f_1 + p'_2 f_2 + \dots + p'_k f_k.$$

فرض کنيم p چندجمله‌اي اولی باشد که هم f و هم f' را عاد می کند. در اين صورت z نیز هست که $p_i = p$. اما p_i بداعای $j \neq i$ ، چندجمله‌اي $z^j f$ را عاد می کند، و چون p_i همچنین

$$f' = \sum_{j=1}^k p'_j f_j$$

را عاد می کند، در می یابیم که $p_i f_i$ را هم عاد کند. بنا بر این، $p_i f_i$ را عاد می کند یا p'_i را. ولی p_i چندجمله‌اي f را عاد نمی کند چرا که p_1, \dots, p_k متمايزند. از این رو، p_i چندجمله‌اي f را عاد می کند. اما اين ممکن نیست، چرا که درجه p'_i يكی كمتر از درجه p_i است. پس نتیجه می گيریم که هيج چندجمله‌اي اولی هردوی f و f' را عاد نمی کند، و یا $f = f'$.

برای دیدن اين که حکم (پ) با (الف) و با (ب) هم ارز است، تنها لازم است مطلب ذيل را مشاهده کنيم: فرض کنيم f و g دو چندجمله‌اي بردوی F ، زيرهياطي از اعداد مختلط، باشند. می توانيم f و g را به عنوان چندجمله‌ايهاي با ضرايب مختلط نيز محسوب کنيم. اين که f و g ، به عنوان چندجمله‌ايهاي بر روی F نسبت بهم اول هستند، هم ارز اين حکم است که f و g ، به عنوان چندجمله‌ايهاي بر روی هيأت اعداد مختلط، نسبت بهم اول می باشند. اثبات اين مطلب را به عنوان تمرین باقی می گذاريم. از اين حکم با $f = g$ استفاده می کنيم. توجه کنيد وقتی که f به عنوان يك چندجمله‌اي بر روی هيأت اعداد مختلط محسوب شود، (پ) عينانه (الف) است. پس (ب) و (پ)، با همان استدلالی که در بالا به کار برديم، هم ارز هستند. □

اکنون می توانیم قضیه ای را ثابت کنیم که رابطه بین عملگرهای نیم ساده و عملگرهای قطری شدنی را از این هم آشکارتر می سازد.

قضیه ۱۲. فرض کنیم F ذیوهیاتی از هیأت اعداد مختلط، V فضای بوداری با بعد متناهی بروی F ، و T عملگری خطی دوی V باشد. همچنین فرض کنیم \mathcal{B} پایه مرتباً برای V و A ماتریس T در پایه مرتبت \mathcal{B} باشد. در این صورت T نیم ساده است اگر وقتها ماتریس A بروی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه باشد.

اثبات. گیریم p چندجمله‌ای مینیمال T باشد. بنابر قضیه ۱۱، T نیم ساده است اگر و تنها اگر $p_k = p_1 \dots p_k = p_1 \dots p_k$ چندجمله‌ایهای تحریل ناپذیر متمایزی بر روی F باشند. به واسطه آخرین لم می بینیم که T نیم ساده است اگر و تنها اگر p هیچ ریشه مختلط تکراری نداشته باشد.

اما p چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A نیز هست. می دانیم که A بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن دارای ریشه مختلط تکراری نباشد. این مطلب قضیه را اثبات می کند. \square

قضیه ۱۳. فرض کنیم F ذیوهیاتی از هیأت اعداد مختلط، V فضای بوداری با بعد متناهی بروی F ، و T عملگری خطی دوی V باشد. عملگر نیم ساده‌ای چون S دوی V و عملگر پوچ‌توانی چون N دوی V وجود داد که

$$T = S + N \quad (1)$$

$$SN = NS \quad (2)$$

بعلاوه، عملگرهای نیم ساده S و پوچ‌توان N ، که در (۱) و (۲) مذکور می‌کنند، یکتا هستند و هریک یک چندجمله‌ای برحسب T است.

اثبات. فرض می کنیم $p_k^{\text{جز}} = p_1 \dots p_k^{\text{جز}}$ تجزیه چندجمله‌ای مینیمال T به سازه‌های اول باشد، و می نویسیم $p_k^{\text{جز}} = p_1 \dots p_k^{\text{جز}} f$. گیریم بین اعداد صحیح مثبت n, m, l عدد m بزرگترین باشد. در این صورت چندجمله‌ای f حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای اول متمایز است، f بر چندجمله‌ای مینیمال T تقسیم پذیر است، ولذا

$$f(T)^n = 0.$$

می خواهیم دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای $g_n, g_{n-1}, \dots, g_1, g_0$ بسازیم که

$$f\left(x - \sum_{j=0}^n g_j f^j\right)$$

بر f^{n+1} تقسیم پذیر باشد. فرض می کنیم $g_0 = 0$ که در این صورت $f(x - g_0 f^n) = f(x) = f$ بر f تقسیم پذیر است. گیریم g_1, \dots, g_n را انتخاب

کرده باشیم. می‌نویسیم

$$h = x - \sum_{j=0}^{n-1} g_j f^j$$

و طبق فرض، $(h) f$ بر f^n تقسیم پذیر است. می‌خواهیم g_n را طوری انتخاب کنیم که

$$f(h - g_n f^n)$$

بر f^{n+1} تقسیم پذیر باشد. فرمول عمومی تیلور را به کار می‌بریم، و

$$f(h - g_n f^n) = f(h) - g_n f^n f'(h) + f^{n+1} b$$

را که در آن b یک چندجمله‌ای است به دست می‌آوریم. بنا به فرض $f(h) = q f^n$. پس، برای آنکه $f(h - g_n f^n)$ بر f^{n+1} تقسیم پذیر باشد، تنها لازم است g_n را طوری انتخاب کنیم که $(q - g_n f'(h))$ بر f تقسیم پذیر باشد. این امر قابل اجراست، زیرا f سازه‌های اول تکراری ندارد و لذا f و f' نسبت بهم اول هستند. اگر a و e چندجمله‌ایهایی باشند که $af + ef' = 1$ و $af + ef' = eq$ گرفته شود، آنگاه $g_n = eq - g_n f'$ بر f تقسیم پذیر است.

حال دنباله‌ای چون g_1, g_2, \dots, g_r را داریم که f^{n+1} چندجمله‌ای

$$f\left(x - \sum_{j=0}^n g_j f^j\right)$$

را عاد می‌کند. فرض می‌کنیم $n = r - 1$ ، و در این صورت چون $f(T)^r = 0$

$$f\left(T - \sum_{j=0}^{r-1} g_j (T) f(T)^j\right) = 0.$$

فرض کنیم

$$N = \sum_{j=1}^{r-1} g_j (T) f(T)^j = \sum_{j=0}^{r-1} g_j (T) f(T)^j.$$

چون f بر f^n تقسیم پذیر است، می‌بینیم که $N = 0$ ولذا N پوچ توان است. فرض کنیم $S = T - N = T$. در این صورت $f(S) = f(T) = 0$. چون f سازه‌های اول متمایز دارد S نیم‌ساده است.

حال $T = S + N$ را که در آن S نیم‌ساده و N پوچ توان است داریم، و هر کدام یک چندجمله‌ای بر حسب T است. برای اثبات حکم یکتا بی، از هیأت اسکالاری F به هیأت اعداد مختلط می‌رویم. \mathcal{B} را پایه مرتبی برای فضای V می‌گیریم. در این صورت داریم

$$[T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} + [N]_{\mathcal{B}}$$

که در آن $[S]$ بر روی اعداد مختلط قطری‌شدنی است و $[N]$ هم پوچ توان است. این ماتریسهای قطری‌شدنی و پوچ توان که با یکدیگر جایجا هم می‌شوند، همان‌گونه که در فصل ۶ نشان دادیم، به طور یکتا تعیین می‌شوند. \square

تمرین

- ۱۰۱ اگر N عملگر خطی پوچ توانی روی V باشد نشان دهید که به ازای هر چند جمله‌ای f ، جزء نیم‌ساده (N) f مضری اسکالری از عملگر همانی است (F زیرهیأتی از C است).
- ۱۰۲ فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط، V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F ، و T عملگر خطی نیم‌ساده‌ای روی V باشد. اگر f یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، ثابت کنید که (T) f نیم‌ساده است.
- ۱۰۳ فرض کنید T عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از C باشد. ثابت کنید T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر مطلب ذیل درست باشد: اگر f یک چندجمله‌ای و $f(T)$ پوچ توان باشد، آنگاه $\circ = 0$.



دانلود از سایت (یافنی سرا
www.riazisara.ir

فضاهای ضرب داخلی

۱۰.۸. ضربهای داخلی

در سراسر این فصل، تنها فضاهای برداری حقیقی و مختلط؛ یعنی، فضاهای برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی و یا هیأت اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شوند. مقصود اصلی مامطالعه فضاهایی برداری است که در آنها سخن گفتن از «طول» یک بردار و «زاویه» بین دو بردار معنی داشته باشد. این کار را با مطالعه نوع خاصی از توابع اسکالری، معروف به ضرب داخلی، روی جفت بردارها انجام خواهیم داد. مثالی از ضرب داخلی همان ضرب نقطه‌ای یا اسکالری بردارهای در R^3 است. ضرب اسکالری بردارهای

$$\beta = (y_1, y_2, y_3) \text{ و } \alpha = (x_1, x_2, x_3)$$

در R^3 عبارت است از عدد حقیقی

$$(\alpha | \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

از نظرهندسی، این ضرب نقطه‌ای عبارت است از حاصل ضرب طول α در طول β در کسینوس زاویه بین α و β . بنابراین مفاهیم هندسی «طول» و «زاویه» در R^3 را می‌توان با ضرب اسکالری \mathbb{R} به طور جبری تعریف می‌شود نیز تعریف کرد.

یک ضرب داخلی روی فضایی برداری عبارت است از تابعی با خواصی مشابه با خواص ضرب نقطه‌ای در R^3 و بر حسب یک چنین ضرب داخلی «طول» و «زاویه» را

می‌توان تعریف کرد. اظهارات مادربرآ مفهوم عمومی زاویه، بهایدۀ عمود بودن (یاتعامت) بردارها محدود خواهد بود. در این بخش اول، خواهیم گفت که یک ضرب داخلی چیست، چند مثال خاص را بررسی خواهیم کرد، و چند خاصیت اساسی ضربهای داخلی را به دست خواهیم داد. سپس به کار بحث درباره طول و تعامد بازخواهیم گشت.

تعریف. فرض کنیم F هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و V فضایی برداری بودی F باشد. یک ضرب داخلی دوی V تابعی است که بهره‌رفت مرتب از بردارهای $\alpha, \beta \in V$ اسکالری چون $(\alpha|\beta)$ در F (ا طوری اختصاص می‌دهد که بهایزی همه α ‌ها، و β ‌های در V و همه اسکالرهای c داشته باشیم:

$$(الف) (\alpha + \beta|\gamma) = (\alpha|\gamma) + (\beta|\gamma);$$

$$(ب) (c\alpha|\beta) = c(\alpha|\beta);$$

$$(پ) \text{ خط } \beta \text{ نمایشگر مزدوج اعداد مختلط است};$$

$$(ت) \text{ هرگاه } (\alpha|\alpha) > 0, \alpha \neq 0.$$

مشاهده می‌شود که شرایط (الف)، (ب) و (پ) ایجاب می‌کنند که

$$(ث) (\alpha|c\beta + \gamma) = \bar{c}(\alpha|\beta) + (\alpha|\gamma)$$

نکته دیگری را هم باید خاطر نشان کنیم. وقتی F هیأت اعداد حقیقی R باشد، مزدوجهای مختلطی که در (پ) و (ث) ظاهر می‌شوند، غیر ضرور هستند؛ اما، در حالت مختلط برای سازگاری شرایط لازم می‌باشد. بدون این مزدوجهای مختلط، با تناقض ذیل مواجه خواهیم شد:

$$\cdot (\alpha|i\alpha) = -1(\alpha|\alpha) > 0 \quad \text{و} \quad 0 > 0$$

در مثالهایی که در ذیل می‌آیند، و تیز درسر اسرائیل فصل، F یا هیأت اعداد حقیقی است یا هیأت اعداد مختلط.

مثال ۱. روی F ضربی داخلی وجود دارد که ما آن را ضرب داخلی استانده می‌نامیم. این داخلی روی $F = R$ باشد که $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ با

$$(\alpha|\beta) = \sum_j x_j \bar{y}_j \quad (1-8)$$

تعریف می‌شود. و قی که $F = R$ این قاعده را می‌توان به صورت

$$(\alpha|\beta) = \sum_j x_j y_j$$

نیز نوشت. ضرب داخلی استانده در حالت حقیقی غالباً ضرب نقطه‌ای یا اسکالری نامیده و توسط $\beta \cdot \alpha$ نشان داده می‌شود.

مثال ۳. به ازای (x_1, x_2) و $\alpha = (y_1, y_2)$ در R^2 ، فرض کنیم
 $(\alpha|\beta) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$.

چون $x_1^2 + 3x_2^2 = (\alpha|\alpha)$ ، نتیجه می‌شود که اگر $\alpha \neq 0$ ، $\alpha|\alpha > 0$. شرایط (الف)، (ب)، و (پ) تعریف نیز بسادگی نشان داده می‌شوند.

مثال ۴. فرض کنیم V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F ، یعنی $F^{n \times n}$ ، باشد. در این صورت V به طریقی طبیعی با $F^{n \times 1}$ یکریخت است. بنا بر این، از مثال ۱ نتیجه می‌شود که معادله

$$(A|B) = \sum_{j,k} A_{jk} \bar{B}_{jk}$$

ضربی داخلی روی V تعریف می‌کند. بعلاوه، اگر ماتریس ترانهاده مزدوج B^* را که در آن $B_{kj}^* = \bar{B}_{jk}$ ، معرفی کنیم، می‌توانیم این ضرب داخلی روی $F^{n \times n}$ را بحسب تابع رد نیز بیان کنیم:

$$(A|B) = \text{tr}(AB^*) = \text{tr}(B^*A)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB^*) &= \sum_j (AB^*)_{jj} \\ &= \sum_j \sum_k A_{jk} B_{kj}^* \\ &= \sum_j \sum_k A_{jk} \bar{B}_{jk}. \end{aligned}$$

مثال ۵. گیریم $F^{n \times 1}$ فضای ماتریسهای (ستونی) ۱ $\times n$ بر روی F و Q یک ماتریس معکوس پذیر $n \times n$ بر روی F باشد. به ازای X و Y در $F^{n \times 1}$ می‌نویسیم

$$(X|Y) = Y^* Q^* Q X.$$

در اینجا ماتریس ۱ $\times 1$ سمت راست را با تک درایه آن یکی گرفته‌ایم. هنگامی که Q ماتریس همانی باشد، این ضرب داخلی اساساً با ضرب داخلی در مثال ۱ یکی است؛ ماین ضرب داخلی را ضرب داخلی استاندۀ روی $F^{n \times 1}$ می‌نامیم. خواننده باید متوجه باشد که اصطلاح «ضرب داخلی استاندۀ» در دو زمینه خاص به کارمی‌رود. برای یک فضای برداری با بعد متناهی دلخواه بر روی F ، ضرب داخلی آشکاری که بتوان آن را استاندۀ نامید وجود ندارد.

مثال ۶. گیریم V فضای برداری همه توابع مختلط پیوسته روی فاصله $[a, b]$ باشد. فرض کنیم

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt.$$

احتمالاً خواننده با فضای توابع پیوسته حقیقی روی فاصله یکه بیشتر آشنا باشد. برای چنین فضای عالمت مزدوج مختلط روی g باید حذف گردد.

مثال ۶. این مثال در واقع رده‌ای است از مثالها. با روش زیر از ضرب داخلی مفروضی می‌توان ضربهای داخلی جدیدی به وجود آورد. V و W را فضاهایی برداری بر روی F می‌گیریم و فرض می‌کنیم () ضربی داخلی روی W باشد. اگر T تبدیل خطی نامتفردی از V در W باشد، آنگاه معادله

$$p_T(\alpha, \beta) = (T\alpha|T\beta)$$

ضرب داخلی p_T روی V را تعریف می‌کند. ضرب داخلی در مثال ۴ حالت خاصی از این ضرب است. ضربهای داخلی ذیل نیز حالتی خاص از آن هستند.
 (الف) گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V باشد. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ را بردارهای پایه استاندۀ F^n ; و T را تبدیل خطی از V در F^n می‌گیریم که $\epsilon_j = \epsilon_j, T\alpha_j = \epsilon_j, T\alpha_i = \epsilon_i$. به عبارت دیگر، T را یک ریختی «طبیعی» از V بر روی F^n که توسط \mathcal{B} تعیین می‌شود می‌گیریم. اگر ضرب داخلی استاندۀ روی F^n را اتخاذ کنیم، آنگاه

$$p_T\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k y_k \alpha_k\right) = \sum_{j,k} x_j \bar{y}_k.$$

پس، به ازای هر پایه V ، ضربی داخلی روی V با این خاصیت که $\delta_{jk} = (\alpha_j|\alpha_k) = p_T(\alpha_j, \alpha_k)$ وجود دارد؛ در واقع، بسادگی می‌توان نشان داد که تنها یک ضرب داخلی از این نوع وجود دارد. بعداً نشان خواهیم داد که هر ضرب داخلی روی V ، توسط پایه‌ای چون \mathcal{B} و به طریق بالا تعیین می‌شود.

(ب) دوباره به مثال ۵ بر می‌گردیم و فرض می‌کنیم $W = V$. با این فرض که T فضای توابع پیوسته روی فاصله یکه باشد، T را عملگر خطی «ضرب در t »، یعنی $(tf)(t) = t f(t)$ ، $1 \leq t \leq 5$ ، می‌گیریم. باسانی دیده می‌شود که T خطی است. همچنین T نامتفرد است؛ زیرا فرض کنیم $0 = T f = f$. در این صورت به ازای $1 \leq t \leq 5$ ، $0 = (tf)(t) = t f(t)$ از این رو، به ازای $0 > t = 0 = (tf)(t)$. چون f پیوسته است، همچنین داریم $0 = (0f) = 0 = f$. حال با استفاده از ضرب داخلی مثال ۵ ضرب داخلی جدیدی با قراردادن

$$\begin{aligned} p_T(f, g) &= \int_0^1 (Tf)(t) (\overline{Tg}(t)) dt \\ &= \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt \end{aligned}$$

روی V بنا می‌کنیم.

اگر α و β دو ضربهای داخلی باشند، آنگاه $\alpha|\beta = \overline{\beta|\alpha}$. فرض کنیم α یک فضای برداری مختلط با ضربهای داخلی باشد. در این صورت به ازای هر α و β در V

$$(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}(\alpha|\beta) + i \operatorname{Im}(\alpha|\beta)$$

که در آن $\operatorname{Re}(\alpha|\beta)$ و $\operatorname{Im}(\alpha|\beta)$ اجزای حقیقی و موهومی عدد مختلط $(\alpha|\beta)$ هستند. اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(-iz)$. نتیجه اینکه

$$\operatorname{Im}(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}[-i(\alpha|\beta)] = \operatorname{Re}(\alpha|i\beta).$$

پس، ضرب داخلی به طور کامل توسط «جزء حقیقی» اش طبق

$$(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}(\alpha|\beta) + i \operatorname{Re}(\alpha|i\beta) \quad (2-8)$$

تعیین می‌شود.

گاهی بسی مفید است بدانیم که هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط، توسط تابع دیگری موسوم به فرم درجه دوم تعیین شده توسط آن ضرب داخلی هم تعیین می‌شود. برای تعریف آن، ابتدا ریشه دوم مثبت $(\alpha|\alpha)$ را با $\|\alpha\|$ نشان می‌دهیم؛ $\|\alpha\|$ نویم α نسبت به ضرب داخلی نامیده می‌شود. با مشاهده ضربهای داخلی استانده در R^1 ، R^2 ، R^3 ، C^1 ، C^2 ، C^3 ، R^4 ، R^5 ، R^6 ، R^7 ، R^8 ، R^9 ، R^{10} ، R^{11} ، R^{12} ، R^{13} ، R^{14} ، R^{15} ، R^{16} ، R^{17} ، R^{18} ، R^{19} ، R^{20} ، R^{21} ، R^{22} ، R^{23} ، R^{24} ، R^{25} ، R^{26} ، R^{27} ، R^{28} ، R^{29} ، R^{30} ، R^{31} ، R^{32} ، R^{33} ، R^{34} ، R^{35} ، R^{36} ، R^{37} ، R^{38} ، R^{39} ، R^{40} ، R^{41} ، R^{42} ، R^{43} ، R^{44} ، R^{45} ، R^{46} ، R^{47} ، R^{48} ، R^{49} ، R^{50} ، R^{51} ، R^{52} ، R^{53} ، R^{54} ، R^{55} ، R^{56} ، R^{57} ، R^{58} ، R^{59} ، R^{60} ، R^{61} ، R^{62} ، R^{63} ، R^{64} ، R^{65} ، R^{66} ، R^{67} ، R^{68} ، R^{69} ، R^{70} ، R^{71} ، R^{72} ، R^{73} ، R^{74} ، R^{75} ، R^{76} ، R^{77} ، R^{78} ، R^{79} ، R^{80} ، R^{81} ، R^{82} ، R^{83} ، R^{84} ، R^{85} ، R^{86} ، R^{87} ، R^{88} ، R^{89} ، R^{90} ، R^{91} ، R^{92} ، R^{93} ، R^{94} ، R^{95} ، R^{96} ، R^{97} ، R^{98} ، R^{99} ، R^{100} ، R^{101} ، R^{102} ، R^{103} ، R^{104} ، R^{105} ، R^{106} ، R^{107} ، R^{108} ، R^{109} ، R^{110} ، R^{111} ، R^{112} ، R^{113} ، R^{114} ، R^{115} ، R^{116} ، R^{117} ، R^{118} ، R^{119} ، R^{120} ، R^{121} ، R^{122} ، R^{123} ، R^{124} ، R^{125} ، R^{126} ، R^{127} ، R^{128} ، R^{129} ، R^{130} ، R^{131} ، R^{132} ، R^{133} ، R^{134} ، R^{135} ، R^{136} ، R^{137} ، R^{138} ، R^{139} ، R^{140} ، R^{141} ، R^{142} ، R^{143} ، R^{144} ، R^{145} ، R^{146} ، R^{147} ، R^{148} ، R^{149} ، R^{150} ، R^{151} ، R^{152} ، R^{153} ، R^{154} ، R^{155} ، R^{156} ، R^{157} ، R^{158} ، R^{159} ، R^{160} ، R^{161} ، R^{162} ، R^{163} ، R^{164} ، R^{165} ، R^{166} ، R^{167} ، R^{168} ، R^{169} ، R^{170} ، R^{171} ، R^{172} ، R^{173} ، R^{174} ، R^{175} ، R^{176} ، R^{177} ، R^{178} ، R^{179} ، R^{180} ، R^{181} ، R^{182} ، R^{183} ، R^{184} ، R^{185} ، R^{186} ، R^{187} ، R^{188} ، R^{189} ، R^{190} ، R^{191} ، R^{192} ، R^{193} ، R^{194} ، R^{195} ، R^{196} ، R^{197} ، R^{198} ، R^{199} ، R^{200} ، R^{201} ، R^{202} ، R^{203} ، R^{204} ، R^{205} ، R^{206} ، R^{207} ، R^{208} ، R^{209} ، R^{210} ، R^{211} ، R^{212} ، R^{213} ، R^{214} ، R^{215} ، R^{216} ، R^{217} ، R^{218} ، R^{219} ، R^{220} ، R^{221} ، R^{222} ، R^{223} ، R^{224} ، R^{225} ، R^{226} ، R^{227} ، R^{228} ، R^{229} ، R^{230} ، R^{231} ، R^{232} ، R^{233} ، R^{234} ، R^{235} ، R^{236} ، R^{237} ، R^{238} ، R^{239} ، R^{240} ، R^{241} ، R^{242} ، R^{243} ، R^{244} ، R^{245} ، R^{246} ، R^{247} ، R^{248} ، R^{249} ، R^{250} ، R^{251} ، R^{252} ، R^{253} ، R^{254} ، R^{255} ، R^{256} ، R^{257} ، R^{258} ، R^{259} ، R^{260} ، R^{261} ، R^{262} ، R^{263} ، R^{264} ، R^{265} ، R^{266} ، R^{267} ، R^{268} ، R^{269} ، R^{270} ، R^{271} ، R^{272} ، R^{273} ، R^{274} ، R^{275} ، R^{276} ، R^{277} ، R^{278} ، R^{279} ، R^{280} ، R^{281} ، R^{282} ، R^{283} ، R^{284} ، R^{285} ، R^{286} ، R^{287} ، R^{288} ، R^{289} ، R^{290} ، R^{291} ، R^{292} ، R^{293} ، R^{294} ، R^{295} ، R^{296} ، R^{297} ، R^{298} ، R^{299} ، R^{300} ، R^{301} ، R^{302} ، R^{303} ، R^{304} ، R^{305} ، R^{306} ، R^{307} ، R^{308} ، R^{309} ، R^{310} ، R^{311} ، R^{312} ، R^{313} ، R^{314} ، R^{315} ، R^{316} ، R^{317} ، R^{318} ، R^{319} ، R^{320} ، R^{321} ، R^{322} ، R^{323} ، R^{324} ، R^{325} ، R^{326} ، R^{327} ، R^{328} ، R^{329} ، R^{330} ، R^{331} ، R^{332} ، R^{333} ، R^{334} ، R^{335} ، R^{336} ، R^{337} ، R^{338} ، R^{339} ، R^{340} ، R^{341} ، R^{342} ، R^{343} ، R^{344} ، R^{345} ، R^{346} ، R^{347} ، R^{348} ، R^{349} ، R^{350} ، R^{351} ، R^{352} ، R^{353} ، R^{354} ، R^{355} ، R^{356} ، R^{357} ، R^{358} ، R^{359} ، R^{360} ، R^{361} ، R^{362} ، R^{363} ، R^{364} ، R^{365} ، R^{366} ، R^{367} ، R^{368} ، R^{369} ، R^{370} ، R^{371} ، R^{372} ، R^{373} ، R^{374} ، R^{375} ، R^{376} ، R^{377} ، R^{378} ، R^{379} ، R^{380} ، R^{381} ، R^{382} ، R^{383} ، R^{384} ، R^{385} ، R^{386} ، R^{387} ، R^{388} ، R^{389} ، R^{390} ، R^{391} ، R^{392} ، R^{393} ، R^{394} ، R^{395} ، R^{396} ، R^{397} ، R^{398} ، R^{399} ، R^{400} ، R^{401} ، R^{402} ، R^{403} ، R^{404} ، R^{405} ، R^{406} ، R^{407} ، R^{408} ، R^{409} ، R^{410} ، R^{411} ، R^{412} ، R^{413} ، R^{414} ، R^{415} ، R^{416} ، R^{417} ، R^{418} ، R^{419} ، R^{420} ، R^{421} ، R^{422} ، R^{423} ، R^{424} ، R^{425} ، R^{426} ، R^{427} ، R^{428} ، R^{429} ، R^{430} ، R^{431} ، R^{432} ، R^{433} ، R^{434} ، R^{435} ، R^{436} ، R^{437} ، R^{438} ، R^{439} ، R^{440} ، R^{441} ، R^{442} ، R^{443} ، R^{444} ، R^{445} ، R^{446} ، R^{447} ، R^{448} ، R^{449} ، R^{450} ، R^{451} ، R^{452} ، R^{453} ، R^{454} ، R^{455} ، R^{456} ، R^{457} ، R^{458} ، R^{459} ، R^{460} ، R^{461} ، R^{462} ، R^{463} ، R^{464} ، R^{465} ، R^{466} ، R^{467} ، R^{468} ، R^{469} ، R^{470} ، R^{471} ، R^{472} ، R^{473} ، R^{474} ، R^{475} ، R^{476} ، R^{477} ، R^{478} ، R^{479} ، R^{480} ، R^{481} ، R^{482} ، R^{483} ، R^{484} ، R^{485} ، R^{486} ، R^{487} ، R^{488} ، R^{489} ، R^{490} ، R^{491} ، R^{492} ، R^{493} ، R^{494} ، R^{495} ، R^{496} ، R^{497} ، R^{498} ، R^{499} ، R^{500} ، R^{501} ، R^{502} ، R^{503} ، R^{504} ، R^{505} ، R^{506} ، R^{507} ، R^{508} ، R^{509} ، R^{510} ، R^{511} ، R^{512} ، R^{513} ، R^{514} ، R^{515} ، R^{516} ، R^{517} ، R^{518} ، R^{519} ، R^{520} ، R^{521} ، R^{522} ، R^{523} ، R^{524} ، R^{525} ، R^{526} ، R^{527} ، R^{528} ، R^{529} ، R^{530} ، R^{531} ، R^{532} ، R^{533} ، R^{534} ، R^{535} ، R^{536} ، R^{537} ، R^{538} ، R^{539} ، R^{540} ، R^{541} ، R^{542} ، R^{543} ، R^{544} ، R^{545} ، R^{546} ، R^{547} ، R^{548} ، R^{549} ، R^{550} ، R^{551} ، R^{552} ، R^{553} ، R^{554} ، R^{555} ، R^{556} ، R^{557} ، R^{558} ، R^{559} ، R^{560} ، R^{561} ، R^{562} ، R^{563} ، R^{564} ، R^{565} ، R^{566} ، R^{567} ، R^{568} ، R^{569} ، R^{570} ، R^{571} ، R^{572} ، R^{573} ، R^{574} ، R^{575} ، R^{576} ، R^{577} ، R^{578} ، R^{579} ، R^{580} ، R^{581} ، R^{582} ، R^{583} ، R^{584} ، R^{585} ، R^{586} ، R^{587} ، R^{588} ، R^{589} ، R^{590} ، R^{591} ، R^{592} ، R^{593} ، R^{594} ، R^{595} ، R^{596} ، R^{597} ، R^{598} ، R^{599} ، R^{600} ، R^{601} ، R^{602} ، R^{603} ، R^{604} ، R^{605} ، R^{606} ، R^{607} ، R^{608} ، R^{609} ، R^{610} ، R^{611} ، R^{612} ، R^{613} ، R^{614} ، R^{615} ، R^{616} ، R^{617} ، R^{618} ، R^{619} ، R^{620} ، R^{621} ، R^{622} ، R^{623} ، R^{624} ، R^{625} ، R^{626} ، R^{627} ، R^{628} ، R^{629} ، R^{630} ، R^{631} ، R^{632} ، R^{633} ، R^{634} ، R^{635} ، R^{636} ، R^{637} ، R^{638} ، R^{639} ، R^{640} ، R^{641} ، R^{642} ، R^{643} ، R^{644} ، R^{645} ، R^{646} ، R^{647} ، R^{648} ، R^{649} ، R^{650} ، R^{651} ، R^{652} ، R^{653} ، R^{654} ، R^{655} ، R^{656} ، R^{657} ، R^{658} ، R^{659} ، R^{660} ، R^{661} ، R^{662} ، R^{663} ، R^{664} ، R^{665} ، R^{666} ، R^{667} ، R^{668} ، R^{669} ، R^{670} ، R^{671} ، R^{672} ، R^{673} ، R^{674} ، R^{675} ، R^{676} ، R^{677} ، R^{678} ، R^{679} ، R^{680} ، R^{681} ، R^{682} ، R^{683} ، R^{684} ، R^{685} ، R^{686} ، R^{687} ، R^{688} ، R^{689} ، R^{690} ، R^{691} ، R^{692} ، R^{693} ، R^{694} ، R^{695} ، R^{696} ، R^{697} ، R^{698} ، R^{699} ، R^{700} ، R^{701} ، R^{702} ، R^{703} ، R^{704} ، R^{705} ، R^{706} ، R^{707} ، R^{708} ، R^{709} ، R^{710} ، R^{711} ، R^{712} ، R^{713} ، R^{714} ، R^{715} ، R^{716} ، R^{717} ، R^{718} ، R^{719} ، R^{720} ، R^{721} ، R^{722} ، R^{723} ، R^{724} ، R^{725} ، R^{726} ، R^{727} ، R^{728} ، R^{729} ، R^{730} ، R^{731} ، R^{732} ، R^{733} ، R^{734} ، R^{735} ، R^{736} ، R^{737} ، R^{738} ، R^{739} ، R^{740} ، R^{741} ، R^{742} ، R^{743} ، R^{744} ، R^{745} ، R^{746} ، R^{747} ، R^{748} ، R^{749} ، R^{750} ، R^{751} ، R^{752} ، R^{753} ، R^{754} ، R^{755} ، R^{756} ، R^{757} ، R^{758} ، R^{759} ، R^{760} ، R^{761} ، R^{762} ، R^{763} ، R^{764} ، R^{765} ، R^{766} ، R^{767} ، R^{768} ، R^{769} ، R^{770} ، R^{771} ، R^{772} ، R^{773} ، R^{774} ، R^{775} ، R^{776} ، R^{777} ، R^{778} ، R^{779} ، R^{780} ، R^{781} ، R^{782} ، R^{783} ، R^{784} ، R^{785} ، R^{786} ، R^{787} ، R^{788} ، R^{789} ، R^{790} ، R^{791} ، R^{792} ، R^{793} ، R^{794} ، R^{795} ، R^{796} ، R^{797} ، R^{798} ، R^{799} ، R^{800} ، R^{801} ، R^{802} ، R^{803} ، R^{804} ، R^{805} ، R^{806} ، R^{807} ، R^{808} ، R^{809} ، R^{810} ، R^{811} ، R^{812} ، R^{813} ، R^{814} ، R^{815} ، R^{816} ، R^{817} ، R^{818} ، R^{819} ، R^{820} ، R^{821} ، R^{822} ، R^{823} ، R^{824} ، R^{825} ، R^{826} ، R^{827} ، R^{828} ، R^{829} ، R^{830} ، R^{831} ، R^{832} ، R^{833} ، R^{834} ، R^{835} ، R^{836} ، R^{837} ، R^{838} ، R^{839} ، R^{840} ، R^{841} ، R^{842} ، R^{843} ، R^{844} ، R^{845} ، R^{846} ، R^{847} ، R^{848} ، R^{849} ، R^{850} ، R^{851} ، R^{852} ، R^{853} ، R^{854} ، R^{855} ، R^{856} ، R^{857} ، R^{858} ، R^{859} ، R^{860} ، R^{861} ، R^{862} ، R^{863} ، R^{864} ، R^{865} ، R^{866} ، R^{867} ، R^{868} ، R^{869} ، R^{870} ، R^{871} ، R^{872} ، R^{873} ، R^{874} ، R^{875} ، R^{876} ، R^{877} ، R^{878} ، R^{879} ، R^{880} ، R^{881} ، R^{882} ، R^{883} ، R^{884} ، R^{885} ، R^{886} ، R^{887} ، R^{888} ، R^{889} ، R^{890} ، R^{891} ، R^{892} ، R^{893} ، R^{894} ، R^{895} ، R^{896} ، R^{897} ، R^{898} ، R^{899} ، R^{900} ، R^{901} ، R^{902} ، R^{903} ، R^{904} ، R^{905} ، R^{906} ، R^{907} ، R^{908} ، R^{909} ، R^{910} ، R^{911} ، R^{912} ، R^{913} ، R^{914} ، R^{915} ، R^{916} ، R^{917} ، R^{918} ، R^{919} ، R^{920} ، R^{921} ، R^{922} ، R^{923} ، R^{924} ، R^{925} ، R^{926} ، R^{927} ، R^{928} ، R^{929} ، R^{930} ، R^{931} ، R^{932} ، R^{933} ، R^{934} ، R^{935} ، R^{936} ، R^{937} ، R^{938} ، R^{939} ، R^{940} ، R^{941} ، R^{942} ، R^{943} ، R^{944} ، R^{945} ، R^{946} ، R^{947} ، R^{948} ، R^{949} ، R^{950} ، R^{951} ، R^{952} ، R^{953} ، R^{954} ، R^{955} ، R^{956} ، R^{957} ، R^{958} ، R^{959} ، R^{960} ، R^{961} ، R^{962} ، R^{963} ، R^{964} ، R^{965} ، R^{966} ، R^{967} ، R^{968} ، R^{969} ، R^{970} ، R^{971} ، R^{972} ، R^{973} ، R^{974} ، R^{975} ، R^{976} ، R^{977} ، R^{978} ، R^{979} ، R^{980} ، R^{981} ، R^{982} ، R^{983} ، R^{984} ، R^{985} ، R^{986} ، R^{987} ، R^{988} ، R^{989} ، R^{990} ، R^{991} ، R^{992} ، R^{993} ، R^{994} ، R^{995} ، R^{996} ، R^{997} ، R^{998} ، R^{999} ، R^{1000} ، R^{1001} ، R^{1002} ، R^{1003} ، R^{1004} ، R^{1005} ، R^{1006} ، R^{1007} ، R^{1008} ، R^{1009} ، R^{1010} ، R^{1011} ، R^{1012} ، R^{1013} ، R^{1014} ، R^{1015} ، R^{1016} ، R^{1017} ، R^{1018} ، R^{1019} ، R^{1020} ، R^{1021} ، R^{1022} ، R^{1023} ، R^{1024} ، R^{1025} ، R^{1026} ، R^{1027} ، R^{1028} ، R^{1029} ، R^{1030} ، R^{1031} ، R^{1032} ، R^{1033} ، R^{1034} ، R^{1035} ، R

کنید که (۴-۸) می‌تواند به صورت ذیل نیز نوشته شود:

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 i^n \|\alpha + i^n \beta\|^2.$$

خواصی که در بالا بدست آمدند برای هر ضرب داخلی روی هر فضای برداری حقیقی یا مختلط V بدون توجه به بعد، برقرارند. اکنون به حالتی که در آن V با بعد متناهی است، بازمی‌گردیم. همان‌طور که ممکن است حدس زده شود، یک ضرب داخلی روی یک فضای با بعد متناهی، همواره می‌تواند بر حسب پایه‌ای مرتب با یک ماتریس توصیف شود.

فرض کنیم بعد V متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V باشد و نیز ضرب داخلی خاصی روی V داده شده باشد؛ نشان خواهیم داد که این ضرب داخلی به طور کامل توسط مقادیر

$$G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j) \quad (5-8)$$

که به جفت بردارهای \mathcal{B} تعلق می‌گیرد، تعیین می‌شود. اگر $\alpha = \sum_k x_k \alpha_k$ و $\beta = \sum_j y_j \alpha_j$

$$\begin{aligned} (\alpha | \beta) &= \left(\sum_k x_k \alpha_k | \beta \right) \\ &= \sum_k x_k (\alpha_k | \beta) \\ &= \sum_k x_k \sum_j \bar{y}_j (\alpha_k | \alpha_j) \\ &= \sum_{j,k} \bar{y}_j G_{jk} x_k \\ &= Y^* G X. \end{aligned}$$

در اینجا X و Y ماتریس‌های مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} ، و G ماتریس با درایه‌های $G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j)$ است. G را ماتریس ضرب داخلی در پایه مرتب \mathcal{B} می‌نامیم. از (۵-۸) نتیجه می‌شود که G هرمیتی است؛ یعنی، $G = G^*$ ؛ اما G نوع نسبتاً خاصی از ماتریس‌های هرمیتی است. زیرا G باید در شرط اضافی

$$X^* G X > 0, \quad X \neq 0 \quad (6-8)$$

نیز صدق کند. بخصوص، G باید معکوس پذیر باشد. زیرا، در غیر این صورت یک $0 = G X = 0$ وجود دارد که $0 = G X = 0$ و به ازای چنین X (۶-۸) غیر ممکن است. به طور صریحتر، (۶-۸) حاکی است که به ازای همه اسکالرها x_1, x_2, \dots, x_n که دست کم یکی از

آنها صفر نباشد

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j G_{jk} x_k > 0. \quad (7-8)$$

از این مطلب بلا فاصله می‌پنیم که همه درایه‌های قطری G باید مثبت باشند؛ با این وجود، برای اطمینان از درستی (۶-۸) این شرط روی درایه‌های قطری به‌هیچ وجه کافی نیست.

شرايط کافی برای درستی (۶-۸) بعداً ارائه خواهد شد.

روند بالا وارونه پذیر است؛ بدین معنی که اگر G ماتریسی $n \times n$ روی F باشد که در (۶-۸) و شرط $G = G^*$ صدق کند، آنگاه G ماتریس یک ضرب داخلی روی V در پایه مرتب \mathcal{B} است. این ضرب داخلی با معادله

$$(\alpha|\beta) = Y^* G X$$

که در آن X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} هستند تعیین می‌شود.

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری و $(\cdot | \cdot)$ ضربی داخلی روی V باشد.

(الف) نشان دهید به‌ازای هر β در V ، $0 = (\cdot | \beta)$.

(ب) نشان دهید که اگر به‌ازای هر β در V ، $0 = (\alpha | \beta)$ آنگاه $0 = \alpha$.

۲. فرض کنید V فضایی برداری بر روی F باشد. نشان دهید مجموع دوضرب داخلی روی V ، ضربی داخلی روی V است. آیا تفاضل دوضرب داخلی هم یک ضرب داخلی است؟ نشان دهید که مضربی مثبت از یک ضرب داخلی، ضربی داخلی است.

۳. همه ضربهای داخلی روی R^1 و روی C^1 را به‌طور صریح تشریح کنید.

۴. نشان دهید که ضرب داخلی استانده روی F^n ضربی داخلی است.

۵. (۱) را ضرب داخلی استانده روی R^2 بگیرید.

(الف) فرض کنید $(1, 2) = \alpha$ و $(1, -1) = \beta$. اگر γ برداری باشد که

$= 3 = (\alpha | \gamma)$ و $= (\beta | \gamma)$ را بگیرید.

(ب) نشان دهید که به‌ازای هر α در R^2 دارایم ϵ_1 و ϵ_2 که

(۱) را ضرب داخلی استانده روی R^2 و T را عملگر خطی

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

بگیرید. T «دوران به اندازه 90° » است و این خاصیت را دارد که به‌ازای هر α در

R^2 ، $T(\alpha) = 0$. همه ضربهای داخلی $[\cdot | \cdot]$ روی R^2 را که به‌ازای هر α ،

$[\alpha | T\alpha] = 0$ بگیرید.

۰۷) را ضرب داخلی استاندۀ روی C^2 بگیرید و ثابت کنید که هیچ عملگر خطی غیرصفری روی C^2 وجود ندارد که به ازای هر α در C^2 $\alpha|T\alpha = 0$. این مطلب را تعمیم دهید.

۰۸) فرض کنید A ماتریسی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. به ازای X و Y در $R^{2 \times 1}$ فرض کنید

$$f_A(X, Y) = Y^t A X.$$

نشان دهید f ضربی داخلی روی $R^{2 \times 1}$ است اگر و تنها اگر $A = A^t$ و $\det A > 0$.

۰۹) فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط با ضربی داخلی باشد. نشان دهید که فرم درجه دوم تعیین شده توسط ضرب داخلی در قانون متوازی‌الاضلاع

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

صدق می‌کند.

۱۰) فرض کنید ($|$) ضرب داخلی روی R^2 باشد که در مثال ۲ تعریف شد و B پایه مرتب استاندۀ برای R^2 باشد. ماتریس این ضرب داخلی را نسبت به B بیابید.

۱۱) نشان دهید که فرمول

$$\left(\sum_j \alpha_j x^j \mid \sum_k b_k x^k \right) = \sum_{j,k} \frac{a_j b_k}{j+k+1}$$

ضربی داخلی روی فضای $[R[x], \text{چندجمله‌ایهای بر روی هیأت } R]$, تعریف می‌کند. W را زیرفضای مشکل از چندجمله‌ایهای از درجه کمتر ازیسا برابر با n بگیرید. ضرب داخلی مذکور را به W محدود کنید و ماتریس این ضرب داخلی روی W را نسبت به پایه مرتبت $\{x^n, x^m, \dots, x^1, x^0\}$ بیابید. (ahnemaiyi: برای اینکه نشان دهید این فرمول یک ضرب داخلی تعریف می‌کند، مشاهده کنید که

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

و روی این انتگرال کار کنید).

۱۲) فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = B$ پایه‌ای برای V باشد. فرض کنید ($|$) ضربی داخلی روی V باشد. اگر c_1, \dots, c_n اسکالر دلخواه باشند، نشان دهید دقیقاً یک بردار چون α در V وجود دارد که $\alpha|c_j = 1, \dots, n$, $(\alpha|\alpha_j) = c_j$.

۱۳. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط باشد. تابعی چون J از V در V یک تزویج نامیده می‌شود، هرگاه بهازای هر اسکالار c و هر α و β در V ،

$$J(J(\alpha)) = \alpha, J(c\alpha) = cJ(\alpha), J(\alpha + \beta) = J(\alpha) + J(\beta)$$

اگر J یک تزویج باشد، نشان دهید

(الف) مجموعه W مشکل از همه α ‌های در V با ویژگی $J\alpha = \alpha$ نسبت به عملهای

تعریف شده در V یک فضای برداری بروی R است.

(ب) بهازای هر α در V ، بردارهای یکتاپی چون β و γ در W وجود دارند که

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

۱۴. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط و W زیرمجموعه‌ای از V با خواص ذیل باشد:

(الف) W نسبت به عملهای تعریف شده در V ، یک فضای برداری حقیقی است.

(ب) به ازای هر α در V ، بردارهای یکتاپی چون β و γ در W وجود دارند که

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

نشان دهید معادله $i\gamma - \beta = \alpha$ تزویج روی V تعریف می‌کند با این خاصیت که اگر و تنها اگر α متعلق به W باشد؛ و نیز نشان دهید که J تنها تزویج روی V با این خاصیت است.

۱۵. همه تزویجهای روی C_1 و C_2 را بیابید.

۱۶. فرض کنید W زیرفضایی حقیقی با بعد متناهی از یک فضای برداری مختلط V باشد. نشان دهید که W در شرط (ب) از تمرین ۱۴ صدق می‌کند اگر و تنها اگر هر پایه W پایه‌ای برای V نیز باشد.

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط، J یک تزویج روی V ، W مجموعه‌ای از V در V با ویژگی $J\alpha = \alpha$ و f ضربی داخلی روی W باشد. نشان دهید:

(الف) ضرب داخلی یکتاپی چون g روی V وجود دارد که بهازای هر α و β در

$$g(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta), W$$

(ب) بهازای هر α و β در V ، $g(J\alpha, J\beta) = g(\beta, \alpha)$

قسمت (الف) درباره رابطه بین ضربهای داخلی استاندۀ روی R^1 و C^1 یا روی R^n و C^n چه می‌گوید؟

۲۰.۸. فضاهای ضرب داخلی

اگر α و β از V باشند، ضرب داخلی $\alpha \cdot \beta$ را به آنچه درباره

ترکیب یک فضای برداری و یک ضرب داخلی خاص روی آن می‌توان گفت، معطوف می‌کنیم. بویژه، خواص بنیادی مفاهیم «طول» و «تعامد» را که به وسیله ضرب داخلی روی فضا تحمیل می‌شوند، به دست می‌آوریم.

تعریف. یک فضای ضرب داخلی عبارت است از یک فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با ضرب داخلی مشخصی روی آن فضا.

یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی، غالباً یک فضای اقلیدسی هم نامیده می‌شود. از یک فضای ضرب داخلی مخلوط، بیشتر به عنوان یک فضای یکانی نام برده می‌شود.

قضیه ۱. اگر γ یک خصای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر دو α و β داریم $\gamma(\alpha\beta) = \gamma(\alpha)\gamma(\beta)$.

$$\gamma(\alpha\beta) = |\alpha| |\beta| \gamma(\alpha) \gamma(\beta) \quad (1)$$

$$|\alpha| |\beta| > 0, \alpha \neq 0 \quad (2)$$

$$|\alpha\beta| \leq |\alpha| |\beta| \quad (3)$$

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (4)$$

اثبات. احکام (۱) و (۲) تقریباً بلا فاصله از تعاریف گوناگون مربوط نتیجه می‌شوند. وقتی $\alpha = 0$ نامساوی (۳) بوضوح درست است. اگر $\alpha \neq 0$ ، می‌نویسیم

$$\gamma = \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{|\alpha|^2} \alpha.$$

$$\text{در این صورت } \gamma(\alpha) = \alpha.$$

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 &\leq \left| \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{|\alpha|^2} \alpha \right|^2 = \left(\beta - \frac{(\beta|\alpha)}{|\alpha|^2} \alpha \right) \left(\beta - \frac{(\beta|\alpha)}{|\alpha|^2} \alpha \right)^* \\ &= (\beta|\beta) - \frac{(\beta|\alpha)(\alpha|\beta)}{|\alpha|^2} \\ &= |\beta|^2 - \frac{|(\alpha|\beta)|^2}{|\alpha|^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{از این رو، } |\gamma|^2 &\leq |\alpha|^2 |\beta|^2 - \frac{|(\alpha|\beta)|^2}{|\alpha|^2} = |\alpha|^2 |\beta|^2 - \frac{|\alpha||\beta||\alpha||\beta|}{|\alpha|^2} = |\alpha||\beta| - \frac{|\alpha||\beta|}{|\alpha|} = |\alpha||\beta| - |\beta| = |\beta|(|\alpha| - 1). \end{aligned}$$

$$\square \cdot \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \text{ پس،}$$

نامساوی **کوشی-شوارتز**^۱ نامیده می‌شود. این نامساوی کاربردهای گوناگون فراوانی دارد. اثبات نشان می‌دهد که اگر (α) غیر صفر باشد، آنگاه $\|\alpha/\beta\| < \|\alpha\|/\|\beta\|$ ، مگر اینکه

$$\beta = \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha.$$

بدینسان، در (۳) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر α و β وابسته خطی باشند.

مثال ۷. اگر نامساوی کوشی-دشوار از زیر را به ضرایب داخلی مفروض در مثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ به کار بندیم، نامساویهای ذیل را به دست می‌آوریم:

$$(الف) \left| \sum x_k y_k \right| \leq \left(\sum |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$(ب) |x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2| \leq ((x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2)^{1/2} ((y_1 - y_2)^2 + 3y_2^2)^{1/2}$$

$$(پ) |\operatorname{tr}(AB^*)| \leq (\operatorname{tr}(AA^*))^{1/2} (\operatorname{tr}(BB^*))^{1/2}$$

$$(ت) \left| \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

تعريف. فرض کنیم α و β بردارهایی از یک فضای ضرب داخلی V باشند. در این صورت α بر β متعامد است هرگاه $= 0$ $(\alpha|\beta)$: چون این تساوی ایجاب می‌کند که β نیز بر α متعامد باشد، اغلب فقط می‌گوییم که α و β متعامدند. اگر S مجموعه‌ای از بردارهای متعلق به V باشد، یک مجموعه متعامد نامیده می‌شود هرگاه همه جفت بردارهای متمایز در S متعامد باشند. یک مجموعه متعامد یکه مجموعه متعامدی چون S است همراه با این خاصیت اضافی که به ازای هر $\alpha \in S$ داشته باشد.

بردار صفر برهمه بردارهای V متعامد است و تنها برداری است که این ویژگی را دارد. بجاست که یک مجموعه متعامد یکه به عنوان مجموعه‌ای از بردارهای دو به دو متعامد، که همه دارای طول ۱ باشند، تصور شود.

مثال ۸. پایه استاندۀ R^n یا C^n نسبت به ضرب داخلی استاندۀ یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال ۹. بردار (x, y) در R^3 نسبت به ضرب داخلی استاندۀ بر (x, y) (متعامد

است، زیرا

$$((x, y)|(-y, x)) = -xy + yx = 0.$$

اما، اگر R^2 با ضرب داخلی مثال ۲ تجهیز شود، آنگاه (x, y) و $(-y, x)$ متعامد خواهند بود اگر و تنها اگر

$$y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2 \pm \sqrt{13})x.$$

مثال ۱۰. V را فضای ماتریسهای $n \times n$ مختلف $C^{n \times n}$ و E^{pq} را ماتریسی می‌گیریم که تنها درایه غیر صفرش یک ۱ در سطر p و ستون q باشد. آنگاه مجموعه همه این چنین ماتریسهای E^{pq} ، نسبت به ضرب داخلی مفروض در مثال ۳ متعامد یکه است. زیرا

$$(E^{pq}|E^{-s}) = \text{tr}(E^{pq}E^{sr}) = \delta_{qs}, \quad \text{tr}(E^{pr}) = \delta_{qs}\delta_{pr}.$$

مثال ۱۱. گیریم V فضای توابع مختلف (یا حقیقی) پیوسته روی فاصله $0 \leqslant x \leqslant 1$ با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

باشد. فرض کنیم $f_n(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi nx$ و $g_n(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi nx$. در این صورت $\{1, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots\}$ یک مجموعه متعامد یکه نامتناهی است. در حالت مختلف، می‌توانیم ترکیبات خطی

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(f_n + ig_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

را نیز تشکیل دهیم. بدین طریق، مجموعه متعامد یکه جدیدی چون S مشکل از همه توابع به صورت

$$h_n(x) = e^{\pi i n x}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

را به دست می‌آوریم. مجموعه $'S$ حاصل از الحاق تابع ثابت ۱ به S نوزمتعامد یکه است. در اینجا فرض می‌کنیم خوانده با محاسبه انتگرالهای مورد بحث آشنا بی داشته باشد. مجموعه‌های متعامد یکه ارائه شده در مثالهای بالا همگی مستقل خطی هستند. اکنون نشان می‌دهیم که همواره چنین است.

قضیه ۳. هر مجموعه متعامد از بردارهای غیر صفر، مستقل خطی است. اثبات. گیریم S مجموعه‌ای متعامد متناهی یا نامتناهی از بردارهای غیر صفر فضای ضرب داخلی مفروضی باشد. فرض کنیم $\alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بردارهای متمایزی از S

باشند، و

$$\beta = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} (\beta | \alpha_k) &= \left(\sum_j c_j \alpha_j \right) | \alpha_k \\ &= \sum_j c_j (\alpha_j | \alpha_k) \\ &= c_k (\alpha_k | \alpha_k). \end{aligned}$$

چون $\alpha_k | \alpha_k \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که

$$c_k = \frac{(\beta | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

پس وقتی که $\beta = 0$ ، به ازای هر k ، $c_k = 0$ ؛ بنابراین، S مجموعه‌ای مستقل است. \square

نتیجه. اگر بردادی چون β ، ترکیب خطی از یک دنباله متعامد از بردادهای غیرصفerto، $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشد، آنگاه β عبارت است از ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{k=1}^n \frac{(\beta | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

این نتیجه از اثبات قضیه منتج می‌شود. نتیجه دیگری هم هست که گرچه بدینهی است، ولی ذکر ش لازم است. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ مجموعه متعامدی از بردارهای غیرصفerto فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $\dim V \leq m$. این مطلب حاکی است که تعداد جهتهای دو به دو عمود برهم در V ، نمی‌تواند از بعد $\dim V$ تجاوز کند. تعداد ماکریم جهتهای دو به دو عمود برهم در V ، عددی است که می‌تواند با درک مستقیم و به طور حسی به عنوان بعد هندسی V محاسب شود، و قریباً دیدیم که این بعد از بعد جبری بیشتر نیست. این واقعیت که این دو بعد برابر هستند، نتیجه‌ای خاص از قضیه بعدی است.

قضیه ۳. گیریم V یک فضای ضرب داخلی و β_1, \dots, β_n بردادهایی مستقل از V باشند. در این صورت می‌توان بردادهای متعامدی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (اچنان دد V ساخت که به ازای هر $n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, m$ ، مجموعه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای پددید آمده توسط β_1, \dots, β_k باشد.

اثبات. بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ با ساختمانی معروف به فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت، به دست خواهد آمد. ابتدا می‌گیریم $\alpha_1 = \beta_1$ ، سپس بردارهای دیگر به طور

استقرایی به صورت زیر به دست می‌آید: فرض کنیم $\alpha_m, \dots, \alpha_1$ ($1 \leq m < n$) طوری انتخاب شده باشند که به ازای هر k ,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad 1 \leq k \leq m$$

پایه متعامدی برای زیرفضای V پدید آمده توسط β_1, \dots, β_m باشد. برای ساختن بردار بعدی یعنی α_{m+1} ، قرار می‌دهیم:

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1} | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k. \quad (9-8)$$

آنگاه $\alpha_{m+1} \neq 0$. زیرا در غیر این صورت β_{m+1} ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ، و از این رو ترکیبی خطی از β_1, \dots, β_m است. بعلاوه، اگر $1 \leq j \leq m$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} (\alpha_{m+1} | \alpha_j) &= (\beta_{m+1} | \alpha_j) - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1} | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} (\alpha_k | \alpha_j) \\ &= (\beta_{m+1} | \alpha_j) - (\beta_{m+1} | \alpha_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}\}$ مجموعه متعامدی مشکل از $m+1$ بردار غیر صفر از زیرفضای پدید آمده توسط β_1, \dots, β_m است. بنابر قضیه ۲، این مجموعه پایه‌ای برای این زیرفضاست. پس بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ یکی پس از دیگری، طبق (۹-۸) می‌توانند ساخته شوند. بخصوص، وقتی که $n=4$ ، داریم

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{(\beta_2 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_3 | \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \\ \alpha_4 &= \beta_4 - \frac{(\beta_4 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_4 | \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 - \frac{(\beta_4 | \alpha_3)}{\|\alpha_3\|^2} \alpha_3. \quad \square \end{aligned} \quad (10-8)$$

نتیجه. هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی دادای یک پایه متعامد یکه است. اثبات. V را یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را پایه‌ای برای V می‌گیریم. فرایند گرام-اشمیت را به کار می‌بندیم و پایه متعامد $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را می‌سازیم. آنگاه برای به دست آوردن یک پایه متعامد یکه، به جای هر بردار α_k بردار $\alpha_k / \|\alpha_k\|$ را قرار می‌دهیم. \square

یکی از مزایای عمده‌ای که پایه‌های متعامد یکه بر پایه‌های دلخواه دارند این است که در آنها محاسبات مربوط به مختصات ساده تر هستند. برای این که "کلا" نشان دهیم که چرا این مطلب درست است، فرض می‌کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. آنگاه، مانند بخش قبل، می‌توانیم معادله $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta$ را برای وابسته کردن ماتریسی چون G به هر پایه مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ببریم. با استفاده از این ماتریس که در آن

$$G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j)$$

می‌توانیم ضربهای داخلی را بر حسب مختصات محاسبه کنیم. اگر β یک پایه متعامد یکه باشد، آنگاه G ماتریس همانی است و به ازای همه اسکالرها x_j و y_k

$$(\sum_j x_j \alpha_j | \sum_k y_k \alpha_k) = \sum_j x_j \bar{y}_j.$$

بدین گونه، بر حسب یک پایه متعامد یکه، ضرب داخلی در V مثل ضرب داخلی استاندۀ در F^n به نظرمی‌رسد.

جالب است بدانیم که فرایند گرام-اشمیت می‌تواند برای آزمایش وابستگی خطی نیز مورد استفاده قرار گیرد؛ هر چند این کاربرد در محاسبات مختلف دارای استفاده‌های عملی محدودی است. زیرا، فرض کنیم β_1, \dots, β_m بردارهایی وابسته خطی در یک فضای ضرب داخلی V باشند. برای اینکه حالتی بدیهی را مستثنی کنیم، فرض می‌کنیم $\beta_1 \neq 0$. β_1, \dots, β_m را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که به ازای آن β_1, \dots, β_m مستقل باشند. در این صورت $n < m \leq n+1$ را بردارهای حاصل از به کار بستن فرایند متعامدسازی به β_1, \dots, β_m فرض می‌کنیم. در این صورت برداد $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ حاصل از $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ است. چرا که در زیر فضای پایه‌آمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ قرار دارد و بر هر یک از این بردارها عمود است، از این رو، بنا بر $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ ، برای $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ می‌باشد. عکس، اگر $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ مخالف باشند و β_1, \dots, β_m آنگاه $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی هستند.

مثال ۱۲. بردارهای

$$\beta_1 = (3, 0, 4)$$

$$\beta_2 = (-1, 0, 7)$$

$$\beta_3 = (2, 9, 11)$$

در R^3 ، مجهر به ضرب داخلی استاندۀ را در نظرمی‌گیریم. با به کار بستن فرایند گرام-اشمیت به $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ بردارهای زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_1 = (3, 0, 4)$$

$$\alpha_2 = (-1, 0, 7) - \frac{((-1, 0, 7)|(3, 0, 4))}{25} (3, 0, 4)$$

$$= (-1, 0, 7) - (3, 0, 4)$$

$$= (-4, 0, 3)$$

$$\alpha_3 = (2, 9, 11) - \frac{((2, 9, 11)|(3, 0, 4))}{25} (3, 0, 4)$$

$$- \frac{((2, 9, 11)|(-4, 0, 3))}{25} (-4, 0, 3)$$

$$= (2, 9, 11) - 2(3, 0, 4) - (-4, 0, 3)$$

$$= (0, 9, 0).$$

بدیهی است که این بردارها غیر صفر هستند و دو به دو برهمنامه. از این روند، $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه متعامدی برای R^3 است. برای بیان یک بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در R^3 به صورت ترکیبی خطی از $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ لزومی به حل همچنین معادله خطی نیست؛ زیرا، کافی است (۸-۸) به کار بسته شود. پس، بسادگی نشان داده می‌شود که

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_3}{25} \alpha_1 + \frac{-4x_1 + 3x_2}{25} \alpha_2 + \frac{x_2}{9} \alpha_3.$$

با خصوصی،

$$(1, 2, 3) = \frac{3}{5} (3, 0, 4) + \frac{1}{5} (-4, 0, 3) + \frac{2}{9} (0, 9, 0).$$

آنچه را که نشان داده ایم به عبارتی دیگر چنین است: پایه $\{f_1, f_2, f_3\}$ از $(R^3)^*$ که دو گان پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ است، به طور صریح طبق معادلات

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_3}{25}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-4x_1 + 3x_2}{25}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{9}$$

تعریف می‌شود. این معادلات می‌توانند به صورت کلیتر

$$f_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3) | \alpha_j}{\|\alpha_j\|^2}$$

نیز نوشته شوند. سرانجام، توجه کنید که از $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ پایه متعامد یکه

$$\frac{1}{5}(3, 0, 4), \frac{1}{5}(-4, 0, 3), (0, 1, 0)$$

به دست می‌آید.

مثال ۱۳. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و در آن a, c, b, d اعداد مختلطی باشند.

می‌نویسیم $(a, b) = \beta_2, (c, d) = \beta_1$ و فرض می‌کنیم $\beta_2 \neq \beta_1$. اگر فرایند متعامدسازی را با استفاده از ضرب داخلی استانده در C^2 ، روی β_2 و β_1 به کار بندیم، بردارهای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\alpha_1 = (a, b)$$

$$\alpha_2 = (c, d) - \frac{(c, d) | (a, b)}{|a|^2 + |b|^2} (a, b)$$

$$= (c, d) - \frac{(c\bar{a} + d\bar{b})}{|a|^2 + |b|^2} (a, b)$$

$$= \left(\frac{cb\bar{b} - d\bar{b}a}{|a|^2 + |b|^2}, \frac{d\bar{a}a - c\bar{a}\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \right)$$

$$= \frac{\det A}{|a|^2 + |b|^2} (-b, \bar{a}).$$

حال نظریه عمومی حاکم است که اگر و تنها اگر $\alpha_2 \neq 0$ اگر و تنها اگر $\beta_2 \neq \beta_1$ و β_1 مستقل خطی باشند. از طرف دیگر، فرمول α_2 نشان می‌دهد که این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

در اصل، فرایند گرام-اشمیت مشکل از کاربستهای مکرر یک عمل هندسی بنیادی موسوم به تصویر متعامد است، و از این دیدگاه است که به بهترین وجه مفهوم می‌شود. روش تصویر متعامد، به طور طبیعی در حل یک مسئله مهم تقریب نیز پیش می‌آید.

فرض کنیم W زیرفضای از یک فضای ضرب داخلی V باشد و β بردار دلخواهی از V . مسئله عبارت است از یافتن بهترین تقریب ممکن برای β توسط بردارهای W . این مطلب بدین معنی است که می‌خواهیم برداری چون α را بیاییم که به ازای آن

تا حد ممکن کوچک باشد، منوط به این محدودیت که α به W تعلق داشته باشد.
حال گفته خوش را دقیقتر بیان کنیم.

یک بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W برداری است مانند α در W که
به ازای هر بردار γ در W

$$\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|.$$

با توجه به همین مسئله در R^2 یاد R^2 ، به طور شهودی در می‌باییم که بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W باید برداری چون α در W باشد که $\beta - \alpha$ بر W عمود باشد،
و نیز اینکه باید دقیقاً یک چنین α ‌ای وجود داشته باشد. این ایده‌های شهودی برای زیر-
فضاهای با بعد متناهی، و نیز برای برخی از، ولی نهمه، زیرفضاهای با بعد نامتناهی
درست هستند. چون وضعیت دقیق بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتواند در اینجا مورد بحث
قرار گیرد، تنها قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۴. فرض کنیم W زیرفضایی از یک فضای ضرب داخلی V و β برداری از V
باشد.

- (۱) بزرگ α در W ، یک بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W است اگر
وقتها اگر $\beta - \alpha$ بر هر بردار W عمود باشد.
- (۲) اگر یک بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W وجود داشته باشد،
یکتاست.

(۳) اگر W با بعد متناهی $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد،
آنگاه بردار

$$\alpha = \sum_k (\beta | \alpha_k) \alpha_k \quad (11-8)$$

بهترین تقریب (یکتا) β توسط بردارهای W است.
اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر γ برداری دلخواه در V باشد، آنگاه
 $\beta - \gamma = (\beta - \alpha) + (\alpha - \gamma)$

$$\|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}(\beta - \alpha | \alpha - \gamma) + \|\alpha - \gamma\|^2.$$

حال فرض کنیم $\beta - \alpha$ بر هر بردار W عمود باشد، γ در W باشد، و $\alpha \neq \gamma$. در این
صورت، چون $\gamma - \alpha$ در W قراردارد، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|\beta - \gamma\|^2 &= \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 \\ &> \|\beta - \alpha\|^2. \end{aligned}$$

بعكس، فرض کنیم به ازای هر γ در W ، $\|\beta - \gamma\| \geq \|\beta - \alpha\|$. آنگاه از اولین
معادله بالا نتیجه می‌شود که به ازای هر γ در W ,

$$2\operatorname{Re}(\beta - \alpha|\alpha - \gamma) + \|\alpha - \gamma\|^2 \geq 0.$$

چون هر بردار در W می‌تواند به صورت $\gamma - \alpha$ ، به ازای γ بی در W ، بیان شود، می‌بینیم که به ازای هر τ در W

$$2\operatorname{Re}(\beta - \alpha|\tau) + \|\tau\|^2 \geq 0.$$

به خصوص، اگر γ در W باشد و $\alpha \neq \gamma$ ، می‌توانیم داشته باشیم

$$\tau = -\frac{(\beta - \alpha|\alpha - \gamma)}{\|\alpha - \gamma\|^2}(\alpha - \gamma).$$

در این صورت نامساوی به حکم ذیر تحویل می‌شود

$$-\frac{|(\beta - \alpha|\alpha - \gamma)|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} + \frac{|(\beta - \alpha|\alpha - \gamma)|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} \geq 0.$$

این نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر $= (\beta - \alpha|\alpha - \gamma)$. بنابراین $\alpha - \beta$ بر هر بردار W عمود است. این مطلب اثبات هم ارزی دوشرط داده شده در (۱) روی α را کامل می‌کند. بدیهی است شرط تعامد حداکثر توسط یک بردار W برآورده می‌شود و این (۲) را اثبات می‌کند.

حال فرض کنیم W یک زیرفضای با بعد متناهی V باشد. در این صورت به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳ می‌دانیم که W یک پایه متعامد یکه دارد. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را یک پایه متعامد یکه برای W می‌گیریم و α را طبق (۱۱-۸) تعریف می‌کنیم. در این صورت، طبق محاسبه موجود در اثبات قضیه ۳ $\beta - \alpha$ بر هر بردار α_k عمود است ($\alpha - \beta$ برداری است که در آخرين مرحله، وقتی که فرایند متعامد سازی بر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ به کار بسته می‌شود، به دست می‌آید). پس، $\beta - \alpha$ بر هر ترکیب خطی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، یعنی بر هر بردار W عمود است. اگر γ در W باشد و $\alpha \neq \gamma$ ، نتیجه می‌شود که $\|\beta - \alpha\| > \|\beta - \gamma\|$. بنابراین α بهترین تقریب برای β است که در W قرار دارد. \square

تعریف. گیریم V یک فضای ضرب داخلی و S مجموعه‌ای از بردارهای V باشد. مکمل متعامد S عبارت است از مجموعه $\perp S$ متشکل از همه بردارهایی از V که برهمه بردارهای S عمود باشند.

مکمل متعامد V عبارت است از زیرفضای صفر و عکس $V^\perp = \{0\}$. اگر S ذیر-مجموعه‌ای از V باشد، مکمل متعامد آن $\perp S$ (عمود) همواره زیرفضایی از V است. ذیرا $\perp S$ غیرتنهی است، چراکه شامل ۰ است و در صورتی که α و β در $\perp S$ و c اسکالری دلخواه باشد، به ازای هر γ در S

$$(c\alpha + \beta|\gamma) = c(\alpha|\gamma) + (\beta|\gamma)$$

$$= c \circ + 0$$

$$= 0$$

پس، $c\alpha + \beta$ نیز در S قرار می‌گیرد. بنابر قضیه ۴، خاصیت مشخص بردار α این است که تنها بردار W است که $\alpha - \beta$ به W^\perp تعلق دارد.

تعاریف، دلخواهی که بردار α در قضیه ۴ وجود داشته باشد، تصویر متعامد β روی W نامیده می‌شود. اگر هر بردار V تصویر متعامدی در W داشته باشد، نگاشتی که به هر بردار V تصویر متعامد آن در W داشته باشد، تصویر متعامد V روی W نام دارد.

طبق قضیه ۴، تصویر متعامد هر فضای ضرب داخلی روی یک زیرفضای با بعد متناهی، همواره وجود دارد. قضیه ۴ همچنین نتیجه زیر را ایجاب می‌کند.

نتیجه. گیریم V یک فضای ضرب داخلی، W یک زیرفضای با بعد متناهی، E تصویر متعامد V در W باشد. در این حالت نگاشت

$$\beta \rightarrow \beta - E\beta$$

تصویر متعامد V در W^\perp است.

اثبات. β را بردار دلخواهی از V می‌گیریم. آنگاه $\beta - E\beta$ در W^\perp قرار دارد و باز از هر γ در W^\perp ، $\beta - E\beta - \gamma = E\beta + (\beta - E\beta - \gamma) = E\beta - \gamma$. چون $E\beta$ در W و γ متعلق به W^\perp است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|\beta - \gamma\|^2 &= \|E\beta\|^2 + \|\beta - E\beta - \gamma\|^2 \\ &\geq \|\beta - (\beta - E\beta)\|^2 \end{aligned}$$

و وقتی $\beta - E\beta \neq \beta$ ، نامساوی اکید است. بنابراین تقریب برای β توسط بردارهای W^\perp است. \square

مثال ۱۶. به R^3 ضرب داخلی استاند را می‌دهیم. در این صورت تصویر متعامد $(-10, 2, 8)$ روی زیرفضای W ، پدیدآمده توسط $(1, 12, -1)$ ، عبارت است از بردار

$$\alpha = \frac{((-10, 2, 8) | (3, 12, -1))}{9 + 144 + 1} (3, 12, -1)$$

$$= \frac{-14}{154} (3, 12, -1).$$

تصویر متعامد R^3 روی W تبدیل خطی E تعریف شده توسط

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \left(\frac{3x_1 + 12x_2 - x_3}{154} \right) (3, 12, -1)$$

است. مسلماً رتبه E برابر ۱ است؛ وازاین‌رو، پوچیش برابر ۲ است. از طرف دیگر

$$E(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

اگر و تنها اگر $0 = 3x_1 + 12x_2 - x_3$. و این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $\dim(W^\perp) = 2$ باشد. بنابراین، W^\perp فضای پوچ E است و با محاسبه

$$(x_1, x_2, x_3) - \left(\frac{3x_1 + 12x_2 - x_3}{154} \right) (3, 12, -1)$$

می‌بینیم که تصویر متعامد R^3 روی W^\perp عبارت است از تبدیل خطی $E - I$ که بردار (x_1, x_2, x_3) را روی بردار

$$\begin{aligned} \frac{1}{154}(145x_1 - 36x_2 + 3x_3, -36x_1 + 10x_2 + \\ 12x_3, 3x_1 + 12x_2 + 153x_3) \end{aligned}$$

می‌نگارد.

مشاهداتی که در مثال ۱۴ به عمل آمد، به گونه زیر تعمیم می‌یابند.

قضیه ۵. فرض کنیم W زیرفضایی با بعد هستنای از فضای ضرب داخلی V در E تصور متعامد V دوی W باشد. در این صورت E تبدیل خطی خودتوانی از V دوی W است، W^\perp فضای پوچ E است، و

$$V = W \oplus W^\perp.$$

اثبات. β را برداری دلخواه در V می‌گیریم. در این صورت $E\beta$ بهترین نظریب برای β است که در W قرار دارد. بخصوص، وقتی که β متعلق به W باشد، $E\beta = \beta$. بنابراین، به ازای هر β در V ، $E(E\beta) = E\beta$ ؛ یعنی، E خودتوان است: $E^\dagger = E$. برای اینکه ثابت کنیم E تبدیلی خطی است، α و β را بردارهایی از V ، و c را اسکالری دلخواه می‌گیریم. در این صورت، بنابر قضیه ۴، $E\alpha - E\beta$ و $E\beta - E\alpha$ هردو بر هر بردار W ممود هستند. از این‌رو، بردار

$$c(\alpha - E\alpha) + (\beta - E\beta) = (c\alpha + \beta) - (cE\alpha + E\beta)$$

نیز به W^\perp تعلق دارد. چون $cE\alpha + E\beta$ برداری است در W ، از قضیه ۴ نتیجه می‌شود که

$$E(c\alpha + \beta) = cE\alpha + E\beta.$$

بدینهی است که می‌توان خطی بودن E را با استفاده از (۱۱-۸) نیز اثبات کرد. مجدداً β را برداری از V می‌گیریم. آنگاه $E\beta$ یک‌ابردار در W است که در W^\perp دار $\beta - E\beta$ است که در W^\perp قرار دارد. پس، وقتی که β در W^\perp باشد، $E\beta = 0$. عکس، وقتی که β در W^\perp باشد، $E\beta = \beta$ است. معادله W^\perp فضای پوچ E است.

$$\beta = E\beta + \beta - E\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W^\perp = \{0\}$; بعلاوه، $W \cap W^\perp = \{0\}$. زیرا اگر α برداری در $W \cap W^\perp$ باشد، آنگاه $0 = \alpha|\alpha$). بنابراین $\alpha = 0$ ، و V مجموع مستقیم W و W^\perp می‌باشد. \square

نتیجه ۴. تحت شرایط قضیه فوق، $I - E$ تصویر متعامد V دوی W^\perp است. این تصویر تبدیل خطی خودتوانی از V دوی W^\perp دوی W با فضای پوچ W است. پیش از این دیدیم که نگاشت $\beta - E\beta \rightarrow \beta$ تصویر متعامد V روی W^\perp است. چون E تبدیل خطی است، این تصویر روی W^\perp تبدیل خطی $I - E$ می‌باشد. از خواص هندسی این تبدیل خطی مشهود است که $I - E$ تبدیل خودتوانی از V روی W است. این موضوع از محاسبه

$$\begin{aligned} (I - E)(I - E) &= I - E - E + E^2 \\ &= I - E \end{aligned}$$

نیز نتیجه می‌شود. بعلاوه، $(I - E)\beta = \beta$ اگر و تنها اگر $E\beta = 0$; این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر β در W باشد. بنابراین W فضای پوچ $I - E$ است. \square

اکسون فرایندگرام-اشمیت را می‌توان به طور هندسی به طریق زیر تشریح کرد. با مفروض بودن یک فضای ضرب داخلی V و بردارهای β_1, \dots, β_n در V ، عملگر P_k ($k > 1$) را تصویر متعامد V روی مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ می‌گیریم و قرار می‌دهیم $P_k = I$. در این صورت بردارهایی که از به کار بستن فرایند متعامد سازی روی β_1, \dots, β_n به دست می‌آیند، با معادلات

$$\alpha_k = P_k \beta_k \quad 1 \leq k \leq n \quad (12-8)$$

تعریف می‌شوند.

قضیه ۵ نتیجه دیگری را نیز ایجاد می‌کند که به نامساوی بسل^۱ مشهور است.

نتیجه. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای متعامد از بردارهای غیرصرفی

ضرب داخلی V باشد. اگر β بوداری از V باشد، آنگاه

$$\sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leq \|\beta\|^2$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

اثبات. فرض کنیم $\alpha_k = \gamma + \delta$ و در آن $0 = (\gamma|\delta)$. از این رو

$$\|\beta\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2.$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که

$$\|\gamma\|^2 = \sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2}.$$

این محاسبه سر راستی است که در آن از این مطلب که به ازای $k \neq j$ ، $(\alpha_j|\alpha_k) = 0$ استفاده می‌شود. \square

در حالت خاصی که در آن $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه باشد، نامساوی بسل می‌گوید که

$$\sum_k |(\beta|\alpha_k)|^2 \leq \|\beta\|^2.$$

این نتیجه همچنین حاکی است که در این حالت β در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ قرارداده اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k (\beta|\alpha_k) \alpha_k$$

یا اگر و تنها اگر نامساوی بسل واقعاً یک تساوی باشد. بدیهی است در موردی که V با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد، فرمول بالا برای هر بردار β در V برقرار است. بهیان دیگر، اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد، k -مین مختص β در پایه مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ عبارت است از $(\beta|\alpha_k)$.

مثال ۱۵. نتیجه اخیر را روی مجموعه‌های متعامد توصیف شده در مثال ۱۱ به کار می‌بندیم و به دست می‌آوریم که

$$\sum_{k=-n}^n \left| \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \right|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{\sqrt{n} i k t} \right|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2} \cos 2\pi t + \sqrt{2} \sin 4\pi t)^2 dt = 1 + 1 = 2 \quad (\text{ب})$$

تمرین

۱. R^4 با ضرب داخلی استاند را در نظر بگیرید. W را زیرفضایی از R^4 مشکل از همه بردارهایی که هم بر $(2, 3, -1, 1)$ و هم بر $(1, 0, -1, 1)$ عمود $\beta = (2, 3, -1, 1)$ و $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ هستند فرض کنید و پایه‌ای برای W بیابید.

۲. فرایند گرام-اشمیت را بر بردارهای $\beta_1 = (1, 0, -1)$ ، $\beta_2 = (1, 0, 1)$ ، $\beta_3 = (0, 3, 2)$ به کار بیندید تا پایه متعامد یکه‌ای برای R^3 با ضرب داخلی استاند را بدست آورید.

۳. C^3 را با ضرب داخلی استاند در نظر بگیرید. یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای پدید آمده توسط $\beta_i = (1, 0, i)$ و $\beta_4 = (2, 1, 1+i)$ بیابید.

۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. فاصله بین دو بردار α و β در V با

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که

$$(\text{الف}) \quad d(\alpha, \beta) \geq 0$$

$$(\text{ب}) \quad d(\alpha, \beta) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \alpha = \beta$$

$$(\text{پ}) \quad d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$$

$$(\text{ت}) \quad d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$$

۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد، و α و β بردارهایی از V باشند. نشان دهید $\alpha = \beta$ اگر و تنها اگر به ازای هر γ در V ، $(\alpha|\gamma) = (\beta|\gamma)$.

۶. فرض کنید W زیرفضایی از R^2 پدید آمده توسط بردار $(3, 4)$ باشد. با استفاده از ضرب داخلی استاند، E را تصویر متعامد R^2 بروی W بگیرید. مطلوب است:

$$(\text{الف}) \quad \text{فرمولی برای } E(x_1, x_2) :$$

$$(\text{ب}) \quad \text{ماتریس } E \text{ در پایه مرتبت استاند} :$$

$$(\text{پ}) \quad W^\perp :$$

$$(\text{ت}) \quad \text{پایه متعامد یکه‌ای که در آن } E \text{ با ماتریس}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده شود.

۷. فرض کنید V فضای داخلی مشکل از R^2 همراه با ضرب داخلی باشد که فرم درجه دوم آن طبق

$$\|(x_1, x_2)\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

تعریف می‌شود. E را تصویر معتمد V بر روی زیرفضای W پدید آمده توسط بردار $(3, 4)$ می‌گیریم. اکنون به چهار پرسش تمرین ۶ پاسخ دهید.

۸. ضربی داخلی روی R^2 باید که $2 = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ باشد.

۹. فرض کنید V زیرفضایی از $R[x]$ مشکل از چندجمله‌ایهای از درجه حد اکثر ۳ باشد. V را به ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

مجهز کنید.

(الف) مکمل معتمد زیرفضای چندجمله‌ایهای اسکالری را باید.

(ب) فرایند گرام – اشمیت را بر پایه $\{1, x, x^2, x^3\}$ به کار بندید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C با ضرب داخلی $A|B = \text{tr}(AB^*)$ باشد. مکمل معتمد زیرفضای ماتریسهای قطری را باید.

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد. نشان دهید که بازای هر دو بردار α و β در V

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^n (\alpha|\alpha_k)(\overline{\beta|\alpha_k}).$$

۱۲. فرض کنید W زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی V ، و E تصویر متعامد V روی W باشد. ثابت کنید که بازای هر α و β در V ، $(E\alpha|\beta) = (\alpha|E\beta)$.

۱۳. S را زیرمجموعه‌ای از یک فضای ضرب داخلی V می‌گیریم. نشان دهید $\perp(S^\perp)$ زیرفضای پدید آمده توسط S را در بردارد. وقتی که V با بعد متناهی باشد، نشان دهید $\perp(S^\perp)$ همان زیرفضای پدید آمده توسط S است.

۱۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V و A ماتریس T در پایه مرتب B باشد. ثابت کنید

$$A_{ij} = (T\alpha_j | \alpha_i).$$

۱۵. فرض کنید f_1 و f_2 بترتیب ضربهایی داخلی روی W_1 و W_2 باشند. نشان دهید ضرب داخلی یکتا بی چون f روی V وجود دارد که

$$(الف) W_2 = W_1^\perp;$$

$$(ب) وقتی α و β در W_k باشند، $f(\alpha, \beta) = f_k(\alpha, \beta)$.$$

۱۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و W زیرفضایی با بعد متناهی از V باشد. (معمولاً) تصویرهای بسیاری یافت می شوند که برشان W است. یکی از اینها، که تصویر متعامد روی W است، این خاصیت را دارد که بهازای هر α در V $\|E\alpha\| \leqslant \|\alpha\|$. ثابت کنید که اگر E یک تصویر باشد و بهازای هر α در V $\|E\alpha\| \leqslant \|\alpha\|$ است.

۱۷. فرض کنید V فضای ضرب داخلی حقیقی متشكل از فضای توابع پیوسته حقیقی روی فاصله $[-1, 1]$ با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$$

باشد. W را زیرفضای توابع فرد، یعنی توابعی که در $f(-t) = -f(t)$ صدق می کنند، می گیریم. مکمل متعامد W را بیابید.

۳.۸. تابعهای خطی و الحاقیها

قسمت اول این بخش به بحث درموردن تابعهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی و رابطه آنها با ضرب داخلی اختصاص دارد. نتیجه بنیادی این است که هر تابع خطی f روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، «ضربی داخلی درازای برداری ثابت از فضا» است؛ یعنی، چنین f ری بهازای β ثابتی از V به صورت $(\alpha|\beta) = f(\alpha)$ است. این نتیجه را برای اثبات وجود «الحاقی» عملگری خطی چون T روی V ، که خود عملگری خطی چون T^* باشرط $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$ بهازای همه α ها و β های در V است، به کار می برمیم. با استفاده از یک پایه متعامد یکه، این عمل الحاقی روی عملگرهای خطی (رسیدن از T به T^*) همانند با عمل تشکیل ترانهاده مزدوج یک ماتریس، گرفته می شود. سپس درباره شbahت بین عمل الحاقی و مزدوج گیری در اعداد مختلط به اندازه کاوشی می پردازیم. فرض کنیم V فضای ضرب داخلی دلخواه و β بردار ثابتی از V باشد. تابعی چون

f_β از V درهیأت اسکالری را طبق

$$f_\beta(\alpha) = (\alpha|\beta)$$

تعریف می‌کنیم. این تابع β تابعکی خطی روی V است؛ زیرا، بنابر تعریف، $(\alpha|\beta)$ به عنوان تابعی از α خطی است. اگر V با بعد متناهی باشد، هر تابعک خطی روی V بدین طریق از برداری چون β حاصل می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f تابعکی خطی دوی V باشد. در این صورت بوداد یکتاوی چون β در V وجود دارد، که به ازای هر α دو $f(\alpha) = (\alpha|\beta)$ در V .

اثبات. فرض کنیم $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای V باشد. می‌نویسیم

$$\beta = \sum_{j=1}^n \overline{f(\alpha_j)} \alpha_j \quad (13-8)$$

وفرض می‌کنیم f_β تابعک خطی تعریف شده توسط

$$f_\beta(\alpha) = (\alpha|\beta)$$

باشد. در این صورت

$$f_\beta(\alpha_k) = (\alpha_k | \sum_j \overline{f(\alpha_j)} \alpha_j) = f(\alpha_k).$$

جون این مطلب به ازای هر α_k درست است، نتیجه می‌شود که $f = f_\beta$. حال فرض کنیم β برداری در V باشد به طوری که به ازای هر α $(\alpha|\beta) = (\alpha|\gamma)$ و $\gamma = \beta$. پس، دقیقاً یک بردار چون β وجود دارد که تابعک خطی f را به طریقه‌ای که ذکر شد، تعیین می‌کند. □

اثبات این قضیه‌می تواند به صورت دیگری بر حسب نمایش تابعکهای خطی در یک پایه هم بیان شود. اگر پایه متعامدیکه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را برای V انتخاب کنیم، ضرب داخلی $\beta = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n$ و $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$ برابر است با

$$(\alpha|\beta) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

اگر f تابعکی خطی روی V باشد، آنگاه f به ازای اسکالرهای ثابتی چون c_1, \dots, c_n که توسط این پایه تعیین می‌شوند، به صورت

$$f(\alpha) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

نوشته می شود. بدینهی است که $c_j = f(\alpha_j)$. اگر بخواهیم برداری چون β در V یا بیم که به ازای هر α , $f(\alpha|\beta) = f(\alpha)$, روش است که مختصات y_j از β باید در $y_j = c_j$ باشد. از این رو،
 $y_j = \overline{f(\alpha_j)}$ صدق کنند.

$$\beta = \overline{f(\alpha_1)}\alpha_1 + \cdots + \overline{f(\alpha_n)}\alpha_n$$

بردار مطلوب است.

چند توضیح دیگر هم در پیش است. اثباتی را که برای قضیه ۶ ارائه کردیم به طور رضایت بخشی خلاصه است، اما براین واقعیت مهم هندسی که β در مکمل معتماد فضای پوچ f قرار دارد هیچ تأکید نمی کند. گیریم W فضای پوچ f باشد. در این صورت $P = W + W^\perp$ و f توسط مقادیرش روی W^\perp کاملاً تعیین می شود. در واقع، اگر V تصویر معتماد f روی W^\perp باشد، آنگاه به ازای هر α در V

$$f(\alpha) = f(P\alpha).$$

فرض کنیم $f \neq 0$. آنگاه f از رتبه ۱ است و $=$ بعد (W^\perp) . اگر γ برداری غیر صفر در W^\perp باشد، نتیجه می شود که به ازای هر α در V

$$P\alpha = \frac{(\alpha|\gamma)}{\|\gamma\|^2} \gamma.$$

پس، به ازای هر α

$$f(\alpha) = (\alpha|\gamma) \cdot \frac{f(\gamma)}{\|\gamma\|^2}$$

$$\cdot \beta = [\overline{f(\gamma)} / \|\gamma\|^2] \gamma$$

مثال ۱۶. بهتر است مثالی بزنیم که نشان دهد قضیه ۶ بدون این فرض که V با بعد متناهی است، درست نیست. V را فضای برداری چند جمله‌ایهای برروی هیأت اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

می گیریم. این ضرب داخلی را می توان به طور جبری نیز تعریف کرد. اگر $f = \sum \alpha_k x^k$ و $g = \sum b_k x^k$ ، آنگاه

$$(f|g) = \sum_{j,k} \frac{1}{j+k+1} \alpha_j \bar{b}_k.$$

گیریم z عدد مختلط ثابتی و L تابعک خطی «تعیین مقدار در z » باشد:

$$L(f) = f(z).$$

آیا یک چند جمله‌ای چون g وجود دارد که به ازای هر f ، $L(f|g) = L(f)$ ؟ جواب منفی است؛ زیرا فرض کنیم به ازای هر f داشته باشیم

$$f(z) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

با فرض $z = x - h$ ، به ازای هر f داریم $0 = (hf)(z)$. در این صورت به ازای هر

$$0 = \int_0^1 h(t) f(t) \overline{g(t)} dt.$$

به خصوص، این تساوی برای $f = \bar{h}g$ نیز برقرار است، پس

$$\int_0^1 |h(t)|^2 |g(t)|^2 dt = 0$$

و از این رو، $hg = 0$. چون $h \neq 0$ ، باید داشته باشیم $g = 0$. ولی L تابعک صفر نیست؛ بنابراین، چنین g بی وجود ندارد.

این مثال را می‌توان تا اندازه‌ای به حالتی که در آن L ترکیبی خطی از تعیین مقدارهای نقطه‌ای باشد تعمیم داد. فرض کنیم اعداد مختلط ثابتی چون z_1, z_2, \dots, z_n و اسکالرها یی چون c_1, c_2, \dots, c_n انتخاب شده باشند و

$$L(f) = c_1 f(z_1) + \dots + c_n f(z_n)$$

را در نظر بگیریم. در این صورت L تابعک خطی روی V است، اما هیچ g با خاصیت $L(f|g) = (f|g)$ وجود ندارد مگر آنکه $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. حال عیناً استدلال بالا را با $(x - z_1) \dots (x - z_n) = h$ تکرار می‌کنیم. اکنون به مفهوم الحاقی یک عملگر خطی بازمی‌گردیم.

قضیه ۷۸. به ازای هر عملگر خطی T دوی یک فضای ضرب داخلی بعدمتناهی V ، عملگر خطی یکتاپی چون T^* دوی V وجود دارد که به ازای هر α و β از V ،

$$(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta). \quad (14-8)$$

اثبات. گیریم β برداری دلخواه از V باشد. در این صورت $(T\alpha|\beta) \rightarrow \alpha$ تابعک خطی روی V است. بنابر قضیه ۶، بردار یکتاپی چون β' در V وجود دارد که به ازای هر α در V ، $(T\alpha|\beta) = (\alpha|\beta')$. فرض کنیم T^* نگاشت $\beta' \rightarrow \beta$ را نشان دهد:

$$\beta' = T^* \beta.$$

لذا (۱۴-۸) برقرار است، اما باید نشان دهیم که T^* عملگری خطی است. گیریم β و γ در V و c یک اسکالر باشد. در این صورت به ازای هر α ،

$$\begin{aligned} (\alpha | T^*(c\beta + \gamma)) &= (T\alpha | c\beta + \gamma) \\ &= (T\alpha | c\beta) + (T\alpha | \gamma) \\ &= c(T\alpha | \beta) + (T\alpha | \gamma) \\ &= c(\alpha | T^*\beta) + (\alpha | T^*\gamma) \\ &= (\alpha | cT^*\beta) + (\alpha | T^*\gamma) \\ &= (\alpha | cT^*\beta + T^*\gamma). \end{aligned}$$

پس ، $T^*(c\beta + \gamma) = cT^*\beta + T^*\gamma$ و T^* خطی است.
یکنایی T^* واضح است. به ازای هر β در V ، بردار $T^*\beta$ به عنوان بردار β' با
این شرط که به ازای هر α ، $(T\alpha | \beta') = (\alpha | \beta')$ به طور یکتا تعیین می شود. \square

قضیه ۸ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه (موتب) برای V باشد. T ا عملگری خطی دوی V دا ماتریس A داریم
 T د پایه موتب B می گیریم، آنگاه $A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$ است، دادیم
اثبات. چون B یک پایه متعامد یکه است، دادیم

$$\alpha = \sum_{k=1}^n (\alpha | \alpha_k) \alpha_k.$$

ماتریس A با

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj} \alpha_k$$

تعریف می شود، و چون

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n (T\alpha_j | \alpha_k) \alpha_k$$

داریم

$$\square \cdot A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$$

نتیجه. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی دوی V

باشد. در هر پایه متعامد یکه برای V ، ماتریس T^* عبارت است از قرانهاده مزدوج
ماتریس T .

اثبات: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را پایه متعامد یکه ای برای V می گیریم و فرض می کنیم

$$\cdot B = [T^*]_{\mathcal{B}}, A = [T]_{\mathcal{B}}$$

با بر قضیة ۸

$$A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$$

$$B_{kj} = (T^*\alpha_j | \alpha_k).$$

در این صورت طبق تعریف T^* داریم

$$B_{kj} = (T^*\alpha_j | \alpha_k)$$

$$= \overline{(\alpha_k | T^*\alpha_j)}$$

$$= \overline{(T\alpha_k | \alpha_j)}$$

$$= \overline{A_{jk}}. \square$$

مثال ۱۷. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد
روی یک زیرفضای W باشد. در این صورت به ازای هر دو بردار α و β در V

$$\begin{aligned} (E\alpha | \beta) &= (E\alpha | E\beta + (1-E)\beta) \\ &= (E\alpha | E\beta) \\ &= (E\alpha + (1-E)\alpha | E\beta) \\ &= (\alpha | E\beta). \end{aligned}$$

با بر یکتایی عملگر E^* نتیجه می شود که $E^* = E$. حال تصویر E توصیف شده در مثال
۱۴ را در نظر می گیریم. در این صورت

$$A = \frac{1}{154} \begin{bmatrix} 9 & 36 & -3 \\ 36 & 144 & -12 \\ -3 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

عبارت است از ماتریس E در پایه متعامد یکه استانده. چون $A = E^*$ ماتریس E
نیز هست، و چون $A = A^*$ ، این مطلب ناقص نتیجه فوق نیست. از طرف دیگر، فرض کنیم

$$\alpha_1 = (154, 0, 0)$$

$$\alpha_2 = (145, -36, 3)$$

$$\alpha_3 = (-36, 10, 12).$$

در این صورت $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه است و

$$E\alpha_1 = (9, 36, -3)$$

$$E\alpha_2 = (0, 0, 0)$$

$$E\alpha_3 = (0, 0, 0).$$

$$چون (3, 36, -3) = -(145, 0, 0) - (154, 0, 0) \text{، ماتریس } E \text{ در پایه } \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \text{ با تساوی}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. در این حالت، $B^* = E^* = E$ در پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ دارای $B \neq B^*$ ماتریس نیست. با به کار بستن نتیجه فوق در می‌باییم که $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یک پایه متعامد یکه نیست. البته، به هر حال این مطلب آشکار است.

تعریف. گیریم T عملگر خطی دوی یک فضای ضرب داخلی V باشد. در این صورت گوییم T دارای یک الحاقی روی V است، هرگاه عملگر خطی چون T^* دوی V موجود باشد که باعذای هر α و β دو $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$.

بنابر قسمیه ۷، هر عملگر خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد منتها V دارای یک الحاقی روی V است. در حالت با بعد نامتناهی، این مطلب همیشه درست نیست. ولی در هر صورت، حداکثر یک چنین عملگر T^* وجود دارد؛ وقتی که این عملگر وجد داشته باشد، آن را الحاقی T می‌نامیم.

در حالت بعد منتها، تذکر دو مطلب لازم است.

۱. الحاقی T نه تنها به T ، بلکه به ضرب داخلی نیز وابسته است.

۲. همان طور که در مثال ۱۷ نشان داده شد، در پایه مرتب دلخواهی چون B ، رابطه بین $[T]$ و $[T^*]$ پیچیده تراز آن است که در نتیجه فوق ارائه شد.

مثال ۱۸. V را $C^{n \times 1}$ ، فضای ماتریسهای $n \times 1$ مختلط، با ضرب داخلی $X|Y = Y^*X$ می‌گیریم. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد، الحاقی عملگر خطی $X \rightarrow AX$ عبارت است از عملگر $A^*X \rightarrow AX$ زیرا،

$$(AX|Y) = Y^*AX = (A^*Y)^*X = (X|A^*Y).$$

خواننده باید خود را متقاعد کند که این مثال در واقع حالت خاصی از نتیجه اخیر است.

مثال ۱۹ . این مثال مشابه مثال ۱۸ است. V را ضرب داخلی $C^{n \times n}$ می‌گیریم. فرض کنیم M ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی C باشد. الحاقی ضرب از چپ در M ، برایر ضرب از چپ در M^* است. بدیهی است که «ضرب از چپ در M » عملگر خطی L_M تعریف شده با $L_M(A) = MA$ است.

$$\begin{aligned} (L_M(A)|B) &= \text{tr}(B^*(MA)) \\ &= \text{tr}(MAB^*) \\ &= \text{tr}(AB^*M) \\ &= \text{tr}(A(M^*B)^*) \\ &= (A|L_M^*(B)). \end{aligned}$$

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. در محاسبه بالا از خاصیت مشخص تابع دد: $(L_M)^* = L_M$. دوبار استفاده شده است.

مثال ۲۰ . فرض کنیم V فضای چندجمله‌ای‌های بر روی هیئت اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$$

باشد. اگر f چندجمله‌ای $f = \sum a_k x^k$ باشد، فرض می‌کنیم $\bar{f} = \sum \bar{a}_k x^k$. در حقیقت، آن چندجمله‌ای است که تابع چندجمله‌ای وابسته بدان مزدوج مختلط تابع چندجمله‌ای برای f است:

$$\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$$

عملگر «ضرب در f »، یعنی عملگر خطی M_f تعریف شده توسط $M_f(g) = fg$ را در نظر می‌گیریم. این عملگر دارای یک الحاقی، یعنی عملگر ضرب در \bar{f} است. زیرا

$$\begin{aligned} (M_f(g)|h) &= (fg|h) \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)} dt \\ &= \int_0^1 g(t)[\overline{f(t)h(t)}] dt \end{aligned}$$

$$= (g | \bar{f} h)$$

$$= (g | M_{\bar{f}}(h))$$

واز این رو، $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$

مثال ۴۱. در مثال ۲۵ دیدیم که برخی از عملگرهای خطی روی فضاهای ضرب داخلی با بعد نامتناهی نیز دارای الحاقی هستند. به طوری که قبلاً توضیح دادیم، برخی نیز الحاقی ندارند. گیریم V فضای ضرب داخلی مثال ۲۵ و D عملگر مشتق‌گیری روی $C[x]$ باشد. انتگرال گیری جزء به جزء نشان می‌دهد که

$$(Df | g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - f(Dg)$$

g را ثابت می‌گیریم و تحقیق می‌کنیم که چه وقت یک چندجمله‌ای چون D^*g وجود دارد که به ازای هر f ، $(Df | g) = (f | D^*g)$. اگرچنان D^*g بسی وجود داشته باشد، خواهیم داشت

$$(f | D^*g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - (f | Dg)$$

با

$$(f | D^*g + Dg) = f(1)g(1) - f(0)g(0).$$

با g ثابت، $(0 | g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) = f(1)g(1) - f(1)g(0) = L(f)$ تابعی خطی از نوع درنظر گرفته شده در مثال ۱۶ است و نمی‌تواند به صورت $L(f) = (f | h)$ باشد مگر آنکه $h = 0$. اگر $L(f) = (f | h)$ باشد آنگاه به ازای f ، $h = D^*g + Dg$ ، البته داریم $L(f) = (f | h)$ و از این رو $0 = g(1) - g(0) = g(1) - g(0) = g(0)$. وجود چندجمله‌ای مناسبی چون D^*g ایجاب می‌کند که $0 = (1 | g) = g(1) - g(0)$. بعکس، اگر $0 = g(1) - g(0) = g(1) - g(0) = g(0)$ ، چندجمله‌ای $D^*g = -Dg$ به ازای هر f ، در $(Df | g) = (f | D^*g)$ صدق می‌کند. اگر یک g انتخاب کنیم که به ازای آن $0 \neq g(0) \neq g(1)$ باشد، نمی‌توانیم D^*g را به صورت مناسبی تعریف کنیم و از این رو نتیجه می‌گیریم که D دارای الحاقی نیست.

امیدواریم که این مثالها درک خواننده را در مورد الحاقی عملگرهای خطی بیفزاید. می‌بینیم که عمل الحاقی، از T به T^* رسیدن، به نحوی شبیه به مزدوج گیری روی اعداد مختلط رفتار می‌کند. قضیه زیر این شباهت را تقویت می‌کند.

قضیه ۹. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U عملگرهای خطی روی V باشند و c یک اسکالر باشد،

$$:(T+U)^* = T^* + U^* \quad (1)$$

$$:(cT)^* = cT^* \quad (2)$$

$$:(TU)^* = U^* T^* \quad (3)$$

$$\cdot (T^*)^* = T \quad (4)$$

اثبات. برای اثبات (۱)، α و β را بردارهای دلخواه از V می‌گیریم. در این

صورت

$$\begin{aligned} ((T+U)\alpha|\beta) &= (T\alpha+U\alpha|\beta) \\ &= (T\alpha|\beta)+(U\alpha|\beta) \\ &= (\alpha|T^*\beta)+(\alpha|U^*\beta) \\ &= (\alpha|T^*\beta+U^*\beta) \\ &= (\alpha|(T^*+U^*)\beta). \end{aligned}$$

بنا بر یکتایی الحاقی، داریم $(T+U)^* = T^* + U^*$. اثبات (۲) را به خواننده واگذار می‌کنیم. (۳) و (۴) را از روابط

$$\begin{aligned} (TU\alpha|\beta) &= (U\alpha|T^*\beta) = (\alpha|U^*T^*\beta) \\ (T^*\alpha|\beta) &= \overline{(\beta|T^*\alpha)} = \overline{(T\beta|\alpha)} = (\alpha|T\beta) \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم. \square

قضیه ۹ غالباً به صورت زیر بیان می‌شود: نگاشت $T^* \rightarrow T$ پاد یکریختی خطی مزدوجی با دوره تناوب ۲ است. شbahت این عمل با مزدوج گیری مخلوط، که در بالا ذکر شد، مسلماً بر پایه این مشاهده استوار است که مزدوج گیری مخلوط دارای خواص ترتیب در یک ضرب، که عمل الحاقی ایجاد می‌کند، رعایت شود: $(UT)^* = T^*U^*$. همچنان که به مطالعه خود درباره عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی ادامه می‌دهیم، گسترش این شbahت را نیز ذکرمی‌کنیم. اکنون می‌توانیم مطلبی در این زمینه بیان کنیم. یک عدد مخلوط z حقیقی است اگر و تنها اگر $z = \bar{z}$. ممکن است تصویر شود که عملگر خطی T با شرط $T = T^*$ بوجهی شبیه به اعداد حقیقی عمل می‌کند. در واقع همین طور است. مثلاً، اگر T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی مخلوط باشد، آنگاه

$$T = U_1 + iU_2 \quad (15-8)$$

که در آن $U_1 = U_1^*$ و $U_2 = U_2^*$. پس، به یک معنی، T دارای یک «جزء حقیقی» و یک «جزء موهومی» است. عملگرهای U_1 و U_2 ، که در $U_1^* = U_1$ و $U_2^* = U_2$ ، و (۱۵-۸) صدق می‌کنند، یکتا هستند، و از روابط

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{i}} (T + T^*)$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{i}} (T - T^*)$$

به دست می‌آیند.

عملگری خطی مانند T که $T = T^*$ ، خودالحاق (یا هرمیتی) نامیده می‌شود. اگر \mathcal{B} پایه متعامد یکه‌ای برای V باشد، آنگاه

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^*$$

ولذا T خودالحاق است اگر و تنها اگر ماتریس آن در هر پایه متعامد یکه ماتریسی خودالحاق باشد. عملگرهای خودالحاق، نه تنها بدین دلیل ساده که نویعی اجزای حقیقی و موهومی برای عملگر خطی عمومی فراهم می‌آورند، بلکه به دلایل ذیرنیز از اهمیت برخوردارند: (۱) عملگرهای خودالحاق دارای خواص ویژه بسیاری هستند. مثلاً، برای یک چنین عملگری، پایه متعامد یکه‌ای از بردارهای سرشت‌نمای موجود دارد. (۲) بسیاری از عملگرهایی که در عمل پیش می‌آیند خودالحاق هستند. خواص ویژه عملگرهای خودالحاق را بعداً مورد رسیدگی قرار خواهیم داد.

تمرین

۱. V را فضای C^2 با ضرب داخلی استانده بگیرید و فرض کنید T عملگر خطی تعریف شده توسط $(1, -2)T\epsilon_1 + (1, -1)T\epsilon_2 = (i, i)$ باشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ آنگاه $T^*\alpha$ را بباید.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی C^2 باشد که با $(1+i, 2)T\epsilon_1 + (1+i, i)T\epsilon_2 = (i, i)$ تعریف می‌شود. با استفاده از ضرب داخلی استانده، ماتریس T^* در پایه مرتب استانده را بباید. آیا T با T^* جابجا می‌شود؟

۳. فرض کنید V فضای C^3 با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که ماتریس آن در پایه مرتب استانده باشد. $A_{jk} = i^{j+k}$ ، $(i^3 = -1)$ تعريف می‌شود. پایه‌ای برای فضای پوچ T بباید.

۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. نشان دهید که برد T^* مکمل متعامد فضای پوچ T است.

۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد.

اگر T^* معکوس پذیر باشد. نشان دهید که T نیز معکوس پذیر است و $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و β و γ بردارهای ثابتی از V باشند. نشان دهید که $\gamma(\alpha|\beta) = T\alpha$ عملگری خطی روی V تعریف می‌کند. همچنین نشان دهید T دارای یک الحاقی است، و T^* را هم بهطور صریح توصیف کنید.

اگر β فرض کنید V فضای C^n با ضرب داخلی استانده باشد و (y_1, \dots, y_n) در پایه T ماتریس x_1, \dots, x_n در رتبه k باشد. γ در رتبه j ماتریس y_1, \dots, y_n در رتبه k است. این ماتریس چند است؟

۷. نشان دهید حاصلضرب دو عملگر خودالحاق، عملگری است خودالحاق اگر و تنها اگر دو عملگر با یکدیگر جا بجا شوند.

۸. فرض کنید V فضای برداری چندجمله‌ایهای بر روی R با درجه حداقل ۳ و با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

باشد. اگر f عددی حقیقی باشد، چندجمله‌ای g در V را که برای آن به ازای هر t در V ، $(f|g)(t) = f(t)$ باید.

۹. V را فضای ضرب داخلی تعریف A و D را عملگر مشتق‌گیری روی V بگیرید. D^* را بگیرید.

۱۰. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی اعداد مختلط با ضرب داخلی $(A, B) = \text{tr}(AB^*)$ باشد. فرض کنید P ماتریس معکوس پذیر ثابتی از V و T_P عملگری خطی روی V تعریف شده توسط $T_P(A) = P^{-1}AP$ باشد. الحاقی P را بیابید.

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E عملگر خطی خودتوانی روی V باشد، بدین معنی که $E^* = E$. ثابت کنید E خودالحاق است اگر و تنها اگر $EE^* = E^*E$.

۱۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. ثابت کنید که T خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر α در V $(T\alpha|\alpha)$ حقیقی باشد.

۴.۰.۸ عملگر های یکانی

در این بخش، مفهوم یکریختی بین دو فضای ضرب داخلی را مورزد توجه قرار می دهیم. اگر V و W فضاهایی برداری باشند، یک یکریختی از V بروی W تبدیل خطی یک به یکی از V بروی W ، یعنی، تناظری یک به یک بین عناصر V و عناصر W است که عملهای فضای برداری را هم حفظ می کند. اما یک فضای ضرب داخلی مشکل است از یک فضای برداری و یک ضرب داخلی مشخص روی آن فضا. پس وقتی که V و W فضاهای ضرب داخلی باشند، به چنان یکریختی از V بروی W نیاز خواهیم داشت که نه تنها عملهای خطی بلکه ضربهای داخلی را نیز حفظ کند. یک یکریختی از یک فضای ضرب داخلی بروی خودش یک «عملگر یکانی» روی آن فضا نامیده می شود. ما مثالهای گرناگونی از عملگرهای یکانی را مورد رسیدگی قرار خواهیم داد و خواص بنیادی آنها را محقق خواهیم ساخت.

تعريف. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی بروی یک هیأت و T تبدیلی خطی از V دد W باشد. گوییم T ضربهای داخلی را حفظ می کند هرگاه به ازای هر α و هر β دد V ، $T\alpha | T\beta = (\alpha | \beta)$. یک یکریختی از V بروی W عبارت است از یک یکریختی فضای برواری مانند T از V بروی W که ضربهای داخلی را نیز حفظ کند.

اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ ولذا T نامنفرد است. پس یک یکریختی از V بروی W را همچنین می توان به عنوان تبدیلی خطی از V بروی W که ضربهای داخلی را نیز حفظ می کند، تعريف کرد. اگر T یک یکریختی از V بروی W باشد، آنگاه T^{-1} یک یکریختی از W بروی V است؛ از این رو، وقتی که چنین T بی موجود باشد، به طور ساده خواهیم گفت که V و W یکریخت هستند. بدیهی است که یکریختی فضاهای ضرب داخلی، یک رابطه هم ارزی است.

قضیه ۱۵. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی با بعدمتناهی و با ابعاد برابر بروی یک هیأت باشند. اگر T تبدیلی خطی از V دد W باشد، احکام ذیل ها دارند.

(۱) T ضربهای داخلی را حفظ می کند.

(۲) یک یکریختی (فضای ضرب داخلی) است.

(۳) هر پایه متعامد یکه از V دا بروی یک پایه متعامد یکه از W انتقال می دهد.

(۴) پایه متعامد یکه ای از W دا بروی یک پایه متعامد یکه از W انتقال می دهد.

اثبات. (۲) \rightarrow (۱). اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه به ازای هر α در

V $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$. پس، T نامنفرد است، و چون بعد $(W) =$ بعد (V) ، می دانیم که T یک یکریختی فضای برداری است.

(۳) \rightarrow (۲). فرض کنیم T یک یکریختی باشد. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را یک پایه متعامد یکه برای V می گیریم. چون T یک یکریختی فضای برداری است و بعد $(V) =$ بعد (W) ، نتیجه می شود که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ پایه ای برای W است.

چون T ضربهای داخلی را نیز حفظ می‌کند، $(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}$ (۴) \rightarrow (۳). این مرحله نیازی به توضیح ندارد.

(۱) \rightarrow (۴). فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ چنان پایه متعامد یکه‌ای برای V باشد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ نیز یک پایه متعامد یکه برای W باشد. آنگاه

$$(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}.$$

به ازای هر $\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$ و $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ در V داریم

$$(\alpha | \beta) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

$$(T\alpha | T\beta) = (\sum_j x_j T\alpha_j | \sum_k y_k T\alpha_k)$$

$$= \sum_j \sum_k x_j \bar{y}_k (T\alpha_j | T\alpha_k)$$

$$= \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

ولذا T حاصلضربهای داخلی را حفظ می‌کند. \square

نتیجه. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی بودوی یک هیئت باشند. در این صورت V و W یکریخت از اگر و تنها اگر دادای ابعاد پراپر باشند.

اثبات. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد، فرض می‌کنیم T تبدیل خطی از V در W باشد که $T\alpha_j = \beta_j$ تعریف می‌شود. در این صورت T یک یکریختی از V بر روی W است. \square

مثال ۰۲۲ اگر V یک فضای ضرب داخلی n بعدی باشد، آنگاه هر پایه متعامد یکه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک یکریختی از V بر روی F^n با ضرب داخلی استانده، تعیین می‌کند. این یکریختی چیزی نیست جز تبدیل خطی

$$T(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

یکریختی ظاهرآ متفاوتی از V بر روی فضای $F^{n \times 1}$ با $(X | Y) = Y^* X$ به عنوان ضرب داخلی هم وجود دارد که با \mathcal{B} تعیین می‌شود. این یکریختی عبارت است از

$$\alpha \rightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}}$$

یعنی تبدیلی که α را به ماتریس مختصات آن در پایه مرتب \mathcal{B} می‌فرستد. به ازای هر پایه مرتب \mathcal{B} ، این یک یکریختی فضای برداری است؛ اما، این یکریختی، یک یکریختی از دو فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر \mathcal{B} متعامد یکه باشد.

مثال ۰۲۳ در اینجا به یکریختی پر مایه ترسی می‌پردازیم. گیریم W فضای همه

ماتریسها بی ۳ $X 3$ چون A بر روی R که متقارن کج هستند، یعنی $A^t = -A$ باشد. R را به ضرب داخلی $(A|B) = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^t)$ مجهز می کنیم؛ $\frac{1}{2}$ صرفاً به منظور راحتی گذاشته شده است. V را فضای R^3 با ضرب داخلی استاندارد می گیریم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت T فضای V را بر روی W می نگارد و با قراردادن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB^t) &= x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 \\ &= 2(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1). \end{aligned}$$

پس، $(\alpha|\beta) = (T\alpha|T\beta) = (T\alpha|T\beta) = (T\alpha|T\beta)$ و T یک یکریختی فضای برداری است. توجه کنید که T پایه استاندارde $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ را بر روی پایه متعامد یکه مشکل از سه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

انتقال می دهد.

مثال ۴۶. تشریح یک یکریختی همیشه بر حسب پایه های متعامد یکه نیست که راحت است. مثلاً $G = P^*P$ را که در آن P ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری با درایه های مختلف است در نظر می گیریم. فرض کنیم V فضای ماتریسهای $n \times 1$ مختلف با ضرب داخلی استاندارde $[X|Y] = Y^*G X$ باشد. W را همان فضای برداری ولی با ضرب داخلی استاندارde $(X|Y) = Y^*X$ می گیریم. می دانیم که V و W دو فضای ضرب داخلی یکریخت هستند. به نظر می رسد که مناسبترین راه برای تشریح یک یکریختی بین V و W طریق ذیر باشد:

گيريم T تبديلي خطى از V در W تعريف شده با $T(X) = PX$ باشد. در اين صورت

$$\begin{aligned} (TX | TY) &= (PX | PY) \\ &= (PY)^*(PX) \\ &= Y^* P^* P X \\ &= Y^* G X \\ &= [X | Y]. \end{aligned}$$

از اين رو، T يك يکريختى است.

مثال ۲۵ گيريم V فضاي همه توابع حقيقي پيوسته روی فاصله يكسته $1 \leq t \leq 0$ با ضرب داخلی

$$[f | g] = \int_0^1 f(t)g(t)t^2 dt$$

باشد. W را همان فضاي برداری ولی با ضرب داخلی

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

مي گيريم. فرض كنيم T تبديلي خطى از V در W باشد كه با

$$(Tf)(t) = tf(t)$$

داده مي شود. در اين صورت $[Tf | Tg] = [f | g]$ ، و لذا T ضربهای داخلی را حفظ مي کند؛ ولی T يك يکريختى از V بر روی W نيست، چرا كه برد T برابر تمام W نيست. بدوي است، اين امر به اين دليل رخ مي دهد كه بعد فضاي برداری زمينه متناهي نيست.

قضيه ۱۴ ۱۰. گيريم V و W دو فضاي ضرب داخلی بروي يك هيات و T تبديلي خطى از V در W باشد. در اين صورت T ضربهای داخلی (ا) حفظ مي کند اگر و تنها اگر به ازاي هر $\alpha \in V$ داشته باشد.

اثبات. اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، «نرمها را نيز حفظ مي کند». فرض كنيم به ازاي هر $\alpha \in V$ داشته باشيم $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$. در اين صورت $\|T\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$. حال با استفاده از اتحاد قطبي مناسبى چون $(3-8)$ یا $(4-8)$ و اين واقعیت كه T خطى است، به آسانی ديده مي شود كه به ازاي هر α و هر $\beta \in V$ داشته باشيم $\|T(\alpha|\beta)\| = \|(\alpha|\beta)\|$.

تعريف. يك عملگر يكاني روی يك فضاي ضرب داخلی، عبارت است از يك يکريختى از آن فضا بر روی خودش.

حاصل ضرب دو عملگر یکانی عملگری است یکانی زیرا، اگر U_1 و U_2 یکانی باشند، آنگاه $U_2 U_1 \alpha = ||U_2 \alpha|| = ||U_1 \alpha|| = ||\alpha||$. همچنین، معکوس یک عملگر یکانی عملگری است یکانی؛ زیرا $U \alpha = ||U \alpha|| = ||\alpha||$ حاکی است که $U^{-1} \beta = \beta$ ؛ در اینجا $\alpha = U \alpha$. چون عملگر یکانی بهوضوح یکانی است، می بینیم که مجموعه همه عملگرهای یکانی روی یک فضای ضرب داخلی تحت عمل ترکیب یک گروه است. اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و U عملگری خطی روی V باشد، قضیه ۱۰ حاکی است که U یکانی است اگر و تنها اگر به ازای هر α و β در V ، $(U\alpha|U\beta) = (\alpha|\beta)$ ؛ یا، اگر و تنها اگر به ازای یک (هر) پایه متعامد یکه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ این درست باشد که $\{U\alpha_1, \dots, U\alpha_n\}$ هم یک پایه متعامد یکه است.

قضیه ۱۳. گیریم U عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی V باشد. آنگاه U یکانی است اگر و تنها اگر U^* ، الملاعی U ، وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$. ثابت. فرض کنیم U یکانی باشد. در این صورت U معکوس پذیر است و به ازای هر α و β

$$(U\alpha|\beta) = (U\alpha|UU^{-1}\beta) = (\alpha|U^{-1}\beta).$$

از این رو U الملاعی است.

بعکس، فرض کنیم U^* وجود داشته باشد و $U^*U = I$. آنگاه U معکوس پذیر است و $U^{-1} = U^*$. لذا، کافی است نشان دهیم که U ضربهای داخلی را حفظ می کند به ازای همه α ها و همه β ها داریم

$$\begin{aligned} (U\alpha|U\beta) &= (\alpha|U^*U\beta) \\ &= (\alpha|I\beta) \\ &= (\alpha|\beta). \quad \square \end{aligned}$$

مثال ۲۶. $C^{n \times 1}$ را با ضرب داخلی $X|Y = Y^*X$ در نظر می گیریم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بر روی C و U عملگر خطی تعریف شده توسط $U(X) = AX$ باشد. آنگاه به ازای هر X و هر Y

$$(UX|UY) = (AX|AY) = Y^*A^*AX.$$

از این رو، U یکانی است اگر و تنها اگر $A^*A = I$.

تعریف. ماتریس $n \times n$ مختلف A یکانی نامیده می شود، هرگاه $A^*A = I$.

قضیه ۱۴. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و U عملگری خطی دوی V باشد. در این صورت U یکانی است اگر و تنها اگر ماتریس U در یک (یا هر) پایه

متعامد يكه هرتب ماتريسي يكاني باشد.

اثبتات. در اين مرحله از کار، اين چندان قضيه‌اي نیست، ولی ما عمدتاً آن را برای تأکید بيان می‌کنیم. اگر $\{B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \text{ پايه متعامد}\}$ مرتبي برای A و V ماتريس U نسبت به B باشد، آنگاه $A^*A = I$ اگر و تنها اگر $U^*U = I$. اکنون نتیجه از قضيه ۱۲ حاصل می‌شود. \square

گيريم A ماتريسي $n \times n$ باشد. اين عبارت که A يكاني است، به طور ساده بدین معنی است که

$$(A^*A)_{jk} = \delta_{jk}$$

يا

$$\sum_{r=1}^n \overline{A_{rj}} A_{rk} = \delta_{jk}.$$

به بیان دیگر، معنی آن این است که ستونهای A مجموعه متعامد يکه‌ای از ماتریسهای ستونی، نسبت به ضرب داخلی استانده $X|Y = Y^*X$ ، تشکیل می‌دهند. چون $A^*A = I$ و تنها اگر $AA^* = I$ ، می‌بینیم که A دقیقاً وقی يكاني است که سطرهای A مخصوصاً متعامد يکه‌ای از n تابیه‌ای واقع در C^n (با ضرب داخلی استانده) باشند. لذا، با به کار گیری خصوصیات داخلی استانده، A يكاني است اگر و تنها اگر سطرها و ستونهای A مجموعه‌های متعامد يکه باشند. در اینجا مثالي از قدرت این قضيه حاکم از اینکه هر معمکوس يك طرفه يك ماتریس يك معمکوس دوطرفه آن هم هست، به چشم می‌خورد. همان طور که در بالا هم انجام دادیم، با به کار بستن این قضیه مثلاً روی ماتریسهای حقیقی، نتیجه زیر عاید می‌شود. فرض کنیم يك آرایه مربعی از اعداد حقیقی داشته باشیم به طوری که مجموع توانهای دوم در ایهای هر سطر برابر ۱، و سطرهای متمایز متعامد باشند. آنگاه مجموع توانهای دوم در ایهای هر سطون برابر ۱ است و ستونهای متمایز هم متعامد هستند. اگر بدون استفاده از هر گونه معلوماتی درباره ماتریسهای، اثبات این مطلب را برای يك آرایه 3×3 بنویسید، مسلماً تحت تأثیر قرار خواهد گرفت.

تعريف. يك ماتریس $n \times n$ حقیقی یا مختلط A ، متعامد نامیده می‌شود، هرگاه $A^*A = I$

هر ماتریس متعامد حقیقی، يكاني هم هست؛ و هر ماتریس يكاني متعامد است اگر و تنها اگر همه در ایهای هایش حقیقی باشند.

مثال ۳۷. حال چند مثال از ماتریسهای يكاني و متعامد عرضه می‌کنیم.

(الف) ماتریس 1×1 ، $[c]$ متعامد است اگر و تنها اگر $c = \pm 1$ و يكاني است اگر

و تنها اگر $|c| = e^{i\theta}$ ، شرط دوم (به طور بدینه) بین معنی است که $|c| = 1$ یا $\theta = 0$ حقيقی است.

(ب) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A متعامد است اگر و تنها اگر

$$A' = A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

بسادگی دیده می‌شود که دترمینان هر ماتریس متعامد برای $a \neq 0$ است. پس A متعامد است اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

که در آن $a^2 + b^2 = 1$. این دو حالت به وسیله مقدار $\det A$ مشخص می‌شوند.

(پ) روابط معروف بین توابع مثلثاتی نشان می‌دهند که ماتریس

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

متعامد است. اگر θ عددی حقیقی باشد، آنگاه A_θ عبارت است از ماتریس عملگر خطی U_θ دوران به اندازه زاویه θ ، در پایه مرتب استاند R^2 . این بیان که A_θ یک ماتریس متعامد حقیقی (و از این رو یکانی) است، جز اینکه U_θ عملگر یکانی است معنایی ندارد. واین هم بدین معنی است که ضربهای نقطه‌ای حفظ می‌شوند.

(ت) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A یکانی است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

قدر مطلق دترمینان هر ماتریس يکانی برابر ۱ است و از این رو عددی مختلط به صورت $e^{i\theta}$ ، به ازای عدد حقیقی θ ، است. پس، A يکانی است اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

که در آن θ عددی حقیقی است و a و b اعدادی مختلط باشرط $|a|^2 + |b|^2 = 1$ هستند.

همان طور که قبلا هم ذکر شد، عملگرهاي يکانی روی یک فضای ضرب داخلی يک گروه تشکيل می دهند. از اين مطلب و قضيه ۱۳ نتيجه می شود که مجموعه $U(n)$ متشکل از همه ماتریسهای يکانی $n \times n$ نیز یک گروه است. پس، معکوس يک ماتریس يکانی و حاصل ضرب دوما تریس يکانی ماتریسی است يکانی. البته این مطلب به طور مستقیم هم به آسانی دیده می شود. ماتریس A ای مانند $A \in n \times n$ با درایه های مختلط يکانی است اگر و تنها اگر $A^{-1} = A^*$. بنابراین، اگر A يکانی باشد، داریم $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^* = (A^*)^{-1}$. اگر A و B دوما تریس يکانی $n \times n$ باشند، آنگاه

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*.$$

فرایند گرام - اشميit در C^n نتيجه های جالب برای ماتریسها دارد که متضمن گروه $U(n)$ است.

قضيه ۱۴. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مختلط معکوس پذیر B ماتریس پایین متشتم يکتايی چون M ، با درایه های ثبت دو قطر اصلی، وجود دارد که MB يکانی است. اثبات. سطرهای β_1, \dots, β_n از B يک پایه برای C^n تشکيل می دهند. گيريم $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای حاصل از β_1, \dots, β_n با فرایند گرام - اشميit باشند. در اين صورت، به ازای $n \leq k \leq 1$ ، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه متعامدی برای زيرفضای پدیده آمده توسط $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ است و

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j < k} \frac{(\beta_k | \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j.$$

از اين رو، به ازای هر k اسکالرهاي يکتا چون C_{kj} وجود دارند که

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j < k} C_{kj} \beta_j.$$

گيريم U ماتریسی يکانی با سطرهای

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \dots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$$

و M ماتریس تعریف شده توسط

$$M_{kj} = \begin{cases} -\frac{1}{\|\alpha_k\|} C_{kj} & \text{هر گاه } j < k, \\ \frac{1}{\|\alpha_k\|} & \text{هر گاه } j = k, \\ 0 & \text{هر گاه } j > k, \end{cases}$$

باشد. در این صورت M پایین مثلثی است، به این معنی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن هستند. درایه‌های M_{kk} از M که روی قطر اصلی قرار دارند همه مثبت هستند و

$$\frac{\alpha_k}{\|\alpha_k\|} = \sum_{j=1}^n M_{kj} \beta_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

مسلمان این تساویها چیزی جز

$$U = MB$$

را بیان نمی‌کنند. برای اثبات یکنایی M ، فرض کنیم $T^+(n)$ مجموعه همه ماتریسهای پایین مثلثی $n \times n$ مختلط با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی را نشان دهد. فرض کنیم M_1 و M_2 عناصری از $T^+(n)$ باشند که به ازای 2 در $U(n) M_1 B, i = 1, 2$ در $U(n) M_2 B$ قرار داشته باشد. در این صورت چون $(U(n))$ یک گروه است

$$(M_1 B)(M_2 B)^{-1} = M_1 M_2^{-1}$$

نیز در $(U(n))$ قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، هر چند کلاً آشکار نیست، $T^+(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. راهی برای دیدن این مطلب، در نظر گرفتن خواص هندسی تبدیلهای خطی

$$X \rightarrow MX, \quad (T^+(n) M)$$

روی فضای ماتریسهای ستونی است. پس $M_1 M_2^{-1}$ ، $M_1 M_2^{-1}$ ، $M_1 M_2^{-1}$ همه در $T^+(n)$ قرار دارند. اما چون $M_1 M_2^{-1}$ در $(U(n))$ است، $(M_1 M_2^{-1})^* = (M_1 M_2^{-1})^{-1} = (M_2 M_1^{-1})$. ترانهاده یا ترانهاده مزدوج هر ماتریس پایین مثلثی، یک ماتریس بالا مثلثی است. بنابراین $M_1 M_2^{-1}$ هم بالا مثلثی وهم پایین مثلثی است، یعنی قطری است. یک ماتریس قطری یکانی است اگر و تنها اگر قدر مطلق هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی آن مساوی 1 باشد؛ اگر درایه‌های قطری همه مثبت باشند، باید برابر 1 باشند. از این رو، $M_1 M_2^{-1} = I$ و

$$\square \cdot M_1 = M_2$$

فرض کنیم $GL(n)$ مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ مختلط معکوس پذیر را نشان دهد.

آنگاه $GL(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. این گروه را گروه خطی عمومی می‌نامیم. قضیه ۱۴ با نتیجه ذیل هم ارز است.

نتیجه. به ازای هر $B \in GL(n)$ ماتریس‌های یکتا بی چون N و U وجود دارند که $\gg U(n) \gg T^+(n) \gg N$ است، و

$$B = N \cdot U.$$

اثبات. بنا بر قضیه، ماتریس یکتا بی چون M در $T^+(n)$ وجود دارد که MB در $U(n)$ است. فرض کنیم $MB = U$ و $M = M^{-1} \cdot N = M^{-1}$. در این صورت، N در $T^+(n)$ است و $B = N \cdot U$. از طرف دیگر، اگر دوماتریس N و U داده شده باشد بهطوری که N در $T^+(n)$ و U در $U(n)$ باشد و $B = N \cdot U$ ، آنگاه $N^{-1}B = N^{-1} \cdot N \cdot U = U$ در $T^+(n)$ قرار دارد و همان $N^{-1}B$ است که قضیه مشخص می‌کند؛ علاوه بر این، U لزوماً همان $N^{-1}B$ است. \square

مثال ۲۸. گیریم x_1 و x_2 اعدادی حقیقی باشد که $1 = x_1 + x_2$ و $x_1 \neq 0$.

فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با به کار بستن فرایندگرام - اشمیت بر سطرهای B ، بردارهای

$$\alpha_1 = (x_1, x_2, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 0) - x_2(x_1, x_2, 0)$$

$$= x_1(-x_2, x_1, 0)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 1)$$

حاصل می‌شوند. U را ماتریسی با سطرهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ، و α_3/α_1 می‌گیریم. در این صورت U یکانی است و

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال با ضرب در معکوس ماتریس

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در می‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اگنون با اختصار تغییر مختصات در یک فضای ضرب داخلی را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ دو پایه متعامد یکه مرتب برای V باشند. ماتریس $n \times n$ (از و م معکوس پذیر) یکتا یسی چون P وجود دارد که به ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\beta} = P^{-1}[\alpha]_{\beta}.$$

اگر V یکتا عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $U\alpha_j = \alpha'_j$ باشد، آنگاه P عبارت است از ماتریس U در پایه مرتب β :

$$\alpha'_k = \sum_{j=1}^n P_{jk} \alpha_j.$$

چون β و β' دو پایه متعامد یکه هستند، U عملگری یکانی و P ماتریسی یکانی است. اگر T عملگر خطی داخواهی روی V باشد، آنگاه

$$[T]_{\beta} = P^{-1}[T]_{\beta} P = P^*[T]_{\beta} P.$$

تعریف. گیریم A و B دو ماتریس $n \times n$ مختلط باشند. گوییم B هم ارز یکانی با A است، هرگاه ماتریس یکانی $n \times n$ مانند P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$. گوییم B هم ارز متعامد با A است، هرگاه ماتریس متعامد $n \times n$ مانند P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$.

با این تعریف آنچه را که در بالا مشاهده کردیم می‌توانیم به شرح ذیل بیان کنیم: اگر β و β' دو پایه متعامد یکه مرتب برای V باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی T

روی V ماتریس $[T]$ هم ارز یکانی با ماتریس $[T]$ است. در حالتی که V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، این ماتریسها، با واسطه یک ماتریس متعامد حقیقی، هم ارز متعامد هستند.

تمرین

۱. ماتریسی یکانی ببینید که متعامد نباشد، و ماتریس متعامدی ببینید که یکانی نباشد.
۲. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ مختلط با ضرب داخلی $(A|B) = \text{tr}(AB^*)$ باشد. به ازای هر M در V را عملگری خطی بگیرید که با $T_M(A) = MA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T_M یکانی است اگر و تنها اگر M ماتریسی یکانی باشد.
۳. فرض کنید V مجموعه اعداد مختلط باشد که به عنوان یک فضای برداری حقیقی در نظر گرفته شده است.
 - (الف) نشان دهید $(\alpha|\beta) = \text{Re}(\alpha\bar{\beta})$ ضربی داخلی روی V تعریف می‌کند.
 - (ب) یک یکریختی (فضای ضرب داخلی) از V بر روی \mathbb{R}^2 با ضرب داخلی استاندۀ عرضه کنید.
 - (پ) به ازای هر γ در V ، M_γ را عملگر خطی روی V تعریف شده با بگیرید و نشان دهید $(M_\gamma)^* = M_{\bar{\gamma}}$
 - (ت) به ازای کدام اعداد مختلط مانند γ ، ماتریس M_γ خودالحاق است؟
 - (ث) به ازای کدام γ ، ماتریس M_γ یکانی است؟
 - (ج) به ازای کدام γ ، ماتریس M_γ مثبت است؟
 - (چ) $\det(M_\gamma)$ چیست؟
 - (ح) ماتریس M_γ را در پایه $\{e_1, e_2\}$ به دست آورید.
 - (خ) اگر T عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم و کافی برای T ببینید که به ازای γ بی مساوی M_γ باشد.
 - (د) عملگری یکانی روی V ببینید که به ازای هر γ مساوی M_γ نباشد.
۴. فرض کنید V فضای \mathbb{R}^2 با ضرب داخلی استاندۀ باشد. اگر U عملگری یکانی روی V باشد، نشان دهید ماتریس U در پایه مرتب استاندۀ، به ازای θ بی جیقی، $0 < \theta \leq 2\pi$ یکی از دو ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

U_θ را عملگر خطی متناظر به اولین ماتریس، یعنی U را دوران به اندازه زاویه θ بگیرید.
حال خود را مقاعد کنید که هر عملگر یکانی روی V یا یک دوران است یا یک انعکاس حول
محور ϵ_4 و به دنبالش یک دوران.

(الف) U_ϕ چیست؟

(ب) نشان دهید که $U_\theta^* = U_\theta$.

(پ) فرض کنید β یک عدد حقیقی ثابت و $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \mathcal{B}$ پایه متعامد یک حاصل
از دوران $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ به اندازه زاویه β باشد، یعنی $\alpha_j = U_\phi \epsilon_j$. اگر θ عدد حقیقی
دیگری باشد، ماتریس U در پایه مرتب \mathcal{B} چیست؟

۵. فرض کنید V فضای \mathbb{R}^3 با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید W صفحه پدید آمده
توسط $\alpha = (1, 1, -2)$ و $\beta = (1, 1, 1)$ باشد. U را عملگری خطی بگیرید که
به طور هندسی، به صورت زیر تعریف می شود: U دوران به اندازه زاویه θ حول خط
مستقیم مار از مبدأ است که بر W عمود است. علاوه بر W دو دوران از این نوع وجود دارد.
یکی را انتخاب کنید و ماتریس U را در پایه مرتب استانده بیاورد. (یکی از راههایی را
که می توان دریش گرفت این است. α_1 و α_2 می را که پایه متعامد یکهای برای W
تشکیل می دهند، بیاورد. α_3 را برداری بانرم ۱ بگیرید که بر W عمود باشد. ماتریس
 U در پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را بیاورد. یک تغییر پایه انجام دهید).

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و W زیرفضایی از V باشد. در این
صورت $W^\perp = W \oplus W^\perp$ ؛ یعنی، هر α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = \beta + \gamma$ با
 β در W و γ در W^\perp قابل بیان است. حال عملگری خطی چون U را طبق
 $U\alpha = \beta - \gamma$ تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید U هم خود الحاق است و هم یکانی.

(ب) اگر V فضای \mathbb{R}^3 با ضرب داخلی استانده و W زیرفضایی پدید آمده توسط

(۱، ۰، ۱) باشد، ماتریس U را در پایه مرتب استانده بیاورد.

۷. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط و T عملگر خطی خودالحاقی روی V
باشد. نشان دهید

(الف) به ازای هر α در V ، $\|\alpha + iT\alpha\| = \|\alpha - iT\alpha\|$

(ب) $\alpha + iT\alpha = \beta + iT\beta$ اگر و تنها اگر $\alpha = \beta$.

(پ) $I + iT$ نامنفرد است.

(ت) $I - iT$ نامنفرد است.

(ث) حال فرض کنید V با بعد متناهی باشد. ثابت کنید

$$U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$$

عملگري يكاني است؛ U را مبدل كيلی برای T می‌ناميم. به معنای خاصی، $f(t) = U$ و $f(x) = \frac{1 - ix}{1 + ix}$

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید ماتریسهای ذیل به طور يكاني هم ارزند.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

۹. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگر خطی مثبتی روی V و P_T ضرب داخلی روی V تعریف شده با $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T\beta)$ باشد. فرض کنید U عملگر خطی روی V و U^* الحاقی آن نسبت به $(\cdot|\cdot)$ باشد. ثابت کنید که U نسبت به ضرب داخلی p_T يكاني است اگر و تنها اگر $T = U^*TU$.

۱۰. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. به ازای هر α و β در V ، $T_{\alpha,\beta}$ را عملگر خطی روی V تعریف شده با $(\gamma|\beta\alpha) = (\gamma|\beta)(\alpha|\beta)$ بگیريد و نشان دهید:

$$(الف) T_{\beta,\alpha}^* = T_{\alpha,\beta}$$

$$(ب) \text{tr}(T_{\alpha,\beta}) = (\alpha|\beta)$$

$$(پ) T_{\alpha,\beta}T_{\gamma,\delta} = T_{\alpha,\beta(\gamma|\delta)}$$

(ت) تحت چه شرایطی $T_{\alpha,\beta}$ خودالحاق است؟

۱۱. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی m بعدی بر روی هیأت F و $L(V,V)$ فضای عملگرهای خطی روی V باشد. نشان دهید يك ضرب داخلی يكتا روی $L(V,V)$ با این خاصیت وجود دارد که به ازای هر α و β در V ، $\|T_{\alpha,\beta}\|^2 = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$. این $T_{\alpha,\beta}$ عملگر تعریف شده در تمرین ۱۰ است. يك یکریختی بین $L(V,V)$ با این ضرب داخلی و فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F با ضرب داخلی $(AB) = \text{tr}(AB^*)$ بیاید.

۱۲. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. در تمرین ۶ نشان دادیم که عملگرهای خطی روی V که هم خودالحاق و هم يكاني باشند چگونه ساخته می‌شوند. حال ثابت کنید که عملگر دیگری از اين نوع وجود ندارد، یعنی ثابت کنید که هر عملگر يكاني خودالحاق، از زیرفضایی چون W طبق آنچه که در تمرین ۶ تشریح شد ناشی می‌شود.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و با ابعاد مساوی باشند. فرض کنید U يك یکریختی از V بر روی W باشد. نشان دهید:

(الف) نگاشت $^1UTU^{-1} \rightarrow T$ یک یکریختی از فضای برداری $L(V, V)$ بروی فضای برداری $L(W, W)$ است.

(ب) بهازای هر T در $L(V, V)$ $\text{tr}(UTU^{-1}) = \text{tr}(T)$

(پ) $UT_{\alpha, \beta} U^{-1} = T_{U\alpha, U\beta}$ در تمرین ۱۵ تعریف شده است.

(ت) $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$

(ث) اگر $L(V, V)$ را به ضرب داخلی $*(T_1 | T_2) = \text{tr}(T_1 T_2)$ مجهز و بهمین نحو درمورد $L(W, W)$ عمل کنیم، آنگاه $^1UTU^{-1} \rightarrow T$ یک یکریختی فضاهای ضرب داخلی خواهد بود.

۱۴. اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، یک حرکت صلب عبارت است از تابعی چون N (نه لزوماً خطی) از V در V به طوری که بهازای هر α و β در V

$$\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|.$$

هر عملگر یکانی خطی مثالی از حرکت صلب است. مثالی دیگر، انتقال به اندازه یک بردار ثابت γ است:

$$T_\gamma(\alpha) = \alpha + \gamma$$

(الف) فرض کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید T حرکتی صلب از V باشد، و نیز $\circ = T \circ$. ثابت کنید T خطی و عملگری یکانی است.

(ب) نتیجه قسمت (الف) را به کار گیرید و ثابت کنید که هر حرکت صلب از R^4 ترکیبی است از یک انتقال و بهذبال آن عملگری یکانی.

(پ) اکنون نشان دهید که هر حرکت صلب از R^2 یا انتقالی است که یک دوران بهذبال آن می‌آید یا انتقالی است که بهذبالش یک انعکاس وسپس یک دوران می‌آید.

۱۵. یک عملگر یکانی روی R^4 (با ضرب داخلی استانده) به طور ساده عملگری خطی است که فرم درجه دوم

$$\|(x, y, z, t)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

را حفظ می‌کند، یعنی عملگری خطی چون U است که به ازای هر α در R^4 $\|U\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$. در بخش معینی از نظریه نسبیت یافتن عملگر خطی T که فرم

$$\|(x, y, z, t)\|_L^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

را حفظ کند، مورد نظر است. $\| \cdot \|_L$ منتاج از ضربی داخلی نیست، بلکه از چیزی به نام «متريک لورنس» (که وارد بحث آن نمی‌شویم) ناشی می‌شود. بدین دلیل، عملگری خطی چون T روی R^4 که بهازای هر α در R^4 $\|T\alpha\|_L^2 = \|\alpha\|_L^2$ ، یک تبدیل لورنس نامیده می‌شود.

(الف) نشان دهید تابع U که با

$$U(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، یک یکریختی از R^4 بروی فضای برداری حقیقی H مشکل از همه ماتریس‌های مختلط 2×2 خودالحق است.

(ب) نشان دهید $\|\alpha\|_L^2 = \det(U\alpha)$

(پ) فرض کنید T یک عملگر خطی (حقیقی) روی فضای H مشکل از ماتریس‌های خودالحق 2×2 باشد. نشان دهید $L = U^{-1}TU$ عملگر خطی روی R^4 است.

(ت) گیریم M یک ماتریس مختلط 2×2 باشد. نشان دهید که $T_M(A) = M^*AM$ عملگر خطی چون T_M روی H تعریف می‌کند. (حتماً بررسی کنید که H, T_M را در H می‌نگارد.)

(ث) اگر M ماتریسی 2×2 باشد با $|\det M| = 1$ ، نشان دهید که $L_M = U^{-1}T_MU$ یک تبدیل لورنتس روی R^4 است.

(ج) یک تبدیل لورنتس بیا بیند که به صورت L_M نباشد.

۵.۸. عملگرهای نرمال

هدف اصلی در این بخش حل مسئله زیر است. اگر T عملگر خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد، تحت چه شرایطی V دارای یک پایه متعامد یکه‌ای مشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است؟ به بیان دیگر، چه وقت یک پایه متعامد یکه‌ای B برای V وجود دارد که ماتریس T در پایه B قطری باشد؟

کار خود را با استخراج چند شرط لازم روی T که بعداً نشان خواهیم داد این شرایط کافی نیز هستند، آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای V با خاصیت

$$T\alpha_j = c_j \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (16-8)$$

باشد. این شرط صرفاً بیان می‌کند که ماتریس T در پایه مرتب B ماتریس قطری با درایه‌های c_1, \dots, c_n است. عملگر الحاقی T در همین پایه مرتب توسط ماتریس ترانهاده مزدوج، یعنی ماتریس قطری با درایه‌های قطری c_1, \dots, c_n نمایش داده می‌شود. اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، اسکالرهاي c_1, \dots, c_n (مسلمان) حقیقی هستند، و از این رو باید داشته باشیم $T = T^*$. به بیان دیگر، اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی باشد و T هم عملگر خطی که برایش یک پایه متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نمای وجود دارد، آنگاه T باید خودالحق باشد. اگر V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد، لزومی ندارد که اسکالرهاي c_1, \dots, c_n حقیقی باشند، یعنی لازم نیست که T خودالحق باشد. ولی توجه کنید که T باید در

$$TT^* = T^*T \quad (17-8)$$

صدق کند. زیرا، هردو ماتریس قطری با هم جا بجا می‌شوند و چون T و T^* در پایه مرتب \mathcal{B} هردو توسط ماتریس‌های قطری نمایش داده می‌شوند، (۱۷-۸) برقرار است. این واقعیت، نسبتاً جالب است که در حالت مختلط هم این شرط برای ایجاب وجود یک پایه متعامد یکه از بردارهای سرشت نمایانگی است.

تعريف. گوییم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی دوی V باشد. گوییم T نرمال است، هرگاه با الحاقیش جا بجا شود، یعنی $TT^* = T^*T$

هر عملگر خودالحاق نرمال است، همان‌طور که هر عملگر یکانی هم نرمال است. هر ضرب اسکالری هر عملگر نرمال عملگری است نرمال. اما، مجموع و حاصل ضرب عملگرهای نرمال، در حالت عمومی نرمال نیستند. گرچه به هیچ وجه لازم نیست، ولی ما مطالعه درباره عملگرهای نرمال را با بررسی عملگرهای خودالحاق آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱۵. گوییم V یک فضای ضرب داخلی و T عملگر خطی خودالحاق دوی V باشد. در این صورت هر مقدار سرشت نمای T حقیقی است و بردارهای سرشت نمای T وابسته به مقادیر سرشت نمای متمایز، متعامد هستند. اثبات. فرض کنیم C یک مقدار سرشت نمای T باشد، یعنی، به ازای بردار غیر صفری چون $\alpha, \alpha \neq c\alpha$. در این صورت:

$$\begin{aligned} c(\alpha | \alpha) &= (c\alpha | \alpha) \\ &= (T\alpha | \alpha) \\ &= (\alpha | T\alpha) \\ &= (\alpha | c\alpha) \\ &= \bar{c}(\alpha | \alpha). \end{aligned}$$

چون $(\alpha | \alpha) \neq 0$ ، باید داشته باشیم $c \neq 0$. همچنین فرض کنیم داشته باشیم $T\beta = d\beta$ با $\beta \neq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned} c(\alpha | \beta) &= (T\alpha | \beta) \\ &= (\alpha | T\beta) \\ &= (\alpha | d\beta) \\ &= \bar{d}(\alpha | \beta) \\ &= d(\alpha | \beta). \end{aligned}$$

$$\square \cdot (\alpha | \beta) = 0, \text{ آنگاه } c \neq d$$

با یادخاطر نشان کنیم که قضیه ۱۵: طلبی درباره وجود مقادیر سرشت نما و یا بردارهای سرشت نما بیان نمی کند.

قضیه ۱۶. ۱۶. دوی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی ثابت، هر عملگر خودالحاق دادای یک بردار سوشت نمای (غیرصفر) است.

اثبات. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد $n > 0$ ، $T, n \in \mathbb{R}$ عملگر خودالحاقی روی V باشد. پایه متعامد یکهای چون \mathcal{B} برای V انتخاب وفرض می کنیم $A = [T]$. چون $A = A^*$ ، داریم $T = T^*$. حال گیریم W فضای ماتریسهای $1 \times n$ روی C با ضرب داخلی $(X | Y) = Y^* X$ باشد. در این صورت $U(X) = AX$ عملگر خطی خودالحاق U روی W را تعریف می کند. چندجمله‌ای سرشت نما، $\det(xI - A)$ ، یک چندجمله‌ای درجه n بر روی اعداد مختلط است؛ و هر چندجمله‌ای بر روی C از درجه مثبت یک ریشه دارد. پس عدد مختلطی چون c وجود دارد که $\det(cI - A) = 0$. این بدان معنی است که $A - cI$ منفرد است، یا اینکه X غیرصفری وجود دارد که $AX = cX$. چون عملگر U (ضرب در A) خودالحاق است، از قضیه ۱۵ نتیجه می شود که c حقیقی است. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، می توانیم X را طوری انتخاب کنیم که درایه‌هایش حقیقی باشند. زیرا در آن صورت $A - cI$ دارای درایه‌های حقیقی هستند و چون $A - cI$ منفرد است، دستگاه $(A - cI)X = 0$ یک جواب حقیقی غیرصفر X دارد. نتیجه اینکه بردار غیرصفری چون α در V وجود دارد که $T\alpha = c\alpha$. \square

چند نکته درمورد اثبات وجود دارد که بهتر است به ذکر آنها پرداخته شود.

(۱) اثبات وجود X غیرصفری که $AX = cX$ ، ربطی به این واقعیت که A هرمیتی (خودالحاق) است ندارد. این اثبات نشان می دهد که هر عملگر خطی روی یک فضای برداری مختلط با بعد متناهی، دارای برداری سرشت نماست. درمورد یک فضای ضرب داخلی حقیقی، از خاصیت خودالحاق A قویاً استفاده می شود تا بهما بفهماند که مقادیر سرشت نمای A حقیقی هستند و از این رو می توانیم X مناسی با درایه‌های حقیقی بیابیم.

(۲) استدلال نشان می دهد که چندجمله‌ای سرشت نمای هر ماتریس خودالحاق،

علیرغم اینکه درایه‌های این ماتریس ممکن است حقیقی نباشند، ضرایب حقیقی دارد.

(۳) این فرض که V با بعد متناهی است برای اثبات قضیه لازم است؛ یک عملگر خودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی ممکن است حتی یک مقدار سرشت نما هم نداشته باشد.

مثال ۲۹. گیریم V فضای برداری توابع مختلط (یا حقیقی) پیوسته روی فاصله $[t_0, t_1]$ با ضرب داخلی

$$(f | g) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \overline{g(t)} dt$$

باشد. عملگر «ضرب توسط t »، $(Tf)(t) = tf(t)$ ، خودالحاقی است. فرض می‌کنیم $Tf = cf$ در این صورت

$$(t - c)f(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

وازاین رو، به ازای $t \neq c$ ، $f(t) = 0$. چون f پیوسته است، $f = 0$. پس، T هیچ مقدار (بردار) سرشت نمایندارد.

قضیه ۱۷. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و عملگری خطی دوی V باشد. فرض کنیم W ذیفضایی از V باشدکه تحت T پایایاست. دراین صورت مکمل متعامد W تحت T^* هم پایایاست.

اثبات. یادآوری می‌کنیم این واقعیت که W تحت T پایای است بدین معنی نیست که هر بردار W توسط T ثابت نگهداشته می‌شود؛ بلکه بدین معنی است که اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ نیز در W^\perp قراردارد. β را در W^\perp می‌گیریم. باید نشان دهیم که $T^*\beta$ در W^\perp قراردارد، یعنی باید نشان دهیم که به ازای هر α در W ، $0 = \langle \alpha | T^*\beta \rangle = \langle T\alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | T\beta \rangle$. اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ هم در W^\perp قرار دارد و ازاین رو $0 = \langle T\alpha | \beta \rangle$. ولی \square . $\langle T\alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | T^*\beta \rangle$

قضیه ۱۸. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگر خطی خودالحاقی دوی V باشد. دراین صورت پایه متعامد یکهای برای V وجود دارد که هر بردار آن یک بردار سرشت نمای T است.

اثبات. فرض کنیم $0 > \text{بعد}(V)$. بنا بر قضیه ۱۶، T دارای بردار سرشت نمایی چون α است. بردار $\|\alpha\|/\alpha = \alpha/\|\alpha\|$ را در نظر می‌گیریم و در این صورت α_1 یک بردار سرشت نمای T است که $1 = \|\alpha_1\| = \|\alpha\|$. اگر $1 = \text{بعد}(V)$ ، کار تمام است. اگر نون به استقرارا روی بعد V پیش می‌رویم. فرض کنیم قضیه برای فضاهای ضرب داخلی با ابعاد کمتر از بعد (V) درست باشد. W را زیرفضای یک بعدی پدید آمده توسط بردار α_1 می‌گیریم. این حکم که α_1 یک بردار سرشت نمای T است، به طور ساده بدین معنی است که W تحت T پایای است. بنا بر قضیه ۱۷، مکمل متعامد W^\perp تحت $T^* = T$ پایای است. حال W^\perp با ضرب داخلی V ، یک فضای ضرب داخلی است که بعدش یکی کمتر از بعد V است. U را عملگر خطی القا شده توسط T روی W^\perp ، یعنی تحدید T به W^\perp می‌گیریم. آنگاه U خودالحاق است، و بنا بر فرض استقرارا، W^\perp پایه متعامد یکهای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ است. بردارهای سرشت نمای U دارد. حال هر یک از این بردارها یک بردار سرشت نمای T هم هست و چون $W^\perp = W \oplus W^\perp$ ، نتیجه می‌گیریم که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مطلوب برای V است. \square

نتیجه. فرض کنیم A یک ماتریس هرمیتی (خودالحاقی) $n \times n$ باشد. دراین صورت

ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است (اگر A هم‌اذ یکانی با ماتریسی قطری است). اگر A یک ماتریس متفاوت حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است.

اینهاست. گیریم V فضای $C^{n \times 1}$ با ضرب داخلی استانده و T عملگری خطی روی V باشد که در پایه مرتب استانده توسط A نمایش داده می‌شود. چون $A = A^*$ داریم $T = T^*$. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{c_1, \dots, c_n\}$ پایه متعامد یکه مرتبی برای V باشد که $D = [T]_{j=1, \dots, n} \alpha_j = c_j \alpha_j$ آنگاه D ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_1, \dots, c_n است. P را ماتریسی با بردارهای ستونی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ می‌گیریم. در این صورت $D = P^{-1}AP$.

در حالتی که همه درایه‌های A حقیقی باشند، می‌توان V را فضای R^n با ضرب داخلی استانده گرفت و استدلال را تکرار کرد. در این حالت، P ماتریسی یکانی با درایه‌های حقیقی، یعنی یک ماتریس متعامد حقیقی خواهد بود. \square

از ترکیب قضیه ۱۸ با نکاتی که در ابتدای این بخش ذکر شد نتیجه ذیل حاصل می‌شود: اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه V یک پایه متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نمای T دارد اگر و تنها اگر A خودالحاق باشد. به بیانی همارز، اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که P^*AP قطری است اگر و تنها اگر $A = A^*$. برای ماتریسهای متفاوت مختلط چنین نتیجه‌ای وجود ندارد. به بیان دیگر، برای ماتریسهای مختلط، بین شرایط $A = A^*$ و $A = A^t$ تفاوت عمده‌ای وجود دارد.

با تعیین تکلیف حالت خودالحاق، اکنون به مطالعه حالت عمومی عملگرهای نرمال باز می‌گردیم. نظیر قضیه ۱۸ را برای عملگرهای نرمال در حالت مختلط، اثبات خواهیم کرد. البته دلیلی برای این محدودیت وجود دارد. یک عملگر نرمال روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی ممکن است هیچ بردار سرشت‌نمای غیرصفری نداشته باشد. به عنوان مثال، این امر برای همه دورانهای در R^2 ، بجز دو تا، صادق است.

قضیه ۱۹. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگری نرمال دوی α برداری در V باشد. در این صورت α یک بردار سرشت‌نمای T با مقدار سرشت‌نمای c است اگر و تنها اگر α یک بردار سرشت‌نمای T^* با مقدار سرشت‌نمای c باشد.

اینهاست. فرض می‌کنیم U عملگری نرمال روی V باشد. آنگاه U با به کار بردن شرط $UU^* = U^*U$ دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} \|U\alpha\|^2 &= (U\alpha|U\alpha) = (\alpha|U^*U\alpha) \\ &= (\alpha|UU^*\alpha) = (U^*\alpha|U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2. \end{aligned}$$

اگر c اسکالر دلخواهی باشد، عملگر $T - cI = U$ نرمال است. زیرا

$$(T - cI)^* = T^* - \bar{c}I$$

و بسادگی ثابت می‌شود که $UU^* = U^*U$. پس

$$\|(T - cI)\alpha\| = \|(T^* - \bar{c}I)\alpha\|.$$

از این رو، $\square \cdot (T^* - \bar{c}I)\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha = 0$.

تعریف. ماتریس $n \times n$ مختلط A نرمال نامیده می‌شود هرگاه $AA^* = A^*A$.

در ک اینکه نرمال بودن ماتریسها یا عملگرها واقعاً به چه معنی است، چندان آسان نیست؛ اما، در تلاش جهت ایجاد تصویری برای این مفهوم، لازم است توجه شود که ماتریسی مثلثی نرمال است اگر و تنها اگر قطری باشد.

قضیه ۲۵. گیریم V یک فضای خوب داخلی با بعد متناهی، T عملگری خطی در V و B پایه متعامد یکهای برای V باشد. فرض کنیم A ماتریس T در پایه B بالا مثلثی باشد. در این صورت T نرمال است. اگر و تنها اگر A ماتریسی قطری باشد.

اثبات. چون B یک پایه متعامد یکه است، A^* ماتریس T در B است. اگر T قطری باشد، آنگاه $AA^* = A^*A$ ، و این مطلب ایجاب می‌کند که $TT^* = T^*T$ است. عکس، فرض کنیم T نرمال باشد و $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ آنگاه، چون A بالا مثلثی است، $T\alpha_1 = A_{11}\alpha_1$. بنابر قضیه ۱۹، این مطلب ایجاب می‌کند که $T^*\alpha_1 = \bar{A}_{11}\alpha_1$. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} T^*\alpha_1 &= \sum_j (A^*)_{j1}\alpha_j \\ &= \sum_j \bar{A}_{1j}\alpha_j. \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای هر $j > 1$ ، $A_{1j} = 0$ بخصوص، $A_{12} = 0$ و چون A بالا مثلثی است، نتیجه می‌گیریم که

$$T\alpha_2 = A_{22}\alpha_2.$$

پس، $T^*\alpha_2 = \bar{A}_{22}\alpha_2$ و به ازای هر $j \neq 2$ ، $A_{2j} = 0$. با ادامه این روش درمی‌یابیم که A قطری است. \square

قضیه ۲۶. فرض کنیم V یک فضای خوب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگری خطی در V باشد. در این صورت پایه متعامد یکهای برای V وجود داده که در آن ماتریس T بالا مثلثی است.

اثبات. گیریم n بعد V باشد. وقتی $n = 1$ ، قضیه درست است. با استغراق روی n پیش می‌رویم و فرض می‌کنیم که نتیجه برای عملگرهای خطی روی فضاهای ضرب داخلی

مختلط با بعد $1 - n$ درست باشد. چون V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی است، بردار یکهای چون α در V و اسکالاری چون c وجود دارند که

$$T^* \alpha = c\alpha.$$

گیریم W مکمل معتمد زیرفضای پدیدآمده توسط α و S تحدید T به W باشد. بنا بر قضیه ۱۷، فضای W تحت T پایاست. پس S عملگری خطی روی W است. چون W دارای بعد $1 - n$ است، فرض استقره وجود پایهٔ معتمد یکهای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_n\}$ برای W را ایجاب می‌کند که در آن ماتریس S بالامثلی است. حال فرض می‌کنیم $T^* \alpha = \alpha$. آنگاه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ معتمد یکهای برای V است که در آن ماتریس T بالامثلی است. \square

این قضیه برای ماتریسها نتیجهٔ زیر را ایجاب می‌کند.

نتیجه. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مختلط A ماتریسی یکانی چون U وجود دارد که $U^{-1}AU$ بالامثلی است.

اکنون با ترکیب قضیه ۲۱ و قضیه ۲۵، بلافرضه مشابه قضیه ۱۸ را به شرح زیر برای عملگرهای نرمال به دست می‌آوریم.

قضیه ۲۳. فرض می‌کنیم V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگر نرمالی روی V باشد. داین صودت V دارای پایهٔ معتمد یکهای متشكل از بردارهای سرشنای T است.

مجدداً تعبیری ماتریسی هم وجود دارد.

نتیجه. به ازای هر ماتریس نرمال A ، ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ ماتریس قطری است.

تمرین

۱. برای هر یک از ماتریسهای متقارن حقیقی A در ذیل، یک ماتریس معتمد حقیقی چون P بیابید که P^*AP قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

۲. آیا هر ماتریس متقارن مختلط، خودالحاق است؟ آیا نرمال است؟

۳۰ برای

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^t AP = D$ قطری است. یکی از این ماتریسهای قطری D را باید.

۴۰ V را ضرب داخلی استانده بگیرید. T را عملگری خطی روی V بگیرید که در پایه مرتب استانده توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود. نشان دهید که T نرمال است و پایه متعامد یکهای، مشکل از بردارهای سرشت نمای T برای V باید.

۵. مثالی از یک ماتریس 2×2 چون A بیاورید که A^2 نرمال باشد ولی A نرمال نباشد.

۶. فرض کنید T عملگر نرمالی روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی باشد. ثابت کنید بر حسب اینکه همه مقادیر سرشت نمای T حقیقی، مثبت، یا با قدر مطلق ۱ باشند، T خودالحاق، مثبت، یا یکانی است. (از قضیه ۲۲ برای تحويل مسئله به سؤالی مشابه درباره ماتریسهای قطری استفاده کنید).

۷. T را عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی بعد متناهی V بگیرید و فرض کنید T هم مثبت و هم یکانی باشد. ثابت کنید $T = I$.

۸. ثابت کنید T نرمال است اگر و تنها اگر $T = T_1 + iT_2$ که در آن T_1 و T_2 عملگرهای خودالحاقی هستند که با یکدیگر جا بجا می شوند.

۹. ثابت کنید که هر ماتریس متقارن حقیقی دارای یک ریشه سوم متقارن حقیقی است، یعنی اگر A متقارن حقیقی باشد، ماتریسی متقارن حقیقی چون B وجود دارد که $B^3 = A$.

۱۰. ثابت کنید که هر ماتریس مثبت، مربع یک ماتریس مثبت است.

۱۱. ثابت کنید که هر عملگر نرمال و پوچ توان برابر عملگر صفر است.

۱۲. اگر T عملگری نرمال باشد، ثابت کنید بردارهای سرشت نمای T وابسته به مقادیر

سرشت نمای متمایز، متعامدند.

۱۳. فرض کنید T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعدهای متناهی باشد.
ثابت کنید یک چندجمله‌ای چون f با ضرايب مختلط وجود دارد که $(T^*)^* = f(T)$.
 T را توسط ماتریسی قطری نمایش دهید و بینید f چه باید باشد.
۱۴. اگر دو عملگر نرمال (با یکدیگر) جایجا شوند، ثابت کنید که حاصل ضرب آنها نیز نرمال است.

دانلود از سایت (یافی سرا)
www.riazisara.ir

عملگر های روی فضاهای ضرب داخلی

۱۰۹. مقدمه

بیشتر مطالب مورد بحث در فصل ۸ بنیانی هستند و هر کسی باید آنها را بداند. فصل حاضر برای دانشجویان پیش‌رفته‌تر یا برای خوانندگانی در نظر گرفته شده است که مشتاق‌اند معلومات خود را درباره عملگر های روی فضاهای ضرب داخلی گسترش دهند. به استثنای قضیه محور اصلی که اساساً چیزی جز فرمول بندی دیگری از قضیه ۱۸ درباره قطري کردن متاعمد عملگر های خودالحق نیست و بجز سایر قضایای بخش ۲۰.۹ مر بوط به فرمها، مطالب آخر فصلهای ۵ و ۷ انتظار زیادتری داشتیم در این فصل نیز از خواننده توقع بیشتری داریم. استدلالها و اثباتها بهشیوه‌ای فشرده‌تر نوشته شده‌اند و تقریباً هیچ مثالی جهت هموار ساختن راه وجود ندارد. با این وجود سعی کرده‌ایم تعداد زیادی تمرین در دسترس خواننده بگذاریم.

سه بخش اول به نتایج مر بوط به فرمها روی فضاهای ضرب داخلی و رابطه بین فرمها و عملگر های خطی اختصاص داده شده‌اند. بخش بعد مر بوط به نظریه طیفی است؛ یعنی با نتایج قضایای ۱۸ و ۲۲ از فصل ۸ درباره قطري کردن عملگر های نرمال و خودالحق سروکار دارد. در بخش آخر، مطالعه عملگر های نرمال را دنبال می کنیم؛ بخصوص به حالت حقیقی می‌پردازیم و ضمن عمل، این پرسش را که قضیه تجزیه اولیه از فصل ۶ درباره

عملگرهای نرمال چه می‌گوید، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳.۹. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی

اگر T عملگر خطی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد، تابع تعریف شده روی $V \times V$ طبق

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

ممکن است به عنوان نوعی جانشین برای T محسوب شود. بسیاری از پرسشهای درباره T با سؤالاتی درباره f هم ارز هستند. در حقیقت، بسادگی دیده می‌شود که f عملگر T را مشخص می‌کند. زیرا اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه معتمد یکهای برای V باشد، آنگاه درایه‌های ماتریس T در \mathcal{B} با

$$A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

تعیین می‌شوند. فهم این نکته مهم است که از دیدگاهی بیشتر تجربیدی چگونه f عملگر T را مشخص می‌کند. تعریف ذیل خواص بسیار مهم f را تشریح می‌کند.

تعریف. یک فرم (یک و نیم خطی) روی یک فضای بردادی حقیقی یا مختلط V ، تابعی چون f روی $V \times V$ با مقادیر درهای اسکالرهاست که به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in V$ و همه اسکالرهای c

$$f(c\alpha + \beta, \gamma) = cf(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma) \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, c\beta + \gamma) = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \quad (\text{ب})$$

پس، یک فرم یک و نیم خطی f تابعی روی $V \times V$ است که به ازای یک β ثابت $f(\alpha, \beta)$ تابعی خطی از α باشد و به ازای یک α ثابت تابع خطی مزدوی از β . در حالت حقیقی $f(\alpha, \beta)$ ، به عنوان تابعی از هر یک از شناسه‌ها، خطی است، به این دیگر، یک فرم دوخطی است. در حالت مختلط، فرم یک و نیم خطی f دوخطی نیست، مگر آنکه $f = 0$. در باقیمانده این فصل، بجز در مواردی که ذکر آن مهم به نظر برسد صفت «یک و نیم خطی» را حذف خواهیم کرد.

اگر f و g دو فرم روی V باشند و c یک اسکالر، به آسانی می‌توان نشان داد که $cf + g$ نیز یک فرم است. از این مطلب نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی از فرمهای روی V ، مجدداً یک فرم است. از این‌رو، مجموعه همه فرمهای روی V زیرفضایی از فضای برداری همه توابع اسکالری روی $V \times V$ است.

قضیه ۱: گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f یک فرم روی V باشد. داکن صد و تیز عملگر خطی یکتا بی چون T روی V وجود دارد که به ازای هر $\alpha, \beta \in V$

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

ونگاشت $T \rightarrow f$ یک یکریختی از فضای فرمها بودی $L(V, V)$ است. اثبات. بردار ثابت β از V را در نظر می‌گیریم. آنگاه $f(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha$ تابعی (تابعکی) خطی روی V است. بنا بر قضیه ۶ از فصل ۸ بردار یکتایی چون β' در V وجود دارد که بهازای هر α , $f(\alpha, \beta) = (\alpha | \beta')$. تابعی چون U از V در V را با قراردادن $U\beta = \beta'$ تعریف می‌کنیم. در این صورت بهازای هر α, β , و γ در V وهمه اسکالارهای c

$$\begin{aligned} f(\alpha | c\beta + \gamma) &= (\alpha | U(c\beta + \gamma)) \\ &= cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ &= c(\alpha | U\beta) + (\alpha | U\gamma) \\ &= (\alpha | cU\beta + U\gamma). \end{aligned}$$

پس U عملگری خطی روی V است و $T = U^*$ عملگری است که بهازای هر α و هر β داریم $(T\alpha | \beta) = (T'\alpha | \beta)$. اگر همچنین داشته باشیم آنگاه $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$ ، بهازای هر α و هر β

$$(T\alpha - T'\alpha | \beta) = 0$$

و از این رو، بهازای هر α داریم $T\alpha = T'\alpha$. پس، بهازای هر فرم f , عملگر خطی یکتایی چون T_f وجود دارد که بهازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta) = (T_f\alpha | \beta).$$

اگر f و g دو فرم باشند و c یک اسکالر، آنگاه بهازای هر α و β در V

$$\begin{aligned} (cf + g)(\alpha, \beta) &= (T_{cf+g}\alpha | \beta) \\ &= cf(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta) \\ &= c(T_f\alpha | \beta) + (T_g\alpha | \beta) \\ &= ((cT_f + T_g)\alpha | \beta). \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_{cf+g} = cT_f + T_g$$

و از این رو، $T_f \rightarrow f$ نگاشتی خطی است. بهازای هر T در $L(V, V)$ ، تساوی $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$

فرمی تعریف می‌کند که $T_f = T$ و $T_f = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$. بنابراین، T_f یک یکریختی است. \square

نتیجه. تساوی

$$(f | g) = \text{tr}(T_f T_g^*)$$

ضربی داخلی روی فضای فرمها با این خاصیت تعریف می‌کند که به ازای هر پایه متعامدیکه
 $V \ni \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$$(f | g) = \sum_{j,k} f(\alpha_k, \alpha_j) \overline{g(\alpha_k, \alpha_j)}.$$

اثبات. از مثال ۳ فصل ۸ بسادگی نتیجه می‌شود که $(T, U) = \text{tr}(TU^*)$ ضربی
 داخلی روی $L(V, V)$ است. چون $f \rightarrow T_f$ یک یکریختی است، مثال ۶ از فصل ۸ این نشان
 می‌دهد که

$$(f | g) = \text{tr}(T_f T_g^*)$$

نیز یک ضرب داخلی است. حال فرض کنیم A و B ماتریسهای T_f و T_g در پایه متعامدیکه
 $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشند. در این صورت

$$A_{jk} = (T_f \alpha_k | \alpha_j) = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و $(AB)^* = B_{jk} A_{jk} = (T_g \alpha_k | \alpha_j) = g(\alpha_k, \alpha_j)$ در پایه \mathcal{B} است، نتیجه
 می‌گیریم که

$$(f | g) = \text{tr}(AB^*) = \sum_{j,k} A_{jk} \bar{B}_{jk}. \quad \square$$

تعریف. اگر f یک فرم باشد و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتب دلخواهی از V
 ماتریس A با درایه‌های

$$A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

ماتریس f در پایه \mathcal{B} مرتب نامیده می‌شود.

وقتی که \mathcal{B} یک پایه متعامدیکه باشد، ماتریس f در \mathcal{B} ماتریس تبدیل خطی T_f نیز
 هست، اما در حالت عمومی این طور نیست.

اگر A ماتریس f در پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که
 به ازای همه اسکالرها y و x ($1 \leq r, s \leq n$)

$$f\left(\sum_s x_s \alpha_s, \sum_r y_r \alpha_r\right) = \sum_{r,s} \bar{y}_r A_{rs} x_s. \quad (1-9)$$

به بیان دیگر، ماتریس A دارای این خاصیت است که

$$f(\alpha, \beta) = Y^* A X.$$

در اینجا X و Y بترتیب ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} هستند. ماتریس f

در پایه دیگر

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, \quad (1 \leq j \leq n)$$

با بر معادله

$$A' = P^* A P$$

تثیین می‌شود. زیرا

$$\begin{aligned} A'_{jk} &= f(\alpha'_k, \alpha'_j) \\ &= f\left(\sum_s P_{sk} \alpha_s, \sum_r P_{rj} \alpha_r\right) \\ &= \sum_{r,s} \overline{P}_{rj} A_{rs} P_{sk} \\ &= (P^* A P)_{jk}. \end{aligned}$$

چون برای ماتریس‌های یکانی، $P^* = P^{-1}$ ، از (۲-۹) چنین برمی‌آید که نتایج مر بوط بهم ارزی یکانی را می‌توان در مطالعه فرمها هم به کار برد.

قضیه ۳. گیریم f فرمی دوی یک فضای خوب داخلی مختلط بعد متناهی V باشد.
د د این صورت پایه متعامدیکه‌ای برای V وجود دارد که در آن ماتریس f بالا مثلثی است.
اثبات. فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشد که به ازای هر α و β ،
 $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$. بنا بر قضیه ۲۱، پایه متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ وجود
دارد که در آن ماتریس T بالا مثلثی است. از این رو وقی که $j > k$

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = 0. \square$$

تعريف. یک فرم f دوی یک فضای بردادی حقیقی یا مختلط V هرمیتی نامیده
می‌شود، هرگاه به ازای هر α و β د د

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد و f فرم

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

آنگاه $(T^* \alpha | \beta) = (\alpha | T\beta) = \overline{(f(\beta, \alpha))}$ ؛ از این رو، f هرمیتی است اگر و تنها اگر
 T خود الحق باشد.

وقی که f هرمیتی باشد، به ازای هر α ، مقدار $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است و این خاصیت
روی فضاهای مختلط فرمایه‌های هرمیتی را مشخص می‌سازد.

قضیه ۴. گیریم V یک فضای بردادی مختلط باشد و f فرمی دوی V که به ازای
هر α ، $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است. د این صورت f هرمیتی است.
اثبات. گیریم α و β بردارهایی از V باشند. باید نشان دهیم که

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$$

اما

$$f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta).$$

چون $f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)$ همه حقیقی هستند، عدد $f(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ هم حقیقی است. با استفاده از همین برهان ولی با $\alpha + i\beta$ به جای $\alpha + \beta$ می بینیم که آنها را برابر مزدوجهای مختلطشان قرار می دهیم و بدست می آوریم که

$$f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) = \overline{f(\alpha, \beta)} + \overline{f(\beta, \alpha)}$$

$$-if(\alpha, \beta) + if(\beta, \alpha) = \overline{if(\alpha, \beta)} - \overline{if(\beta, \alpha)}.$$

اگر معادله دوم را در \mathbb{Z} ضرب کیم و نتیجه را به معادله اول بیفزاییم، داریم

$$2f(\alpha, \beta) = 2\overline{f(\beta, \alpha)}. \square$$

نتیجه. گیریم T عملگری خطی دوی یک فضای ضرب داخلی با بعد منتها مختلط باشد. دد این صورت T خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha, \beta \in V$ $(T\alpha | \alpha)$ حقیقی باشد.

قضیه ۴. (قضیه محور اصلی). به ازای هر فرم هرمیتی f دوی یک فضای ضرب داخلی بعد منتها V ، پایه متعامد یکهای برای V وجود دارد که دلآن f با یک ماتریس قطری با درایه‌های حقیقی نهایش داده می شود.
 اثبات. گیریم T عملگری خطی باشد که به ازای هر $\alpha, \beta \in V$ $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$. در این صورت چون $(T\beta | \alpha) = (\alpha | T\beta)$ و $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$ ، نتیجه می شود که به ازای هر $\alpha, \beta \in V$

$$(T\alpha | \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)} = (\alpha | T\beta)$$

واز این رو، $T = T^*$. بنا بر قضیه ۱۸ از فصل ۸، پایه متعامد یکهای برای V وجود دارد که مشکل از بردارهای سرشتمای T است. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه باشد و به ازای هر $j \leq n$

$$T\alpha_j = c_j \alpha_j.$$

در این صورت

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = \delta_{kj} c_k$$

و بنا بر قضیه ۱۵ از فصل ۸ همه c_k ها حقیقی هستند. \square

نتیجه. تحت شرایط بالا

$$f\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k y_k \alpha_k\right) = \sum_j c_j x_j \bar{y}_j.$$

تمرین

۱. کدامیک از توابع f ذیل، تعریف شده روی بردارهای $\beta = (y_1, y_2)$ و $\alpha = (x_1, x_2)$ در C^2 ، فرمایهای (یک و نیم خطی) روی C^2 هستند؟

$$\cdot f(\alpha, \beta) = 1 \quad \text{(الف)}$$

$$\cdot f(\alpha, \beta) = (x_1 - \bar{y}_1)^2 + x_2 y_2 \quad \text{(ب)}$$

$$\cdot f(\alpha, \beta) = (x_1 + \bar{y}_1)^2 - (x_1 - \bar{y}_1)^2 \quad \text{(پ)}$$

$$\cdot f(\alpha, \beta) = x_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 y_1 \quad \text{(ت)}$$

۲. فرض کنید f فرمی روی R^2 باشد که با

$$f(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

تعریف می‌شود. ماتریس f در هر یک از پایه‌های ذیل را بیا بید:

$$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, -1), (0, 1)\}, \{(1, 1), (1, 2), (3, 4)\}.$$

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

و g فرم (روی فضای ماتریسهای مختلط 1×2) تعریف شده توسط $g(X, Y) = Y^* A X$ باشد. آیا g ضربی داخلی است؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط و f فرم (یک و نیم خطی) متقارنی روی V باشد: $f \cdot f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ چیست؟

۵. فرض کنید f فرمی باشد که توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$$

تعریف می‌شود. پایه مرتبی بیا بید که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود.

۶. فرم f را ناتبهگون (چپ) نامیم، هرگاه بردار α تنها بردار α با این خاصیت باشد که به ازای هر β ، $f(\alpha, \beta) = 0$. $f(\alpha, \beta) = 0$ فرمایهای روی یک فضای ضرب داخلی باشد. ثابت کنید f ناتبهگون است اگر و تنها اگر عملگر خطی وابسته T_f (قضیه ۱) نامنفرد باشد.

۷. فرض کنید f فرمی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. به تعریف ناتبهگونی چپ ارائه شده در تمرین ۶ توجه کنید. ناتبهگونی راست را تعریف و ثابت کنید که فرم f ناتبهگون چپ است اگر و تنها اگر f ناتبهگون راست باشد.

۸. فرض کنید f فرمی ناتبهگون (تمرینهای ۶ و ۷) روی یک فضای بعد متناهی V باشد. فرض کنید L تابعکی خطی روی V باشد. نشان دهید یک و تنها یک بردار چون β در V وجود دارد که به ازای هر α ، $L(\alpha) = f(\alpha, \beta)$.

۹. فرض کنید f فرمی ناتبهگون روی یک فضای بعد متناهی V باشد. نشان دهید هر عملگر خطی S دارای یک «الحاقی نسبت به f » است، یعنی عملگری چون S' وجود دارد که به ازای همه α ها و β ها، $f(S\alpha, \beta) = f(\alpha, S'\beta)$.

۳.۹. فرمهای مثبت

در این بخش، درباره فرمهای (یک و نیم خطی) نامنفی و رابطه آنها با ضرب داخلی مفروض روی فضای برداری زمینه بحث می‌کنیم.

تعاریف. یک فرم f روی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط V نامنفی است، هرگاه هر میتی باشد و به ازای هر $\alpha \in V$ ، $f(\alpha, \alpha) \geq 0$. فرم f مثبت است، هرگاه f هر میتی و به ازای هر $\alpha \neq 0$ ، $f(\alpha, \alpha) > 0$ باشد.

یک فرم مثبت روی V چیزی جز ضربی داخلی روی V نیست. هر فرم نامنفی در همه خواص یک ضرب داخلی صدق می‌کند با این استثنای که برخی از بردارهای غیرصفرا ممکن است برشودشان عمود باشند.

گیریم f فرمی روی فضای با بعد متناهی V باشد. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و A ماتریس f در پایه \mathcal{B} باشد؛ یعنی، $A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$. اگر $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha) &= f\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k x_k \alpha_k\right) \\ &= \sum_j \sum_k x_j \bar{x}_k f(\alpha_j, \alpha_k) \\ &= \sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k. \end{aligned}$$

از این رو، می‌بینیم که f نامنفی است اگر و تنها اگر

$$A = A^*$$

$$(3-9) \quad \text{بازای همه اسکالرها} \sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k \geq 0 \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

برای اینکه \sum مثبت باشد، باید بازای همه x_1, \dots, x_n نامساوی (3-9) اکید باشد. شرایط استخراج شده حاکمی از این هستند که \sum فرمی مثبت روی V است اگر و تنها اگر تابع

$$g(X, Y) = Y^* AX$$

فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی $1 \times n$ بر روی هیأت اسکالرها باشد.

قضیه ۵. گیریم F هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلف A ماتریسی $n \times n$ بر دوی F باشد. تابع g تعییف شده توسط

$$(4-9) \quad g(X, Y) = Y^* AX$$

فرمی مثبت دوی فضای $F^{n \times 1}$ است اگر و تنها اگر ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P با درایه‌های واقع در F وجود داشته باشد به طوری که $A = P^* P$.

بازای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی مانند A ، تابع g در (4-9) روی فضای ماتریسهای ستونی یک فرم است. قصدمان این است که ثابت کنیم g مثبت است اگر و تنها اگر $A = P^* P$. ابتدا، فرض کنیم $A = P^* P$. در این صورت g هرمیتی است، و

$$\begin{aligned} g(X, X) &= X^* P^* PX \\ &= (PX)^* PX \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

اگر P معکوس پذیر باشد و $X \neq 0$ ، آنگاه $(PX)^* PX > 0$.

حال، فرض کنیم g فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی باشد. در این صورت g ضربی داخلی است و از این‌رو، ماتریسهایی ستونی چون Q_1, \dots, Q_n وجود دارند که

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= g(Q_i, Q_j) \\ &= Q_i^* A Q_j. \end{aligned}$$

اما این مطلب دقیقاً حاکمی است که اگر Q ماتریسی یا ستونهای Q_1, \dots, Q_n باشد، آنگاه $Q^* A Q = I$. چون $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ یک پایه است، Q معکوس پذیر می‌باشد. حال با فرض $A = P^* P$ ، داریم

در عمل، بررسی اینکه ماتریس مفروضی چون A معیار مثبت بودنی را که تا اینجا عرضه کرده‌ایم ارضا می‌کند، آسان نیست. پیامدی از قضیه اخیر این است که اگر g مثبت باشد، آنگاه $\det A > 0$ ، زیرا

$$\det A = \det(P^* P) = \det P^* \det P = |\det P|^2.$$

این واقعیت که $\det A > 0$ بهیچ وجه برای تضمین مثبت بودن g کافی نیست؛ اما، وابسته

به A, n دترمینان وجود دارند که خاصیت ذیل را دارند: اگر $A = A^*$ و اگر هر یک از این دترمینانها مثبت باشند. آنگاه $\Delta_k(A)$ فرمی مثبت است.

تعویف، گیریم A ماتریس $n \times n$ بروی هیأت F باشد. کهادهای اصلی A اسکالرهای تعریف شده به صورت $\Delta_k(A)$

$$\Delta_k(A) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & & A_{kk} \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq n$$

هستند.

لم. گیریم A ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری با درایه‌های واقع در هیأتی چون F باشد. دو حکم ذیل هم ارزند.

(الف) ماتریسی بالا مثلثی چون P با $1 \leq k \leq n$ $P_{kk} = 1$ وجود دارد که ماتریس $B = AP$ پایین مثلثی است.

(ب) کهادهای اصلی A همگی مخالف ۰ هستند.

اثبات. P را ماتریس $n \times n$ دلخواهی می‌گیریم و قرار می‌دهیم $B = AP$. آنگاه

$$B_{jk} = \sum_r A_{jr} P_{rk}.$$

اگر P بالامثلی و به ازای هر $k, 1 \leq k \leq n$ باشد آنگاه $P_{kk} = 1$

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr} P_{rk} = B_{jk} - A_{kk}, \quad k > 1.$$

اما، B پایین مثلثی است مشروط به اینکه به ازای $j < k, B_{jk} = 0$. پس، B پایین مثلثی خواهد بود اگر و تنها اگر

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr} P_{rk} = -A_{kk}, \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq k-1 \\ 2 \leq k \leq n. \end{cases} \quad (5-9)$$

از این رو، می‌بینیم که حکم (الف) همارز با این حکم است که اسکالرهایی چون $1 \leq k \leq n, 1 \leq r \leq k, P_{rk}$ وجود دارند که در (۵-۹) صدق می‌کنند و $1 \leq k \leq n, P_{kk} = 1$. در (۵-۹)، به ازای هر $1 < k$ دستگاهی از $1 - k$ معادله خطی با مجهولهای $P_{1k}, P_{2k}, \dots, P_{(k-1)k}$ وجود دارد. ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k-1,1} & & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن برابر کهاد اصلی $(A)_{1-k}$ است. اگر هر $\Delta_{k-1}(A) \neq 0$ دستگاههای (۵-۹) دارای جوابهای یکتا می‌باشند. تا اینجا نشان داده‌ایم که حکم (ب) حکم (الف) را ایجاد می‌کند و ماتریس P یکتاست

حال فرض کنیم که (الف) برقرار باشد. آنگاه، همان‌طور که خواهیم دید

$$\begin{aligned} \Delta_k(A) &= \Delta_k(B) \\ &= B_{11} B_{22} \cdots B_{kk}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6-9)$$

برای بررسی (۶-۹)، فرض کنیم A_1, \dots, A_n و B_1, \dots, B_n بترتیب ستونهای A و B باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_r &= \sum_{j=1}^{r-1} P_{jr} A_j + A_r, \quad r > 1 \end{aligned} \quad (7-9)$$

حال k را ثابت می‌گیریم $n \leq k \leq 1$. از (۷-۹) بر می‌آید که k مین ستون ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

با افزودن ترکیبی خطی از دیگر ستونها بهستون

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. چنین اعمالی دترمینان را تغییر نمی‌دهند. این مطلب، (۶-۹) را ثابت می‌کند، به استثنای این مطلب بدینهی که چون B مثلثی است، $\Delta_k(B) = B_{11} \cdots B_{kk}$. چون P معکوس پذیر ند B نیز معکوس پذیر است. بنابراین

$$\Delta(B) = B_{11} \cdots B_{nn} \neq 0$$

واز این رو $\square \cdot k = 1, \dots, n \quad \Delta_k(A) \neq 0$

قضیه ۶. گیریم f یک فرم دویک فضای برداری بعد متناهی V و A ماتریس f ددیک پایه مرتباً \mathcal{B} باشد. داین صورت f یک فرم مثبت است اگر و تنها اگر $A = A^*$ و کهادهای اصلی A همگی مثبت باشند.

ابتدا نیمه جالب قضیه را انجام می‌دهیم. فرض کنیم $A = A^*$ و $k \leq n$, $\Delta_k(A) > 0$. طبق لم، یک ماتریس بالا مثلثی (یکتاً) P با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که $B = AP$ پایین مثلثی است. ماتریس P^* نیز پایین مثلثی است، بنابراین $P^*B = P^*AP$ نیز پایین مثلثی است. چون A خود الحاق است، ماتریس $D = P^*AP$ هم خود الحاق می‌باشد. هر ماتریس مثلثی خودالحاق لزوماً ماتریسی قطری است. با همان استدلالی که منجر به (۶-۹) شد داریم

$$\begin{aligned}\Delta_k(D) &= \Delta_k(P^*B) \\ &= \Delta_k(B) \\ &= \Delta_k(A).\end{aligned}$$

چون D قطری است کهادهای اصلی آن عبارتنداز

$$\Delta_k(D) = D_{11} \dots D_{kk}.$$

بنابر $D_{kk} > 0$, $k \leq n$, $\Delta_k(D) > 0$, به ازای هر k , داریم $D = P^*AP$ ماتریس فرم f در پایه مرتباً $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشد، آنگاه ماتریس f در پایه $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ تعریف شده توسط

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

است. حال به (۶-۹) توجه کنید. چون D قطری است و درایه‌های روی قطرش مثبت هستند، بدینهی است که

$$X^*DX > 0, \quad X \neq 0$$

که از آن نتیجه می‌شود f فرمی مثبت است.

حال، فرض کنیم با فرم مثبتی چون f آغاز کرده باشیم. می‌دانیم که $A = A^*$. چگونه نشان دهیم که $\Delta_k(A) > 0$? فرض می‌کنیم V_k زیرفضای پدیدآمده توسط $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ و $V_{k+1} \times V_k$ به f تحدید f باشد. بیانی همارز، f فرمی مثبت روی V_k است و در پایه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، به عنوان پیامدی از قضیه ۵، ملاحظه کردیم که مثبت یودن یک فرم

ایجاب می‌کند که دترمینان هر ماتریس نمایش آن هم مثبت باشد. □

برای تکمیل بحث خود درباره رابطه بین فرمایهای مثبت و ماتریسها، چند نکته وجود دارد که باید آنها را متنزه کرویم. چه چیزی مشخص کننده ماتریس‌هایی است که فرمایهای مثبت را نمایش می‌دهند؟ اگر f فرمی روی یک فضای برداری مختلط و A ماتریس f در پایه مرتبی باشد، آنگاه f مثبت خواهد بود اگر و تنها اگر $A = A^*$ و

$$\text{به ازای هر } X \neq 0 \text{ مختلط} \quad (8-9)$$

از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که شرط $A = A^*$ زاید است، یعنی (۸-۹) شرط $A = A^*$ را هم ایجاب می‌کند. از طرف دیگر، اگر با یک فضای برداری حقیقی سروکار داشته باشیم، فرم f مثبت خواهد بود اگر و تنها اگر $A = A^t$ و

$$\text{به ازای هر } X \neq 0 \text{ حقیقی} \quad (9-9)$$

باید تأکید کنیم که اگر ماتریسی حقیقی چون A در (۹-۹) صدق کند، نتیجه نمی‌شود که $A = A^t$. مطلبی که درست است این است که اگر $A = A^t$ و (۹-۹) برقرار باشد، آنگاه (۹-۹) نیز برقرار است. این امر بدین دلیل است که

$$\begin{aligned} (X+iY)^* A (X+iY) &= (X^t - iY^t) A (X+iY) \\ &= X^t AX + Y^t AY + i[X^t AY - Y^t AX] \end{aligned}$$

$$\text{واگر } A = A^t \text{ آنگاه } X^t AY = X^t AY.$$

اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد و اگر A در (۸-۹) صدق کند، را یک ماتریس مثبت خواهیم نامید. نکاتی را که قریباً متنزه کردیم با گفتن مطلب ذیل می‌توان خلاصه کرد: در هر یک از حالات حقیقی یا مختلط، فرمی چون f مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس آن در یک (درواقع، دره) پایه مرتب، ماتریسی مثبت باشد.

حال فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و f فرمی نامنفی روی V . عملگر خطی خودالحاق یکتا بی چون T روی V وجود دارد که

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta). \quad (10-9)$$

علاوه بر این خاصیت اضافی نیز هست که $(T\alpha | \alpha) \geq 0$

تعویض. عملگر خطی چون T دوی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V نامنفی است هرگاه $T = T^*$ به ازای هر $\alpha \in V$ $(T\alpha | \alpha) \geq 0$. یک عملگر خطی مثبت عملگری مانند T است که $T = T^*$ و به ازای هر $\alpha \neq 0$ $(T\alpha | \alpha) > 0$.

اگر V یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی و $(V | 0) = 0$ ضربی داخلی روی V باشد، روی V رده و استهای از عملگرهای خطی مثبت وجود دارد. به واسطه

(۱۵-۹) تناظری یک به یک بین این رده از عملگرهای مثبت و دسته همه فرمهای مثبت روی V یافت می شود. جهت تأکید روی روابط بین عملگرهای مثبت، فرمهای مثبت، و ماتریسهای مثبت از تمرینات این بخش استفاده خواهیم کرد. آنچه را که گفتیم خلاصه می کنیم.

اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط باشد، احکام زیر هم ارزند.

(۱) A مثبت است، یعنی وقتی که x_1, x_2, \dots, x_n اعدادی مختلط باشند و لااقل یکی

$$\sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k > 0$$

از آنها \circ نباشد، آنگاه \circ $X|Y = Y^*AX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای مختلط $1 \times n$ است.

(۲) نسبت به ضرب داخلی استاندۀ $X|Y = Y^*X$ روی ماتریسهای $1 \times n$ ، عملگر خطی $\rightarrow AX$ مثبت است.

(۳) به ازای ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P روی C ، P روی P داشته باشد.

(۴) $A = A^*$ و کهادهای اصلی A همه مثبت هستند.

اگر همه درایه‌های A حقیقی باشند، این مطالب هم ارزند با:

(۵) $A = A^*$ و $\sum_j \sum_k A_{kj} x_j x_k > 0$ در صورتی که x_1, x_2, \dots, x_n اعدادی حقیقی باشند، ولاقل یکی از آنها صفر نباشد.

(۶) $X|Y = Y^*AX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای حقیقی $1 \times n$ است.

(۷) نسبت به ضرب داخلی استاندۀ $X|Y = Y^*X$ روی ماتریسهای حقیقی $1 \times n$ ، عملگر خطی $\rightarrow AX$ مثبت است.

(۸) ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P با درایه‌های حقیقی وجود دارد که

$$A = P^*P$$

تمرین

۱. فرض کنید V فضای C^2 با ضرب داخلی استاندۀ باشد. به ازای کدام بردار α در V ، عملگر خطی مثبتی چون T وجود دارد که $\alpha = T\epsilon$

۲. فرض کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استاندۀ باشد. اگر θ عددی حقیقی باشد، T را عملگر خطی «دوران به اندازه θ » بگیرید:

$$T_\theta(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta).$$

به ازای کدام مقادیر θ ، عملگر T_θ مثبت است؟

۳. V را فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی C با ضرب داخلی $X|Y = Y^*GX$ (که در آن G ماتریس $n \times n$ است که تابع اخیر یک ضرب داخلی باشد) بگیرید. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و T عملگر خطی $T(X) = AX$ باشد. $T^*(X) = X^*A$ را بیاورد. اگر Y عنصر ثابتی از V باشد، عنصر Z از V را که تابع خطی $X \rightarrow Y^*X$ را تعیین می کند،

. $Y^*X = (X|Z)$ بیان دیگر، Z را بیا بید که به ازای هر X در V دو عملگر خطی

۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U دو عملگر خطی مثبت روی V باشند ثابت کنید $(T+U)$ هم مثبت است. مثالی بیاورید که نشان دهد TU لزوماً مثبت نیست.

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید که A مثبت است.

(ب) V را فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 با ضرب داخلی پگیرید. با به کار بستن فرایندگرام-اشمیت برپایه $\{X_1, X_2\}$ بافرض

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پایه معتمد یکهای برای V بیا بید.

(ب) ماتریس حقیقی 2×2 معکوس پذیری چون P بیا بید که

۶. کدامیک از ماتریسهای ذیل مثبت است؟

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{array} \right].$$

۷. مثالی از ماتریسی $n \times n$ بیاورید که همه کهادهای اصلی آن مثبت باشند ولی خود ماتریسی مثبت نباشد.

۸. آیا C^2 تعریف می کند؟

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$$

۹. ثابت کنید که همه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریسی مثبت اعدادی مثبت هستند.

۱۰. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U عملگرهای خطی روی V باشند می‌نویسیم $U - T$ هرگاه $U - T < T$ عملگر مثبتی باشد. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $U - T < T < U$ غیرممکن است.

(ب) اگر $U - S < S$ ، آنگاه $T < S$.

(پ) اگر $S - T < U$ و $S - T < U$ لزومی ندارد که

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد V بروی زیر فضای دلخواهی باشد.

(الف) ثابت کنید که به ازای هر عدد مثبت c ، عملگر $cI + E$ مثبت است.

(ب) عملگر خطی خودالحاق T را که $T^* = I + E$ بر حسب E بیان کنید.

۱۲. فرض کنید $n \times n$ عددی صحیح مثبت و A ماتریس $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید A مثبت است.

۱۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ خودالحاقی باشد. ثابت کنید عددی حقیقی چون c وجود دارد که ماتریس $cI + A$ مثبت باشد.

۱۴. ثابت کنید حاصل ضرب دو عملگر خطی مثبت عملگری است مثبت اگر و تنها اگر آن دو عملگر جایجا شوند.

۱۵. فرض کنید S و T دو عملگر مثبت باشند. ثابت کنید که همه مقادیر سرشت‌نمای ST مثبت هستند.

۴.۹. چند مطلب دیگر درباره فرمها

این بخش شامل دو قضیه است که اطلاعات مشروح تری درباره فرم‌های (یک و نیم خطی) به دست می‌دهند.

قضیه ۷. گیریم فرمی دوی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط V و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه‌ای برای زیر فضای بعد متاهی W از V باشد. فرض کنیم M ماتریسی $r \times r$ با دایه‌های

$$M_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و W' مجموعه همه بردارهایی چون β از V باشد که به ازای هر α دو داداین صورت W' زیر فضایی از V است و $W \cap W' = \{0\}$ است و تنها اگر M معکوس پذیر باشد. در صورت وقوع چنین وضعی $V = W + W'$

اثبات. اگر β و γ بردارهایی از W' باشند و c یک اسکالر، آنگاه به ازای هر α در W

$$\begin{aligned} f(\alpha, c\beta + \gamma) &= \bar{c}f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

از این رو، W' یک زیر فضای V است.

حال فرض کنیم $\alpha = \sum_{j=1}^r y_j \alpha_j$ و $\beta = \sum_{k=1}^r x_k \alpha_k$. در این صورت

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_{j,k} \bar{y}_j M_{jk} x_k \\ &= \sum_k (\sum_j \bar{y}_j M_{jk}) x_k. \end{aligned}$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که $\{0\} \neq W \cap W'$ اگر و تنها اگر دستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^r \bar{y}_j M_{jk} = 0, \quad 1 \leq k \leq r$$

دارای یک جواب غیر صفر (y_1, y_2, \dots, y_r) باشد. از این رو، $\{0\} = W \cap W'$ اگر و تنها اگر M^* معکوس پذیر باشد. اما معکوس پذیری M^* هم ارز با معکوس پذیری M است. فرض کنیم M معکوس پذیر باشد و بگیریم

$$A = (M^*)^{-1} = (M^{-1})^*.$$

g_j را روی V پناه معادله

$$g_j(\beta) = \sum_{k=1}^r A_{jk} \overline{f(\alpha_k, \beta)}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned}
 g_j(c\beta + \gamma) &= \sum_k A_{jk} \overline{f(\alpha_k, c\beta + \gamma)} \\
 &= c \sum_k A_{jk} \overline{f(\alpha_k, \beta)} + \sum_k A_{jk} \overline{f(\alpha_k, \gamma)} \\
 &= cg_j(\beta) + g_j(\gamma).
 \end{aligned}$$

از این رو، هر g_j تابع خطی روی V است. پس، می‌توانیم عملگری خطی چون E روی V را با قراردادن

$$E\beta = \sum_{j=1}^r g_j(\beta) \alpha_j$$

تعریف کنیم. چون

$$\begin{aligned}
 g_j(\alpha_n) &= \sum_k A_{jk} \overline{f(\alpha_k, \alpha_n)} \\
 &= \sum_k A_{jk} (M^*)_{kn} \\
 &= \delta_{jn}
 \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که به ازای $1 \leq n \leq r$. $E(\alpha_n) = \alpha_n$. این مطلب ایجاب می‌کند که به ازای هر α در W داری $E\alpha = \alpha$. بنابراین E ، V را بر روی W می‌نگارد و $E^* = E$. اگر β برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 f(\alpha_n, E\beta) &= f(\alpha_n, \sum_j g_j(\beta) \alpha_j) \\
 &= \sum_j \overline{g_j(\beta)} f(\alpha_n, \alpha_j) \\
 &= \sum_j (\sum_k \bar{A}_{jk} f(\alpha_k, \beta)) f(\alpha_n, \alpha_j).
 \end{aligned}$$

چون $A^* = M^{-1}$ ، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
 f(\alpha_n, E\beta) &= \sum_k (\sum_j (M^{-1})_{kj} M_{jn}) f(\alpha_k, \beta) \\
 &= \sum_k \delta_{kn} f(\alpha_k, \beta) \\
 &= f(\alpha_n, \beta).
 \end{aligned}$$

این مطلب ایجاب می‌کند که به ازای هر α در W و هر β در V داری $f(\alpha, E\beta) = f(\alpha, \beta)$. از این رو

$$f(\alpha, \beta - E\beta) = 0.$$

پس، $E - I$ را در W' می‌نگارد. تساوی

$$\beta = E\beta + (I - E)\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W'$. سرانجام به یک نکتهٔ نهایی هم باید اشاره کنیم. چون $W \cap W' = \{0\}$, هر بردار در V به طور یکتا عبارت است از مجموع یک بردار در W و یک بردار در W' . اگر β در W' باشد، نتیجه می‌شود که $E\beta = 0$. از این‌رو، $E\beta = 0$, $I - E$ را بروی W' می‌نگارد. \square

تصویر E را که در اثبات ساخته شد می‌توان به شرح ذیل مشخص کرد: اگر و تنها اگر α در W و $\beta - \alpha$ در W' متعلق به V باشد. پس، E مستقل از پایه‌ای از W است که در ساختش به کار رفت. از این‌رو، می‌توان به E به عنوان تصویر V روی W که توسط تعزیزی به مجموع مستقیم

$$V = W \oplus W'$$

تعیین می‌شود ارجاع کرد. توجه کنید که E یک تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $W' = W^\perp$

قضیهٔ ۸. گیریم فریک فرم دوی یکفضای بودادی حقیقی یا مختلط V مادریس P درجا یافته مرتقب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ از V باشد. فرض کنیم کهادهای اصلی A همگی مخالف 0 باشند. داین صورت مادریس بالامثلی یکتا بی چون $P_{kk} = 1$, $P_{kk} = 1 \leq k \leq n$) وجود دارد که

$$P^*AP$$

نیز بالامثلی باشد.

اثبات. چون $\Delta_k(A^*) = \overline{\Delta_k(A)}$, $\Delta_k(A^*) = 1 \leq k \leq n$, کهادهای اصلی A^* همگی مخالف 0 هستند. از این‌رو، بنابر لمحی که در اثبات قضیهٔ ۶ به کار رفت ماتریسی بالامثلی چون P با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که A^*P پایین‌مثلثی باشد. بنابراین، $P^*A = (A^*P)^*$ بالامثلی است. چون حاصل ضرب دوماتریس بالامثلی خود بالامثلی است، نتیجه می‌گیریم که P^*AP بالامثلی می‌باشد. این مطلب وجود P , و نه یکتا بی P , را نشان می‌دهد. اما، استدلالی بیشتر هندسی هم وجود دارد که می‌تواند هم برای اثبات وجود هم برای اثبات یکتا بی P به کار رود.

گیریم W_k زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ و W'_k مجموعه همهٔ β ‌های در V باشد که به ازای هر α در W_k , $f(\alpha, \beta) = 0$. چون $\Delta_k(A) \neq 0$, ماتریس M با درایه‌های

$$M_{ij} = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ij}$$

(۱) یک ماتریس $k \times k$ معمکوس پدیراست. بنابر قضیهٔ ۷

$$V = W_k \oplus W'_k.$$

E_k را تصویر V روی W_k که توسط این تجزیه تعیین می‌شود می‌گیریم و قرار می‌دهیم
 $\bullet E_0$. فرض کنیم

$$\beta_k = \alpha_k - E_{k-1}\alpha_k, \quad (1 \leq k \leq n).$$

در این صورت $\beta_1 = \alpha_1$ و به ازای هر $1 < k < n$ به $E_{k-1}\alpha_k$ تعلق دارد. پس وقتی که $1 < k < n$ اسکالرها یکتایی چون P_{jk} وجود دارند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j.$$

پس از قراردادن $1 = P_{kk} = 0$ به ازای $k > n$ ، ماتریس بالامثلی P با $P_{kk} = 1$

$$\beta_k = \sum_{j=1}^k P_{jk}\alpha_j$$

به ازای $k = 1, \dots, n$ را خواهیم داشت. فرض کنیم $\beta_i < \beta_k$ در $1 \leq i < k$. آنگاه β_i در $W_i \subset W_{k-1}$ چون β_k به W_{k-1} تعلق دارد، نتیجه می‌گیریم که $f(\beta_i, \beta_k) = 0$. فرض کنیم B ماتریس f در پایه مرتب $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ است. در این صورت

$$B_{ki} = f(\beta_i, \beta_k)$$

وازابن رو، وقتی که $i > k$ پس $B_{ki} = 0$ بالامثلی است. از طرف دیگر

$$B = P^*AP.$$

بعکس، فرض کنیم P ماتریس بالامثلی با $P_{kk} = 1$ باشد که P^*AP هم بالامثلی است. حال می‌نویسیم

$$\beta_k = \sum_j P_{jk}\alpha_j, \quad (1 \leq k \leq n).$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ به طور آشکار پایه‌ای برای W_k می‌باشد. فرض کنیم $1 < k < n$. این صورت $\{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$ پایه‌ای برای W_{k-1} است و چون وقتی که $i < k$ ، β_i برداری از W'_{k-1} است. معادله‌ای که β_k را تعریف می‌کند ایجاب می‌نماید که

$$\alpha_k = -\left(\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j\right) + \beta_k.$$

حال $\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$ متعلق به W_{k-1} است، و β_k در W'_{k-1} قرار دارد. بنابراین، P_{k-1k}, \dots, P_{1k} اسکالرها یکتایی هستند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$$

و از این رو P همان ماتریس ساخته شده قبلی است. \square

۵.۹. نظریه طیفی

در این بخش، پیامدهای قضایای ۱۸ و ۲۲ در فصل ۸ را در رابطه با قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال دنبال می‌کنیم.

قضیه ۹ (قضیه طیفی). گیریم T عملگری نرمال دوی یک فضای خرب داخلی مختلط بعد متناهی V یا عملگری خودالحاق دوی یک فضای خرب داخلی حقیقی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم c_1, c_2, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T باشند. فرض کنیم W_i فضای سرشت نمای وابسته به c_i در E_j تصویر متعامد V دوی W_i باشد. در این صورت، وقتی $j \neq i$, W_j عمود است، فضای V مجموع مستقیم W_1, W_2, \dots, W_k است و

$$T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k. \quad (11-9)$$

اثبات. α را برداری از V , β را برداری از V می‌گیریم و فرض می‌کنیم $i \neq j$. در این صورت $(\alpha|T\beta) = (T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta) = (\alpha|c_j\beta) = (\alpha|(c_j - c_i)\beta) = 0$ (چون $c_j - c_i \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که $(\alpha|\beta) = 0$). پس وقتی k دارای پایه متعامد یکهای مشکل از بردارهای سرشت نمای است. بنابراین واقعیت که V دارای پایه متعامد یکهای مشکل از بردارهای سرشت نمای است (با قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ مقایسه شود) نتیجه می‌گیریم که $V = W_1 + \dots + W_k$. اگر α به $j \leq k$ تعلق داشته باشد و آنگاه به ازای هر i

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_i | \sum_j \alpha_j) = \sum_j (\alpha_i | \alpha_j) \\ &= \|\alpha_i\|^2 \end{aligned}$$

واز این رو، V برابر مجموع مستقیم W_1, W_2, \dots, W_k است. بنابراین $I = E_1 + \dots + E_k$.

$$T = TE_1 + \dots + TE_k$$

$$= c_1 E_1 + \dots + c_k E_k. \quad \square$$

تجزیه (۱۱-۹)، تفکیک طیفی T نامیده می‌شود. این اصطلاح تا اندازه‌ای از کار بردهای فیزیکی که موجب تعریف طیف یک عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی، به عنوان مجموعه مقادیر سرشت نمای آن عملگر شدنی ناشی می‌شود. این مهم است بدانیم که تصویرهای E_k, \dots, E_1 به طور متعارف به T وابسته‌اند؛ در حقیقت،

اینها چندجمله‌ایها بحسب T هستند.

$E_j = e_j(T)$ ، $1 \leq j \leq k$ نگاه به ای ای $e_j = \prod_{i \neq j} \left(\frac{x - c_i}{c_j - c_i} \right)$ نتیجه. اگر

اثبات. چون وقتی $j \neq i$ ، $E_i E_j = 0$ لذا نتیجه می‌شود که

$$T^r = c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k.$$

و نیز با برهان استقرایی ساده‌ای به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، داریم

$$T^n = c_1^n E_1 + \cdots + c_k^n E_k.$$

به ازای هر چند جمله‌ای دلخواه

$$f = \sum_{n=0}^r a_n x^n$$

داریم

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{n=0}^r a_n T^n \\ &= \sum_{n=0}^r a_n \sum_{j=1}^k c_j^n E_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=0}^r a_n c_j^n \right) E_j \\ &= \sum_{j=1}^k f(c_j) E_j. \end{aligned}$$

از آنجا که $e_j(c_m) = \delta_{jm}$ ، نتیجه می‌شود که $\square \cdot e_j(T) = E_j$

چون E_1, \dots, E_k به طور متعارف به T وابسته هستند و

$$I = E_1 + \cdots + E_k$$

خانواده تصویرهای $\{E_1, \dots, E_k\}$ ، تفکیک همانی تعریف شده توسط T نامیده می‌شود. نکته‌ای درباره اثبات قضیه طبیعی وجود دارد که باید تذکر داده شود. ما این قضیه را با استفاده از قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ درباره قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال استنتاج کردیم. اثبات دیگری هم وجود دارد که بیشتر جبری است و در آن ابتدا باید نشان داد که چند جمله‌ای مینیمال هر عملگر نرمال پراپر حاصل ضریبی از سازه‌های اول متمایز است. آنگاه همچون اثبات قضیه تجزیه اولیه (قضیه ۱۲ در فصل ۶) می‌توان به پیش رفت. چنین اثباتی را در بخش بعد ارائه خواهیم کرد.

در کاربردهای گوناگون لازم است بدانیم که آیا می‌توان توابع معینی از عملگرهای ماتریسها، مثلاً ریشه دوم آنها را محاسبه کرد یا خیر. این امر را می‌توان به طور نسبتاً

ساده در مورد عملگرهای نرمال قطری شدنی انجام داد.

تعريف. گیریم T یک عملگر نرمال قطری شدنی دوی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و

$$T = \sum_{j=1}^k f(c_j)E_j$$

تفکیک طیفی آن باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه اش طیف T را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت عملگر خطی $f(T)$ بنابر معادله

$$f(T) = \sum_{j=1}^k f(c_j)E_j \quad (12-9)$$

تعريف می‌شود.

قضیه ۱۰. گیریم T یک عملگر نرمال قطری شدنی باطیف S دوی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه اش S را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت $f(T)$ یک عملگر نرمال قطری شدنی با طیف $f(S)$ است. اگر U نگاشتی یکانی از V بر روی V' باشد و $T' = UTU^{-1}$ آنگاه f طیف T' هم است و

$$f(T') = UF(T)U^{-1}.$$

اثبات. نرمال بودن $f(T)$ با محاسبه سادهای از (۱۲-۹) و با استفاده از این واقعیت که

$$f(T)^* = \sum_j \overline{f(c_j)} E_j$$

نتیجه می‌شود. علاوه بر این، واضح است که به ازای هر α در $E_j(V)$

$$f(T)\alpha = f(c_j)\alpha.$$

پس مجموعه $f(S)$ مشکل از همه $(c)f$ ها، به ازای c در S ، در طیف $f(T)$ جای دارد. عکس، فرض کنیم $\alpha \neq 0$ و

$$f(T)\alpha = b\alpha.$$

$$\alpha = \sum_j E_j \alpha \quad \text{آنگاه و}$$

$$\begin{aligned} f(T)\alpha &= \sum_i f(T)E_i \alpha \\ &= \sum_i f(c_i)E_i \alpha \end{aligned}$$

$$= \sum_j b E_j \alpha.$$

از این رو،

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j (f(c_j) - b) E_j \alpha \right\|^2 &= \sum_j |f(c_j) - b|^2 \|E_j \alpha\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $f(c_j) = b$ یا $E_j \alpha = 0$. بنابراین، $E_j \alpha = 0$ و لذا نمایهای چون i وجود دارد که $E_i \alpha = 0$. حال نتیجه می‌گیریم که $f(c_i) = b$ و لذا $f(S)$ خود طیف $f(T)$ است. درواقع فرض کنیم

$$f(S) = \{b_1, \dots, b_r\}$$

که در آن هرگاه $b_m \neq b_n$ و $m \neq n$. گیریم X_m مجموعه نمایهای چون i باشد که $E_i f(c_i) = b_m$. فرض می‌کنیم $P_m = \sum_i E_i$. در اینجا مجموع بر روی نمایهای i در X_m گرفته می‌شود. در این صورت P_m تصویر متعامد V روی زیرفضای بردارهای سروش نمای متعلق به مقدار سروش نمای b_m از $f(T)$ است و

$$f(T) = \sum_{m=1}^r b_m P_m$$

تفکیک طیفی $f(T)$ است. حال فرض کنیم U تبدیلی یکانی از V بر روی V' باشد و $T' = U T U^{-1}$. در این صورت معادله

$$T\alpha = c\alpha$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$T'U\alpha = cU\alpha.$$

پس، S طیف T' است و U هر زیرفضای سروش نمای برای T را بر روی زیرفضای متناظر شد برای T' می‌نگارد. درواقع، با استفاده از (۱۲-۹)، می‌بینیم که

$$T' = \sum_j c_j E'_j, \quad E'_j = U E_j U^{-1}$$

تفکیک طیفی T' است. از این رو،

$$\begin{aligned} f(T') &= \sum_j f(c_j) E'_j \\ &= \sum_j f(c_j) U E_j U^{-1} \end{aligned}$$

$$= U \left(\sum_j f(c_j) E_j \right) U^{-1}$$

$$= U f(T) U^{-1}. \square$$

هنگام تفکر روی بحث قبل، این مهم است به خاطر داشته باشیم که طیف عملگر نرمال مجموعه T

$$S = \{c_1, \dots, c_n\}$$

از مقادیر سرشت نمای متمايز است. وقتی T توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای از بردارهای سرشت نمای نمایش داده می‌شود، لازم است که هر مقدار c_i به تعداد بعد فضای بردارهای سرشت نمای متناظر ش تکرار بشود. علت تغییر نماد و درنتیجه ذیل همین امر است.

نتیجه. با فرضهای قضیه ۱۰، فرض کنیم T د پایه مرتقب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ توسط ماتریس قطری D ، با درایه‌های قطری d_1, \dots, d_n ، نمایش داده شود. آنگاه $f(d_1), \dots, f(d_n)$ توسط ماتریس قطری $f(D)$ با درایه‌های قطری $f(d_1), \dots, f(d_n)$ نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ پایه مرتقب دیگری بوده P ماتریسی باشد که

$$\alpha'_j = \sum_i P_{ij} \alpha_i$$

آنگاه $P^{-1}f(D)P$ عبارت است از ماتریس $(f(T))$ در پایه \mathcal{B}' . اثبات. به ازای هر نمای i ، نمای j یکتا بی وجود دارد که $\alpha_i, \dots, \alpha_j \leq k \leq n$ متعلق به $E_j(V)$ است، و $d_i = c_j$. پس، به ازای هر i ،

$$\begin{aligned} f(T)\alpha'_j &= \sum_i P_{ij} f(T)\alpha_i \\ &= \sum_i f(d_i) P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_i (f(D)P)_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_i (f(D)P)_{ij} \sum_k P_{ki}^{-1} \alpha'_k \\ &= \sum_k (P^{-1}f(D)P)_{kj} \alpha'_k. \square \end{aligned}$$

از این نتیجه چنین استنباط می‌شود که می‌توان از هر ماتریس نرمال توابع معینی تشکیل داد. زیرا فرض کنیم A ماتریسی نرمال باشد. در این صورت ماتریس معکوس پذیری چون P ، و در واقع ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که PAP^{-1} ماتریسی قطری، مثلًاً D با درایه‌های d_1, \dots, d_n باشد. گیریم f تابع مختلفی باشد که بتواند روی $f(d_1), \dots, d_n$ به کار بسته شود و $f(D)$ ماتریس قطری با درایه‌های $f(d_1), \dots, f(d_n)$ باشد که

باشد. در این صورت $P^{-1}f(D)P$ مستقل از D است و به معنی ذیل دقیقاً تابعی از A است. اگر Q ماتریس معکوس پذیر دیگر باشد که QAQ^{-1} ماتریسی قطری چون D' است، آنگاه f را می‌توان بر درایه‌های قطری D' به کار بست و

$$P^{-1}f(D)P = Q^{-1}f(D')Q.$$

تعزیف تحت شرایط بالا، $f(A)$ به صورت $P^{-1}f(D)P$ تعزیف می‌شود.

ماتریس $(A)f$ را می‌توان به طریق دیگری هم مشخص کرد. برای انجام این امر، ذیلاً برخی از نتایج مربوط به ماتریسهای نرمال را که با فرمولینی نظریه ماتریسی قضیه قبل به دست می‌آیند بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۹. گیریم A ماتریسی نرمال و c_1, \dots, c_k دیشه‌های مختلف متمایز $(xI - A)$ باشند. فرض کنیم

$$e_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - c_j}{c_i - c_j} \right)$$

$E_i^* = E_i$, $E_i^* = E_i$, $(i \neq j) E_i E_j = 0$. دو این صورت هرگاه j است. $i \leq k$) $E_i = e_i(A)$

$$I = E_1 + \dots + E_k.$$

اگر f تابع مختلفی باشد که دامنه آن شامل c_1, \dots, c_k است، آنگاه

$$f(A) = f(c_1)E_1 + \dots + f(c_k)E_k$$

$$A = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$$

یادآوری می‌کنیم که هر عملگر روی یک فضای ضرب داخلی V نامنی است، هرگاه خودالحاق باشد و بازای α در V داشته باشد. $T\alpha|\alpha| \geq 0$.

قضیه ۲۰. فرض کنیم T یک عملگر نرمال قطری شدنی دوی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. دو این صورت T خودالحاق، نامنی، یا یکانی است، بحسب اینکه هر مقدار سرشت نمای T حقیقی، نامنی، یا با قدر مطلق ۱ باشد. اثبات. اگر T دارای تکنیک طیفی $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ باشد، آنگاه $T^* = \bar{c}_1 E_1 + \dots + \bar{c}_k E_k$. این گفته که T خودالحاق است عیناً مثل این است که بگوییم $T = T^*$ یا

$$(c_1 - \bar{c}_1)(E_1 + \dots + (c_k - \bar{c}_k)E_k) = 0.$$

با استفاده از این واقعیت که به ازای $j \neq i$, $E_i E_j = 0$ و نیز از اینکه هیچ یک از E_i ها عملگر صفر نیست، می‌بینیم که T خودالحاق است اگر و تنها اگر $\bar{c}_j = c_j$, $j = 1, \dots, k$.

برای تشخیص عملگرها نرمالی که نامنفی می باشند، به

$$\begin{aligned}(T\alpha|\alpha) &= \left(\sum_{j=1}^k c_j E_j \alpha \mid \sum_{i=1}^k E_i \alpha \right) \\ &= \sum_i \sum_j c_j (E_j \alpha | E_i \alpha) \\ &= \sum_j c_j \|E_j \alpha\|^2\end{aligned}$$

توجه کنید. در اینجا از این واقعیت که به ازای $j \neq i$ ، $(E_j \alpha | E_i \alpha) = 0$ استفاده کردیم. از این مطلب آشکار است که شرط ≥ 0 برآورده می شود اگر و تنها اگر به ازای هر j ، $c_j \geq 0$ برای تشخیص عملگرها یکانی مشاهده می کیم که

$$\begin{aligned}TT^* &= c_1 \bar{c}_1 E_1 + \cdots + c_k \bar{c}_k E_k \\ &= |c_1|^2 E_1 + \cdots + |c_k|^2 E_k.\end{aligned}$$

$$\text{اگر } E_j = |c_j|^2 E_j \text{ و با اثر دادن, } TT^* = I \text{ آنگاه } I = |c_1|^2 E_1 + \cdots + |c_k|^2 E_k \text{ باشد.}$$

$$E_j = |c_j|^2 E_j.$$

چون $|c_j|^2 \neq 0$ داریم $|c_j|^2 = 1$ یا $|c_j|^2 = -1$. عکس، اگر به ازای هر j ، $|c_j|^2 = 1$ واضح است که $TT^* = I$. \square

توجه به این نکته که این قضیه، قضیه‌ای درمورد عملگرها نرمال است حائز اهمیت است. اگر T یک عملگر خطی عمومی روی V با مقادیر سرشت نمای حقیقی باشد، نتیجه نمی توان گرفت که T خودالحاق است. این قضیه حکم می کنده که اگر T دارای مقادیر سرشت نمای حقیقی باشد و اگر T قطری شدنی و نرمال باشد، آنگاه T خودالحاق است. قضیه‌ای از این نوع، شباهت بین عمل الحاق و فرایند تشکیل مزدوج اعداد مختلط را تقویت می کند. اگر به ازای عدد مختلط z داشته باشیم $z = \bar{z}$ یا $z = -\bar{z}$ ، آنگاه یا z عددی حقیقی است یا قدر مطلقش ۱ است. همچنین، اگر به ازای عملگر T داشته باشیم $T = T^*$ آنگاه یا $T^* T = I$ عملگری است خودالحاق یا یکانی.

اکنون می خواهیم دو قضیه اثبات کنیم که نظریه دو حکم ذیلی هستند:

(۱) هر عدد نامنفی یک جذر (ریشه دوم) نامنفی یکتا دارد.

(۲) هر عدد مختلط، به صورت $re^{i\theta}$ ، که در آن $r \geq 0$ نامنفی و $1 = |r|$ ، قابل بیان است.

این همان تجزیه قطبی $z = re^{i\theta}$ برای اعداد مختلط است.

قضیه ۱۳. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی T عملگری نامنفی دوی V باشد. در این صورت T دارای یک جذر (ریشه دوم) نامنفی یکتا است، یعنی یک دوی N باشد که در آن صورت $N^2 = T$ وجود داده است.

اثبات. $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ را تفکیک طیفی می‌گیریم. بنا بر قضیه ۱۲، c_j نامنفی است. اگر c_j عدد حقیقی نامنفی باشد، فرض می‌کنیم $\sqrt{c_j}$ جذر نامنفی c_j را نشان دهد. در این صورت، بنا بر قضیه ۱۱ و $N = \sqrt{T}$ (قضیه ۱۲) عملگر نرمال قطری شدنی خوش تعریفی روی V است. بنا بر قضیه ۱۲ این عملگر نامنفی است و با محاسبه‌ای ساده $N^2 = T$.

حال گیریم P عملگری نامنفی روی V باشد و $P^2 = T$. ثابت خواهیم کرد که $P = N$ فرض کنیم.

$$P = d_1 F_1 + \dots + d_r F_r$$

تفکیک طیفی P باشد. در این صورت به ازای هر j ، $d_j \geq 0$ چرا که P نامنفی است. بنا بر قضیه ۱۲ داریم $P^2 = T$

$$T = d_1^2 F_1 + \dots + d_r^2 F_r$$

حال F_1, \dots, F_r در شرایط $F_i F_j = 0, I = F_1 + \dots + F_r$ به ازای $i \neq j$ و اینکه هیچ یک از F_i ‌ها ۰ نیست، صدق می‌کنند. اعداد d_1^2, \dots, d_r^2 متمایزند، چرا که اعداد نامنفی متمایز دارای جذرهای متمایز هستند. بنا بر یکتا بی تفکیک طیفی باشد داشته باشیم $P = N$ و (احیاناً با تغییر ترتیب) $d_j^2 = c_j$ و $F_j = E_j$. پس $r = k$.

قضیه ۱۳. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی دوی V باشد. در این صورت عملگری یکانی چون U دوی V و عملگری نامنفی چون N دوی V وجود داردند به طوری که $T = UN$ عملگر نامنفی N یکتا است. اگر T معکوس پذیر باشد، عملگر U نیز یکتا است.

اثبات. فرض کنیم داشته باشیم $T = UN$ که در آن U یکانی و N نامنفی است. در این صورت $T^* T = (UN)^* = N^* U^* = N U^* = N^2$. پس، $T^* T = N^2 = T^* T$. این مطلب نشان می‌دهد که N به عنوان جذر نامنفی عملگر نامنفی $T^* T$ تعیین می‌شود.

از این رو، برای شروع اثبات وجود U و N قضیه ۱۳ را برای تعریف N به عنوان یکتا جذر نامنفی $T^* T$ به کار می‌بریم. اگر T معکوس پذیر باشد، آنگاه N نیز معکوس پذیر است، چرا که

$$(N\alpha | N\alpha) = (N^* \alpha | \alpha) = (T^* T\alpha | \alpha) = (T\alpha | T\alpha).$$

در این حالت $U = TN^{-1}$ را تعریف و اثبات می‌کنیم که U یکانی است. اما $U^* = (TN^{-1})^* = (N^{-1})^* T^* = (N^*)^{-1} T^* = N^{-1} T^*$.

$$UU^* = TN^{-1} N^{-1} T^*$$

$$= T(N^{-1})^2 T^*$$

$$\begin{aligned}
 &= T(N^*)^{-1}T^* \\
 &= T(T^*T)^{-1}T^* \\
 &= TT^{-1}(T^*)^{-1}T^* \\
 &= I
 \end{aligned}$$

و U یکانی است.

اگر T معکوس پذیر نباشد، برای تعریف U ناگزیر به انجام کمی کار بیشتر هستیم. ابتدا U را روی برد N تعریف می‌کنیم. گیریم $\alpha = N\beta$ برداری در برد N ، مثلاً $UN\beta = T\beta$ را باشد، با این انگیزه که می‌خواهیم $UN\beta = T\beta$ را مساوی $T\beta$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که U روی برد N خوش تعریف است؛ بهایان دیگر، $N\beta' = N\beta$ ، $N\beta' = T\beta' = T\beta$. قبلاً نشان دادیم که بهازای هر γ در V ، $\|N\gamma\|^2 = \|T\gamma\|^2$. پس، $\beta - \beta' = \beta - \beta - (\beta - \beta') = 0$ می‌بینیم که $N(\beta - \beta') = 0$ اگر و تنها اگر $\beta = \beta'$. از این رو، U روی برد N خوش تعریف و واضح است که در جایی که تعریف شود، خطی است. حال اگر W برد N باشد، U را روی W^\perp تعریف می‌کنیم. برای انجام این کار، به مطلب ذیل نیازمندیم. چون فضاهای پوچ N و T مساوی هستند، بعد برداشان نیز مساوی است. درنتیجه، W^\perp همان بعدی را دارد که مکمل متocompact برد T . بنابراین، یک یکریختی (فضای ضرب داخلی) چون U از W^\perp بروی $T(V)^\perp$ وجود دارد. تا اینجا U را روی W تعریف کرده‌ایم، و حالا روی W^\perp ، U را همان U تعریف می‌کنیم. اجازه دهید تعریف U را تکرار کنیم. چون $V = W \oplus W^\perp$ ، هر α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = N\beta + \gamma$ قابل بیان است. در اینجا $N\beta$ در W ، یعنی در برد N است و γ در W^\perp . حال تعریف می‌کنیم

$$U\alpha = T\beta + U_0\gamma.$$

این U بوضوح خطی است و قبلاً نشان دادیم که خوش تعریف نیز هست. همچنین

$$\begin{aligned}
 (U\alpha | U\alpha) &= (T\beta + U_0\gamma | T\beta + U_0\gamma) \\
 &= (T\beta | T\beta) + (U_0\gamma | U_0\gamma) \\
 &= (N\beta | N\beta) + (\gamma | \gamma) \\
 &= (\alpha | \alpha).
 \end{aligned}$$

پس، U یکانی است. بعلاوه بهازای هر β داریم $UN\beta = T\beta$. \square .

$T = UN$ را تجزیه‌ای قطبی برای T می‌نامیم. مسلماً نمی‌توانیم آن را تنها تجزیه قطبی بنامیم، چراکه U یکتا نیست. حتی وقی که T معکوس پذیر و درنتیجه U یکتا باشد این مشکل را داریم که U و N ممکن است جا بجا نشوند. در واقع، آنها جا بجا می‌شوند

اگر و تنها اگر T نرمال باشد. مثلاً، اگر به ازای N نامنفی و U یکانی $T = UN = NU$ باشد آنگاه

$$TT^* = (NU)(NU)^* = NUU^*N = N^* = T^*T.$$

عملگر عمومی T نیز تجزیه‌ای چون $T = N_1 U_1$ با N_1 نامنفی و U_1 یکانی خواهد داشت. در اینجا، N_1 جذر نامنفی TT^* است. این نتیجه را می‌توان با به کار بستن قضیه‌ای که قریباً اثبات شد، روی عملگر T^* و سپس با گرفتن الحاقی، به دست آورد. اکنون به مسئله قطری کردن همزمان خانواده‌های جا بجا شونده عملگرهای نرمال باز می‌گردیم برای این‌منظور، اصطلاح ذیل مناسب است.

تعریف. گیریم \mathcal{F} -خانواده‌ای از عملگرهای دوی یک فضای ضرب داخلی V باشد. تابعی چون r دوی \mathcal{F} با مقادیر درهای اسکالرهای F ، یک ریشه \mathcal{F} نامیده می‌شود هرگاه α غیر صفر در V وجود داشته باشد که به ازای هر $T \in \mathcal{F}$

$$T\alpha = r(T)\alpha.$$

به ازای هر تابع r از \mathcal{F} به F ، $V(r)$ یا مجموعه همه α ‌های در V می‌گیریم که به ازای هر $T \in \mathcal{F}$ $T\alpha = r(T)\alpha$.

در این صورت $V(r)$ زیرفضایی از V و r ریشه‌ای از \mathcal{F} است اگر و تنها اگر $V(r) \neq \{0\}$. هر α غیر صفر در $V(r)$ بطور همزمان یک بردار سرشت نما برای همه متنهای (r_i) در \mathcal{F} است. اگر r_1, r_2, \dots, r_k ریشه‌های متمایز \mathcal{F} باشند، آنگاه

$$(1) \text{ وقتی } i \neq j, \quad r_i V(r_j) \text{ عمود است، و}$$

$$(2) \quad V = V(r_1) \oplus \dots \oplus V(r_k)$$

اینها. فرض کنیم r و s ریشه‌های متمایز \mathcal{F} باشند. در این صورت عملگری T در \mathcal{F} وجود دارد که $s(T) = r(T)$. از آنجا که بردارهای سرشت نمای متعلق به مقادیر سرشت نمای متمایز T لزوماً متعدد می‌باشند، نتیجه می‌شود که $V(s)$ بر $V(r)$ عمود است. چون V با بعد متنهای است این مطلب ایجاب می‌کند که \mathcal{F} حداقل تعداد متنهای ریشه داشته باشد. r_1, r_2, \dots, r_m را ریشه‌های \mathcal{F} می‌گیریم. فرض کنیم $\{T_1, \dots, T_m\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی ماکسیمال \mathcal{F} باشد و

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots\}$$

تفکیک همانی تعریف شده توسط $E_{ij} = T_i T_j^*$. آنگاه تصویرهای E_{ij} خانواده‌ای

جا بجا بی تشكیل می دهدند. زیرا هر E_{ij} یک چندجمله‌ای در T_i است و T_1, \dots, T_m با یکدیگر جا بجا می شوند. چون

$$I = (\sum_{j_1} E_{1j_1}) (\sum_{j_2} E_{2j_2}) \cdots (\sum_{j_m} E_{mj_m})$$

هر بردار α در V را می توان به صورت

$$\alpha = \sum_{j_1, \dots, j_m} E_{1j_1} E_{2j_2} \cdots E_{mj_m} \alpha \quad (13-9)$$

نوشت. فرض کنیم j_1, \dots, j_m نمایه‌هایی باشند که به ازای آنها

$$\beta = E_{1j_1} E_{2j_2} \cdots E_{mj_m} \alpha \neq 0.$$

می نویسیم

$$\beta_i = (\prod_{n \neq i} E_{nj_n}) \alpha.$$

در این صورت $\beta = E_{ij_i} \beta_i$; پس اسکالری چون c_i وجود دارد که

$$T_i \beta = c_i \beta, \quad 1 \leq i \leq m.$$

به ازای هر T در \mathcal{F} اسکالرهای یکتا بی چون b_i وجود دارند که

$$T = \sum_{i=1}^m b_i T_i.$$

پس

$$T \beta = \sum_i b_i T_i \beta$$

$$= (\sum_i b_i c_i) \beta.$$

بدیهی است تابع $\sum_i b_i c_i \rightarrow T$ یکی از ریشه‌های T ، مثلاً r_i است و β هم در $V(r_i)$ قرار دارد. بنابراین، هر جمله غیر صفر در (13-9) بدیکی از فضاهای $V(r_1), V(r_2), \dots, V(r_k)$ تعلق دارد. از اینجا نتیجه می شود که V مجموع مستقیم متعامد $V(r_1), V(r_2), \dots, V(r_k)$ است. \square

نتیجه. تحت فرضهای قضیه فوق، P_j را تصویر متعامد V دوی $(V(r_j))$ می گیریم. آنگاه وقتی که $j \neq i$ ، $P_i P_j = 0$.

$$I = P_1 + \cdots + P_k$$

و هر T دوی I می تواند به صورت

$$T = \sum_j r_j(T) P_j \quad (14-9)$$

نوشته شود.

تعاریف. خانواده تصویرهای متعامد $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ به تفکیک همانی تعیین شده توسط \mathcal{L} و (V) به تفکیک طیفی T بر حسب این خانواده، موسوم است. با اینکه تصویرهای P_1, P_2, \dots, P_k در نتیجه قبل به طور متعارف به خانواده \mathcal{L} وابسته‌اند، عموماً نه در \mathcal{L} قرار دارند و نه حتی ترکیب‌ای خطی از عملگرهای واقع در \mathcal{L} هستند؛ با این وجود نشان خواهیم داد که این تصویرها را می‌توان از تشکیل حاصل-ضربهای معینی از چندجمله‌ایها بی از اعضای \mathcal{L} به دست آورد. در مطالعه هر خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی، در نظر گرفتن جبر خودالحاق تولید شده توسط این خانواده معمولاً سودمند است.

تعريف. یک جبر خودالحاق از عملگرهای روی یک فضای ضرب داخلی V (نیوجبری خطی از $L(V, V)$) است که شامل الحاقی هریک از عناصرش باشد.

مثالی از یک جبر خودالحاق، خود $L(V, V)$ است. چون اشتراک هر دسته از جبرهای خودالحاق مجدداً جبری خودالحاق است، اصطلاح ذیل بامعنی است.

تعريف. اگر \mathcal{L} خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد، جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{L} عبارت است از کوچکترین جبر خودالحاقی که شامل \mathcal{L} باشد.

قضیه ۱۶. گیریم \mathcal{L} خانواده‌ای جابجا شونده از عملگرهای نرمال قطری شدنی (روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V) جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{L} و عملگر همانی باشد. فرض کنیم $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ تفکیک همانی تعیین شده، توسط \mathcal{L} باشد. در این صورت \mathcal{L} مجموعه همه عملگرهای به صورت

$$T = \sum_{j=1}^k c_j P_j \quad (15-9)$$

روی V است که در آنها c_1, c_2, \dots, c_k اسکالرها بی ای دلخواه هستند. اثبات. فرض کنیم \mathcal{L} مجموعه همه عملگرهای به صورت $(15-9)$ روی V را نشان دهد. در این صورت \mathcal{L} شامل عملگر همانی والحاقی

$$T^* = \sum_j c_j P_j$$

از هریک از عناصرش است. اگر $d_j P_j = \sum_j c_j P_j = U$ ، آنگاه به ازای هر اسکالر a

$$aT + U = \sum_j (ac + d_j) P_j$$

و

$$\begin{aligned} TU &= \sum_{i,j} c_i d_j P_i P_j \\ &= \sum_j c_j d_j P_j \\ &= UT. \end{aligned}$$

پس \mathcal{Q} جبر جابجا بی خودالحاقی است شامل \mathcal{T} و عملگر همانی. بنابراین \mathcal{Q} شامل \mathcal{A} هم هست.

حال فرض کنیم r_1, r_2, \dots, r_k همه ریشه های \mathcal{T} باشند. آنگاه به ازای هر جفت از نمایه های (i, n) با $i \neq n$ در \mathcal{T} عملگری چون T_{in} وجود دارد که $r_i(T_{in}) \neq r_n(T_{in})$ و $r_i(T_{in}) - r_n(T_{in})$ در این صورت عملگر خطی

$$Q_i = \prod_{n \neq i} a_{in}^{-1} (T_{in} - b_{in} I)$$

عنصری از جبر \mathcal{Q} است. نشان خواهیم داد که $i \leq k$ $Q_i = P_i$. برای این منظور، فرض کنیم $j \neq i$ و نیز α بردار دلخواهی از $V(r_j)$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} T_{ij}\alpha &= r_j(T_{ij})\alpha \\ &= b_{ij}\alpha \end{aligned}$$

پس $(T_{ij} - b_{ij} I)\alpha = 0$. چون سازه های در Q_i همگی (با یکدیگر) جابجا می شوند، نتیجه می گیریم که $Q_i\alpha = 0$. پس در صورتی که $j \neq i$ روی $V(r_j)$ با P_j مساوی است. حال فرض کنیم α برداری از $V(r_i)$ باشد. آنگاه $T_{in}\alpha = r_i(T_{in})\alpha$ و

$$a_{in}^{-1}(T_{in} - b_{in} I)\alpha = a_{in}^{-1}[r_i(T_{in}) - r_n(T_{in})]\alpha = \alpha.$$

پس $i = 1, \dots, k$ روی $V(r_i)$ با P_i مساوی است؛ بنابراین به ازای \mathcal{Q} از این مطلب نتیجه می شود که $\mathcal{Q} = P_i$.

این قضیه نشان می دهد که جبر \mathcal{Q} جابجا بی است و هر عنصر \mathcal{Q} یک عملگر نرمال قطری شدنی است. حال نشان می دهیم که \mathcal{Q} یک تاک مولد هم دارد.

نتیجه، تحت فرضهای قضیه، عملگری چون T دو وجود دارد که هر عنصر \mathcal{Q} یک چند جمله ای برحسب T است.

اما، فرض کنیم $T = \sum_{j=1}^k t_j P_j$ و t_1, \dots, t_k اسکالر هایی متمایز باشند. در این صورت به ازای

$$T^n = \sum_{j=1}^k t_j^n P_j.$$

اگر

$$f = \sum_{n=1}^s a_n x^n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{n=1}^s a_n T^n = \sum_{n=1}^s \sum_{j=1}^k a_n t_j^n P_j \\ &= \sum_{n=1}^k \left(\sum_{n=1}^s a_n t_j^n \right) P_j \\ &= \sum_{j=1}^k f(t_j) P_j. \end{aligned}$$

به ازای هر عملگرد لخواه در \mathcal{Q} مانند

$$U = \sum_{j=1}^k c_j P_j$$

یک چندجمله‌ای چون f وجود دارد که $f(t_j) = c_j$ ، $j \leq k \leq n$ ؛ و به ازای هر f ری به این صورت داریم

$$\square \cdot U = f(T)$$

تمرین

۱. تعریفی معقول از یک ماتریس $n \times n$ نامنفی ارائه کنید، و سپس ثابت کنید که چنین ماتریسی دارای جذری نامنفی و یکتاست.

۲. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط با شرط $-A = A^*$ باشد و فرض کنید $e^A = B$. نشان دهید که

- (الف) $\det B = e^{\operatorname{tr} A}$ ؛
- (ب) $B^* = e^{-A}$ ؛
- (پ) B یکانی است.

۳. اگر U و T عملگرهای نرمالی باشند که جا بجا شوند، ثابت کنید $U + T$ و UT نیز نرمال‌اند.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی مختلط بعد متاهی V باشد. ثابت کنید که ده حکم ذیل درباره T هم ارزند.

- (الف) T نرمال است.
- (ب) $\|T\alpha\| = \|T^*\alpha\|$ در V .

- (پ) $T = T_1 + iT_2$ که در آن $T_1 = T_2 T_1$ و T_2 خودالحق اند و $T^* = T_1 - iT_2$
- (ت) اگر α یک بردار و c یک اسکالر باشد و $T\alpha = c\alpha$
- (ث) پایه متعامد یکهای مشکل از بردارهای سرشت نمای T برای V وجود دارد.
- (ج) پایه متعامد یکهای چون B وجود دارد که $[T]_B$ قطری است.
- (ج) یک چندجمله‌ای چون g با ضرایب مختلف وجود دارد که $T^* = g(T)$
- (ح) هرزی رفضایی که تحت T پایا باشد تحت T^* نیز پایاست.
- (خ) $T = NU$ که در آن N نامنفی و U یکانی است و نیز N با U جابجا می‌شود.
- (د) $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ که در آن E_1, E_2, \dots, E_k به ازای c_1, c_2, \dots, c_k داریم و $E_i^* = E_j$, $E_i E_j = 0$, $i \neq j$

۵. تمرین ۳ را برای اثبات این مطلب به کار برد که هر خانواده جابجا‌شونده‌ای از عملگرهای نرمال (نه لزوماً عملگرهایی قطری شدنی) روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، یک جبر خودالحق جابجایی از عملگرهای نرمال تولید می‌کند.

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و U عملگری یکانی روی V باشد که $U\alpha = \alpha$ ایجاب کند. فرض کنید

$$f(z) = i \frac{(1+z)}{(1-z)}, \quad z \neq 1$$

و نشان دهید که

$$(الف) f(U) = i(I+U)(I-U)^{-1}$$

(ب) $f(U)$ خودالحق است؛

(پ) به ازای هر عملگر خودالحق T روی V ، عملگر

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

یکانی است و دارای خاصیت $T = f(U)$ است.

۷. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ مختلط مجهز به ضرب داخلی

$$(A|B) = \text{tr}(AB^*)$$

باشد. اگر B عنصری از V باشد، فرض کنید L_B , R_B و T_B عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

$$(الف) L_B(A) = BA$$

$$(ب) R_B(A) = AB$$

$$(پ) T_B(A) = BA - AB$$

را نشان بدتهند. سه خانواده از عملگرهای حاصل از تغییر B روی همه ماتریسهای

قطری را در نظر بگیرید. نشان دهید هر یک از این خانواده‌ها یک جبر خودالحاق جابجایی است و تفکیک‌های طیفی‌شان را نیز باید.

۸. اگر B عنصری دلخواه از فضای ضرب داخلی در تمرین ۷ باشد، نشان دهید که به طور یکانی با R_B هم ارز است.

۹. فرض کنید V فضای ضرب داخلی در تمرین ۷ و G گروه ماتریس‌های یکانی در V باشد. اگر B در G باشد، فرض کنید C_B عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$C_B(A) = BAB^{-1}$$

را نشان دهد. ثابت کنید که

(الف) C_B یک عملگر یکانی روی V است؛

$$(ب) C_{B_1 B_2} = C_{B_1} C_{B_2};$$

(پ) هیچ تبدیلی یکانی چون U روی V وجود ندارد که به ازای هر B در G

$$UL_BU^{-1} = C_B.$$

۱۰. فرض کنید \mathcal{F} خانواده‌ای دلخواه از عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{F} باشد. نشان دهید که

(الف) هر ریشه r ریشه‌ای از \mathcal{F} را تعریف می‌کند؛

(ب) هر ریشه r از \mathcal{F} یکتابع خطی ضربی روی A است؛ یعنی، به ازای همه T ها و U های در \mathcal{F} و همه اسکالارهای c

$$r(TU) = r(T)r(U)$$

$$r(cT + U) = cr(T) + r(U).$$

۱۱. فرض کنید \mathcal{F} خانواده جابجا‌شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری‌شدنی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد و فرض کنید \mathcal{F} جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{F} و عملگرهمانی I باشد. نشان دهید هر ریشه r مخالف 0 است و به ازای هر ریشه r از \mathcal{F} ریشه یکتایی چون s از \mathcal{F} وجود دارد که به ازای هر T در \mathcal{F} ،

$$s(T) = r(T)$$

۱۲. فرض کنید \mathcal{F} خانواده جابجا‌شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری‌شدنی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V و A . جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{F} باشد. \mathcal{F} را جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{F} و عملگرهمانی I بگیرید. نشان دهید که (الف) مجموعه همه عملگرهای روی V به صورت $cI + T$ است که در آن c یک اسکالر و T عملگری در A است.

- (ب) حداکثریک ریشه‌چون r از Q وجود دارد که به ازای هر T در $A_0 = 0$ ، $r(T) = 0$.
- (پ) اگریکی از ریشه‌های Q روی A_0 باشد، تصویرهای P_1, \dots, P_k در تفکیک همانی تعریف شده توسط Q را می‌توان به طوری نمایه‌گذاری کرد که A_0 مشکل از همه عملگرهای روی V به صورت

$$T = \sum_{j=1}^k c_j P_j$$

باشد. در اینجا c_1, \dots, c_k همه اسکالرها بی دلخواه هستند.

- (ت) اگر و تنها اگر به ازای هر ریشه r از Q عملگری T در $A_0 = 0$ موجود باشد که $r(T) = 0$.

۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

در بخش ۵.۸ خواص اساسی عملگرهای خودالحاق و نرمال را با استفاده از ساده‌ترین و مستقیم‌ترین روش‌های ممکن گشترش دادیم. در بخش ۵.۹ صورگوناگون نظریه طیفی را بررسی کردیم. در اینجا به اثبات برخی قضایا که از ماهیتی بیشتر فنی برخوردارند و عمدتاً درباره عملگرهای نرمال روی فضاهای حقیقی هستند می‌پردازیم.

با اثبات صورت دقیقترا از قضیه تجزیه اولیه از فصل ۶ در مورد عملگرهای نرمال، کار خود را آغاز می‌کنیم. این اثبات در هر دو حالت حقیقی و مختلط به کار می‌رود.

قضیه ۱۷. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم p چندجمله‌ای مینیمال T و p_1, \dots, p_k سازه‌های اول تکین متمایز آن باشند. در این صورت هر P_j با چندگانگی ۱ در تجزیه p ظاهر می‌شود و دارای درجه ۱ یا ۲ است. فرض کنیم W فضای پوچ (T_j) باشد. در این صورت

(۱) هر گاه $j \neq i$ ، فضای W_i و W_j عمود است؛

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \quad (2)$$

(۳) تحت T پایاست و چندجمله‌ای مینیمال تحدید T به W_j همان p_j است.

(۴) به ازای هر زیرگروه R یک چندجمله‌ای چون R به رایب در هیأت اسکالری وجود

داده که $e_j(T) \in R$ تصویر متعامد V روی W_j است.

در اثبات از احکام اساسی معینی استفاده خواهیم کرد که آنها را به صورت لمحه‌ای بیان می‌کنیم.

лем ۱. گیریم N عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی W باشد. در این صورت فضای پوچ N مکمل متعامد بود آن است.

اثبات. فرض کنیم به ازای همه β ‌ها در W ، $N\beta = 0$. در این صورت به ازای همه α ‌ها $N\alpha|N\beta = 0$. اذاین رو، $N^*\alpha = 0$. بنابر قضیه ۱۹ از فصل ۸، این امر ایجاب

می‌کند که $N\alpha = 0$. عکس، اگر $N\alpha = 0$ ، آنگاه $N^*\alpha = 0$ و به ازای همه β ‌های در W

$$(N^*\alpha|\beta) = (\alpha|N\beta) = 0. \square$$

لم ۳.۲ اگر N عملگری نرمال و α بوداری باشد که $N\alpha = 0$ ، آنگاه $N^*\alpha = 0$ ثابت. فرض کنیم N نرمال باشد و $N^*\alpha = 0$. در این صورت $N\alpha$ در برد N و نیز در فضای پوج N واقع می‌شود. بنابر لم ۱، این ایجاب می‌کند که $N\alpha = 0$. \square

لم ۳.۳ گیریم T عملگری نرمال و f چندجمله‌ای دلخواهی با ضرایب درهیأت اسکالری باشد. در این صورت $f(T)$ نیز نرمال است.

اثبات. فرض کنیم $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. در این صورت

$$f(T) = a_0I + a_1T + \dots + a_nT^n$$

$$f(T)^* = \bar{a}_0I + \bar{a}_1T^* + \dots + \bar{a}_n(T^*)^n.$$

چون $T^*T = TT^*$ ، نتیجه می‌گیریم که $f(T)$ با $f(T)^*$ جایجا می‌شود. \square

لم ۳.۴ گیریم T عملگری نرمال و f و g دو چندجمله‌ای نسبت بهم اول و با ضرایب درهیأت اسکالری باشند. فرض کنیم α و β بودارهایی باشند که $f(T)\alpha = 0$ و $g(T)\beta = 0$. در این صورت $(\alpha|\beta) = 0$.

اثبات. چندجمله‌ایها یعنی چون a و b با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که

$$af + bg = 1$$

$$a(T)f(T) + b(T)g(T) = I$$

و $\alpha = g(T)b(T)\alpha$. نتیجه اینکه

$$(\alpha|\beta) = (g(T)b(T)\alpha|\beta) = (b(T)\alpha|g(T)^*\beta).$$

طبق فرض $\beta = g(T)\beta = 0$. بنابر لم ۳، $g(T)$ نرمال است. بنابر این طبق قضیه ۱۹ از فصل ۸، $(\alpha|\beta) = 0$; $g(T)^*\beta = 0$.

اثبات قضیه ۱۷. بهیاد آورید که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از چندجمله‌ای تکین با کوچکترین درجه در بین همه چندجمله‌ایها یعنی $f(T) = 0$. وجود چندجمله‌ایها یعنی از این فرض ناشی می‌شود که V با بعد متناهی است. فرض کنیم سازه اولی چون p_j از p تکرار شده باشد. در این صورت به ازای یک چندجمله‌ای چون g ،

چون $p(T) = p(T) = p_jg$. نتیجه می‌گیریم که به ازای هر α در V

$$(p_j(T))^*g(T)\alpha = 0.$$

بنابر لم ۳، $p_j(T)$ نرمال است. پس، لم ۲ ایجاب می‌کند که به ازای هر α در V

$$p_j(T)g(T)\alpha = 0.$$

ولی این مطلب با این فرض که p درین همه f ‌هایی که $f(T) = 0$ دارای کوچکترین درجه است متناقض است. بنابراین، $p_1 \dots p_k = p$. اگر V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد هر p_j لزوماً به صورت

$$P_j = x - c_j$$

است که c_j حقیقی یا مختلط است. از طرف دیگر، اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، آنگاه یا $p_j = x_j - c_j$ و c_j در R است، یا

$$p_j = (x - c)(x - \bar{c})$$

و c عدد مختلطی غیرحقیقی است.

حال فرض می‌کنیم $\frac{P}{P_j} = f$. در این صورت چون f, \dots, f نسبت به هم

اول اند چندجمله‌ایها بی چون f با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که

$$1 = \sum_j f_j g_j. \quad (16-9)$$

حال به طور خلاصه نشان می‌دهیم که چگونه چنین f ‌هایی را می‌توان ساخت. اگر $P_j = x - c_j$ ، آنگاه $f_j(c_j) \neq 0$ و برای f چندجمله‌ای اسکالری $(c_j/f_j)^{1/1}$ را بر می‌گزینیم. وقتی که هر p_j بدین صورت باشد، $f_j g_j$ چندجمله‌ایها آشناست لازماً وابسته به c_1, \dots, c_k هستند. و (۱۶-۹) بوضوح درست است. فرض کنیم یک p_j به صورت $(x - c)(x - \bar{c})$ باشد که در آن c یک عدد مختلط غیرحقیقی است.

در این صورت V یک فضای ضرب داخلی حقیقی است و می‌نویسیم

$$g_j = \frac{x - \bar{c}}{s} + \frac{x - c}{\bar{s}}$$

که در آن $(c - \bar{c})f_j(c) \cdot s = (c - \bar{c})f_j(c)$. آنگاه

$$g_j = \frac{(s + \bar{s})x - (cs + \bar{c}\bar{s})}{s\bar{s}}$$

پس، f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. اگر درجه p برابر n باشد، آنگاه

$$1 - \sum_j f_j g_j$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و بادرجه حداقل $n - 1$ است؛ بعلاوه، این چندجمله‌ای به ازای هر یک از n ریشه (مختلط) p صفر می‌شود ولذا متعدد برابر ۰ است.

حال گیریم α برداری دلخواه از V باشد. در این صورت بنابر (۱۶-۹)

$$\alpha = \sum_j f_j(T) g_j(T) \alpha$$

وچون $\circ p_j(T) f_j(T) = 0$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر j ، $f_j(T) g_j(T) \alpha$ در W_j قرار دارد. طبق لم ۴، در صورتی که $j \neq i$ فضای W_j بر W_i عمود است. بنابراین، V مجموع مستقیم متعماد W_1, W_2, \dots, W_k است. اگر β برداری از W_j باشد، آنگاه

$$p_j(T) T \beta = T p_j(T) \beta = 0$$

پس $p_j(W_j)$ تحت T پایاست. گیریم T تحدید R روی W_j باشد. در این صورت \circ $p_j(T_{j'}) = 0$ و از این رو P بر چندجمله‌ای مینیمال T تقسیم پذیر است. چون p_j بر روی هیأت اسکالری تحویل ناپذیر است نتیجه می‌گیریم که p_j چندجمله‌ای مینیمال T است. حال، فرض کنیم $E_j = e_j(T) e_j = f_j g_j$. در این صورت به ازای هر بردار α در V ، بردار $E_j \alpha$ در W_j قرار دارد و

$$\alpha = \sum_j E_j \alpha.$$

پس، $\alpha - E_i \alpha = \sum_{j \neq i} E_j \alpha$: چون وقتی $j \neq i$ فضای W_j بر W_i عمود است، این مطلب ایجاب می‌کند که $E_i \alpha - E_j \alpha$ در W_i^\perp قرار داشته باشد. اکنون از قضیه ۴ در فصل ۸ نتیجه می‌شود که E_i تصویر متعماد V روی W_i است. \square

تعریف. (زیرفضاهای اولیه V تحت T می‌نامیم).

نتیجه. گیریم T عملگری نرمال دوی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V ، W_1, W_2, \dots, W_k مولفه‌های اولیه V تحت T باشند. فرض کنیم W زیرفضایی از V باشد که T پایاست. در این صورت

$$W = \sum_j W \cap W_j.$$

اثبات. واضح است که W شامل $\sum_j W \cap W_j$ است. از طرف دیگر، W که تحت T پایاست تحت هر چندجمله‌ای بر حسب T نیز پایاست. بخصوص، W تحت تصویر متعماد E_j از V روی W_j پایاست. اگر α در W باشد نتیجه می‌گیریم که $E_j \alpha$ در W_j است و در عین حال $\alpha = \sum_j E_j \alpha = \sum_j W \cap W_j$ است. \square

قضیه ۱۷ نشان می‌دهد که هر عملگر نرمال T روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی به طور متعارف توسط تعدادی متناهی از عملگرهای نرمال T_j مشخص می‌شود، و این عملگرهای نرمال روی مولفه‌های اولیه W_i از V تحت T تعریف می‌شوند و هر یک از چندجمله‌ایهای مینیمال شان بر روی هیأت اسکالرها تحویل ناپذیر است. برای تکمیل

استبساط خود از عملگرهای نرمال، لازم است که عملگرهای نرمال از این نوع خاص را بررسی کنیم.

واضح است عملگر نرمالی که چندجمله‌ای مینیمالش از درجه ۱ باشد دقیقاً مضری اسکالاری از عنصر همانی است. از طرف دیگر، وقتی که چندجمله‌ای مینیمال، تحویل ناپذیر و از درجه ۲ باشد وضعیت پیچیده‌تر است.

مثال ۱. فرض کنیم $r > 0$ عددی حقیقی باشد که مضری درست از π نیست. گیریم T عملگر نرمال روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه متعامد یک استاندۀ عبارت است از

$$A = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

در این صورت T مضری اسکالاری از تبدیلی متعامد، ولذا نرمال است گیریم p چندجمله‌ای سرشت‌نمای T باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} p &= \det(xI - A) \\ &= (x - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ &= x - 2r \cos \theta x + r^2. \end{aligned}$$

فرض کنیم $c = re^{i\theta}$, $b \neq 0$. آنگاه $c = a + ib$ و $b = r \sin \theta$, $a = r \cos \theta$.

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

و $(x - c)(x - \bar{c}) = p$. از این‌رو، p بر روی R تحویل ناپذیر است. چون p بر چند جمله‌ای مینیمال T تقسیم‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که p خود چندجمله‌ای مینیمال است.

این مثال حالت عکسی را پیشنهاد می‌کند که ذیلاً عرضه می‌شود.

قضیه ۱۸. گیریم T عملگری نرمال دیگر فضای خوب داخلی حقیقی بعد متناهی و V چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنیم

$$p = (x - a)^2 + b^2$$

که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند و $b \neq 0$. آنگاه عددی صحیح چون i وجود دارد که p چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است و ذیرفضاهایی چون V_1, V_2, \dots, V_i از V وجود دارند که

(۱) وقتی $j \neq i$, فضای V_j عمود است،

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \quad (2)$$

(۳) هر دادای پایه متعامدیکهای چون $\{\alpha_j, \beta_j\}$ با خاصیت ذیل است

$$T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$$

$$T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j.$$

به بیان دیگر، اگر $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\theta = \arccos \frac{a}{r}$ به نحوی انتخاب شود که T روی V نگاه مجموع مستقیم متعامدی از زیرفضاهای دو بعدی V است که T روی هر یک همچون « \mathbb{R}^2 برابر دوران به اندازه زاویه θ » عمل می کند.
اثبات قضیه ۱۸ بر پایه لم ذیل استوار خواهد بود.

لم. گیریم V یک فضای خوب داخلي حقیقی و S عملگر نرمالی روی V باشد که $S^2 + I^2 = 0$. فرض کنیم α بوداری دلخواه از V باشد و $\beta = S\alpha$. در این صورت

$$\begin{aligned} S^* \alpha &= -\beta \\ S^* \beta &= \alpha, \end{aligned} \quad (17-9)$$

$$\|\alpha\| = \|\beta\| \text{ و } (\alpha|\beta) = 0$$

اثبات. داریم $S\beta = S^* \alpha = -\alpha$ و $S\alpha = \beta$. بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 = \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha|\beta) + \|\beta\|^2 \\ &\quad + \|S\beta\|^2 + 2(S\beta|\alpha) + \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{چون } S \text{ نرمال است نتیجه می گیریم که} \\ 0 &= \|S^* \alpha\|^2 - 2(S^* \beta|\alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^* \beta\|^2 + 2(S^* \alpha|\beta) + \|\alpha\|^2 \\ &= \|S^* \alpha + \beta\|^2 + \|S^* \beta - \alpha\|^2. \end{aligned}$$

این تساوی (۱۷-۹) را ایجاد می کند، و در نتیجه

$$(\alpha|\beta) = (S^* \beta|\beta) = (\beta|S\alpha)$$

$$= (\beta|-\alpha)$$

$$= -(\alpha|\beta)$$

$$\text{و } (\alpha|\beta) = 0. \text{ به طور مشابه}$$

$$\|\alpha\|^2 = (S^* \beta|\alpha) = (\beta|S\alpha) = \|\beta\|^2.$$

اثبات قضیه ۱۸. گیریم V دسته ماکسیمالی از زیرفضاهای دو بعدی باشند که شرایط (۱) و (۲)، و نیز شرایط اضافی

$$\begin{aligned} T^* \alpha_j &= a\alpha_j - b\beta_j, & 1 \leq j \leq s \\ T^* \beta_j &= b\alpha_j + a\beta_j, \end{aligned} \quad (18-9)$$

را بر می آورند. همچنین فرض کنیم $W = V_1 + \dots + V_s$. در این صورت W مجموع مستقیم متعامد V_1, \dots, V_s است. نشان خواهیم داد که $W = V$. فرض کنیم این طور نباشد، آنگاه $W^\perp \neq \{0\}$. بعلاوه، چون (3) و $(18-9)$ ایجاب می کنند که W تحت T و T^* پایا باشد، نتیجه می گیریم که T^* تحت W^\perp پایا است و $T = T^*$. گیریم $S = b^{-1}(T - aI)$. در این صورت $S^*S = SS^* = S^* = b^{-1}(T^* - aI) = S^* - aI$. در این صورت $(T - aI)^* + b^*I = 0$. نتیجه می گیریم که $S^* + b^*I = 0$. برداری با نرم ۱ از W^\perp در نظر می گیریم و می نویسیم $\beta = S\alpha$. آنگاه β در W^\perp قرار دارد و $S\beta = -\alpha$. چون $S\beta = -\alpha$ ، این مطلب ایجاب می کند که

$$T\alpha = a\alpha + b\beta$$

$$T\beta = -b\alpha + a\beta.$$

مطابق لم، $T^* = aI + bS^*$ و $\|\beta\| = 1$. چون $(\alpha|\beta) = 0$ ، $S^*\beta = \alpha$ ، $S^*\alpha = -\beta$ نتیجه می شود که

$$T^*\alpha = a\alpha - b\beta$$

$$T^*\beta = b\alpha + a\beta.$$

ولی این مطلب با این واقعیت که V_1, \dots, V_s دستهٔ ماکسیمالی از زیر فضاهایی است که در (1) ، (3) و $(18-9)$ صدق می کنند متناقض است. بنابراین $V = W$ ، و نظر به اینکه

$$\det \begin{bmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{bmatrix} = (x-a)^2 + b^2$$

از (1) ، (2) و (3) نتیجه می گیریم که

$$\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]. \quad \square$$

نتیجه، تحت شرایط قضیه فوق، T معکوس پذیر است و

$$T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}.$$

اثبات. چون

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

از (۳) و (۱۸-۹) نتیجه می‌شود که $TT^* = (a^2 + b^2)I$. پس T معکوس‌پذیر است و $T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}$. \square

قضیه ۱۹. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد هتناهی V باشد. در این صورت هر عملگر خطی که با T جا بجا شود با T^* نیز جا بجا می‌شود. بعلاوه، هر زیرفضای پایای تحت T تحت T^* نیز پایای است.

اثبات. فرض کنیم U عملگری خطی روی V باشد که با T جا بجا می‌شود. را تصویر متعمد V روی مؤلفه اولیه W_j ($1 \leq j \leq k$) از V تحت T می‌گیریم. آنگاه E_j یک چندجمله‌ای بر حسب T است و از این رو با U جا بجا می‌شود. پس،

$$E_j U E_j = U E_j^* = U E_j.$$

بدین‌سان، $U(W_j)$ زیرمجموعه‌ای از W_j است. فرض کنیم T_j و U_j تحدیدهای T و U روی W_j را نشان دهنده. فرض کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. در این صورت U_j با T_j جا بجا می‌شود و اگر $c_j I_j = T_j$ ، بوضوح U_j نیز با $T_j^* = c_j I_j$ جا بجا می‌شود. از طرف دیگر، اگر T_j مضربی اسکالری از I_j نباشد، آنگاه T_j معکوس‌پذیر است و اعدادی حقیقی چون a_j و b_j وجود دارند که

$$T_j^* = (a_j^2 + b_j^2)T_j^{-1}.$$

چون $U_j T_j = T_j U_j = U_j T_j^{-1} T_j = U_j T_j^{-1}$. بنابراین U_j در هر دو حالت با T_j^* جا بجا می‌شود. اما T^* نیز با E_j جا بجا می‌شود و از این رو W_j تحت T^* پایاست. بعلاوه به ازای هر α و β در W_j

$$(T_j \alpha | \beta) = (T \alpha | \beta) = (\alpha | T^* \beta) = (\alpha | T_j^* \beta).$$

چون $(W_j)^*$ مشمول W_j است، این مطلب ایجاب می‌کند که T_j^* تحدید T^* روی W_j باشد. بنابراین، به ازای هر α_j در W_j

$$U T^* \alpha_j = T^* U \alpha_j.$$

چون V مجموع W_1, W_2, \dots, W_k است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر α در V

$$U T^* \alpha = T^* U \alpha,$$

پس U با T^* جا بجا می‌شود.

حال فرض کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست، و نیز فرض کنیم $Z_j = W \cap W_j$. بنابر نتیجه قضیه ۱۷، $W = \sum_j Z_j$. پس کافی است نشان دهیم که هر Z_j تحت T^* پایاست. هرگاه $T_j = c_j I$ این مطلب روشن است. وقتی این‌طور نباشد، T_j معکوس‌پذیر است و Z_j را در، و از این رو روی Z_j می‌نگارد. بنابراین، $Z_j = (T_j^{-1}(Z_j))$ چون

$$T_j^* = (a_j + b_j) T_j^{-1}$$

نتیجه می‌گیریم که به ازای هر j ، $T^*(Z_j)$ مشمول Z_j است. \square

فرض کنیم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. و W زیرفضایی پایا تحت T . در این صورت نتیجه قبل نشان می‌دهد که W تحت T^* نیز پایاست. از این مطلب نتیجه می‌شود که $W^\perp = T^* W^\perp$ تحت $T^{**} = T$ (و در نتیجه تحت T^* نیز) پایاست. با استفاده از این واقعیت، باسانی می‌توان حالت تقویت شده ذیل از قضیه تجزیه دوری را که در فصل ۷ آمده است، اثبات کرد.

قضیه ۴.۳۰. گیریم T عملگر خطی نرمالی (وی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V بعد (V)) باشد. داین صورت r بود غیرصفر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ دد V بترتیب با T -پوچسازهای e_1, e_2, \dots, e_r وجود دارد که

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T) \quad (1)$$

$$(2) \quad \text{اگر } -1, 1, \dots, k \leq r, \text{ آنگاه } e_{k+1}, \dots, e_r \text{ چندجمله‌ای } e_k \text{ داد می‌کند؛}$$

(3) وقتی $k \neq r$ ، فضای $Z(\alpha_j; T)$ بر $Z(\alpha_k; T)$ عمود است. بعلاوه عدد صحیح r پوچسازهای e_1, e_2, \dots, e_r به طور دیکتاً تو سط شرایط (1) و (2) وابن واقعیت که هیچ یک از α_k ‌ها صفر نیستند تعیین می‌شوند.

نتیجه. اگر A ماتریس نرمالی با درایه‌های حقیقی (مختلط) باشد، آنگاه یک ماتریس متعامد حقیقی (یکانی) چون P وجود داد که $P^{-1}AP$ در فرم متعارف گویاست.

نتیجه اینکه دو ماتریس نرمال A و B به طور یکانی هم ارزند اگر و تنها اگر دارای فرم گویای مساوی باشند؛ A و B به طور متعامد هم ارز هستند هرگاه دارای درایه‌های حقیقی باشند و فرم گویای مساوی هم داشته باشند.

از طرف دیگر، معیار ساده‌تری هم برای هم ارزی یکانی ماتریسهای نرمال و عملگرهای نرمال وجود دارد.

تعاریف. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی بروی هیأت مفروضی باشند. تبدیلی خطی چون

$$U : V \rightarrow V'$$

یک تبدیل یکانی نامیده می‌شود، هرگاه V دا بروی V' بنگاد و ضربهای داخلی را حفظ کند. اگر T عملگر خطی دوی V و T' عملگر خطی دوی V' باشد، آنگاه T هم ارز یکانی با T' است، هرگاه تبدیلی یکانی چون U اذ V بروی V' وجود داشته باشد که

$$UTU^{-1} = T'.$$

لم. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی بروی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم T عملگری خطی بروی V و T' عملگری خطی بروی V' باشد. آنگاه T از زیکانی با T' است اگر و تنها اگر پایه متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و نیز پایه متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$[T]_{\otimes} = [T']_{\otimes}.$$

اثبات. فرض کنیم تبدیلی یکانی چون U از V بروی V' وجود داشته باشد به طوری که $UTU^{-1} = T'$ را پایه متعامدیکه (مرتب) دلخواهی برای V' می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\alpha_j = U\alpha'_j$ ($1 \leq j \leq n$). آنگاه $\alpha'_j = U\alpha_j$ است و با قراردادن پایه متعامدیکه‌ای برای V' است

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj}\alpha_k$$

دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T'\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= \sum_k A_{kj}U\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

$$\therefore [T]_{\otimes} = A = [T']_{\otimes}.$$

بعكس، فرض کنیم پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B} از V و پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B}' برای V' وجود داشته باشد به طوری که

$$[T]_{\otimes} = [T']_{\otimes},$$

و گیریم $A = [T]_{\otimes}$. همچنین فرض کنیم $\alpha'_j = U\alpha_j$ ($1 \leq j \leq n$) باشد، آنگاه U تبدیل V در V' باشرط $U\alpha_j = \alpha'_j$ باشد، یکانی از V بروی V' است و

$$\begin{aligned} UTU^{-1}\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= U \sum_k A_{kj}\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

$$\square. UTU^{-1}\alpha'_j = T'\alpha'_j = T'U^{-1}U\alpha_j = T'\alpha_j$$

از لم بلا فاصله نتیجه می‌شود که عملگرهای هم ارزیکانی روی فضاهای با بعد

متناهی چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند. برای عملگرهای نرمال، حالت عکس هم درست است.

قضیه ۲۱. گیریم V و V' دوفضای خوب داخلی با بعد متناهی بروی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم T عملگری نرمال بروی V و T' عملگری نرمال بروی V' باشد. آنگاه هم از یکانی با T' است اگر وقتها اگر T و T' دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی باشند.

اثبات. فرض کنیم T و T' دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی f باشند. فرض کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. در این صورت

$$f = \prod_{j=1}^k \det(xI_j - T_j).$$

p_j را چندجمله‌ای مینیمال T_j می‌گیریم. اگر $c_j = p_j = x - c$ ، روشن است که

$$\det(xI_j - T_j) = (x - c_j)^{s_j}$$

و در آن s_j بعد W_j است. از طرف دیگر، اگر $p_j = (x - a_j)^{s_j} + b_j$ که در آن a_j اعدادی حقیقی‌اند و $b_j \neq 0$ آنگاه از قضیه ۱۸ نتیجه می‌شود که

$$\det(xI_j - T_j) = p_j^{s_j}$$

و در این حالت s_j بعد W_j است. بنابراین $f = \prod_j p_j^{s_j}$. حال می‌توانیم f را با همین روش و با استفاده از مؤلفه‌های اولیه V' تحت T' هم محاسبه کنیم. چون p_1, \dots, p_k سازه‌های اول متمایزی هستند، از یکتاپی تجزیه به سازه‌های اول f نتیجه می‌شود که دقیقاً k مؤلفه اولیه $(j \leq k)$ W_j از V' تحت T' وجود دارد و این مؤلفه‌های اولیه می‌توان طوری نمایه‌گذاری کرد که p_j ، چندجمله‌ای مینیمال برای T'_j ، تحدید T' به W'_j باشد. اگر $c_j = p_j = x - c$ ، $I'_j = cI_j$ و $T'_j = cI'_j$ که در آن I'_j عملگر همانی باشد. در این حالت بدیهی است که T'_j هم ارزیکانی با T_j است. اگر مانند بالا $R'_j W'_j$ است. در این حالت با استفاده از لم و قضیه ۲۰، دوباره می‌بینیم که T'_j هم ارزیکانی با T'_j است. پس، به ازای هر ز دو پایه متعامدیکه B_j و B'_j بترتیب برای W_j و W'_j وجود دار و به طوری که

$$[T_j]_{\otimes_j} = [T'_j]_{\otimes_j}.$$

حال گیریم U تبدیل خطی از V' در V' باشد که هر B_j را بروی B'_j می‌نگارد. در این صورت U تبدیلی یکانی از V' بروی V' است و $U^{-1}TU = T'$. \square

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فرمای دوخطی

۱۰۱۰. فرمای دوخطی

در این فصل فرمای دوخطی روی فضاهای برداری با بعد متاها را مورد بحث قرار می‌دهیم. احتمالاً خواننده بین برخی از مطالب و مباحث در میانها از فصل ۵ و موضوعهای ضربهای داخلی و فرمای از فصل ۸ و فصل ۹ وجه تشابهی مشاهده خواهد کرد. رابطه بین فرمای دوخطی و ضربهای داخلی به وجه خاصی محکم است؛ با این وجود، در این فصل هیچ یک از مطالب فضاهای ۸ یا ۹ دانسته فرض نمی‌شود. خواننده‌ای که با ضربهای داخلی آشنا نباشد، حین مطالعه مبحث فرمای دوخطی، اگر اولین بخش فصل ۸ را مطالعه کند احتمالاً بهره‌ای خواهد برداشت.

او لین بخش، فضای فرمای دوخطی روی یک فضای برداری \mathbb{W} بعدی را مورد بحث قرار می‌دهد. ماتریس یک فرم دوخطی در پایه مرتب مفروضی معرفی و یکریختی بین فضای فرمای و فضای ماتریسها $\mathbb{X} \times \mathbb{W}$ بیان گذاشته می‌شود. رتبه یک فرم دوخطی تعریف می‌شود و فرمای دوخطی ناتبهگون معرفی می‌شوند. بخش دوم به بحث روی فرمای دوخطی مقارن و قطعی کردن آنها می‌پردازد. بخش سوم فرمای دوخطی مقارن کج را مورد بحث قرار می‌دهد. چهارمین بخش گروه حافظ یک فرم دوخطی ناتبهگون را با توجه خاصی نسبت به گروههای متعامد، گروههای شبه متعامد، و یک گروه شبه متعامد خاص- گروه لورنتس- به بحث می‌گذارد.

تعریف. گیریم V فضایی برداری برداری هیأت F باشد. یک فرم دوخطی روی V تابعی چون f است که به هر جفت مرتبت از بردارهای α و β در V یک اسکالر $f(\alpha, \beta)$ دد F را تخصیص دهد و در شایط ذیر صدق کند.

$$\begin{aligned} f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) &= cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) \\ f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) &= cf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2). \end{aligned} \quad (1-10)$$

اگر فرض کنیم $V \times V$ مجموعه همه جفتهای مرتب از بردارهای واقع در V را نشان دهد، این تعریف می‌تواند به شرح زیرهم بیان شود: یک فرم دوخطی روی V تابعی چون f از $V \times V$ در F است که به عنوان تابعی از هر یک از شناسه‌ها یش، باشرط ثابت بودن دیگری، خطی باشد. واضح است که تابع صفر از $V \times V$ در F فرمی دوخطی است. این نیز درست است که هر توکیب خطی از فرمهای دوخطی روی V خود فرمی دوخطی است. برای اثبات این مطلب، کافی است ترکیبات خطی از نوع $gf + hg$ را که در آن f و g فرمهایی دوخطی روی V هستند در نظر بگیریم. اثبات این مطلب که $gf + hg$ در $(1-10)$ صدق می‌کند، شبیه سیاری از اثبات‌های دیگری است که قبلاً دیده‌ایم و از این رو آن را حذف می‌کنیم. همه این مطالب می‌توانند با گفتن اینکه مجموعه همه فرمهای دوخطی روی V زیرفضایی است از فضای همه توابع از $V \times V$ در F (مثال ۳ در فصل ۲) خلاصه شود. فضای فرمهای دوخطی روی V را با $L(V, V, F)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. گیریم V یک فضای برداری بر روی هیأت F باشد، و L_1 و L_2 تابعکنایی خطی روی V باشند. f را با ضابطه

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta)$$

تعریف می‌کنیم. اگر β را ثابت نگاه داریم و f را به عنوان تابعی از α محسوب کنیم، آنگاه چیزی جز مضری اسکالری از تابع خطی L_1 نخواهیم داشت. با ثابت بودن α ، f مضری اسکالری از L_2 است. پس، واضح است که f فرمی دوخطی روی V است.

مثال ۲. فرض کنیم m و n اعدادی صحیح مثبت باشند، و F یک هیأت باشد. V را فضای برداری همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی F و A را ماتریس $m \times m$ ثابتی بر روی F می‌گیریم. تابع f_A را چنین تعریف می‌کنیم

$$f_A(X, Y) = \text{tr}(X^t AY).$$

در این صورت f_A فرمی دوخطی روی V است. زیرا، اگر X, Y و Z سه ماتریس $m \times n$ بر روی F باشند،

$$\begin{aligned} f_A(cX + Z, Y) &= \text{tr}[(cX + Z)^t AY] \\ &= \text{tr}(cX^t AY) + \text{tr}(Z^t AY) \\ &= cf_A(X, Y) + f_A(Z, Y). \end{aligned}$$

در اینجا از این مطلب که عمل ترانهش و تابع ردخطی هستند استفاده شده است. نشان دادن اینکه f_A به عنوان تابعی از شناسه دوش خطی است از این هم ساده‌تر است. در حالت خاص $n=1$ ، ماتریس $X^t AY$ یک دریک، یعنی یک اسکالر است و فرم دوخطی چیزی جز

$$\begin{aligned} f_A(X, Y) &= X^t AY \\ &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

نیست. بزودی نشان خواهیم داد که هر فرم دوخطی روی فضای ماتریسهای $1 \times m$ از این نوع است، یعنی به ازای ماتریسی $m \times m$ چون A برابر f_A است.

مثال ۳. گیریم F یک هیأت باشد. می‌خواهیم همه فرمایی دوخطی روی فضای F^2 را بیاییم. فرض کنیم f یک چنین فرم دوخطی باشد. اگر (x_1, x_2) و $\alpha = (y_1, y_2)$ بردارهایی از F^2 باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f(x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2, \beta) \\ &= x_1 f(\epsilon_1, \beta) + x_2 f(\epsilon_2, \beta) \\ &= x_1 f(\epsilon_1, y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2) + x_2 f(\epsilon_2, y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2) \\ &= x_1 y_1 f(\epsilon_1, \epsilon_1) + x_1 y_2 f(\epsilon_1, \epsilon_2) + x_2 y_1 f(\epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad + x_2 y_2 f(\epsilon_2, \epsilon_2). \end{aligned}$$

پس، f به طور کامل توسط چهار اسکالر (ϵ_i, ϵ_j) ، $A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ ، بنابر

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= A_{11} x_1 y_1 + A_{12} x_1 y_2 + A_{21} x_2 y_1 + A_{22} x_2 y_2 \\ &= \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

تعیین می‌شود.

اگر X و Y ماتریسهای مختصات α و β و A ماتریس 2×2 با درایه‌های $A(i, j) = A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ باشد، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = X^t A Y. \quad (2-10)$$

در مثال ۲ مشاهده کردیم که اگر A ماتریسی 2×2 بر روی F باشد، آنگاه (۲-۱۰) فرمی دوخطی روی F^2 تعریف می‌کند. می‌بینیم که فرمایی دوخطی روی F^2 ، دقیقاً آنها یی هستند که از ماتریسی 2×2 طبق (۲-۱۰) بدست می‌آیند.

بحث مثال ۳ را می‌توان برای تشریح همه فرمایی دوخطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی تعمیم داد. گیریم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتباً برای V باشد. فرض کنیم f فرمی دوخطی روی V باشد.

اگر

$$\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n \quad , \quad \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$

بردارهایی از V باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f\left(\sum_i x_i \alpha_i, \beta\right) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \sum_j y_j \alpha_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j). \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$ آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_i \\ &= X^t A Y \end{aligned}$$

که در آن X و Y ماتریس‌های مختصات α و β در پایه مرتب B هستند، پس، هر فرم دوخطی روی V به ازای ماتریس $n \times n$ چون A بر روی F از نوع

$$f(\alpha, \beta) = [\alpha]_{\mathbb{A}}^t A [\beta]_{\mathbb{A}} \quad (3-10)$$

است. بعکس، اگر ماتریس $n \times n$ مانند A داده شده باشد، بسهولت دیده می‌شود که $(3-10)$ فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می‌کند و $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$

تعریف. گیریم V یک فضای برداری با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = B$ پایه مرتبی برای V باشد. اگر f فرمی دوخطی دوی V باشد، ماتریس A در پایه B مرتب عبارت است از ماتریس $n \times n$ با درایه‌های $(A_{ij}) = f(\alpha_i, \alpha_j)$. گاهی این ماتریس A با $[f]$ نشان خواهیم داد.

قضیه ۱. گیریم V یک فضای برداری با بعد متناهی بروی هیأت F باشد. به ازای هر پایه مرتب B از V قابعی که به هر فرم دوخطی دوی V ماتریسش در پایه B مرتب دا
مربوط سازد، یک پکریختی از فضای $L(V, V, F)$ بروی فضای ماتریس‌های $n \times n$ بروی هیأت F است.

امنات. قبله دیدیم که f تناظری یک به یک بین مجموعه فرمهای دوخطی روی V و مجموعه همه ماتریس‌های $n \times n$ بروی F است. اینکه این تناظر تبدیلی خطی است، مطلبی است که به آسانی دیده می‌شود، زیرا به ازای هر α و β

$$(cf+g)(\alpha_i, \alpha_j) = cf(\alpha_i, \alpha_j) + g(\alpha_i, \alpha_j).$$

و این چیزی نیست جز

$$[cf+g]_{ij} = c[f]_{ij} + [g]_{ij}. \square$$

نتیجه. اگر $\{L_1, \dots, L_n\}$ پایه هرتبی برای V و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه دوگان برای V^* باشد، آنگاه n^2 فرم دوخطی

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha)L_j(\beta), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n$$

پایهای برای فضای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. بویژه، بعد $L(V, V, F)$ برای n^2 است.

اثبات. پایه دوگان $\{L_1, \dots, L_n\}$ اساساً بنا بر این واقعیت که $(L_i(\alpha))$ (با ازای α در V) تامین مختص α در پایه مرتب \mathcal{B} است تعریف می‌شود. حال توابع f_{ij} تعریف شده توسط

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha)L_j(\beta)$$

فرمایهای دوخطی از نوع بررسی شده در مثال ۱ هستند. اگر

$$\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

آنگاه

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = x_i y_j.$$

گیریم f فرمی دوخطی روی V و A ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} باشد. در این صورت

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j$$

که چیزی جز

$$f = \sum_{i,j} A_{ij} f_{ij}$$

نیست. اکنون واضح است که n^2 فرم f_{ij} پایهای برای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. \square

اثبات این نتیجه را می‌توان به صورت ذیل هم بیان کرد. فرم دوخطی f «یکه» ماتریسی $E^{i,j}$ را که تنها درایه غیر صفرش یک ۱ در سطر و ستون j است، به عنوان ماتریس خود در پایه مرتب \mathcal{B} دارد. چون این یکه‌های ماتریسی پایهای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ بنا می‌کنند، فرمایهای f یک پایه برای فضای فرمایهای دوخطی تشکیل می‌دهند.

مفهوم ماتریس یک فرم دوخطی در یک پایه مرتب، مشابه با مفهوم ماتریس یک عملگر خطی در یک پایه مرتب است. درست نظریه عملگرها خطی، علاقه مندیم تغییرات حاصل در ماتریس نمایش یک فرم دوخطی را هنگامی که پایه مرتبی به پایه مرتب دیگری تغییر

می‌باید بدانیم. لذا فرض می‌کنیم $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ دو پایه مرتبت برای V و f فرمی دوخطی روی V باشد. ماتریس‌های $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ و $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند؟ خوب، P را ماتریس $n \times n$ (معکوس پذیری) می‌گیریم که به ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[\alpha]_{\mathcal{B}},$$

بهیان دیگر، P را به وسیله

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

تعریف می‌کنیم. به ازای هر دو بردار α و β در V

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= [\alpha]_{\mathcal{B}'}^t [f]_{\mathcal{B}'} [\beta]_{\mathcal{B}'} \\ &= (P[\alpha]_{\mathcal{B}})^t [f]_{\mathcal{B}} P[\beta]_{\mathcal{B}} \\ &= [\alpha]_{\mathcal{B}}^t (P^t [f]_{\mathcal{B}} P) [\beta]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

بنابر تعریف و یکتاپی ماتریسی که f را در پایه مرتبت \mathcal{B}' نمایش می‌دهد، باید داشته باشیم

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P^t [f]_{\mathcal{B}} P. \quad (4-10)$$

مثال ۴. گیریم V فضای برداری \mathbb{R}^2 باشد. فرض می‌کنیم f فرمی دوخطی باشد که روی $\beta = (y_1, y_2)$ و $\alpha = (x_1, x_2)$ تعریف شود. در این صورت

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$f(\alpha, \beta) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ولذا ماتریس f در پایه مرتبت استاند $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ عبارت است از

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض می‌کنیم $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ پایه مرتبت تعریف شده توسط $(1, -1)$ و $(1, 1)$ باشد. در این حالت ماتریس P که مختصات را از \mathcal{B}' به \mathcal{B} تغییر می‌دهد عبارت است از

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P^t [f]_{\mathcal{B}} P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

معنی این نمایش ماتریسی آن است که اگر بردارهای α و β را بهوسیله مختصاتشان در پایه \mathcal{B}' همچون

$$\alpha = x'_1 \epsilon'_1 + x'_4 \epsilon'_4 \quad \beta = y'_1 \epsilon'_1 + y'_4 \epsilon'_4$$

بیان کنیم، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = 4x'_4 y'_4.$$

نتیجه‌ای از فرمول تغییر پایه (۴-۱۵) مطلب زیر است:

اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند که فرم دوخطی مشخصی روی V را در (احتمالاً) پایه‌های مرتب مختلفی نمایش دهند، آنگاه A و B دارای یک رتبه هستند. زیرا، اگر P ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری باشد و $B = P^t A P$ ، بدیهی است که A و B دارای یک رتبه هستند. این مطلب بهما امکان می‌دهد که رتبه یک فرم دوخطی روی V را به عنوان رتبه هر ماتریسی که آن فرم را در پایه مرتباً برای V نمایش می‌دهد، تعریف کنیم.

بهتر است تعریفی طبیعی‌تر برای رتبه یک فرم دوخطی ارائه کنیم. این کار رامی‌توان به شرح زیر انجام داد: فرض کنیم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V باشد. اگر برداری چون α را در V ثابت نگه داریم، آنگاه $f(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از β خطی است. بدین طریق، هر α ی ثابت، تابعکی خطی روی V تعیین می‌کند. این تابعک خطی را با $L_f(\alpha)$ نشان می‌دهیم. خلاصه می‌کنیم: اگر α بردار دلخواهی از V باشد، آنگاه $L_f(\alpha)$ آن تابعک خطی روی V است که مقدار آن روی هر بردار β برابر $f(\alpha, \beta)$ است. این مطلب تبدیلی چون $L_f(\alpha) \rightarrow \alpha$ از V در فضای دوگان V^* را بهوست می‌دهد. چون

$$f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$$

می بینیم که

$$L_f(c\alpha_1 + \alpha_2) = cL_f(\alpha_1) + L_f(\alpha_2)$$

یعنی، L_f تبدیلی خطی از V در V^* است.

به طریقی مشابه، f تبدیلی خطی چون R_f از V در V^* را تعیین می کند. به ازای هر β ثابتی از V^* ، $f(\alpha, \beta)$ به عنوان ثابعی از α خطی است. $(R_f(\beta))$ را آن تابعک خطی روی V تعریف می کنیم که مقدار آن روی بردار α برابر $f(\alpha, \beta)$ باشد.

قضیه ۳. گیریم f فرمی دوخطی دوی فضای بوداری بعد متناهی V باشد. فرض کنیم L_f, R_f تبدیلهای خطی از V در V^* تعریف شده توسط $(R_f(\beta))(\alpha) = f(\alpha, \beta) = (L_f(\alpha))(\beta)$ باشند. دلاین صورت $(R_f(\beta)) = (L_f(\alpha))$ (تبه R_f) = (تبه L_f)

اثبات. می توان اثباتی «مستقل از مختصات» برای این قضیه ارائه داد. چنین اثباتی شبیه به اثبات این مطلب (در بخش ۷.۳) است که رتبه سطروی هرماتریس بر ابر رتبه ستونی آن است. لذا، در اینجا اثباتی راعرضه می کنیم که با انتخاب یک دستگاه مختصات (پایه) به پیش می رود و سپس از قضیه «رتبه سطروی بر ابر رتبه ستونی است» استفاده می شود.

برای اینکه، ثابت کنیم رتبه $(R_f) = \text{تبه } L_f$ ، کافی است ثابت کنیم که L_f و R_f دارای پوچی مساوی هستند. گیریم B پایه مرتبی برای V باشد و $A = [f]$. اگر α و β دو بردار در V با ماتریسهای مختصات X و Y در پایه مرتب B باشند، آنگاه $f(\alpha, \beta) = X^T A Y$. حال \circ $R_f(\beta) = X^T A Y$ بدين معنی است که به ازای هر α در V ، $f(\alpha, \beta) = \circ$ $AY = \circ$. شرایط اخیر چیزی جزو $AY = \circ$ یعنی، به ازای هر ماتریسی X $X^T A Y = \circ$ چون $n \times 1$ X و $1 \times n$ Y نیست. بنابراین، پوچی R_f برابر است با بعد فضای جوابهای $AY = \circ$.

به طور مشابه، $L_f(\alpha) = \circ$ اگر و تنها اگر به ازای هر ماتریسی $1 \times n$ چون $X^T A Y = \circ$ ، Y پس، α در فضای پوچ L_f است اگر و تنها اگر $A^T X = \circ$ ؛ یعنی، $A^T X = \circ$ بنا بر این، پوچی L_f برابر است با بعد فضای جوابهای $A^T X = \circ$. چون ماتریسهای A و A^T دارای رتبه های ستونی مساوی هستند، می بینیم که

$$\square \cdot \text{پوچی } (R_f) = \text{پوچی } (L_f)$$

تعریف. اگر f فرمی دوخطی دوی فضای بعد متناهی V باشد، رتبه f عبارت است از عدد صحیح $r = \text{تبه } (R_f) = \text{تبه } (L_f)$.

نتیجه ۱. دتبه هر فرم دوخطی برابر است با دتبه ماتریس آن فرم در پایه موقب.

نتیجه ۲. اگر f فرمی دوخطی دوی فضای بوداری n بعدی V باشد، احکام زیر هم اذ هستند:

(الف) $f = n$ (تبه).(ب) بها زای هر بردار غیر صفر $\alpha \in V$ بی د د وجود داد که $f(\alpha, \beta) = 0$.(پ) بها زای هر بردار غیر صفر $\beta \in V$ بی د د وجود داد که $f(\alpha, \beta) = 0$.اثبات. حکم (ب) چیزی جز این نیست که فضای پوچ L_f زیر فضای صفر است.حکم (پ) نیز حاکی است که فضای پوچ R_f زیر فضای صفر است. تبدیلهای خطی L_f ودارای پوچی هستند اگر و تنها اگر دارای رتبه n باشند، یعنی اگر و تنها اگر R_f رتبه $f = n$.تعریف. فرمی دوخطی چون f دوی یک فضای برداری V ناتبیه‌گون (یا نامنفرد)

نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط (ب) و (پ) نتیجه ۲ صدق کند.

اگر V با بعد متناهی باشد، آنگاه f ناتبیه‌گون است به شرط آنکه f در یکی از سه شرط نتیجه ۲ صدق کند. بخصوص f ناتبیه‌گون (نامنفرد) است اگر و تنها اگر ماتریس آن در (هر) پایه مرتبی برای V یک ماتریس نامنفرد باشد.مثال ۵. گیریم $V = R^n$ و f فرمی دوخطی باشد که بها زای $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ توسط

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

تعریف می‌شود. در این صورت f یک فرم دوخطی ناتبیه‌گون روی R^n است. ماتریس f در پایه مرتب استاندۀ عبارت است از ماتریس همانی $n \times n$:

$$f(X, Y) = X^T Y.$$

این f ، معمولاً ضرب نقطه‌ای (یا اسکالاری) نامیده می‌شود. خواسته احتمالاً با این فرم دوخطی، دست کم در حالت $n=3$ آشنا باشد. از نظر هندسی، عدد $f(\alpha, \beta)$ عبارت است از حاصل ضرب طول α در طول β در کسینوس زاویه بین α و β . بخصوص، $f(\alpha, \beta) = 0$ اگر و تنها اگر بردارهای α و β متعامد (عمود برهم) باشند.

تمرین

۱. کدامیک از توابع f در ذیر تعریف شده روی بردارهای (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در R^2 فرمایی دوخطی هستند؟(الف) $f(\alpha, \beta) = 1$ (ب) $f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$ (پ) $f(\alpha, \beta) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$ (ت) $f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

۳. فرض کنید f فرمی دوخطی روی R^2 تعریف شده توسط

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

باشد. ماتریس f را در هر یک از پایه‌های زیر بیا بید:

$$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, -1), (1, 1)\}, \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

۴. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای 3×2 بر روی R و f فرمی دوخطی روی V

تعریف شده توسط $f(X, Y) = \text{tr}(X^T A Y)$ باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

مطلوب است ماتریس f در پایه مرتب

$$\{E^{11}, E^{12}, E^{13}, E^{21}, E^{22}, E^{23}\}$$

که در آن E^{ij} ماتریسی است که تنها درایه غیر صفرش یک در سطر i و ستون j است.

۵. همه فرمهای دوخطی f روی R^3 را با این خاصیت که به ازای هر α و β ، $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ توصیف کنید.

۶. فرمهای دوخطی روی R^3 را که به ازای همه α ها و β ها در $f(\beta, \alpha) = -f(\alpha, \beta)$ صدق می‌کنند توصیف کنید.

۷. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. نشان دهید معادله

$$f(A, B) = n \text{tr}(AB) - \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می‌کند. آیا این درست است که به ازای هر A و B ، $f(A, B) = f(B, A)$ ؟

۸. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. نشان دهید که f ناتهگون (غیر ناتهگون) است. فرض کنید V زیرفضایی از V مشکل از ماتریسهای با رد و f تحدید f روی V باشد. نشان دهید که f ناتهگون است.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ و V_2 زیرفضایی V مشکل از همه ماتریسهای A باشد که $\text{tr}(A) = 0$ و $f_2(A) = -A$ (یعنی $f_2(A^*) = A^*$ است). تحدید f روی V_2 را با f_2 نشان می‌دهیم. ثابت کنید که f_2 معین منفی است، یعنی به ازای هر A غیر صفر در V_2 ، $f_2(A, A) < 0$.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. فرض کنید W مجموعه همه ماتریس‌های A در V باشد که به ازای هر B , $f(A, B) = 0$. نشان دهید W زیرفضایی از V است. W را به طور صریح توصیف کنید و سپس آن را بیابید.

۱۰. فرض کنید f فرم دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V و W زیرفضای مشکل از همه β -هایی باشد که به ازای هر α , $f(\alpha, \beta) = 0$. نشان دهید

$$\text{بعد}(W) - \text{بعد}(V) = \text{رتبه}(f).$$

این نتیجه و نتیجه تمرین ۹ را به کار گیرید تا رتبه فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید f فرم دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنید V_1 زیرفضایی از V باشد با این خاصیت که تحدید f روی V_1 ناتیه‌گون است. نشان دهید بعد $(V_1) \geqslant \text{رتبه}(f)$.

۱۲. فرض کنید f و g فرمایهای دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشند. فرض کنید g نامنفرد باشد. نشان دهید که عملگرهای خطی یکتایی چون T_1, T_2 روی V وجود دارند که به ازای هر α و β

$$f(\alpha, \beta) = g(T_1\alpha, \beta) = g(\alpha, T_2\beta).$$

۱۳. نشان دهید که اگر g منفرد باشد، لزوماً نتیجه بدست آمده در تمرین ۱۲ درست نیست.

۱۴. فرض کنید f فرم دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. نشان دهید f می‌تواند به صورت حاصل ضربی از دو تابع خطی بیان شود (یعنی، به ازای L_1 و L_2 در V^* , $f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta)$) اگر و تنها اگر f دارای رتبه ۱ باشد.

۳.۱۰. فرمایهای دوخطی متقارن

هدف اصلی این بخش، پاسخگویی به سؤال زیر است: اگر f فرم دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، چه وقت پایه مرتبی چون β برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود؟ ثابت می‌کنیم که این امر امکان پذیر است اگر و تنها اگر f فرم دوخطی مقارنی باشد، یعنی $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. قضیه تنها و قتنی ثابت می‌شود که هیأت اسکالری سرشت نمای صفرداشته باشد، بدین معنی که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، مجموع $+ \dots + 1$ در F صفر باشد.

تعریف. گوییم f فرمی دوخطی دی‌فضای برداری V باشد. گوییم f متقارن است

$$\text{هرگاه بهازی همه بردادهای } \alpha, \beta \text{ در } V \text{ داریم: } f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$$

اگر V با بعد متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس آن، A ، دریک (یا هر) پایه مرتب، متقارن باشد: $A^t = A$. برای اثبات این مطلب، باید برسی کنیم که چهوقت فرم دوخطی

$$f(X, Y) = X^t A Y$$

متقارن است. این فرم متقارن است اگر و تنها اگر بهازی همه ماتریسهای ستونی X و Y ، $X^t A Y = Y^t A X$ داریم. چون $X^t A Y = Y^t A X$ ماتریسی یک در یک است، واضح است $X^t A^t X = Y^t A X$. واضح است f متقارن است اگر و تنها اگر بهازی هر X و Y ، $X^t A^t X = Y^t A X$ باشند. بخصوص، باید توجه کرد که اگر پایه مرتبی برای V وجود داشته باشد، که در آن f توسط ماتریس قطری نمایش داده شود، آنگاه f متقارن است؛ زیرا هر ماتریس قطری یک ماتریس متقارن است.

اگر f فرم دوخطی متقارنی باشد، فرم درجه دوم وابسته به f ، عبارت است از تابع q از V در F تعریف شده توسط

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha).$$

اگر F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد، فرم دوخطی متقارن f به طور کامل توسط فرم درجه دوم وابسته‌اش، طبق اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta) \quad (5-10)$$

تعیین می‌شود. اثبات (5-10) محاسبه‌ای عادی است که آن را حذف می‌کنیم. اگر f فرم درجه دوم ضرب نقطه‌ای در مثال ۵ باشد، فرم درجه دوم وابسته به آن عبارت است از

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

به بیان دیگر، $(\alpha)q$ محدود طول α است. برای فرم دوخطی $f_A(X, Y) = X^t A Y$ فرم درجه دوم وابسته عبارت است از

$$q_A(X) = X^t A X = \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j.$$

یکی از رده‌های مهم فرمهای دوخطی متقارن، رده ضربهای داخلی روی فضاهای برداری حقیقی هستند که در فصل ۸ مورد بحث قرار گرفت. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، یک ضرب داخلی روی V فرم دوخطی متقارنی چون f روی V است که در شرط

$$f(\alpha, \alpha) > 0, \alpha \neq 0 \quad (6-10)$$

صدق می‌کند. هر فرم دوخطی که در (6-10) صدق کند، معین مثبت نامیده می‌شود. پس، هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی، یک فرم دوخطی متقارن معین مثبت روی

آن فضاست. توجه کنید که هر ضرب داخلی ناتبیه‌گون است. دو بردار α و β نسبت به ضرب داخلی f متعامد نامیده می‌شوند، هر گاه $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. فرم درجه دوم $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ تنها مقادیر نامنفی را می‌پذیرد و $q(\alpha) \geq 0$ به عنوان محدود طول α در نظر گرفته می‌شود. بدینهی است که مقادیر نامنفی را می‌پذیرد و متعامد، از مهمترین مثال ضربهای داخلی—ضرب نقطه‌ای در مثال ۵—ریشه می‌گیرند.

اگر f فرم دوخطی متقاضانی روی یک فضای برداری V باشد، مناسب است برخی از اصطلاحات ضربهای داخلی را برای f هم به کار ببریم. بویژه مناسب است بگوییم که α و β نسبت به f متعامدند، هر گاه $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. مصلحت نیست که $f(\alpha, \alpha) > 0$ به عنوان محدود طول α در نظر گرفته شود؛ برای مثال، اگر V یک فضای برداری مختلط باشد، ممکن است داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = \sqrt{1 - f(\alpha, \alpha)^2}$ یا زوی یک فضای برداری حقیقی داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = -\sqrt{1 - f(\alpha, \alpha)^2}$.

اکنون به قضیه اساسی این بخش می‌پردازیم. درخواهندن اثبات، تجسم حالت خاصی که در آن V یک فضای برداری حقیقی و f ضربهای داخلی روی V باشد به خواهند کمک خواهد کرد.

قضیه ۳. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی بروی هیأتی با سروشت نمای صفر و f فرم دوخطی متقاضانی روی V باشد. در این صورت پایه موقتی برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود. اثبات. آنچه را که باید بیاییم پایه مرتباً چون

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

است که به ازای $i \neq j$ $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. اگر $f(\alpha, \alpha) = 1$ باشد، فرضیه به طور بدینهی درست است. پس می‌توان فرض کرد که $f(\alpha, \alpha) = n > 1$. اگر به ازای هر α در V $f(\alpha, \alpha) = q$ ، فرم درجه دوم وابسته q است و اتحاد قطبی (۵-۱۰) نشان می‌دهد که $f(\alpha, \alpha) = q(\alpha) = 0$. پس در V برداری چون α وجود دارد که $f(\alpha, \alpha) = q(\alpha) = 0$. به طور گیریم W زیرفضایی یک بعدی از V باشد که توسط α پذیده می‌آید و W^\perp مجموعه همه بردارهای β در V که $f(\alpha, \beta) = 0$ است. اکنون ادعا می‌کنیم که $W^\perp = W \oplus W^\perp$. به طور یقین زیرفضاهای W و W^\perp مستقل هستند. یک بردار نمونه در W است که در آن $c\alpha$ یک اسکالر است. اگر $f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha) = 0$ باشد، آنگاه $c = 0$ است. اگر $f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha) \neq 0$ باشد، پس $c = 0$ نیز باشد. همچنین، هر بردار در V مجموع برداری در W و برداری در W^\perp است. زیرا، فرض کنیم γ برداری دلخواه در V باشد، قرار می‌دهیم

$$\beta = \gamma - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \gamma) - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} f(\alpha, \alpha)$$

و چون f متقارن است، $f(\alpha, \beta) = 0$. پس، β در زیر فضای W^\perp قرار دارد. عبارت

$$\gamma = \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} \alpha + \beta$$

$$\text{نشان می‌دهد که } V = W + W^\perp.$$

تحدید f روی W^\perp یک فرم دوخطی متقارن روی W^\perp است. چون W^\perp دارای

بعد $(1-n)$ است می‌توانیم بنا به استقرار فرض کنیم که W^\perp دارای پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ است که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j (i \geq 2, j \geq 2)$$

با قراردادن $\alpha_1 = \alpha$ ، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V به دست می‌آید و به ازای $i \neq j$ داریم $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$.

نتیجه. گیریم F ذیر هیأتی از اعداد مختلف و A ماتریس $n \times n$ متقارن بروی F باشد. در این صورت ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P بروی F وجود دارد که $P^t A P$ قطری است. لکن، این مطلب به هیچ وجه از آنچه در بالا انجام شد آشکار نیست.

در حالتی که F هیأت اعداد حقیقی باشد، ماتریس معکوس پذیر P در این نتیجه را می‌توان ماتریسی متعامد انتخاب کرد. بدین معنی که $P = P^{-1}$. به بیان دیگر، اگر A یک ماتریس $n \times n$ متقارن حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^t A P$ قطری است؛ لکن، این مطلب به هیچ وجه از آنچه در بالا انجام شد آشکار نیست (فصل ۸ را بینید).

قضیه ۴. گیریم V یک فضای برداری با بعد متناهی بروی هیأت اعداد مختلف باشد. فرض کنیم f فرم دوخطی متقارن روی V با تبة r باشد. در این صورت برای V پایه مرتبی چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ وجود دارد که (1) ماتریس f در پایه موقب \mathcal{B} قطری است

$$f(\beta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & j = 1, \dots, r \\ 0, & j > r \end{cases} \quad (2)$$

اثبات. بنابر قضیه ۳ پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad i \neq j \quad \text{به ازای}$$

چون f دارای رتبه r است، رتبه ماتریس آن در پایه مرتباً $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ نیز r است. پس، به ازای دقیقاً r مقدار z باید داشته باشیم $f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$. با تغییر ترتیب بردارهای α_j ، می‌توان فرض کرد که

$$f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, r$$

اکنون از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هیأت اسکالرها همان هیأت اعداد مختلط است. اگر $\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}$ نشانگر یکی از ریشه‌های دوم (جذر) مختلط $f(\alpha_j, \alpha_j)$ باشد و اگر قراردهیم

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}} \alpha_j, & j = 1, \dots, r \\ \alpha_j, & j > r \end{cases}$$

آنگاه پایه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ شرایط (۱) و (۲) را ارضامی کند. \square

بدیهی است، در صورتی که هیأت اسکالری زیر هیأتی از اعداد مختلط باشد که در آن هر عنصرش ریشه دومی داشته باشد، قضیه ۴ باز هم معتبر است. این قضیه مثلاً وقتی که هیأت اسکالری هیأت اعداد حقیقی باشد، معتبر نیست. روی هیأت اعداد حقیقی بجای قضیه ۴ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵. گیریم V یک فضای برداری \mathbb{R} بعدی بروی هیأت اعداد حقیقی f فرم دوخطی متقارنی روی V بازگشته باشد. در این صورت پایه‌مرتبی چون $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ برای V وجود دارد که در آن ماتریس f قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j) = \pm 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

بعلاوه تعداد بردارهای پایه‌ای β_j که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ مستقل از انتخاب پایه است.

اثبات. پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$f(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j > r.$$

گیریم

$$\beta_j = |f(\alpha_j, \alpha_j)|^{-1/2} \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\beta_j = \alpha_j, \quad j > r.$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای است با خواص مطلوب.

گیریم p تعداد بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ باشد که مانند V^+ می‌باشد. گیریم V^- زیرفضایی از V باشد که توسط بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 0$ باشد. گیریم V^\perp زیرفضایی از V پدید آمده توسط بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = p$. حال بعد $V^+ = \{f(\beta_j, \beta_j) = 1\}$ باشد، $V^- = \{f(\beta_j, \beta_j) = 0\}$ باشد و $V^\perp = \{f(\beta_j, \beta_j) = p\}$ باشد. بسهولت دیده می‌شود که اگر α بردار غیرصفری از V^+ باشد، V^+ را ثابت کیم. به بیان دیگر، f روی زیرفضای V^+ معین مثبت است. به طور مشابه، آنگاه $\langle f(\alpha, \alpha) \rangle = 0$ باشد که اگر α بردار غیرصفری از V^- باشد، آنگاه $\langle f(\alpha, \alpha) \rangle = 0$ باشد، V^- را ثابت کیم. بسهولت دیده می‌شود که اگر α بردار غیرصفری از V^\perp باشد، آنگاه $\langle f(\alpha, \alpha) \rangle = 0$ باشد، V^\perp را ثابت کیم. به بیان دیگر، f روی زیرفضای V^\perp معین مثبت است. به طور مشابه، آنگاه $\langle f(\beta_j, \beta_j) \rangle = 0$ باشد، V^\perp را ثابت کیم. اگر α در V^\perp باشد، آنگاه به ازای هر β در V ، $f(\alpha, \beta) = 0$.

چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V است، داریم

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp.$$

علاوه بر این، ادعا می‌کنیم که اگر W زیرفضایی از V باشد که روی آن f معین مثبت است، آنگاه زیرفضاهای W ، V^- ، و V^\perp مستقل هستند. زیرا، فرض کنیم، در W ، $\alpha + \beta + \gamma = 0$ در V^\perp ، و $\alpha + \beta + \gamma = 0$ در V^- داشته باشیم. در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha, \alpha + \beta + \gamma) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ 0 &= f(\beta, \alpha + \beta + \gamma) = f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) + f(\beta, \gamma). \end{aligned}$$

چون γ در V^\perp است $f(\alpha, \gamma) = 0$ ؛ و چون f متقارن است، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) \\ 0 &= f(\beta, \beta) + f(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

پس، $f(\beta, \beta) = 0$ و $f(\alpha, \alpha) \geq 0$. چون $f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta)$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta) = 0.$$

ولی f روی W معین مثبت است و روی V^- معین منفی. نتیجه اینکه $\alpha = \beta = 0$ و از این رو γ نیز برابر صفر است.

چون

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp$$

و W ، V^- ، و V^\perp مستقل هستند دیده می‌شود که بعد $(V^+) \leqslant (W)$ ، یعنی اگر f زیرفضایی از V باشد که روی آن f معین مثبت است، بعد W نمی‌تواند از بعد V^+ تجاوز

کند. اگر \mathcal{B}_1 پایه مرتب دیگری برای V باشد و در شرایط قضیه صدق کند، زیرفضاهای متناظر V^- , V^+ , V_1^+ , V_1^- را خواهیم داشت؛ و استدلال بالا نشان می‌دهد که بعد($V_1^+(V)$) \leqslant بعد($V^+(V)$). با وارونه کردن استدلال بعد($V_1^+(V)$) \leqslant بعد($V^+(V)$) را به دست می‌آوریم و نتیجتاً

$$\text{بعد}(V^+) = \text{بعد}(V_1^+). \quad \square$$

باید نکات چندی را در رابطه با پایه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ در قضیه ۵ و زیرفضاهای وابسته V^+ , V^- , V_1^+ , V_1^- مذکور شویم. ابتدا، توجه کنید که V^\perp درست همان زیرفضای بردارهایی است که برهمه V «عمود» هستند. قریباً توضیح دادیم که V^\perp مشمول دراین زیرفضاست؛ اما،

$$\text{راتب}(f) - \text{بعد}(V) = (\text{بعد}(V^-) + \text{بعد}(V^+)) - \text{بعد}(V).$$

لذا هر بردار α که به ازای هر β داشته باشیم $f(\alpha, \beta) = 0$ باید در V^\perp باشد. پس زیرفضای V^\perp یکتا است. زیرفضاهای V^+ و V^- یکتا نیستند؛ اما ابعاد آنها یکتا هستند. اثبات قضیه ۵ نشان می‌دهد که بعد($V^+(V)$) برابر است با بزرگترین بعد ممکن زیرفضاهایی که روی آنها f معین مثبت است. به طور مشابه بعد($V^-(V)$) برابر است با بزرگترین بعد زیرفضاهایی که روی آنها f معین منفی است. بدیهی است که

$$\text{راتب}(f) = \text{بعد}(V^-) + \text{بعد}(V^+).$$

عدد

$$\text{بعد}(V^+) - \text{بعد}(V^-)$$

غالباً نشان f نامیده می‌شود. دلیل معرفی این اصطلاح این است که ابعاد V^+ و V^- از روی رتبه f و نشان f بسهولت تعیین می‌شوند. شاید بهتر باشد درباره رابطه بین فرمایهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی و ضربهای داخلی به نکته دیگری هم اشاره کنیم. فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی و V_1, V_2, V_3 زیرفضاهایی از V باشند که

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

فرض کنیم f_1 ضربی داخلی روی V_1 و f_2 ضربی داخلی روی V_2 باشد. در این صورت می‌توانیم فرم دوخطی متقارنی چون f روی V به شرح زیر تعریف کنیم: اگر α و β بردارهایی از V باشند، آنگاه به ازای α_i و β_j هایی از V می‌توان نوشت

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

گیریم

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha_1, \beta_1) - f_2(\alpha_2, \beta_2).$$

برای f زیرفضای V^+ عبارت خواهد بود از V_1, f, V_2 ; برای f یک V^+ مناسب است و V^- یک V مناسب. یک قسمت از حکم قضیه ۵ این است که هر فرم دوخطی متقارن روی V ، بهمین طریق پدید می‌آید. محتوای دیگر قضیه این است که هر ضرب داخلی را می‌توان در پایه مرتب معینی توسط ماتریس همانی نمایش داد.

تمرین

۱. عبارات زیر، فرمهای درجه دوم روی q را تعریف می‌کنند. فرم دوخطی متقارن f متناظر بهر q را بیابید.

(ث) $x_1^2 + 9x_2^2$

(الف) ax_1^2

(ج) $3x_1x_2 - x_2^2$

(ب) bx_1x_2

(ج) $4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$

(ب) cx_2^2

(ت) $2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1x_2$

۲. ماتریس در پایه مرتب استانده و رتبه هر یک از فرمهای دوخطی تعیین شده در تمرین ۱ را بیابید. مشخص کنید که کدامیک از این فرمها ناتبهمگون هستند.

۳. فرض کنید $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ فرم درجه دوم وابسته به فرم دوخطی متقارنی چون f روی R^2 باشد. نشان دهید f ناتبهمگون است اگر و تنها اگر $b^2 - 4ac \neq 0$.

۴. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی چون F از اعداد مختلط و S مجموعه همه فرمهای دوخطی متقارن روی V باشد.

(الف) نشان دهید S زیرفضایی از $L(V, F)$ است.

(ب) بعد (S) را بیابید.

گیریم Q مجموعه همه فرمهای درجه دوم روی V باشد.

(پ) نشان دهید Q زیرفضایی از فضای همه توابع از V در F است.

(ت) بدون رجوع بهیچ پایه‌ای یک یکریختی چون T از Q بر روی S را به طور صحیح توصیف کنید.

(ث) فرض کنید U عملگری خطی روی V و q عنصری از Q باشد. نشان دهید که معادله $(U^\dagger q)(\alpha) = q(U\alpha)$ فرم درجه دوم q را بر روی V تعریف می‌کند.

(ج) اگر U عملگری خطی روی V باشد نشان دهید تابع U^\dagger که در بخش (ث) تعریف شد عملگری خطی روی Q است. نشان دهید U^\dagger معکوس پذیر است اگر و تنها

اگر U معکوس پذیر باشد.

۵. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^2 تعریف شده توسط

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad a \neq 0$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^2 بیاید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2) = ax_1^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2.$$

(راهنمایی: برای یافتن U^{-1} (و درنتیجه U) مربع را کامل کنید. برای تعریف U^\dagger به قسمت (ث) تمرین ۴ رجوع کنید.)

۶. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^3 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^3 بیاید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2) = 2bx_1^2 - 2bx_2^2$$

۷. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^3 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^3 بیاید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

(راهنمایی: U را به صورت حاصل ضرب عملگرهایی شبیه به عملگرهای به کار گرفته شده در تمرینهای ۵ و ۶ بیان کنید.)

۸. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ متقارنی بر روی R و q فرم درجه دوم روی R^n داده شده توسط

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j$$

باشد. روش به کار گرفته شده در تمرین ۷ را برای نشان دادن این مطلب که عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^n وجود دارد که

$$(U^\dagger q)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

تعیین دهد. در اینجا c_i به ازای $i = 1, \dots, n$ برای $1, \dots, n$ است.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی متقارن روی R^n باشد. نتیجه تمرین ۸ را برای اثبات وجود پایه مرتبی چون \mathcal{B} به نحوی که $[f]$ قطری باشد به کار گیرید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری حقیقی همه ماتریسهای هرمیتی (مختلط) 2×2 باشد، یعنی ماتریسهای مختلط 2×2 بی چون A باشد که در $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ صدق می کنند.
 (الف) نشان دهید معادله $q(A) = \det A$ فرم درجه دوم q را روی V تعریف می کند.

(ب) فرض کنید W زیرفضایی از V مشکل از ماتریسهای با رد 0 باشد. نشان دهید فرم دوخطی f تعیین شده توسط q روی زیرفضای W معین منفی است.

۱۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. نشان دهید که به ازای هر عملگر خطی T روی V عملگر خطی یکتا بی چون T' وجود دارد که به ازای هر α و β در V ، $f(T\alpha, \beta) = f(\alpha, T'\beta)$. همچنین نشان دهید که

$$(T_1 T_2)' = T_2' T_1'$$

$$(c_1 T_1 + c_2 T_2)' = c_1 T_1' + c_2 T_2'$$

$$(T')' = T.$$

بدون این فرض که T ناتبهگون است، چه مقدار از مطالب بالا معتبر است؟

۱۲. فرض کنید F یک هیأت و V فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F و f فرم دوخطی تعیین شده توسط $f(X, Y) = X^t A Y$ روی V باشد.علاوه فرض کنید f متقارن و ناتبهگون باشد. فرض کنید B ماتریسی $n \times n$ بر روی F و عملگری خطی روی V باشد که X را به BX می فرستد. عملگر T' در تمرین ۱۱ را بیابید.

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. وابسته به f یک یکریختی «طبیعی» از V بروی فضای دوگان V° وجود دارد که همان تبدیل L_f از بخش ۱۱۰ است. L_f را به کار برد و نشان دهید که به ازای هر پایه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V از $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ از V وجود دارد که $f(\alpha_i, \alpha'_j) = \delta_{ij}$. سپس نشان دهید به ازای هر بردار α در V داریم

$$\alpha = \sum_i f(\alpha, \alpha'_i) \alpha'_i = \sum_i f(\alpha_i, \alpha) \alpha'_i.$$

۱۴. فرض کنید V ، f ، \mathcal{B} ، و \mathcal{B}' همچون در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید T عملگری خطی

روی V و T' عملگری خطی باشد که f آن را همچون در تمرین ۱۱ به T وابسته می‌سازد. نشان دهید

$$\cdot [T']_{\alpha_i} = [T]_{\alpha_i} \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(T') = \sum_i f(T\alpha_i, \alpha'_i) \quad (\text{ب})$$

۱۵. فرض کنید $f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ همچون در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید $A = [f]_{\mathcal{B}}$. نشان دهید نشان دهید

$$\alpha'_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} \alpha_j = \sum_j (A^{-1})_{ji} \alpha_j.$$

۱۶. فرض کنید F یک هیأت و V فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ متقارن معکوس پذیری بر روی F و نیز f فرم دوخطی روی V تعریف شده توسط $f(X, Y) = X^t A Y$ باشد. فرض کنید P ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری بر روی F و \mathcal{B} پایه متشكل از ستونهای P برای V باشد. نشان دهید که پایه \mathcal{B}' در تمرین ۱۳ مشکل از ستونهای ماتریس $(P^t)^{-1} A^{-1} (P^t)$ است.

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأتی چون F و f فرم دوخطی متقارن روی V باشد. به ازای هر زیرفضای W از V ، گیریم W^\perp مجموعه همه بردارهای α در V باشد که به ازای هر β در W ، $f(\alpha, \beta) = 0$. نشان دهید

(الف) W^\perp یک زیرفضاست.

$$(ب) W^\perp = \{0\}.$$

(پ) $\{0\}^\perp = V^\perp$ اگر و تنها اگر f ناتبهمگون باشد.

(ت) $\operatorname{بعد}(V^\perp) - \operatorname{بعد}(V) = \operatorname{رتبه}(f)$

(ث) اگر $\operatorname{بعد}(V) = m$ و $\operatorname{بعد}(W) = n$ ، آنگاه $\geq n - m$ بعد(V^\perp)

(اهمایی): $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ را پایه‌ای برای W بگیرید و نگاشت

$$\alpha \rightarrow (f(\alpha, \beta_1), \dots, f(\alpha, \beta_m))$$

از V در F^m را مورد توجه قرار دهید.

(ج) تحدید f روی W ناتبهمگون است اگر و تنها اگر

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

(ج) $V = W \oplus W^\perp$ اگر و تنها اگر تحدید f روی W ناتبهمگون باشد.

۱۸. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی C و f فرم دوخطی متقارن ناتبهمگونی روی V باشد. ثابت کنید پایه‌ای چون \mathcal{B} از V وجود دارد که $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ (برای تعریف \mathcal{B}' تمرین ۱۳ را بینید).

۳.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن کج

در تمام این بخش، V یک فضای برداری بر روی یک زیرهیأت F از هیأت اعداد مختلط خواهد بود. فرمی دوخطی چون f روی V متقارن کج نامیده می‌شود، هرگاه به ازای همه بردارهای α و β در V ، $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$. در رابطه با ساده کردن ماتریس فرم دوخطی متقارن کجی روی یک فضای بعد متناهی V قضیه‌ای را اثبات خواهیم کرد.

ولی بیایید ابتدا به چند مشاهده عمومی پردازیم.

فرض کنید f فرم دوخطی دلخواهی روی V باشد، اگر فرض کنیم

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$$

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)]$$

آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که g فرم دوخطی متقارن روی V و h فرم دوخطی متقارن کجی روی V است. از این‌گذشته، $f = g + h$. بعلاوه، این عبارت برای f ، به صورت مجموع فرمی متقارن و فرمی متقارن کج، یکنایست. پس، فضای (V, V, F) مجموع مستقیم زیرفضای فرمهای متقارن و زیرفضای فرمهای متقارن کج است.

اگر بعد V متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن کج است اگر و تنها اگر ماتریس آن A ، در یک (یا هر) پایه مرتبی متقارن کج باشد: $-A^T = A$. این قضیه، عیناً مثل حکم متناهی درباره فرمهای دوخطی متقارن اثبات می‌شود. وقتی f متقارن کج باشد همه درایه‌های قطری ماتریس f ، در هر پایه مرتبی، \circ خواهد بود. این درست متناظر این مشاهده است که به ازای هر α در V ، $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$. $f(\alpha, \alpha) = 0$.

حال فرض می‌کنیم f فرم دوخطی متقارن کج غیر صفری روی V باشد. چون $f \neq 0$ ، بردارهایی چون α و β در V وجود دارند که $f(\alpha, \beta) \neq 0$. با ضرب α در اسکالر مناسبی، می‌توان فرض کرد که $f(\alpha, \beta) = 1$. $f(\alpha, \beta) = 1$ بروزیم γ برداری دلخواه در زیرفضای پدید آمده توسط α و β ، مثلاً $\gamma = c\alpha + d\beta$ ، باشد. در این صورت

$$f(\gamma, \alpha) = f(c\alpha + d\beta, \alpha) = cf(\alpha, \alpha) = -d$$

$$f(\gamma, \beta) = f(c\alpha + d\beta, \beta) = cf(\alpha, \beta) = c$$

و لذا

$$\gamma = f(\gamma, \beta)\alpha - f(\gamma, \alpha)\beta. \quad (7-10)$$

بخصوص، توجه کنید که α و β لزوماً مستقل خطی هستند؛ زیرا، اگر $\gamma = 0$ ، آنگاه

۱. این حکم در صورتی امکان‌پذیر است که $2 \geqslant \dim(V)$. در طول بحث، این شرط باشد نظر گرفته شود... .

$$f(\gamma, \alpha) = f(\gamma, \beta) = 0$$

فرض کنید W زیرفضای دو بعدی پدید آمده توسط α و β باشد. بعلاوه فرض کنید W^\perp مجموعه همه بردارهایی چون δ در V باشد که $f(\delta, \alpha) = f(\delta, \beta) = 0$ باشد که γ در زیرفضای W ، $f(\delta, \gamma) = 0$. ادعامی کنیم که $V = W \oplus W^\perp$. زیرا، گیریم ϵ بردار دلخواهی در V باشد و

$$\gamma = f(\epsilon, \beta)\alpha - f(\epsilon, \alpha)\beta$$

$$\delta = \epsilon - \gamma.$$

آنگاه γ در W و δ در W^\perp است، چرا که

$$\begin{aligned} f(\delta, \alpha) &= f(\epsilon - f(\epsilon, \beta)\alpha + f(\epsilon, \alpha)\beta, \alpha) \\ &= f(\epsilon, \alpha) + f(\epsilon, \alpha)f(\beta, \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و به طور مشابه $f(\delta, \beta) = 0$. پس، هر ϵ در V به صورت $\epsilon = \gamma + \delta$ با فرض γ در W و δ در W^\perp است. از (۷-۱۰) واضح است که $\{0\} = W \cap W^\perp$ ولذا $V = W \oplus W^\perp$ حال تحدید f روی W^\perp فرم دوخطی متقان کجی روی W^\perp است. این تحدید ممکن است فرم صفر باشد. اگر نباشد، بردارهایی چون α' و β' در W^\perp وجود دارند که $f(\alpha', \beta') = 1$. اگر فرض کنیم W' زیرفضای دو بعدی پدید آمده توسط α' و β' باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$V = W \oplus W' \oplus W.$$

که در آن W عبارت است از مجموعه همه بردارهایی چون δ در W^\perp به طوری که $f(\alpha', \delta) = f(\beta', \delta) = 0$. اگر تحدید f روی W' فرم صفر نباشد، می توانیم بردارهایی چون α'' و β'' در W' را چنان انتخاب کنیم که $f(\alpha'', \beta'') = 1$ و بعد ادامه دهیم.

در حالت بعد متناهی باید واضح باشد که دنباله ای متناهی از جفت بردارهای

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_k, \beta_k)$$

با خواص زیر به دست می آیند:

$$\text{(الف) } j = 1, \dots, k, f(\alpha_j, \beta_j) = 1$$

$$\text{(ب) } i \neq j, f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = f(\alpha_i, \beta_j) = 0$$

(پ) اگر j زیرفضای دو بعدی پدید آمده توسط α_j و β_j باشد، آنگاه

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus W.$$

که در آن هر بردار در W برهمه α_i ها و β_j ها «عمود» است و تحدید f روی W فرم صفر است.

قضیه ۶. گیریم V یک فضای برداری n بعدی ذیرهیاًقی از اعداد مختلف و غیره فرم دوخطی مفروضی را حفظ می کنند، تحت تشکیل حاصل ضربها (ی عملگرها)، بسته است. مرتبی برای V وجود دارد که در آن ماتریس f عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-r) \times (n-r)$ و k نسخه از ماتریس 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اثبات. فرض می کنیم $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2k}$ بردارهایی باشند که در شرایط (الف)، (ب)، و (پ) بالا صدق می کنند. گیریم $\{ \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2k} \}$ پایه مرتب دلخواهی برای زیرفضای W باشد. در این صورت

$$B\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2k}\}$$

پایه مرتبی برای V است. از (الف)، (ب)، و (پ) واضح است که ماتریس f در پایه مرتب B عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-2k) \times (n-2k)$ و k نسخه از ماتریس 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A-10)$$

علاوه، واضح است که رتبه این ماتریس، و در نتیجه f ، برابر $2k$ است. \square

یکی از نتایج مطالب بالا این است که اگر f فرم دوخطی متقارن کج ناتبهگونی روی V باشد، آنگاه بعد V باید زوج باشد. اگر $= 2k = V$ ، پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k\}$ برای V وجود خواهد داشت که

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = 0.$$

ماتریس f در این پایه مرتب مجموع مستقیم k نسخه از ماتریس متقارن کج 2×2 است. اگر بهجای پایه مرتب بالا، پایه مرتب

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \dots, \beta_1\}$$

را در نظر بگیریم، صورت استاندۀ دیگری برای ماتریس یک فرم متقارن کج ناتبهگون

به دست می آوریم. خواننده باید به آسانی بتواند نشان دهد که ماتریس J در پایه مرتب اخیر صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} & J \\ -J & \end{bmatrix}$$

را دارد که در آن J عبارت است از ماتریس $k \times k$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری بر روی هیأتی چون F باشد. نشان دهید که مجموعه همه فرمایهای دوخطی متقارن کج روی V زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

۲. همه فرمایهای دوخطی متقارن کج روی \mathbb{R}^3 را بیابید.

۳. پایهای برای فضای همه فرمایهای دوخطی متقارن کج روی \mathbb{R}^n را بیابید.

۴. فرض کنید f فرم دوخطی متقارن روی C^n و g فرم دوخطی متقارن کجی روی C^n باشد. فرض کنید $f+g=0$. نشان دهید که $f=g=0$.

۵. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی بر روی زیرهیأتی چون F از C باشد. احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) معادله $(Pf)(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}f(\beta, \alpha) - \frac{1}{2}f(\alpha, \beta)$ یک عملگر خطی P روی $L(V, V, F)$ تعریف می کند.

(ب) $P^2 = P$ یعنی P یک تصویر است.

(ب) $\frac{n(n+1)}{2} = \text{رتبه } (P)$; $\frac{n(n-1)}{2} = \text{پوچی } (P)$.

(ت) اگر U عملگر خطی روی V باشد، معادله $(U^\dagger f)(\alpha, \beta) = f(U\alpha, U\beta)$ یک عملگر خطی U^\dagger روی $L(V, V, F)$ تعریف می کند.

(ث) به ازای هر عملگر خطی U ، تصویر P با U^\dagger جایجا می شود.

۶. نظریه تمرین ۱۱ در بخش ۲۰.۱۵، حکمی را برای فرمهای دوخطی متقارن کج ناتبه‌گون ثابت کنید.

۷. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری V باشد. فرض کنید L_1 و L_2 نگاشتهای از V در V^* وابسته به f ، داده شده در بخش ۱۰.۱۵ باشند. ثابت کنید f متقارن کج است اگر و تنها اگر $L_1 = -L_2$.

۸. نظریه تمرین ۱۷ در بخش ۲۰.۱۵، حکمی را برای فرمهای متقارن کج ثابت کنید.

۹. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی باشد و L_1 و L_2 تابعکهایی خطی روی V باشند. نشان دهید که معادله

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha)$$

فرم دوخطی متقارن کجی روی V تعریف می‌کند. نشان دهید که $f = 0$ اگر و تنها اگر L_1 و L_2 وابسته خطی باشند.

۱۰. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از اعداد مختلط و f فرم دوخطی متقارن کجی روی V باشد. نشان دهید f دارای رتبه ۲ است اگر و تنها اگر تابعکهای خطی مستقل خطی L_1 و L_2 روی V وجود داشته باشند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۱. فرض کنید f فرم دوخطی متقارن کجی روی R^3 باشد. ثابت کنید تابعکهایی خطی چون L_1 و L_2 وجود دارند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از اعداد مختلط و f و g دو فرم دوخطی متقارن کجی روی V باشند. نشان دهید عملگر خطی معکوس‌پذیری $f(T\alpha, T\beta) = g(\alpha, \beta)$ روی T وجود دارد که به ازای هر α و β ، اگر و تنها اگر f و g رتبه مساوی داشته باشند.

۱۳. نشان دهید که نتیجه تمرین ۱۲ برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری مختلط معتبر است ولی برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی معتبر نیست.

۱۵. گروههای حافظه فرمهای دوخطی

گیریم f فرم دوخطی روی فضای برداری V و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T فرم f را حافظه می‌کند، هر کاه به ازای هر α و β در V ، $f(T\alpha, T\beta) = f(\alpha, \beta)$. $g(\alpha, \beta) = f(T\alpha, T\beta)$ به ازای هر T و f بسادگی دیده می‌شود که تابع g تعریف شده توسط (۱) فرمی دوخطی روی V است. اینکه بگوییم f را حافظه می‌کند یعنی g چیزی جزا نکه بگوییم $g = f$ نیست. عملگر همانی، هر فرم دوخطی را حافظه می‌کند. اگر S و T عملگرهایی خطی باشند که f را حافظه کنند حاصل ضرب ST نیز f را حافظه می‌کند؛ زیرا $f(ST\alpha, ST\beta) = f(T\alpha, T\beta) = f(\alpha, \beta)$. به بیان دیگر، دسته عملگرهای خطی که فرم دوخطی مفروضی را حافظه می‌کنند، تحت تشكیل حاصل ضرب بها (ی عملگرها)، بسته است. در حالات عمومی، درباره این دسته از عملگرهای چیز بیشتری نمی‌توان گفت؛ اما، اگر f ناتبیهگون باشد، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷. گیریم f فرم دوخطی ناتبیهگونی دوی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. مجموعه همه عملگرهای خطی دوی V که f را حافظه می‌کنند، تحت عمل ترکیب، یک گروه است.

اثبات. گیریم G مجموعه عملگرهایی خطی باشد که f را حافظه می‌کنند. مشاهده کردیم که عملگر همانی در G قرار دارد، و در صورتی که S و T در G باشند، ترکیب ST نیز در G است. بنابراین فرض که f ناتبیهگون است، ثابت خواهیم کرد که هر عملگر T در G معکوس پذیر است و T^{-1} نیز در G قرار دارد. فرض کیم T فرم f را حافظه کند. گیریم α برداری در فضای پوج T باشد. در این صورت به ازای هر β در V داریم

$$f(\alpha, \beta) = f(T\alpha, T\beta) = f(\circ, T\beta) = \circ.$$

چون f ناتبیهگون است، پس $\circ = \alpha$. درنتیجه T معکوس پذیر است. واضح است که T^{-1} نیز f را حافظه می‌کند؛ زیرا

$$f(T^{-1}\alpha, T^{-1}\beta) = f(TT^{-1}\alpha, TT^{-1}\beta) = f(\alpha, \beta). \quad \square$$

اگر f فرم دوخطی ناتبیهگونی روی فضای بعد متناهی V باشد، آنگاه هر پایه مرتب \mathcal{B} برای V گروهی از ماتریسهای «حافظه» f را تعیین می‌کند. مجموعه همه ماتریسهای $[T]$ که در آن T یک عملگر خطی حافظه f است، تحت ضرب ماتریسی یک گروه خواهد بود. برای این گروه از ماتریسهای، توصیف دیگری به صورت زیرهم وجود دارد. گیریم $[f] = A$ ، بنابراین اگر α و β بردارهایی از V بترتیب با ماتریسهای مختصات X و Y نسبت به \mathcal{B} باشند، خواهیم داشت

$$f(\alpha, \beta) = X^t A Y.$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد، و $M = [T]$. در این صورت

$$\begin{aligned} f(T\alpha, T\beta) &= (MX)^t A(MY) \\ &= X^t (M^t AM) Y \end{aligned}$$

بنابراین، T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر $M^t AM = A$. در این صورت، قضیه ۷ به زبان ماتریسی مطلب زیر را بیان می‌کند: اگر A ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری باشد، مجموعه‌همه ماتریسهای $n \times n$ چون M ، باشرط تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. اگر $[f]_A = [f]_{[T]} = [f]_T$ ، آنگاه M در این گروه از ماتریسهای است اگر و تنها اگر T و $M = [T]$ عملگری خطی باشد که f را حفظ می‌کند.

قبل از پرداختن به چند مثال، به ذکر نکته‌ای دیگر می‌پردازیم. فرض کنیم f فرم دوخطی متقارنی باشد. عملگر خطی T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر T فرم درجه دوم

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$$

وابسته به f را حفظ کند. اگر T فرم f را حفظ کند مطمئناً به ازای هر α در V داردیم

$$q(T\alpha) = f(T\alpha, T\alpha) = f(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$$

بهکس، چون f متقارن است، اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$$

نشان می‌دهد T وقتی f را حفظ می‌کند که به ازای هر γ در V ، $q(T\gamma) = q(\gamma)$. (در اینجا فرض بر این است که هیأت اسکالری زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

مثال ۶. گیجیم V فضای R^n یا فضای C^n باشد. فرض می‌کنیم f فرم دوخطی

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

باشد که در آن (x_1, \dots, x_n) و (y_1, \dots, y_n) $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$. گروه حافظ f گروه متعامد (حقیقی یا مختلط) n بعدی نامیده می‌شود. نام «گروه متعامد» بیشتر به گروه وابسته ماتریسهای در پایه مرتب استانده اطلاق می‌شود. چون ماتریس f در پایه استانده همان I است، این گروه مشکل از ماتریسهای M است که در $M^t M = I$ صدق می‌کنند. چنین ماتریس M به یک ماتریس متعامد (حقیقی یا مختلط) $n \times n$ موسوم است. این دو گروه متعامد $n \times n$ ، غالباً به صورت $O(n, C)$ و $O(n, R)$ نمایش داده می‌شوند. بدیهی است گروه متعامد، همچنین گروهی است که فرم درجه دوم

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

را حفظ می‌کند.

مثال ۷. گیریم f فرم دوخطی متقارن روی R^n با فرم درجه دو

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2$$

باشد. آنگاه f ناتبهمگون و دارای نشان $-n-2p$ است. گروه ماتریسهای حافظ فرمی ازین نوع یک گروه شبه متعامد نامیده می‌شود. وقتی که $p=n$, g گروه متعامد $O(n, R)$ بهعنوان نوع خاصی از گروههای شبه متعامد به دست می‌آید. به ازای هر یک از $1+n+p$ مقدار $n, p=0, 1, 2, \dots, n$ فرمها قرینه یکدیگراند و از این رو دارای گروههای وابسته مساوی هستند. پس، وقتی که n فرد باشد، $(n+1)/2$ گروه شبه متعامد از ماتریسهای $n \times n$ ، و هنگامی که n زوج باشد، $(n+2)/2$ از چنین گروههایی حاصل می‌شوند.

قضیه ۸. گیریم V یک فضای برداری n بعدی بروی هیأت اعداد مختلف و f فرم دوخطی متقارن ناتبهمگونی روی V باشد. دلاین صودت گروه حافظ f باگروه متعامد مختلف $O(n, C)$ یکریخت است.

اثبات. بدیهی است که منظورمان از یک یکریختی بین دو گروه، یک تناظر یک به یک بین اعضای آنهاست که عمل گروه را «حافظ می‌کند». گیریم G گروه عملگرهای خطی روی V باشد که فرم دوخطی f را حفظ می‌کنند. چون f همتقارن و هم ناتبهمگون است قضیه ۴ حاکی است که پایه مرتبی چون \mathcal{B} برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریس همانی $n \times n$ نمایش داده می‌شود. بنا بر این، عملگری خطی چون T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر ماتریس آن در پایه مرتب \mathcal{B} ماتریس متعامد مختلفی باشد. از این رو،

$$T \rightarrow [T]_{\mathcal{B}}$$

یک یکریختی از G بروی $O(n, C)$ است. \square

قضیه ۹. گیریم V یک فضای برداری n بعدی بروی هیأت اعداد حقیقی d فرم دوخطی متقارن ناتبهمگونی روی V باشد. دلاین صودت گروه حافظ f باگروه $n \times n$ شبه متعامدی یکریخت است.

اثبات. اثبات قضیه ۸ را با استفاده از قضیه ۵ به جای قضیه ۴ تکرار کنید. \square

مثال ۸. گیریم f فرم دوخطی متقارن روی R^4 با فرم درجه دو

$$q(x, y, z, t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

باشد. عملگری خطی چون T روی R^4 که این فرم دوخطی (یا درجه دوم) خاص را حفظ می‌کند، یک تبدیل لورنتس نامیده می‌شود و گروه حافظ f به گروه لورنتس موسوم است. می‌خواهیم یکی از روشهای تشریح چند تبدیل لورنتس را به دست می‌دهیم.

گیریم H فضای برداری حقیقی همه ماتریسهای مختلف $A \in 2 \times 2$ که هرمیتی هستند،

$A = A^*$ باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یک یکریختی Φ از R^4 بر روی فضای H تعریف می‌کند. تحت این یکریختی، فرم درجه دوم q بر روی تابع دترمینان بردگی شود؛ یعنی

$$q(x, y, z, t) = \det \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

با

$$q(\alpha) = \det \Phi(\alpha).$$

این مطلب اشاره بر این دارد که با مطالعه عملگرهای خطی روی H که دترمینانها را حفظ می‌کنند می‌توان تبدیلهای لورنتس روی R^4 را بررسی کرد.

را ماتریس 2×2 مختلط دلخواهی می‌گیریم و برای هر ماتریس هرمیتی A تعریف می‌کنیم:

$$U_M(A) = MAM^*.$$

حال MAM^* نیز هرمیتی است. از این مطلب با آسانی دیده می‌شود که U_M یک عملگر خطی (حقیقی) روی H است. می‌خواهیم بدانیم چه وقت این مطلب درست است که U_M دترمینانها را «حفظ می‌کند»؛ یعنی به ازای هر A در H داشته باشیم $\det[U_M(A)] = \det A$. چون دترمینان M^* برابر مزدوج مختلط دترمینان M است، می‌بینیم که

$$\det[U_M(A)] = |\det M|^2 \det A.$$

پس U_M دترمینانها را درست وقتی حفظ می‌کند که $\det M$ دارای قدر مطلق ۱ باشد. لذا اگر نون ماتریس مختلط 2×2 بی‌چون M را که $|\det M| = 1$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت U_M یک عملگر خطی روی H است که دترمینانها را حفظ می‌کند. حال

$$T_M = \Phi^{-1} U_M \Phi$$

را تعریف می‌کنیم. چون Φ یک یکریختی است T_M هم عملگر خطی روی R^4 است. همچنین، T_M یک تبدیل لورنتس است؛ زیرا

$$\begin{aligned} q(T_M \alpha) &= q(\Phi^{-1} U_M \Phi \alpha) \\ &= \det(\Phi \Phi^{-1} U_M \Phi \alpha) \\ &= \det(U_M \Phi \alpha) \end{aligned}$$

$$= \det(\Phi\alpha)$$

$$= q(\alpha)$$

وازاین رو، T_M فرم درجه دوم q را حفظ می کند.

با به کار گیری ماتریسهای 2×2 ویژه M می توان روش بالارا برای محاسبه تبدیلهای لورنتس ویژه مورد استفاده قرارداد. دونکته هست که در اینجا می توان به ذکر آنها پرداخت؛ بررسی آنها هم مشکل نیست.

(۱) اگر M_1 و M_2 ماتریسهای 2×2 معکوس پذیری با درایه های مختلف باشند، آنگاه $U_{M_1} = U_{M_2}$ اگر و تنها اگر M_2 مضربی اسکالری از M_1 باشد. پس، همه تبدیلهای لورنتس نمایش داده شده در فوق از ماتریسهای تک مدولی M ، یعنی از ماتریسهای M باشرط $\det M = 1$ ، قابل حصول هستند. اگر M_1 و M_2 ماتریسهایی تک مدولی باشند که $T_{M_1} \neq T_{M_2}$ ، آنگاه $M_1 \neq -M_2$ و $M_1 \neq M_2$.

(۲) همه تبدیلهای لورنتس با روش بالا قابل حصول نیستند.

تمرین

۱. فرض کنید M عنصری از گروه متعامد مختلف $O(n, C)$ باشد. نشان دهید که M^t و M^* نیز به $O(n, C)$ تعلق دارند.

۲. فرض کنید M متعلق به $O(n, C)$ و M' متشابه با M باشد. آیا M' نیز به $O(n, C)$ تعلق دارد؟

۳. فرض کنید

$$y_j = \sum_{k=1}^n M_{jk} x_k$$

که در آن M عنصری از $O(n, C)$ است. نشان دهید که

$$\sum_j y_j = \sum_j x_j.$$

۴. فرض کنید M ماتریسی $n \times n$ بر روی C باستونهای M_1, M_2, \dots, M_n باشد. نشان دهید که M متعلق به $O(n, C)$ است اگر و تنها اگر

$$M_j^t M_k = \delta_{jk}.$$

۵. فرض کنید X یک ماتریس $1 \times n$ بر روی C باشد. تحت چه شرایطی $O(n, C)$ شامل ماتریسی چون M است که ستون اولش X باشد؟

۶. ماتریسی در $O(3, C)$ بیا بیند که سطر اولش $(2i, 2i, 3)$ باشد.

۷. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X^t Y$ باشد. فرض کنید M متعلق به $O(n, C)$ باشد. ماتریس f در پایه V مشکل از ستونهای M_1, M_2, \dots, M_n از M چیست؟

۸. گیریم X یک ماتریس $1 \times n$ بر روی C با شرط $X^t X = I_j$ برای زمین ستون ماتریس همانی باشد. نشان دهید ماتریسی چون M در $O(n, C)$ وجود دارد که $O(n, C) \cdot MX = I_j$. اگر X دارای درایه‌های حقیقی باشد، نشان دهید که یک M در $O(n, C)$ وجود دارد با این خاصیت که $MX = I_j$.

۹. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بر روی C یک ماتریس $n \times n$ بر روی C ، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد. نشان دهید که f تحت $O(n, C)$ پایاست، یعنی به ازای هر X و Y در V و هر M در $O(n, C)$ اگر $f(MX, MY) = f(X, Y)$ با هر عنصر A با هر $f(MX, MY) = f(X, Y)$ جابجا شود.

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه از ماتریسهای $n \times n$ بر روی C ، و S' مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C باشد که با هر عنصر S جابجا می‌شود. نشان دهید که S' یک جبر بر روی C است.

۱۱. فرض کنید F زیرهیأتی از C ، V فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی F ، و f فرم دوخطی نامنفردی روی V باشد. اگر T عملگری خطی روی V و حافظ f باشد، ثابت کنید $\det T = \pm 1$.

۱۲. فرض کنید F زیرهیأتی از C ، V فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی A, F ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری بر روی F ، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد. اگر M ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، نشان دهید که f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر $A^{-1} M^t A = M^{-1}$.

۱۳. فرض کنید f فرم دوخطی نامنفردی روی یک فضای برداری بعد متنهای V باشد. فرض کنید T عملگر خطی معکوس‌پذیری روی V و f فرم دوخطی روی V تعیین شده توسط $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, T\beta)$ باشد. اگر U عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم و کافی برای U بیا بیند که f را حفظ کند.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی C^2 باشد که فرم درجه دوم $x^2 - ax$ را حفظ می‌کند. نشان دهید $\det(T) = \pm 1$ (الف)

(ب) اگر M ماتریس T در پایه استاند باشد، آنگاه $M_{22} = \pm M_{11}$

$$\cdot M_{11}^2 - M_{12}^2 = 1, M_{21} = \pm M_{12}.$$

(ب) اگر $\det M = 1$ ، آنگاه عدد مختلط غیرصفری چون c وجود دارد که

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} & c + \frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

(ت) اگر $1 - c$ آنگاه عدد مختلطی چون c وجود دارد که

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ -c + \frac{1}{c} & -c - \frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

۱۵. فرض کنید f فرم دوخطی روی C^2 تعریف شده توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

باشد. نشان دهید

(الف) اگر T عملگری خطی روی C^2 باشد، آنگاه به ازای هر α و β در C^2 داریم $f(T\alpha, T\beta) = (\det T)f(\alpha, \beta)$.

(ب) f را حفظ می کند اگر و تنها اگر $\det T = +1$.

(پ) بند (ب) درباره گروه ماتریسهای 2×2 با شرط $M^t A M = A$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

چه می گوید؟

۱۶. فرض کنید n عدد صحیحی مثبت، I ماتریس همانی $n \times n$ بر روی C ، و J ماتریس $2n \times 2n$ داده شده توسط

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. فرض می‌کنیم M ماتریسی $2n \times 2n$ بر روی C به صورت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد که در آن A, B, C و D ماتریسهای $n \times n$ بر روی C هستند. شرایطی لازم و کافی روی A, B, C و D پیدا کنید که $J^t J M = J$

۱۷. همه فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی R را که تحت $O(n, R)$ پایا هستند، بیابید.

۱۸. همه فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی C را که تحت $O(n, C)$ پایا هستند پیدا کنید.

پیوست

دانلود از سایت (یاضر سرا)
www.riazisara.ir

این پیوست از لحاظ منطقی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول که سه بخش اول را در بر می‌گیرد شامل مفاهیم بنیانی معینی است که در سرتاسر کتاب (درحقیقت، در تمام ریاضیات) ظاهر می‌شوند. این قسمت بیشتر به مبنای مقدمه‌ای است برای کتاب تایک پیوست. اما قسمت دوم واقعاً پیوستی برای متن اصلی است.

بخش ۱ حاوی بحثی در مورد مجموعه‌ها، اجتماع، و اشتراک‌آنهاست. بخش ۲ مفهوم تابع و ایده‌های وابسته چون برد، دامنه، تابع معکوس، و تحدید تابعی به زیر-مجموعه‌ای از دامنه‌اش را مورد بحث قرار می‌دهد. بخش ۳ درباره رابطه‌های همارزی بحث می‌کند. مطالب این سه بخش، خصوصاً مطالب بخش‌های ۱ و ۲، به اختصار ارائه می‌شوند. مطالب، بیشتر به جهت تثییت اصطلاحات بیان می‌شوند تا برای تشریح جزئیات. به معنی منطقی دقیق، این مطالب قسمتی از پیش نیازهای لازم جهت مطالعه کتاب را تشکیل می‌دهند. اما، در صورتی که خواننده در مطالعه اول نتواند مقاد این ایده‌ها را به طور کامل جذب کند نباید دلسوز شود. البته این ایده‌ها مهم هستند، ولی خواننده‌ای که با آنها خیلی آشنا نیست، هرگاه حین مطالعه متن اصلی گاه گاه این مبحث را هم دوره کند، آسانتر می‌تواند آنها را فرآ بگیرد.

بخش‌های ۴ و ۵ رابطه‌های هم ارزی را در رابطه با جبر خطی مورد بررسی قرار می‌دهند. بخش ۴ شامل بحث مختصری درباره فضاهای خارج قسمت است. این بخش را می‌توان در هر زمانی پس از مطالعه دو یا سه فصل اول کتاب خواند. بخش ۵ به چند رابطه هم ارزی که در کتاب پیش می‌آیند نظری می‌افکند، با این قصد که نشان دهد برخی از نتایج حاصل را چگونه می‌توان از دیدگاه رابطه‌های هم ارزی تفسیر کرد. بخش ۶، اصل انتخاب و نتایجش را در مورد جبر خطی تشریح می‌کند.

پ. ۹. مجموعه

هر چند ما واژه «مجموعه» را ترجیح می‌دهیم ولی «رده»، «دسته» و «خانواده» را هم با همان مفهوم به کار خواهیم برد. اگر S یک مجموعه، و x شیئی در مجموعه S باشد، خواهیم گفت که x یک عنصر S است، یا x متعلق به S است و یا به طور ساده اینکه x در S است. اگر S تنها دارای تعدادی نامتناهی عنصر چون x_1, x_2, \dots, x_n باشد، غالباً S را با نشان دادن عناصرش در بین دو ابرو توصیف می‌کنیم:

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

پس، مجموعه S مشکل از اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۵ عبارت است از

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

اگر S و T دو مجموعه باشند، گوییم S یک زیرمجموعه T است یا S مشمول در T است هرگاه هر عنصر S عنصری از T نیز باشد. هر مجموعه S زیر مجموعه‌ای از خودش است. اگر S زیر مجموعه‌ای از T باشد، اما S و T یکی نباشد، S را یک زیرمجموعه سرهای T می‌نامیم. به بیان دیگر، S زیر مجموعه سرهای از T است به این شرط که S مشمول در T باشد ولی T مشمول در S نباشد.

اگر S و T دو مجموعه باشند. اجتماع S و T عبارت است از مجموعه $S \cup T$ مشکل از همه اشیائی چون x که عنصر S یا عنصر T باشد. اشتراک S و T عبارت است از مجموعه $S \cap T$ مشکل از همه x ‌هایی که هم عنصر S و هم عنصر T باشند. به ازای هر دو مجموعه مفروض S و T ، اشتراک $S \cap T$ زیر مجموعه‌ای است از اجتماع $S \cup T$. این امر باید به روشن شدن مورد استفاده واژه «یا» که در این کتاب رایج است کمک کند. وقتی می‌گوییم x یا در S است یا در T ، این امکان را که x هم در S و هم در T باشد رفع نمی‌کنیم.

برای اینکه اشتراک S و T همواره مجموعه باشد، لازم است مجموعه‌ای تهی، یعنی، مجموعه‌ای با هیچ عنصر هم معرفی شود. پس $S \cap T$ مجموعه تهی است اگر و تنها اگر S و T هیچ عنصری در اشتراک نداشته باشند.

غالباً نیازمندیم که اجتماع یا اشتراک مجموعه‌های متعددی را بررسی کنیم. اگر S_1, S_2, \dots, S_n مجموعه‌هایی باشند، اجتماع آنها عبارت است از مجموعه $\bigcup_{j=1}^n S_j$ مشکل از همه x ‌هایی که دست کم عنصر یکی از مجموعه‌های S_1, S_2, \dots, S_n باشد. اشتراک آنها عبارت است از مجموعه $\bigcap_{j=1}^n S_j$ مشکل از همه x ‌هایی که عنصر همه مجموعه‌های S_1, S_2, \dots, S_n باشند. در چند مورد، اجتماع یا اشتراک دسته‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها را نیز مورد بحث قرار خواهیم داد. اینکه چنین اجتماع یا اشتراکی چگونه تعریف می‌شود باید واضح باشد. مثال زیر، این تعاریف را روشن می‌سازد و نمادهایی را برای آنها ارائه می‌نماید.

مثال ۱. گیریم R مجموعه همه اعداد حقیقی (خط حقیقی) را نشان دهد. اگر t در R باشد، به $\{z \in R \text{ مجموعه ای چون } S_z \text{ از } R\}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، وابسته می‌سازیم: S_t مشکل است از همه اعداد حقیقی چون x که از t کمتر نباشد.

(الف) $S_t = \{x \in R \mid x < t\}$ که در آن t کوچکترین t_1 و t_2 است.

(ب) $S_t = \{x \in R \mid x > t\}$ که در آن t بزرگترین t_1 و t_2 است.

(پ) گیریم I فاصله یکه، یعنی مجموعه همه t های در R با شرط $1 \leq t \leq 0$ باشد. آنگاه

$$\bigcup_{t \in I} S_t = S_0$$

$$\bigcap_{t \in I} S_t = S_1$$

پ. ۲. تابع

یک تابع مشکل است از:

(۱) مجموعه ای چون X که دامنه تابع نامیده می‌شود؛

(۲) مجموعه ای چون Y که همدامنه تابع نامیده می‌شود؛

(۳) قاعده ای (یا تناولی) چون f که به هر عنصر x از X تک عنصری از Y چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد.

اگر (X, Y, f) یک تابع باشد، f را تابعی از X در Y هم می‌گوییم. گفتن این مطلب حاکی از کمی عدم دقیقت است چرا که این f نیست که تابع است؛ f قاعده تابع است. با این وجود استفاده از نماد واحد برای تابع و قاعده اش محاوره درباره توابع را بسیار آسان می‌کند. پس، اگر بگوییم که f تابعی از X در Y است، یا X دامنه f است یا Y همدامنه f است - همه حاکی از این هستند که طبق تعریف فوق (X, Y, f) یک تابع است. واژه‌های متعدد دیگری هم وجود دارند که معمولاً به جای واژه «تابع» به کار می‌روند. برخی از اینها عبارتند از «تبییل»، «عملگر»، و «نگاشت». این واژه‌ها در زمینه‌هایی به کار می‌روند که در رساندن نقش ایفا شده توسط تابعی خاص به نظر الهم-بخشن تر باشند.

اگر f تابعی از X در Y باشد، برد $(\text{یا نگاره}) f$ عبارت است از مجموعه همه y های با شرط x در X . به بیان دیگر، برد f مشکل است از همه عناصر y در Y با این شرط که $x = f(y)$ باشد که (x, y) هرگاه برد f تمام Y باشد، می‌گوییم f تابعی از X بر روی Y است یا به طور ساده f پوشاست. غالباً برد f با (X, f) نشان داده می‌شود.

مثال ۳. (الف) فرض کنیم X مجموعه اعداد حقیقی باشد و $X = f$. گیریم f تابعی از X در Y تعریف شده با $x^2 = f(x)$ باشد. برد f مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی است و بدین سان f پوشانیست.

(ب) گیریم X صفحه اقلیدسی باشد و $X = Y$. فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شود: اگر P نقطه‌ای از صفحه باشد، آنگاه $(P) f$ عبارت است از نقطه حاصل از دوران P به اندازه 90° (حول مبدأ درجهت عکس عقربه‌های ساعت). برد f همه Y یعنی تمام صفحه است و لذا f پوشاست.

(پ) دوباره X را صفحه اقلیدسی می‌گیریم. با روش معمول در هندسه تحلیلی، با استفاده از دو خط عمود برهم دستگاه مختصاتی در X می‌سازیم تا نقاط X را با جفت‌های مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی یکی بگیریم. فرض کنیم Y محور x_2 یعنی همه نقاط (x_1, x_2) با $x_2 = 0$ باشد. اگر P نقطه‌ای از X باشد، $(P) f$ را نقطه حاصل از تصویر P بر روی محور x_2 به موازات محور x_2 یعنی $x_2 = 0$ می‌گیریم. به بیان دیگر،

$((x_1, x_2)) = f(x_1, x_2)$. در این صورت برد f همه Y است و لذا f پوشاست.

(ت) گیریم X مجموعه اعداد حقیقی و Y مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. تابع f از X در Y را با ضابطه $e^x = f(x)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه f تابعی است از X بر روی Y .

(ث) فرض کنیم X مجموعه اعداد حقیقی مثبت و Y مجموعه اعداد حقیقی باشد. گیریم f تابع لگاریتم طبیعی، یعنی تابع تعریف شده توسط $f(x) = \log x = \ln x$ باشد. مجدداً f پوشاست، یعنی هر عدد حقیقی لگاریتم طبیعی عددی مثبت است.

فرض کنیم X ، Y ، و Z سه مجموعه، f تابعی از X در Y ، و g تابعی از Y در Z باشد. وابسته به f و g تابعی چون $g \circ f$ از X در Z هست که به ترکیب g و f معروف است. این تابع طبق

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثالی ساده، گیریم $X = Y = Z$ مجموعه اعداد حقیقی باشند. فرض کنیم f ، g ، h سه تابع از X در X باشند که با ضابطه‌های

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = e^{x^2}$$

تعریف می‌شوند. در این صورت $g \circ f = g \circ h = g$ غالباً به طور ساده با g نمایش داده می‌شود؛ اما، چنانکه مثال ساده بالا نشان می‌دهد، گاهی ممکن است این طرز نمایش گمراه کننده باشد.

یکی از سوالهای جالب، سؤال زیر است: فرض کنیم f تابعی از X در Y باشد. چه وقت تابعی چون g از Y در X وجود دارد که به ازای هر x در X ، $g(f(x)) = x$ ؟ اگر I تابع همانی روی X ، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $I(x) = x$ را نمایش

دهد، سؤال این است: چه وقت تابعی چون y از Y در X وجود دارد که $?g \circ f = I$ به اجمال، تابعی چون y را می‌خواهیم که «هر عنصر Y را به جای او لش پس بفرستد». برای اینکه این تابع y وجود داشته باشد، مسلماً f باید یک به یک باشد، یعنی f باید دارای این خاصیت باشد که اگر $x_1 \neq x_2$ آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$. اگر f یک به یک باشد، این تابع y مسلمانه وجود دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود: گیریم y عنصری از Y باشد. اگر y در برد f باشد، آنگاه عنصری چون x در X وجود دارد که $f(x) = y$; و چون f یک به یک است چنین x یکتاست. تعریف می‌کنیم $y = f(x)$. اما، اگر y در برد f نباشد، $(y)g$ را عنصر دلخواهی از X تعریف می‌کنیم. واضح است که در این صورت $.g \circ f = I$

فرض کنیم f تابعی از X در Y باشد. گوییم f معکوس پذیر است هرگاه تابعی چون y از Y در X وجود داشته باشد که

(۱) y تابع همانی روی X باشد،

(۲) $f \circ y$ تابع همانی روی Y باشد.

هم اکنون دیدیم که اگر y بی وجوه داشته باشد که در (۱) صدق کند، آنگاه f یک به یک است. به طور مشابه، می‌توان دید که اگر y بی وجوه داشته باشد که در (۲) صدق کند، برد f همه Y است. یعنی f پوشاست. پس، اگر f معکوس پذیر باشد، f یک به یک و پوشاست. عکس، اگر f یک به یک و پوشای باشد، تابعی چون y از Y در X وجود دارد که در (۱) و (۲) صدق می‌کند. بعلاوه، این y یکتاست. این تابع، تابعی از Y در X است که با قاعدة زیر تعریف می‌شود: اگر y در Y باشد، آنگاه $(y)g$ همان عنصر و تنها عنصر چون x در X است که به ازای آن $y = f(x)$.

اگر f معکوس پذیر (یک به یک و پوشای) باشد، معکوس f یکتا تابع f^{-1} از Y در X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱') به ازای هر x در X ، $f^{-1}(f(x)) = x$ ،

(۲') به ازای هر y در Y ، $f(f^{-1}(y)) = y$.

مثال ۳. توابع در مثال ۲ را مجدداً بررسی می‌کنیم.

(الف) اگر $X = Y$ مجموعه اعداد حقیقی باشد و آنگاه f معکوس پذیر نیست. زیرا f نه یک به یک است و نه پوشای.

(ب) اگر $X = Y$ صفحه اقلیدسی و f «دوران به اندازه 90° » باشد، آنگاه f هم یک به یک و هم پوشاست. تابع معکوس f^{-1} «دوران به اندازه 90° » — «یا «دوران به اندازه 270° » است.

(پ) اگر X صفحه اقلیدسی، Y محور x ، و $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ باشد، آنگاه f معکوس پذیر نیست. زیرا، گرچه f پوشاست اما یک به یک نیست.

(ت) اگر X مجموعه اعداد حقیقی، Y مجموعه اعداد حقیقی مثبت، و $f(x) = e^x$

باشد، آنگاه f معکوس پذیر است. تابع f^{-1} همان تابع لگاریتم طبیعی است که در قسمت (ث) آمد: $e^{\log y} = y$

(ث) معکوس تابع لگاریتم طبیعی همان تابع نمایی در قسمت (ت) است.

گیریم f تابعی از X در Y و f تابعی از Y در X باشد. f را یک تحدید (یا یک تحدید f به (X) نامیم، هرگاه

(۱) Y زیر مجموعه‌ای از X باشد،

$$(2) \text{ به ازای هر } x \text{ در } X, f(x) = f(x)$$

بدیهی است وقتی که f یک تحدید f باشد، نتیجه می‌گیریم که Y زیر مجموعه‌ای است از X . نام «تحدید» از این امر ناشی می‌شود که f و f دارای یک قاعده هستند و عمدتاً بدین لحاظ فرق دارند که دامنه تعریف قاعده را به زیر مجموعه X از X محدود می‌کنیم. اگر تابع f و زیر مجموعه دلخواهی چون X از X بهما داده شود، برای ساختن یک تحدید f به X روش ساده‌ای وجود دارد. تابعی چون f از Y در X را بنا بر $f(x) = f(x)$ ، به ازای هر x در X ، تعریف می‌کنیم. ممکن است تعجب آور باشد که چرا این تابع را تحدید f به X نامیده‌ایم. دلیل این این است که در بحث مربوط به تحدیدهای f ، همانند تغییر دامنه X خواهان آزادی تغییر همدامنه Y نیز هستیم.

مثال ۴. (الف) گیریم X مجموعه اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^2$ باشد. در این صورت f تابعی معکوس پذیر نیست، اما اگر دامنه آن را با اعداد حقیقی نامنفی محدود کنیم معکوس پذیر است. گیریم X مجموعه اعداد حقیقی نامنفی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^2$ باشد، در این صورت f یک تحدید f به X است. حال آنکه f به یک است و نه پوشاند، در حالی که f هم یک به یک است و هم پوشاند. بیان اخیر چیزی جز این نیست که هر عدد نامنفی، توان دوم دقیقاً یک عدد نامنفی است. تابع معکوس f^{-1} تابعی از X در X است که با $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ تعریف می‌شود.

(ب) گیریم X مجموعه اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ باشد. برد f همه X و لذا f پوشاست. تابع f قطعاً یک به یک نیست، مثلاً $f(-1) = f(0)$. اما f روی X ، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی، یک به یک است چرا که مشتق f به ازای $x > 0$ مثبت است. وقتی که x بر روی همه اعداد نامنفی تغییر کند، $f(x)$ بر روی همه اعداد حقیقی y ، با شرط $1 \geqslant y$ ، تغییر می‌کند. اگر Y را مجموعه همه $1 \geqslant y$ و f را تابع از X در Y تعریف شده توسط $f(x) = f(x)$ بگیریم، آنگاه f تابعی یک به یک از X بر روی Y است. از این قرار، f تابع معکوسی

چون $f \circ f$ از Y بروی X دارد، هر فرمولی برای (y) f نسبتاً پیچیده است.
 (پ) مجدداً X را مجموعه اعداد حقیقی و f را تابع سینوس، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = \sin x$ می‌گیریم. برد f مجموعه همه بوهایی است که در $f(x+2\pi) = f(x)$ است که در $y \leqslant 1$ صدق می‌کنند. از این رو، f پوشانیست. چون $x \leqslant \frac{\pi}{2}$ است که در $f(x) = \sin x$ می‌بینیم که f یک به یک هم نیست. اگر X را فاصله $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ باشد. f را تابع از X در Y تعریف شده توسط $f(x) = \sin x$ باشد. در این صورت f یک تحدید f به فاصله X است که هم یک به یک و هم پوشاست.
 این درست طریق دیگری از بیان این واقعیت است که روى فاصله از $\frac{\pi}{2}$ تابع سینوس هر مقدار بین $-1 + \frac{1}{2}$ را تنها یک باز اختیار می‌کند. تابع f تابع سینوس معکوس است:

$$f^{-1}(y) = \sin^{-1} y = \arcsin y.$$

(ت) مثالی عمومی از تحدیدی برای یک تابع، مثال زیر است. این مثال نمونه خیلی بهتری است از نوع تحدیدهایی که در این کتاب به کار خواهیم برد تا مثالهای پنهانهای (ب) و (پ). مثالی که در (الف) آمد حالت خاصی است از این مثال. گیریم X یک مجموعه و f تابعی از X در خودش باشد. گیریم X زیرمجموعه‌ای از X باشد. گوییم X تحت f پایاست، هرگاه به ازای هر x در X ، عنصر $f(x)$ در X باشد. اگر X تحت f پایا باشد، آنگاه f یا تحدید دائم تعریف شده X ، تابعی چون f از X در خودش را القا می‌کند. اهمیت پایانی در این است که به وسیله تحدید f به X می‌توان تابعی از X در خودش به دست آورد و نه تابعی صرفاً از X در X .

پ. ۳۰. رابطه هم‌ارزی

رابطه هم‌ارزی نوع ویژه‌ای از روابط بین جفت عناصر یک مجموعه است. برای تعریف یک رابطه هم‌ارزی، ابتدا باید روش‌کنیم که یک «رابطه» چیست.

بهطور قطع هر تعریف رسمی از «رابطه» باید روابط آشنایی چون « $x = y$ »، « $x < y$ »، « x مادر y است»، و « x من تراز y است» را در بر گیرد. اگر X یک مجموعه باشد، چه چیزی باعث تعیین رابطه‌ای بین جفتهای از عناصر X می‌شود؟ بدیهی است که پاسخ قاعده‌ای است برای تعیین اینکه آیا به ازای هر دو عنصر مفروض x و y از X در رابطه داده شده با y قرار می‌گیرد یا نه. چنین قاعدة R را، رابطه‌ای (دوتایی) روی X نامیم. اگر بخواهیم اندکی دقیق‌تر باشیم، بهتر است به صورت زیر به پیش برویم. گیریم $X \times X$ مجموعه همه جفتهای مرتب (x, y) از عناصر X را نشان دهد. رابطه‌ای R روی X تابعی است چون R از $X \times X$ در مجموعه $\{(x, y)\}$ به بیان دیگر، به هر جفت مرتب (x, y) یا 1 یا 0 را اختصاص می‌دهد. مظاود این است که اگر

$R(x, y) = 1$ آنگاه x در رابطه مفروض با y قرار می‌گیرد، و اگر $R(x, y) = 1$ در این رابطه قرار نمی‌گیرد.

اگر R رابطه‌ای دوتایی روی مجموعه X باشد، وقتی که $R(x, y) = 1$ نوشتند xRy به جای آن راحت‌تر است. رابطه‌ای دوتایی چون R

(۱) انعکاسی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x در X داشته باشد xRx ؛

(۲) متقارن است، هرگاه از yRx نتیجه بگیریم yRx ؛

(۳) متعادی نام دارد، هرگاه از xRy و yRz نتیجه شود xRz .

یک رابطه هم ارزی روی X عبارت است از یک رابطه دوتایی انعکاسی، متقارن، و متعادی روی X .

مثال ۵. (الف) روی هر مجموعه تساوی رابطه‌ای هم ارزی است. به بیان دیگر، اگر xRy به معنی $x = y$ باشد، آنگاه R رابطه‌ای هم ارزی است. زیرا $x = x$ ؛ اگر $\neg(x = y)$ باشد، در این صورت $x \neq y$ ؛ و اگر $y = z$ و $x = z$ باشد، آنگاه $x = y$. رابطه « $x = y$ » متقارن است، اما نه انعکاسی است و نه متعادی.

(ب) X را مجموعه اعداد حقیقی می‌گیریم و فرض می‌کنیم xRy به معنی $x < y$ باشد. در این صورت R رابطه‌ای هم ارزی نیست. این رابطه متعادی است، اما نه انعکاسی است و نه متعادل، رابطه « $x \leq y$ » انعکاسی و متعادلی است ولی متقارن نیست.

(پ) گیریم E صفحه اقلیدسی و X مجموعه همه مثلثهای واقع در صفحه E باشد. در این صورت تشابه رابطه‌ای است هم ارزی روی X ، یعنی، « $T_1 \cong T_2$ » (T_1, T_2 متشابه است) رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه همه مثلثهای واقع در یک صفحه است.

(ت) گیریم X مجموعه همه اعداد صحیح:

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

و فرض کنیم n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. رابطه R_n روی X را چنین تعریف می‌کنیم: $xR_n y$ اگر و تنها اگر $(x - y)$ بر n قابل قسمت باشد. رابطه R_n همنهشتی به پیمانه n نامیده می‌شود. وقتی که $(x - y)$ بر n قابل قسمت باشد به جای $xR_n y$ معمولاً نوشتند $x \equiv y \pmod{n}$ می‌شود

$$x \equiv y \pmod{n} \text{ است (}x\text{).}$$

به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، همنهشتی به پیمانه n رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه اعداد صحیح است.

(ث) گیریم X و Y دو مجموعه و f تابعی از X در Y باشد. رابطه R روی X را چنین تعریف می‌کنیم: xRy اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$. بسادگی می‌توان نشان داد که R رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه X است، چنانکه خواهیم دید، این مثال عملاً همه روابط هم ارزی را در بر می‌گیرد.

فرض کنیم R رابطه‌ای همارزی روی مجموعه X باشد. اگر x عنصری از X باشد، فرض می‌کنیم $E(x;R)$ مجموعه همه عناصری مانند y از X را نشان دهد که xRy . مجموعه $E(x;R)$ رده همارزی x (به ازای رابطه همارزی R) نامیده می‌شود. چون R رابطه‌ای همارزی است، رده‌های همارزی خواص زیر را دارد:

- (۱) همه $E(x;R)$ ها ناتهی هستند؛ زیرا، نظر به اینکه xRx ، عنصر x متعلق به $E(x;R)$ است.

(۲) گیریم x و y عناصر X باشند. چون R متقارن است، y به $E(x;R)$ تعلق دارد اگر و تنها اگر x متعلق به $E(y;R)$ باشد.

(۳) اگر x و y عناصر X باشند، رده‌های همارزی $E(y;R)$ و $E(x;R)$ یامساوی‌اند و یا هیچ عنصر مشترکی ندارند. ابتدا، فرض کنیم xRy . گیریم z عنصری از $E(x;R)$ ، یعنی xRz باشد که z عناصری از $E(y;R)$ نباشد. این مطلب نشان می‌دهد که هر عنصر $E(x;R)$ عناصری چون R متعدد است داریم zRy ، پس yRz . این مطلب نشان می‌دهد که هر عنصر $E(y;R)$ عناصری از $E(x;R)$ نیز هست. بنا بر تقارن R ، همچنین می‌بینیم که هر عنصر $E(y;R)$ عناصری از $E(x;R)$ هم هست؛ پس $E(x;R) = E(y;R)$. حال استدلال می‌کنیم که اگر رابطه xRy برقرار نباشد، آنگاه $E(x;R) \cap E(y;R)$ تهی است. زیرا، اگر z در هر دوی این رده‌های همارزی باشد، داریم zRy و xRz و yRz ؛ پس xRy و بدین سان.

اگر \mathcal{G} را خانواده رده‌های همارزی برای رابطه همارزی R بگیریم، می‌بینیم که (۱) هر مجموعه‌ای از خانواده \mathcal{G} ناتهی است، (۲) هر عنصر x از X به یک و تنها یکی از مجموعه‌های خانواده \mathcal{G} تعلق دارد، (۳) اگر و تنها اگر x و y هر دو متعلق به یک مجموعه از خانواده \mathcal{G} باشند. به طور خلاصه، رابطه همارزی R مجموعه X را به اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های (ناتهی) نامداخل تقسیم می‌کند. سوی دیگر قضیه نیز قابل استدلال است. فرض کنیم \mathcal{G} خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرایط (۱) و (۲) اخیر صدق می‌کند. اگر بنا بر (۳) رابطه‌ای مانند R را تعریف کنیم، آنگاه R رابطه‌ای همارزی روی X است و \mathcal{G} خانواده رده‌های همارزی برای R .

- مثال ۶.** بینیم رده‌های همارزی برای رابطه‌های همارزی در مثال ۵ چه هستند.
- (الف) اگر R رابطه تساوی روی مجموعه X باشد، آنگاه رده همارزی عنصر x چیزی جز مجموعه $\{x\}$ ، که تنها عنصر آن x است، نیست.
 - (ب) اگر X مجموعه همه مثلثهای واقع در یک صفحه و R رابطه تشابه باشد، قریب تمامی آنچه که در وهله نخست می‌توان گفت این است که رده همارزی مثلث T مشکل است از همه مثلثهایی که با T متشابه هستند. یکی از وظایف هندسه مسطحه ارائه توصیفهای دیگری از این رده‌های همارزی است.
 - (پ) اگر X مجموعه اعداد صحیح و R_n رابطه «همنهشتی به پیمانه n » باشد، آنگاه

دقیقاً n رده هم ارزی داریم. هر عدد صحیح x به طور یکتا به صورت $x = qn + r$ قابل بیان است که در آن q و r اعدادی صحیح اند و $1 \leq r \leq n$. این مطلب نشان می‌دهد که هر x دقیقاً با یکی از n عدد صحیح $0, 1, 2, \dots, n-1$ همنهشت به پیمانه n است. رده‌های هم ارزی عبارتند از

$$E_0 = \{ \dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots \}$$

$$E_1 = \{ \dots, 1-2n, 1-n, 1+n, 1+2n, \dots \}$$

 \vdots

$$E_{n-1} = \{ \dots, n-1-2n, n-1-n, n-1, n-1+n, \\ n-1+2n, \dots \}.$$

(ت) فرض کنیم X و Y دومجموعه، f تابعی از X در Y ، و R رابطه‌ای هم ارزی باشد که چنین تعریف می‌شود: $x_1 R x_2$ اگر و تنها اگر $f(x_1) = f(x_2)$. رده‌های هم ارزی برای R درست بزرگترین زیرمجموعه‌های X هستند که روی آنها f «ثابت» است. توصیف دیگر این رده‌های هم ارزی بدین صورت است. این رده‌های هم ارزی در تناقض نیز به یک با عناصر برد f قرار دارند. اگر y در برد f باشد، مجموعه همه x ‌های در X با شرط $f(x) = y$ رده‌ای هم ارزی برای R است؛ و این خود تناظری یک به یک بین عناصر برد f و رده‌های هم ارزی R تعریف می‌کند.

حال به توضیحی دیگر در باره روابط هم ارزی می‌پردازیم. با مفروض بودن رابطه‌ای هم ارزی چون R روی X ، گیریم \mathcal{F} خالواده رده‌های هم ارزی برای R باشد. وابستگی رده هم ارزی $E(x; R)$ به عنصر x ، تابعی چون f از X در \mathcal{F} (در حقیقت، بروی \mathcal{F}) تعریف می‌کند:

$$f(x) = E(x; R).$$

این نشان می‌دهد که R ، همچون در مثال ۵ (ث)، رابطه هم ارزی وابسته به تابعی است که دامنه آن X است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هر رابطه هم ارزی روی مجموعه X به صورت زیر تعیین می‌شود. قاعده‌ای (تابعی) چون f داریم که به عنصر x از X شیئی چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد و اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$. اگر $f(x) = f(y)$ را به عنوان خاصیتی از x در نظر گرفت که آنچه رابطه هم ارزی انجام می‌دهد (اجمالاً) عبارت از گردآوردن همه آن عناصری از X باشد که این خاصیت را مشترک دارا هستند. اگر شیء $f(x)$ رده هم ارزی x باشد، آنگاه آنچه گفته شد این است که خاصیت مشترک عناصر یک رده هم ارزی، تعلق داشتن آنها به یکی از رده‌های هم ارزی است. بدیهی است که این مطلب چیز زیادی نمی‌گوید. در حالت عمومی، تعداد بسیاری تابع متفاوت چون f وجود دارند که رابطه هم ارزی مفروضی را به صورت بالا تعیین می‌کنند و یکی از اهداف مردم نظر در مطالعه روابط هم ارزی یافتن یکی از این توابع f است که توصیفی ابتدایی و در عین حال بامعنی از رابطه هم ارزی به دست دهد. در بخش

پ. ۵. خواهیم دید که در مورد چند رابطه همارزی خاصی که در جبرخطی پیش می‌آیند، این امر چگونه انجام می‌شود.

پ. ۶. فضاهای خارج قسمت

فرض کنیم V فضای برداری برروی هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. در حالت عمومی، تعداد زیادی زیرفضا چون W' وجود دارند که مکمل W هستند؛ یعنی، زیرفضایی $V = W \oplus W'$ با این خاصیت هستند که W هم متناهی باشد، زیرفضای خاصی وجود دارد که يحتمل نام زیرفضای مکمل «طبیعی» W برای آن مناسب است. این زیرفضا، مکمل متعامد W است. اما، اگر V بجز ساختار فضای برداری ساختار دیگری نداشته باشد، هیچ راهی برای گزینش زیرفضایی چون W' که بتوان آن را زیرفضای مکمل طبیعی W نامید وجود ندارد. با این وجود، از V و W می‌توان فضایی برداری چون V/W را ساخت که به «خارج قسمت» V و W مشهور است و نقش مکمل طبیعی W را بازی کند. این فضای خارج قسمت زیرفضایی از V نیست، ولذا نمی‌تواند عملاً زیرفضایی مکمل برای W باشد، ولی فضایی برداری است که تنها بر حسب V و W تعریف می‌شود و دارای این خاصیت است که با هر زیرفضای مکمل W ، مانند W' یکریخت است.

گیریم W زیرفضایی از فضای برداری V باشد. اگر α و β بردارهایی از V باشند، گوییم α همنهشت β به پیمانه W است هرگاه بردار $(\alpha - \beta)$ در زیرفضای W باشد. اگر α همنهشت β به پیمانه W باشد، می‌نویسیم

$$\alpha \equiv \beta, \quad \text{mod } W.$$

همنهشتی به پیمانه W رابطه‌ای همارزی روی V است.
 $\alpha - \alpha = 0, \quad \alpha \equiv \alpha, \quad \text{mod } W \quad (1)$

اگر $\alpha \equiv \beta, \quad \text{mod } W$ و $\beta \equiv \gamma, \quad \text{mod } W$ باشند، آنگاه $\alpha \equiv \gamma, \quad \text{mod } W$. زیرا، از آنچه W زیرفضایی از V است، بردار $(\alpha - \beta)$ در W است اگر و تنها اگر $(\beta - \alpha)$ در W باشد. اگر $\alpha \equiv \gamma, \quad \text{mod } W$ و $\beta \equiv \gamma, \quad \text{mod } W$ باشند، آنگاه $\beta \equiv \alpha, \quad \text{mod } W$. زیرا اگر $(\alpha - \gamma) \equiv (\beta - \gamma), \quad \text{mod } W$ باشند، آنگاه $(\alpha - \beta) \equiv 0, \quad \text{mod } W$ است.

رده‌های همارزی برای این رابطه هم ارزی به عنوان هممجموعه‌های W شناخته می‌شوند. رده همارزی (هممجموعه) برداری چون α چیست؟ این رده همارزی مشکل از همه بردارهای β در V است که $(\beta - \alpha) \in W$ باشد، یعنی همه بردارهای β به صورت $\alpha + \gamma$ که $\gamma \in W$ باشد. بدین‌دلیل، هممجموعه بردار α با

$$\alpha + W$$

نشان داده می‌شود. مناسب است که هممجموعه α نسبت به W به عنوان مجموعه بردارهای حاصل از انتقال زیرفضای W توسط بردار α در نظر گرفته شود. برای تجسم

این هممجموعه‌ها، بهتر است خواننده حالت خاص زیر را در نظر بگیرد. گیریم V فضای R^3 و W زیرفضایی یک بعدی از V باشد. اگر V را به عنوان صفحه اقلیدسی تصور کنیم، W خطی مستقیم مار بر مبدأ خواهد بود. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ برداری در V باشد، هممجموعه $\alpha + W$ خط مستقیمی است که از نقطه (x_1, x_2) می‌گذرد و موازی W است. دسته همه هممجموعه‌های W با V/W نشان داده خواهد شد. اکنون به صورت زیر، جمعی برداری و ضربی اسکالری روی V/W تعریف می‌کنیم:

$$(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W$$

$$c(\alpha + W) = (c\alpha) + W$$

به بیان دیگر، مجموع هممجموعه α و هممجموعه β عبارت است از هممجموعه $(\alpha + \beta)$ و حاصل ضرب اسکالر c و هممجموعه α عبارت است از هممجموعه بردار $c\alpha$. بردارهای متفاوت بسیاری از V نسبت به W هممجموعه‌های مساوی خواهند داشت ولذا باید نشان دهیم که جمع و ضرب فوق تنها به هممجموعه‌های مورد بحث وابسته‌اند. این بدین معنی است که باید احکام زیر را اثبات کنیم:

(الف) اگر $\beta \equiv \beta'$, $\alpha \equiv \alpha'$, $\text{mod } W$ و $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$, $\text{mod } W$

$$\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta', \text{ mod } W$$

(ب) اگر $\alpha \equiv \alpha'$, $\text{mod } W$ و $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$, $\text{mod } W$

نشان دادن این احکام ساده است. (۱) اگر $\alpha - \alpha'$ و $\beta - \beta'$ در W باشند، آنگاه چون $(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')$ ، می‌بینیم که $\alpha + \beta$ همنهشت با $\alpha' + \beta'$ به پیمانه W است. (۲) اگر $\alpha - \alpha'$ در W و c اسکالری باشد، آنگاه $c\alpha - c\alpha' = c(\alpha - \alpha')$ در W است.

اکنون بسادگی می‌توان نشان داد که V/W همراه با جمع برداری و ضرب اسکالری تعریف شده در فرقه فضایی برداری برروی هیأت F تشکیل می‌دهد. البته هر یک از اصول یک فضای برداری را باید به طور مستقیم بررسی کرد. هر یک از خواص جمع برداری و ضرب اسکالری از خاصیت متناظر اعمال در V منتج می‌شوند. نکته‌ای را هم باید مذکور شد. بردار صفر در V/W هممجموعه بردار صفر در V است. به بیان دیگر، W بردار صفر در V/W است.

فضای برداری V/W خارج قسمت (یا تفاضل) V و W نامیده می‌شود. یک تبدیل خطی طبیعی چون Q از V برروی V/W وجود دارد. این تبدیل با $Q(\alpha) = \alpha + W$ تعریف می‌شود. باید در نظرداشت که عملهای در V/W را درست طوری تعریف کردیم که این تبدیل Q خطی باشد. توجه کنید که فضای پوج Q دقیقاً زیرفضای W است. Q را تبدیل خارج قسمت (یا نکاشت خارج قسمت) از V برروی W می‌نامیم. حال می‌توان رابطه بین فضای خارج قسمت V/W و زیرفضاهایی از V را که مکمل W هستند به شرح زیر بیان کرد.

قضیه. گیریم W زیرفضایی از فضای بردادی V و Q نگاشت خارج قسمت از V بروی V/W باشد. فرض کنیم W' زیرفضایی از V باشد. در این صورت $V = W \oplus W'$ اگر وقتهایا اگر تحدید Q به W' یک یکریختی از V/W بروی V/W باشد: اثبات. فرض کنیم $V = W \oplus W'$. پس هر بردار α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = \gamma + \gamma'$ ، که در آن γ در W و γ' در W' است، قابل بیان است. در این صورت $\alpha + W = \gamma' + W$ یعنی $Q\alpha = Q\gamma + Q\gamma' = Q\gamma'$ می‌نگارد، یعنی $Q(W') = V/W$. بعلاوه Q روی W' یک به یک است؛ زیرا، فرض کنیم $\gamma_1 + \gamma_2$ دو بردار در W' باشند و $Q\gamma_1 + Q\gamma_2 = Q(\gamma_1 + \gamma_2) = 0$ ، پس $\gamma_1 + \gamma_2$ در W قرارداده است. این بردار همچنین در W' که مجزا از W است قرارداده است $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. بنابراین تحدید Q به W' تبدیل خطی یک به یکی از V/W بروی V/W است.

فرض کنیم W چنان زیرفضایی از V باشد که Q روی W یک به یک باشد و $Q(W') = V/W$. گیریم α برداری از V باشد. در این صورت برداری چون γ در W هست وجود دارد که $Q\gamma = Q\alpha$ یعنی $\gamma + W = \alpha + W$. پس برداری چون γ در W هست $\alpha = \gamma + \gamma'$. برای اینکه نشان دهیم W و W' مجزا هستند، فرض کنیم γ هم در W و هم در W' باشد. چون γ در W است، داریم $Q\gamma = 0$. ولی Q روی W یک به یک است ولذا باید داشته باشیم $\gamma = 0$. بدینسان $W \oplus W' = V$. \square

آنچه که حقیقتاً این قضیه می‌گوید این است که W' مکمل W است اگر و تنها اگر W' زیرفضایی باشد که دقیقاً یک عضو از هر هممجموعه W را شامل باشد. این قضیه نشان می‌دهد که وقتی $V = W \oplus W'$ ، نگاشت خارج قسمت Q ، فضای V/W را با W' «یکی می‌کند». به طور خلاصه $(W \oplus W')/W$ به طریقی طبیعی با W' یکریخت است. نکته‌ای نسبتاً آشکار را هم باید مذکور شد. اگر W زیرفضایی از فضای برداری بعد متناهی V باشد، آنگاه

$$\text{بعد}(V) = \text{بعد}(V/W) + \text{بعد}(W).$$

این مطلب را می‌توان از قضیه بالا نتیجه گرفت. شاید آسانتر باشد مشاهده کنیم که آنچه این فرمول بعدی بیان می‌کند این است که

$$\text{بعد}(V) = \text{رتبه}(Q) + \text{پوچی}(Q)$$

هدف ما در اینجا بررسی دقیق فضاهای خارج قسمت نیست. لکن نتیجه‌ای بنیانی هست که لازم است اثبات آن ارائه شود.

قضیه. گیریم V و Z دو فضای برداری بروی هیأت F باشند. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V بروی Z باشد. اگر W فضای پوچ T باشد، آنگاه Z با V/W یکریخت است.

امیات. تبدیلی چون U از V/W در Z را به صورت $U(\alpha+W) = T\alpha$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که U خوش تعریف است، یعنی اگر $\alpha+W = \beta+W$ باشد، آنگاه $T\alpha = T\beta$ است. این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که W فضای پوچ T است؛ زیرا $\alpha+W = \beta+W$ بدين معنی است که $\alpha - \beta \in W$ است و این امر صورت می‌پذیرد اگر و تنها اگر $\alpha - \beta = 0$. این مطلب نه تنها نشان می‌دهد که U خوش تعریف است، بلکه نشان می‌دهد که U یک به یک نیز هست.

اکنون بررسی اینکه U خطی است و V/W را بروی Z می‌فرستد بسادگی می‌سر است، زیرا که T تبدیلی خطی از V بروی Z است. \square

پ. ۵. روابط هم ارزی در جبر خطی

حال برخی از روابط هم ارزی را که در من این کتاب ظاهر می‌شوند، مورد توجه قرار می‌دهیم. مجموعه زیر درست نمونه‌ای از این روابط است.

(۱) گیریم $n \times m$ دو عدد صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. X را مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی F می‌گیریم. در این صورت هم ارزی سطری، رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه X است. حکم « A هم ارز سطری B است» بدين معنی است که A می‌تواند از B توسط دنباله‌ای متناهی از عملهای سطری مقدماتی به دست آید. اگر به جای A هم ارز سطری B است» بنویسیم $A \sim B$ ، آنگاه بررسی خواص زیر مشکل نیست: (۱) $A \sim A$ ؛ (۲) $A \sim B$ ، آنگاه $B \sim A$ ؛ (۳) اگر $B \sim A$ و $C \sim B$ ، آنگاه $C \sim A$. درباره این رابطه هم ارزی چه می‌دانیم؟ در واقع، طالب زیادی در این مورد می‌دانیم. مثلاً می‌دانیم که $A \sim B$ اگر و تنها اگر به ازای ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری چون P ، $P = PB$ یا $B = PA$ اگر و تنها اگر دستگاههای همگن معادلات خطی $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی باشند. همچنین اطلاعات بسیار واضحی درباره رده‌هایی هم ارزی این رابطه داریم. هر ماتریس $m \times n$ مانند A بایک و تنها یک ماتریس تحويل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هر رده هم ارزی برای این رابطه دقیقاً شامل یک ماتریس تحويل شده سطری پلکانی R است؛ رده هم ارزی تعیین شده توسط R مشکل از همه ماتریسهای $A = PR$ است که در آن P ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری است. این توصیف از رده‌های هم ارزی را می‌توان به طریق زیرهم تصور کرد. با مفروض بودن ماتریس $m \times n$ مانند A ، قاعده‌ای (تایعی) چون f داریم که A ماتریس تحويل شده سطری پلکانی $f(A)$ را که هم ارز سطری A است و استهمه کند. رابطه هم ارزی سطری کاملاً توسط f تعیین می‌شود. زیرا، $A \sim B$ اگر و تنها اگر $f(A) = f(B)$ یعنی، اگر و تنها اگر A و B دارای یک شکل تحويل شده سطری پلکانی باشند.

(۲) گیریم n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. فرض می‌کنیم X مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. آنگاه تشابه رابطه‌ای هم ارزی روی X است؛ هر ماتریس $n \times n$ مانند A مشابه خودش است؛ اگر A مشابه با B باشد، آنگاه B مشابه

با A است؛ اگر A متشابه با B و B متشابه با C باشد، آنگاه A متشابه با C است. درباره این رابطه همارزی نیز مطالب نسبتاً زیادی می‌دانیم. مثلاً، A متشابه با B است اگر و تنها اگر A و B روی F^n عملگرهای خطی مساوی را (احتمالاً) در پایه‌های مرتب مقاوی نمایش دهنند. اما، مطلبی عمیق‌تر از این می‌دانیم. هر ماتریس $n \times n$ مانند A ، بر روی F ، با یک و تنها یک ماتریس که در فرم گویاست (فصل ۷)، (بر روی F)، متشابه است. به بیان دیگر، هر رده‌هم ارزی برای رابطه تشابه دقیقاً شامل یک ماتریس است که در فرم گویاست. هر ماتریس در فرم گویا، توسط یک k -تایی (p_1, \dots, p_k) از چند جمله‌ای‌های تکین دارای این خاصیت که p_{j+1} چند جمله‌ای p_j را عاد می‌کند، $j = 1, \dots, k - 1$ ، تعیین می‌شود. بدین‌سان، تابعی چون f داریم که به هر ماتریس $n \times n$ مانند A یک k -تایی $f(A) = (p_1, \dots, p_k)$ را که در شرط تقسیم پذیری p_{j+1} بر p_j صدق می‌کند وابسته می‌سازد؛ و A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر و تنها $f(A) = f(B)$.

(۳) اینک حالت خاصی از همین مثال ۲. گیریم X مجموعه ماتریسهای 3×3 بر روی هیأتی چون F باشد. رابطه تشابه‌روی X را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر A و B دو ماتریس 3×3 بر روی F باشند. آنگاه A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چند جمله‌ای سرشت‌نمای مساوی و چند جمله‌ای مینیمال مساوی باشند. به ازای هر ماتریس 3×3 چون A ، جفتی مانند (f, p) از دو چند جمله‌ای تکین داریم که

$$\deg f = 3 \quad (\text{الف})$$

(ب) p چند جمله‌ای f را عاد می‌کند،

f چند جمله‌ای سرشت‌نمای A است و p چند جمله‌ای مینیمال A . با مفروض بودن چند جمله‌ای‌های تکین f و p بر روی F که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند، به آسانی می‌توان ماتریسی 3×3 بر روی F بدست آورده که f و p را، بترتیب، به عنوان چند جمله‌ای‌های سرشت‌نما و مینیمال خود داشته باشد. لب همه این مطالب چنین است. اگر رابطه تشابه روی مجموعه ماتریسهای 3×3 بر روی F را مورد بررسی قرار دهیم، رده‌های همارزی در تأثیر یک به یک خواهد بود با جفت‌های مرتب (f, p) از چند جمله‌ای‌های تکین بر روی F که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند.

پ. ۶. اصل موضوع انتخاب

به بیانی مجمل، اصل انتخاب یک قاعده (یا اصل) فکر کردن است حاکمی از اینکه با در دست داشتن خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی، می‌توانیم از هر مجموعه یک عنصر را برگزینیم. برای بیان دقیق‌تر مطلب، فرض کنیم مجموعه نمایه‌ای چون A و به ازای هر α در A مجموعه‌ای وابسته وغیر تهی چون S_α در دست باشد. «انتخاب» یک عنصر از هر S_α به معنی ارائه قاعده‌ای است چون f که به هر α یک عنصر $f(\alpha)$ از مجموعه S_α را وابسته سازد. اصل انتخاب حاکمی است که این امر امکان‌پذیر است، یعنی با در دست داشتن

خانواده مجموعه‌های $\{S_\alpha\}$ تابعی چون f از A در

$$\bigcup_{\alpha} S_\alpha$$

یافت می‌شود که به ازای هر α ، $f(\alpha)$ در S_α باشد. این اصل هرچند مورد پذیرش اکثريت رياضيدانان است در موارد بسياري يه هيچ وجه روشن نيسست که تابع صريحي چون f را چگونه می‌توان بدست آورد.

اصل انتخاب پيامدهای تکان‌دهنده‌ای هم دارد. اکثر اين نتایج، به مواد مورد بحث اين کتاب يا ارتباط اندکي دارند يا هيچ ربطی پيدا نمی‌کنند. اما، يك پيامد شايسنده‌ذکر است: هر فضای برداری پايه‌ای دارد. مثلاً هيأت اعداد حقیقی به عنوان يك فضای برداری بر روی هيأت اعداد گویا، دارای يك پايه است. به بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای چون S از R وجود دارد که بر روی هيأت اعداد گویا مستقل خطی است و دارای اين خاصیت است که هر عدد حقیقی ترکیب خطی گویا بی از تعدادی متناهی از عناصر S است. ما در اینجا برای استنتاج اين قضیه مربوط به فضاهای برداری از اصل انتخاب خود را معطل نمی‌کنیم و برای دیدن اثباتی از آن، خواننده را به کتاب کلی^۱ که در فهرست مراجع آمده است، ارجاع می‌دهیم.

مراجع

- Halmos, P., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1958.
- Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, II, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1953.
- Kelley, John L., *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.
- MacLane, S. and Birkhoff, G., *Algebra*, The Macmillan Co., New York, 1967.
- Schreier, O. and Sperner, E., *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, 2nd Ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1955.
- van der Waerden, B. L., *Modern Algebra* (two volumes), Rev. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1969.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل، کش
add	اضافه کردن
adjacent	مجاور
adjoint	الحاقی
-operation	عمل الحاق
-operator	عملگر -
adjunction	الحاق
admissible	مجاز
algebra	جبر
algebraic	جبری
algebraically closed	بسته جبری
algorithm	الگوریتم
alternating	متناوب
analysis	آنالیز
angle	زاویه
annihilating polynomial	چندجمله‌ای پوچساز
annihilator	پوچساز
anti-isomorphism	پادیکریختی
application	کاربرد
approximation	تقریب - نزدیک سازی
arbitrary	دلخواه
argument	استدلال، آوند

array	آرایش
assertion	حکم
associativity law	قانون شرکت پذیری
augmented matrix	ماتریس افزوده
axial	محوری
axis	محور
axiom of choice	اصل موضوع انتخاب

base	پایه، مبنای [لگاریتم]
basis	پایه
bilinear	دوخطی
-form	فرم-
binary	دوتایی
binomial	دوجمله‌ای

calculation (\rightarrow computation)	محاسبه
canonical	معتارف
character	سرشت
characterisation	سرشت نمایی
characteristic	سرشت نما
-polynomial	چند جمله‌ای
-value	مقدار- [مقدار ویژه]
-vector	بردار-
class	رده
classic	کلاسیک
classical adjoint	الحقیقی کلاسیک
classification	رده‌بندی
codimension	هم بعد
codomain	همد امنه
coefficient	ضریب
cofactor	همسازه
coincidence	انطباق
collection	گردآورده، دسته

column	стон
-operation	عمل ستونی
-rank	رتبه ستونی
combination	ترکیب
linear-	- خطی
combinatorial analysis	آنالیز ترکیبی
commutative	جا بجا یی
commutator	جا بجا گر
commute	جا بجا شدن
companion	همدم
-matrix	ماتریس -
complement	مکمل
complex	مختلط
component	مؤلفه
composed function	تابع مرکب
composition	ترکیب [توابع]
computation(→calculation)	محاسبه
conductor	هادی
congruence	همنهشتی
-modulo n	- به پیمانه n
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
-transpose	ترانهاده -
conjugation function	تابع تزویجی
consequence	پی آمد
consistant	سازگار
continuous	پیوسته
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
converse	عکس
coordinate	مختص
corollary	نتیجه
correspondence	تناظر
correspondent	متناظر

coset	هم مجموعه
countability	شمارش پذیری
countable	شمارش پذیر
criterion	معیار
cross product	ضرب خارجی
cyclic	دوری
-decomposition	تجزیه—
-subspace	زیر فضای—
-vector	بردار—
decomposable	تجزیه پذیر
decompose	تجزیه کردن
decomposition	تجزیه
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
deduction	قياس، استنتاج
definite	معین
-integral	انتگرال—
degenerate	تبهگون
degree	درجه
dependence	وابستگی
dependent	وابسته
derivative	مشتق
determinant	دترمینان
-rank	رتبه—
diagonal	قطر، قطری
-matrix	ماتریس قطری
diagonalizable	قطري شدنی
-operator	عملگر—
diagonalization	قطري کردن
differentiable	مشتق پذير
differential	دیفرانسیل
differentiation	مشتق گیری، دیفرانسیل گیری
-transformation	تبدیل—

dimension	بعد
direct	مستقیم
-sum	مجموع
direction	سو
directional	سویی
disjoint	مجزا
distance	فاصله [دو نقطه]
distributive law	قانون پخش پذیری
divide	تقسیم کردن - بخش کردن، عاد کردن
divident	مقسوم
divisibility	بخش پذیری
division	تقسیم
divisor	مقسوم علیه
domain	دامنه
dot product	ضرب نقطه‌ای
double	مضاعف
-dual	دوگان
dual	دوگان
-basis	پایه
- space	فضای
duality	دوگانی
echelon	پلکانی
eigenvalue	مقدار ویژه [= مقدار سرشت نما]
element	عنصر، عضو
elimination	حذف
-process	فرآیند
empty	تنهی
entire	تام
-space	فضای
entry	درایه
equivalence	هم ارزی
-relation	رباطه
equivalent	هم ارز

evaluation	محاسبه، تعیین مقدار
expand	بسط دادن
expansion	بسط
explicit	صریح
exponent	نما
exponential	نمایی
extension	گسترش
factor	سازه
factorization	تجزیه به سازه‌ها
field	هیأت
finite	متناهی
finitely generated	بطور متناهی تولید شده
form	فرم، صورت
formal	صوري
-power series	سری توانی
formula	فرمول
free module	مدول آزاد
function	تابع
functional	تابعک
generalization	تعمیم
generalize	تعمیم دادن، عمومیت دادن
generate	تولید کردن
generated	تولید شده
generator	مولد
graph	نمودار
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
group	گروه
Hermitian [= self adjoint]	هرمیتی
-form	فرم
homogeneous	همگن

homomorphic	هم‌ریخت
homomorphism	هم‌ریختی
hyperplane	ابرصفحه
hyperspace	ابرفضا
hypothesis	فرض
ideal	ایdeal
idempotence	خودتوانی
idempotent	خودتوان
-operator	عملگر-
identical	همانند، یکسان
identity	همانی [= عنصر همانی]، اتحاد
-function	تابع همانی
image	نگاره
imaginary	موهومی-انگاری
increasing	صعودی
inclusion	شمول
independence	استقلال
independent	مستقل
-variable	متغیر-
index	نمايه
indices	نمايه‌ها
induce	القاکردن
induced operator	عملگر القاکشده
induction	استقرا
inductive	استقرائي
inequality	نامساوی
infinite	نامتناهي
inner product	ضرب داخلی
integration	انتگرال گيري
-by parts	- جزء به جزء
interpolation	درون یابي
intersection	اشتراك
interval	فاصله

invariance	پایابی
invariant	پایا
-subspace	زیر فضای -
inverse	معکوس
inversion	انعکاس
invertible	معکوس پذیر
irreducible	تحویل ناپذیر
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
iterated	مکرر
iteration	تکرار
kernel	هسته
latent root	ریشه راکد، [] = مقدار سرشت نما
leading	مقدم
-nonzero entry	درایه غیر صفر -
least common divisor	کوچکترین مضرب مشترک
lemma	لم
length	طول
line	خط
linear	خطی
-combination	ترکیب -
-function	تابع -
-functional	تابعی -
-transformation	تبدیل -
linearly dependent	وابسته خطی
linearly independent	مستقل خطی
lower triangular	پایین مثلثی
magnitude	بزرگی
main diagonal	قطر اصلی
map = mapping	نگاشت

matrix	ماتریس
maximal	ماکسیمال
–subspace	زیرفضای
maximum	ماکسیمم
member	عضو
minimal	مینیمال
–polynomial	چندجمله‌ای
minimum	مینیمم
minor	کهاد
module	مدول
monic polynomial	چندجمله‌ای تکین
motion	حرکت
multilinear function	تابع چندخطی
multiplicand	مضروب
multiplication	ضرب
multiplicity	چندگانگی
multiplier	ضریب، مضروب‌فیه
mutually perpendicular	دو به دو عمود بر هم
negative	منفی
nilpotent	پوچ توان
non-degenerate	ناتبیه‌گون
–bilinear form	فرم دو خطی
non-overlapping	نامتناخل
non-singular	نامنفرد
norm	نرم
normal	نرمال
–operator	عملگر
normalizer	نرمال‌کننده
normed	نرم‌دار
notation	نماد، نمادگذاری
n-tuple	n-تایی
nullity	پوچی
null- space	فضای پوچ

odd	فرد
on	روی
one-one	یک به یک
onto	پوشان، بروی
operate	عمل کردن
operation	عمل
operator	عملگر
order	مرتبه
ordered basis	پایه مرتب
origin	مبدأ
orthogonal	تعامد
-basis	پایه
-complement	مکمل
-group	گروه
-projection	تصویر
-set	مجموعه
-vector	بردار
orthogonality	تعامد
orthogonalization	تعامدسازی
orthonormal	تعامدیکه
-basis	پایه
-set	مجموعه
over	بر روی
overlap	تدخّل کردن
parallel	موازی
parallelogram law	قانون متوازی‌الاضلاع
period	دوره تناوب
periodic	دوره‌ای
permutation	جایگشت
-group	گروه جایگشته
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن، تعامد
polar	قطبی

polarization identity	اتحاد قطبی
pole	قطب
polynomial	چندجمله‌ای
positive	مثبت
-definite	معین—
--bilinear form	فرم دوخطی—
-form	فرم—
power series	رشتهٔ توانی
primary	اولیه
-decomposition	تجزیه—
prime	اول
principal ideal	ایدآل اصلی
process	فرآیند
product	حاصل ضرب، ضرب
project	طرح، تصویر کردن
projection	تصویر
-operator	عملگر—
proof	اثبات
proper	سره
-subset	زیر مجموعه—
-value	مقدار—
pseudo orthogonal group	گروه شبهٔ منعامت
quadratic	درجهٔ دوم
-form	فرم—
quotient	خارج قسمت
-space	فضای—
range	برد
rank	رتبه
rational	گویا
-form	فرم—
real	حقيقي
-line	خط—

-valued function	تابع حقیقی
reciprocal	عکس [یک عدد]
rectangle	مستطیل
rectangular	مستطیلی
reduced	تحویل شده
reducibility	تحویل پذیری
reflection	انعکاس
reflective	انعکاسی
relation	رابطه
relatively prime	نسبت بهم اول
remainder	باقیمانده
representation	نمایش
representative	نمایشگر
resolution	تفکیک، حل
restrict	تحدید کردن
restricted	محدود شده
restriction	تحدید
-operator	عملگر
reverse	وارونه، وارونه کردن
reversible	وارونه پذیر
rigid motion	حرکت صلب
ring	حلقه
root	ریشه
rotation	دوران
row	سطر
-equivalence	هم ارز سط्रی
-operation	عمل سطري
-rank	رتبه سطري
-reduced	تحویل شده سطري
-- echelon	— پلکانی
-space	فضای سطري
-vector	بردار سطري
r-shuffle	بر

scalar	اسکالر
-polynomial	چند جمله‌ای
-product	ضرب
self adjoint [= Hermitian]	خودالحق
semi-simple operator	عملگر نیم‌ساده
separating vector	بردار جدا کننده
separation	جداسازی
sequence	دنباله
series	رشته، سری
sesqui-linear	یک و نیم خطی
-form	فرم
set	مجموعه
shift	انتقال
shuffle	بر
sign	علامت
signature	نشان
signum	علامت
similarity	تشابه
simultaneous	همزمان
-diagonalization	قطربنده‌سازی
-triangulation	مثلث بندی
singular	منفرد
-matrix	ماتریس
-transformation	تبديل
skew	کج
-symmetric	متقارن
--bilinear form	فرم دوخطی
solution	جواب
space	فضا
span	پدید آوردن
spanned by	پدید آمده توسط
spanning	پدید آورنده
spatial	فضایی
spectral	طیفی

-resolution	تفکیک
-value	مقدار
spectrum	طیف
square	مربع، مجدد
-matrix	ماتریس مرتبی
-root	جذر، ریشه دوم
standard	استاندارد
-basis	پایه
strict	اکید
structure	ساختار-ساخت
stuffer	پر کننده [T-هادی]
subdivision	زیر بخش
subfield	زیر هیأت
submatrix	زیر ماتریس
submodule	زیر مدول
subscript	شاخص زیر
subset	زیر مجموعه
subspace	زیر فضای
substitution	جایگزینی
subtraction	تفريق
succession	توالی
successive	متوالی
sum	مجموع
symbol	نماد
symmetric	متقارن
-bilinear form	فرم دو خطی
-group	گروه متقارن
symmetry	متقارن
T-conductor	T-هادی
tensor	تاسور
-product	ضرب تاسوری
term	جمله، اصطلاح
theorem	قضیه

theory	نظریه
trace	رد
-of linear transformation	— تبدیل خطی
-of matrix	— ماتریس
transformation	تبدیل
transitive	متعدی
transitivity	تعدی
translation	انتقال
transpose	ترانهاده
transposition	ترانهش
triangulable	مثلثی‌شونده
triangular	مثلثی
triangulation	مثلث‌بندی
trivial	بدیهی
unimodular	تک‌مدولی
union	اجتماع
unique	یکتا
unit	یکه
unitary	یکانی
-diagonalization	قطری کردن—
unity	یکانی
upper triangular	بالا‌مثلثی
validity	اعتبار
value	مقدار
vanish	صفر شدن
variable	متغیر
variation	تفعیل
vector	بردار
-space	فضای برداری

wedge product
well-defined

ضرب گوشه‌ای
خوش تعریف

zero

صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

array	آرایش
r-shuffle	آر-بر [R-بر]
free	آزاد
analysis	آنالیز
combinatorial-argument	- ترکیبی آوند

hyperplane	ابرصفحه
hyperspace	ابرفضا
identity	اتحاد
polarization-proof	- قطبی اثبات
union	اجتماع
standard	استاندارد
argument	استدلال
induction	استقراء
inductive	استقرائي
independence	استقلال
deduction	استنتاج
scalar	اسکالر
intersection	اشتراك
term	اصطلاح

axiom	اصل موضوع
principal	اصلی
add	اضافه کردن
validity	اعتبار
augmented	افزوده
strict	اکید
adjunction	الحاق
adjoint	الحاقی
classical-	- کلاسیک
induce	القاکردن
algorithm	الگوریتم
shift	انتقال
translation	انتقال
integral	انتگرال
definite-	- معین
integration	انتگرال گیری
-by parts	- جزء به جزء
coincidence	انطباق
reflection	انعکاس
inversion	انعکاس
imaginary	انگاری [=موهومی]
prime	اول
primary	اولیه
ideal	ایdeal
principal-	- اصلی
remainder	باقيمانده
upper triangular	بالامثلثی
divisibility	بخش پذیری
trivial	بدیهی
shuffle	بر
range	برد
vector	بردار

separating-	— جداکننده
cyclic-	— دوری
row-	— سطری
orthogonal-	— متعامد
over	بر روی
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
magnitude	بزرگی
algebraically closed	بسنة جبری
expansion	بسط
expand	بسط دادن
dimension	بعد
anti-isomorphism	پاد یکریختی
invariant	پایا
invariance	پایابی
base	پایه
basis	پایه
dual-	— دوگان
orthogonal-	— متعامد
orthonormal-	— متعامد یکه
ordered-	— مرتب
lower triangular	پایین مثلثی
distributive	پخش پذیری
spanned by	پدیدآمده توسط
span	پدیدآوردن
spanning	پدیدآورنده
stuffer	پرکننده
echelon	پلکانی
nilpotent	پوچ توان
annihilator	پوچساز
nullity	پوچی
onto	پوشنا
continuous	پیوسته

function	تابع
conjugation-	- تزویجی
multilinear-	- چندخطی
linear-	- خطی
composed-	- مرکب
functional	تابعک
linear-	- خطی
entire	تام
tensor	تانسور
transformation	تبديل
linear-	- خطی
differentiation-	- مشتق‌گیری [= دیفرانسیل‌گیری]
singular-	- منفرد
degenerate	تبهکون
decomposition	تجزیه
primary-	- اولیه
factorization	تجزیه به‌سازه‌ها
decomposable	تجزیه‌پذیر
decompose	تجزیه کردن
restriction	تحدید
reduced	تحویل شده
row-	- سطری
-- echelon	- پالکانی
irreducible	تحویل ناپذیر
overlap	تداخل کردن
transpose	ترانهاده
conjugate-	- مزدوج
transposition	ترانهش
combination	ترکیب
linear-	- خطی
composition	ترکیب [توابع]
conjugation	- تزویجی
similarity	تشابه
projection	تصویر

- معاملد

orthogonal-	
project	تصویر کردن
orthogonality [= perpendicularity]	تعامد
transitivity	تعدی
generalization	تعمیم
generalize	تعمیم دادن
evaluation	تعیین مقدار [= محاسبه]
variation	تغییر
subtraction	تفریق
resolution	تفکیک

- طیفی

spectral-	
symmetry	تقارن
approximation	تقریب
division	تقسیم
divide	تقسیم کردن، بخش کردن، عاد کردن
iteration	تکرار
unimodular	تکمدولی
correspondence	تناظر
succession	توالی
generate	تولید کردن
empty	نهی
T-conductor	[T-هادی] هادی [T-]

commute	ابجا شدن
commutator	جا بجا گر
commutative	جا بجا یی
substitution	جا یگزینی
permutation	جا یگشت
algebra	جبر
algebraic	جبری
separation	جداسازی
term	جمله
solution	جواب

polynomial	چندجمله‌ای
annihilating-	- پوچساز
monic-	- تکین
characteristic-	- سرشت‌نما
multiplicity	چندگانگی
product	حاصل‌ضرب ، ضرب
elimination	حذف
motion	حرکت
rigid-	- صلب
real	حقیقی
assertion	حکم
resolution	حل
ring	حلقه
quotient	خارج قسمت
line	خط
real-	- حقیقی
linear	خطی
self adjoint	خودالحاق
idempotent	خودتوان
idempotence	خودتوانی
well defined	خوش‌تعریف
domain	دامنه
determinant	دترمینان
entry	درایه
nonzero-	- غیر‌صفر
leading--	-- مقدم
degree	درجه
quadratic	درجه دوم
interpolation	درون‌یابی
arbitrary	دلخواه

sequence	دنباله
binary	دو تایی
binomial	دوجمله‌ای
rotation	دوران
periodic	دوره‌ای
period	دوره تناوب
cyclic	دوری
dual	دوگان
double-	– مضاعف
duality	دوگانی
differential	دیفرانسیل
differentiation	– گیری [=مشتق گیری]

relation	رابطه
equivalence-	– هم‌ارزی
rank	رتبه
determinant-	– دترمینان
column-	– ستونی
row-	– سطری
trace	رد
of linear transformation	– تبدیل خطی
of Matrix-	– ماتریس
class	رده
classification	رده‌بندی
series	رشته
power-	– توانی
Formal power-	– توانی صوری
root	ریشه
latent-	– راکد، [=مقدار سرشت‌نما]

angle	زاویه
subdivision	ذیربخش
subspace	ذیرفضا

cyclic-	-ی دوری
maximal-	-ی ماکسیمال
submatrix	زیرماتریس
subset	زیرمجموعه
proper-	- سره
submodule	زیرمدول
structure	ساختار
consistant	سازگار
factor	سازه
column	ستون
character	سرشت
characteristic	سرشت‌نمایی
characterization	سرشت‌نمایی
proper	سره
row	سطر
direction	سو
directional	سویی
subscript	شاخص زیر
associativity	شرکت‌پذیری
countable	شمارش‌پذیر
countability	شمارش‌پذیری
inclusion	شمول
explicit	صریح
increasing	صعودی
zero	صفر
vanish	صفو شدن
multiplication	ضرب
product	ضرب، حاصل ضرب
tensor-	- تانسوری

cross-	- خارجی
inner-	- داخلی
wedge-	- گوهای
dot-	- نقطه‌ای
coefficient	ضریب
multiplier	[ضرب [= مضروب فيه]]
project	طرح
length	طول
spectrum	طیف
member	[عضو [= عنصر]]
converse	عكس
sign[= signum]	علامت
action	عمل
operation	عمل
adjoint-	- الحق
column-	- ستونی
row	- سطري
operator	عملگر
adjoint-	-الحقى
induced-	-القاء شده
projection-	- تصوير
idempotent-	- خودتوان
diagonalizable-	- قطرى شدنى
normal-	- نرمال
semi-simple-	- نیم ساده
sesqui-linear-	- یک و نیم خطی
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن
element	[عنصر [= عضو]]
identity-	- همانی

interval	فاصله [اعداد حقیقی]
distance	فاصله [دونقطه]
process	فرآیند
elimination-	حذف
odd	فرد
hypothesis	فرض
form	فرم
multilinear-	چندخطی
quadratic-	درجه دوم
bilinear-	دوخطی
symmetric-	متقارن
skew-symmetric-	متقارن کج
positive definite-	معین مثبت
non-degenerate-	ناتپهگون
Hermitian-	هرمیتی
formula	فرمول
space	فضا
vector-	ی برداری
null-	ی پوچ
entire-	ی تام
quotient-	ی خارج قسمت
dual-	ی دوگان
row-	ی طری
spatial	فضایی
theorem	قضیه
pole	قطب
polar	قطبی
diagonal	قطر
main-	- اصلی
diagonalizable	قطری شدنی
diagonalization	قطری کردن
unitary-	- یکانی

application	کاربرد
skew	کج
classical	کلاسیک
action	کنش
least common divisor	کوچکترین مضرب مشترک
minor	کهاد

collection	گردآورده
group	گروه
permutation-	- جایگشتی
pseudo-orthogonal-	- شبہ متعامد
orthogonal-	- متعامد
symmetric-	- متقارن
extension	گسترش
rational	گویا

lemma	لم
-------	----

matrix	ماتریس
diagonal-	- قطری
square-	- مربعی
singular-	- منفرد
companion-	- همدم
maximal	ماکسیمال
maximum	ماکسیمم
origin	مبدأ
base	مبنای [لگاریتم]
canonical	متعارف
orthogonal	متعامد
orthogonalization	متعامدسازی
orthonormal	متعامدیکه
transitive	متعددی
variable	متغیر

independent-	- مستقل
symmetric	متقارن
skew-	- کج
correspondent	متاظر
alternating	متناوب
finite	متناهی
parallelogram	متوالی
successive	متوازی الاضلاع
positive	مثبت
triangulation	مثلث بندی
triangular	مثلثی
triangulable	مثلثی شونده
admissible	مجاز
adjacent	مجاور
disjoint	مجزا
sum	مجموع
direct-	- مستقیم
set	مجموعه
orthogonal-	- متعامد
orthonormal-	- - يک
calculation	محاسبه
computation	محاسبه
evaluation	محاسبه [= تعیین مقدار]
axis	محور
axial	محوری
coordinate	مختص
complex	مختلط
module	مدول
free-	- آزاد
square	مربع
order	مرتبه
composed	مرکب
conjugate	مزدوج
linear-	- خطی

rectangle	مستطیل
rectangular	مستطیلی
independent	مستقل
linearly-	- خطی
direct	مستقیم
derivative	مشتق
differentiable	مشتق پذیر
differentiation	مشتق گیری، دیفرانسیل گیری
double	مضاعف
multiplicand	مضروب
multiplier	[ضرب] = مضروب
inverse	معکوس
invertible	معکوس پذیر
criterion	معیار
definite	معین
positive-	- مثبت
characteristic value	[مقدار سرشنما] = مقدار ویژه
proper value	مقدار سره
spectral value	مقدار طیفی
eigen value	مقدار ویژه
leading	مقدم
divident	مقسوم
divisor	مقسوم عليه
iterated	مکرر
complement	مکمل
orthogonal-	- متعامد
singular	منفرد
negative	منفی
parallel	موازی
generator	مولد
component	مؤلفه
imaginary	[انگاری] = موهومی
minimal	مینیمال
minimum	مینیمم

non-degenerate	ناتبھگون
non-empty	ناتھی
non-overlapping	نامتداخل
infinite	نامتناھی
inequality	نامساوی
non-singular	نامفرد
corollary	نتیجه
norm	نرم
normal	نرمال
normalizer	نرمال کننده
normed	نرم دار
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
relatively prime	نسبت بهم اول
signature	نشان
theory	نظریه
image	نگاره
map[= mapping]	نگاشت
exponent	نما
symbol	نماد
notation	نماد
notation-	– گذاری
representation	نمایش
representative	نمایشگر
index	نمایه
indices	نمایه‌ها
exponential	نمایی
graph	نمودار
dependence	وابستگی
linearly-	– خطی
dependent	وابسته
reverse	وارونه
reversible	وارونه‌پذیر

reverse

وارونه کردن

conductor

هادی

Hermitian

هرمیتی

kernel

هسته

equivalent

هم ارز

equivalence

هم ارزی

row-

- سطري

identity

همانی [= عصر همانی] ، اتحاد

codimension

هم بعد

codomain

همدامنه

companion

همدم

homomorphic

هم ریخت

homomorphism

هم ریختی

simultaneous

همزمان

cofactor

همسازه

convergent

همگرا

convergence

همگرایی

homogeneous

همگن

coset

هم مجموعه

congruent

همنهاشت

congruence

همنهاشتی

-modulo n

- به پیمانه n

field

هیأت

unitary

یکانی

one-one

یک به یک

unique

یکتا

isomorphic

یکریخت

isomorphism

یکریختی

unit

یکه

unity

یگانی

فهرست راهنمای

- اعمال سطری مقدماتی ۱۱، ۲۲۹
 افزوده، ماتریس ←
 اقلیدس، فضای -ی ←
 الحقیقی ←
 تبدیل خطی ۳۸۲
 کلاسیک ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
 ایدآل ۱۷۱
 اصلی ۱۷۱
 پرکننده ۲۶۳
- پالامثلی، ماتریس ←
 بخش پذیری چندجمله‌ایها ← تقسیم پذیری
 چندجمله‌ایها
 بر ۲۲۳
 برد ۹۵
 تابع ۴۹۷
 تبدیل خطی ۹۶
 بودار
 جداکننده ۳۱۷ (تمرین ۱۴)
 دوری ۲۹۷
 سرشت نما ۲۳۹
 سطری ۵۴
 شهای متعمد ۱، ۳۶۱، ۴۷۳
- بر ۲۲۳
 آزاد، مدول ←
 ابرفضا ۱۳۴، ۱۱۴
 اتحاد قطبی ۳۵۵، ۴۷۲
 اجتماع ۴۹۶
 استانده
 پایه ←
 ضرب داخلی ←
 استقلال خطی ۵۶، ۶۴
 اسکالر ۶
 چندجمله‌ای ←
 اشتراك ۴۹۶
 پوچساز ←
 ذیرفضاهای ۵۱
 اصل (موضوع) انتخاب ۵۰۹
 اعداد
 حقیقی ۶
 صحیح ۷
 مثبت ۷
 گویا ۷
 مختلط ۶
 اعمال ستونی مقدماتی ۳۸، ۳۳۴

- ترکیب خطی‌ها ←
 تـ پوچساز ←
 مختص ←
 بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۷۳
 بسته جبری، هیأت ←
 بسطهای لاپلاس ۲۳۳
 بعد ۶۱
 فضای برداری ۶۱
 متناهی ۵۷
 فرمول ۶۱
- پایا
 زیرفضای ←
 زیرمجموعه ←
 سازه‌های ←
 مجموع مستقیم ←
 پایه ۵۷
- استانده ۵۸
 برای مدول ۲۱۴
 دوگان ۲۱۶، ۱۳۱
 فضای برداری ۵۷
 مقامداد ۳۶۴
 یکه ۳۶۴
 مرتب ۶۸
 تغییر ←
 پرکننده → ایدآل پرکننده
 پوج توان
 تبدیل خطی ←
 عملگر ←
 ماتریس ←
 پوچساز
- اشترال ۱۴۵ (تمرین ۱۱)
 بردارها → T-پوچساز
 زیرفضاهای ۱۳۵
- زیرمجموعه ۱۳۴
 مجموع ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
 پوچی تبدیل خطی ۹۶
 پوشش ۴۹۷
 تابع ۴۹۷
 برد ←
 «خطی» ۱۸۵
 «خطی متناسب» ۲۲۰، ۱۸۸
 تحدید ۵۰۰
 چندجمله‌ایها ۴۴
 چندخطی ۲۱۶
 خطی ۹۱، ۱۲۹
 در مینان ۱۸۸
 معکوس پذیر ۴۹۹
 همانی ۴۹۸
 معکوس ←
 تابع خطی ۱۲۹
 تانسور ۲۱۶
 ضربی ←
 تبدیل
 خارج قسمت ۵۰۶
 لورنتز ۴۰۲ (تمرین ۱۵)، ۴۸۹
 مشق گیری ۹۲
 صفر ۹۱
 یکانی ۴۵۷
 تبدیلهای خطی ۱۰۳، ۹۱
 الحاقی ←
 برد ←
 پوچی ←
 پوج توان ۲۸۹
 خارج قسمت ۵۰۶
 خودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
 قطعی شدنی ۲۴۱

ترانهاده	کلی ۴۰۱ (تمرین ۷)
—تبديل خطی ۱۴۷	متعامد ۳۹۳
—ماتریس ۱۴۹	مشتہت ۴۲۵
—مزدوج ماتریس ۳۵۳	مشتی شونده ۴۰۸، ۲۶۴
ترکیب	معکوس پذیر ۱۰۶
—توا بع ۴۹۸	نامنفرد ۱۰۷
—خطی بردارها ۴۵	نامنفی → عملگر نامنفی
—خطی معادلات ۹	نرمال ۴۰۳
تزویجی ۳۵۹ (تمرین ۱۲)	نیم ساده → عملگر نیم ساده
تشابه ماتریسها ۱۲۵	یکانی ۳۹۱
تصویر	تجزیه دوری ←
فضای برداری ۲۷۵	تجزیه قطبی ←
—متعامد ۳۷۰	ترانهاده ←
تغییر پایه ۱۲۱	جزء قطری شدنی ←
تفکیک	چندجمله‌ایهای مینیمال ←
—طیفی ۴۴۴، ۴۳۳	دترمینان ←
—همانی ۴۴۴، ۴۳۴	رتیه ←
تقریب ۳۶۸	رد ←
تقسیم پذیری چندجمله‌ایها ۱۶۸	ضرب ←
T-پوچسار ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۸۹	ماتریس ←
T-مجاز ۳۰۳	در پایه متعامد یکه ←
T-هادی ۳۰۴، ۲۶۳	تجزیه اولیه چندجمله‌ایها ۱۷۸
جابجا بی	چندجمله‌ایها به سازه‌های اول ۱۷۷
جرب ←	دوری تبدیلهای خطی ۳۰۴
حلقه ←	قطبی تبدیل خطی ۴۲۱
گروه ←	قضیه اولیه ←
جایگشتها ۱۹۷	تحددید
ی زوج ۱۹۸	تابع ۵۰۰
ی فرد ۱۹۸	عملگری ←
ضرب ←	تحویل شده
علامت ←	سطری ۱۵
جب ۱۵۳	بلکانی ۱۸، ۷۶
جا بجا بی ۱۵۴	تحویل ناپذیر، چندجمله‌ای ←

- خارج قسمت ۱۵۳
 تبدیلهای خطی ←
 فضاهای برداری ۵۵۶
 عملگر ←
 خارجی، ضرب ←
 خطی، تابع ←
 خودالحقاق
 تبدیلهای خطی ←
 جبر ←
 عملگر ←
 فرم ←
 ماتریس ←
 خودتوان، عملگر ←
 دترمینان ۲۳۵-۱۸۳
 تابع ←
 تبدیل خطی ۲۲۴
 رتبه ←
 درایه ماتریس ۱۱
 درجه
 چندجمله‌ایها ۱۵۶
 فرم چندخطی ۲۱۶
 فرم دوم ←
 درون یا بی ۱۶۱
 دستگاه معادلات
 خطی، ۷
 همارز ۹
 همگن ۸
 دلتای کرونکر ۱۵
 دنباله بردارها ۶۴
 دوخطی، فرم ←
 دوران ۷۲، ۴۰۰ (تمرین ۴)
 دوری
 بردار ←
- خطی ۴۴۶
 خودالحقاق ۴۴۶
 رشته‌های توانی صوری ۱۵۵
 جذر ۴۳۹
 جزء قطری شدنی تبدیل خطی ۲۸۹
 چندجمله‌ایها
 تابع ←
 تجزیه اولیه ←
 تجزیه به‌سازهای اول ←
 تقسیم پذیری ←
 اسکالار ۱۵۶
 اول ۱۷۶
 تحويل پذیر ۱۷۶
 تحويل ناپذیر ۱۷۶
 تکین ۱۵۶
 سرشت نما ۲۴۰
 مینیمال تبدیلهای خطی ۲۵۰
 ماتریسها ۲۵۰
 درجه ←
 ریشه‌های ←
 صفرهای ←
 ضرايب ←
 مشتق ←
 چندخطی
 تابع ←
 فرم ←
- حاصلضرب ← ضرب
 حرکت صلب ۴۰۲ (تمرین ۱۴)
 حقیقی، اعداد ←
 حلقة ۱۸۳
 سجا بجا ۱۸۳، ۱۸۴
 گراسمان ۲۳۵

زیرفضایی	←	زیرفضایی	←
قضیه تجزیه	—	قضیه تجزیه	—
دوگان	—	دوگان	—
پایه	←	پایه	←
فضایی	←	فضایی	←
مدول	←	مدول	←
رابطه	۵۰۱	رابطه	۵۰۱
هم ارزی	۵۰۲	هم ارزی	۵۰۲
رتبه	—	رتبه	—
تبديل خطی	۹۶	تبديل خطی	۹۶
دترمینان	۲۱۳	دترمینان	۲۱۳ (تمرین ۹)
ستونی	۹۷	ستونی	۹۷ (تمرین ۹)
سطری	۱۵۰	سطری	۱۵۰
فرم دوخطی	۴۶۸	فرم دوخطی	۴۶۸
ماتریس	۱۵۰	ماتریس	۱۵۰
مدول	۲۱۵	مدول	۲۱۵
رد	—	رد	—
تبديل خطی	۱۴۱	تبديل خطی	۱۴۱ (تمرین ۱۵)
ماتریس	۱۳۰	ماتریس	۱۳۰
رشته	—	رشته	—
توانی	۱۵۵	توانی	۱۵۵
توانی صوری	۱۵۵	توانی صوری	۱۵۵
ریشه	—	ریشه	—
چندجمله‌ایها	۱۶۸	چندجمله‌ایها	۱۶۸
خانواده‌ای از عملگرهای	۴۴۲	خانواده‌ای از عملگرهای	۴۴۲
دوم	← جذر	دوم	← جذر
راکد	← مقدار سرشت نما	راکد	← مقدار سرشت نما
زیرفضاهای	۴۸	زیرفضاهای	۴۸
پوچساز	—	پوچساز	—
ی پایا	۲۶۵، ۲۷۰	ی پایا	۲۶۵، ۲۷۰
ی پدیدآمده	۵۱	ی پدیدآمده	۵۱
ی مجاز	۳۰۳	ی مجاز	۳۰۳

- عضو ← عنصر ← شبه متعامد، گروه ←
 علامت جایگشتها ۱۹۸ ← شرکت پذیری ۵ ←
 عمل ← اعمال ← جمع برداری ۴۲ ←
 عملگر ۱۰۳ ← ضرب ماتریسها ۱۲۰، ۲۸ ←
- صرف ← تبدیل ← زیرفضاهای ← های چندجمله‌ایها ۱۶۸ ←
 خود توان ← تصویر فضاهای برداری ← ماتریس ←
- ضرایب چندجمله‌ایها، ۱۵۶ ←
 ضرب، حاصل ضرب ۲۱۹ ←
 تانسوری ۴۰۳ ← تبدیلهای خطی ۱۰۳ ←
 نامنفی، ۴۲۵ ← جایگشتها ۲۰۰ ←
 نامنفی ۴۳۹ ← خارجی ۲۳۰، ۲۲۸ ←
 نامنفی ۴۰۳ ← داخلی ۳۵۱ ←
 نیم ساده ۳۴۳ ← استاندۀ ۳۵۳، ۳۵۲ ←
 بکانی ۳۹۱ ← ضرب گوهای ← ضرب داخلی ←
 مجموع مستقیم ها ← ماتریسها ۱۱۹، ۲۵ ←
 عنصر مجموعه ۴۹۶ ← شرکت پذیری ←
 عنصر همانی ۱۵۴ ← نقطه‌ای ← ضرب داخلی ←
 عنصر همانی ۱۸۴ ← فرم درجه دوم ← فرم درجه دوم ←
 فاصله ۳۷۴ (ترین) ۴ ← فضای داخلی ←
 فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت ۳۶۳ ← ماتریس داخلي ←
 فرد، جایگشتها ← ماتریس داخلي ←
- فرم ← فرم درجه دوم ← فرم درجه دوم ←
 خطی ۲۱۶ ← فضای داخلي ←
 چندخطی ۲۱۶ ← ماتریس داخلي ←
 خودالحاق ۴۱۷ ← طیف، ۴۳۳ ←
 درجه دوم ۴۷۲، ۳۵۵ ← طیفی، ۴۳۳ ←
 دوخطی ۴۶۰، ۴۱۴، ۲۱۷ ← تکمیلک ←
 تابهگون ۴۶۹ ← قضیه ←
 ڈردن ماتریس، ۳۲۲ ← نظریه ←
 گویای ماتریسها ۳۱۱ ← عاد کردن ۱۶۸ ←
 متناوب ۴۲۰ ←
 مشیت ۴۲۳، ۴۲۰ ←

- ناتبهگون ۴۱۹ (تمرین ۶)
نامنفرد → فرم ناتبهگون
- نامنفی ۴۲۰
نرمال، ۳۳۶
- هر میتی → فرم خودالحاق ۳۴۰
- یک و نیم خطی ۴۱۴
ماتریس →
- فرم دونخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
رتبه →
- مقارن ۴۷۱
مقارن کج ۴۸۲
- معن مثبت ۴۷۹
ناتبهگون ۴۶۹
- ناتبهگون → فرم دونخطی ناتبهگون
قطری سازی →
اگروه حافظ →
ماتریس →
نشان →
- فرمول
بعد، ۶۳
تیلور، ۱۶۹
درون یابی لاغرانژ ۱۶۲
- فضاها
سی F^n
سی $F^{m \times n}$
سی اقلیدسی ۳۶۰
سی برداری ۴۱
سی پوچ ۹۶
سی جواب ۵۵۰
سی خارج قسمت ۵۰۵
سی دوگان ۱۳۱
سی سرشت نما ۲۳۹
سی سطیری ۵۴
سی ضرب داخلی ۳۵۹
- ی یکانی ۳۶۰
فضاهای برداری
بعد ←
پایه ←
تصویر ←
خارج قسمت ←
زیرفضاهای ←
ن تایها ۴۱
— با بعد متناهی ۴۲
— توابع چندجمله‌ای ۴۴
— جواب دستگاه معادلات خطی ۵۰
یکریختی →
- قاعدۀ کرامر ۲۱۵
قانون متوازی‌الاضلاع ۳۵۸ (تمرین ۹)
قضیۀ
اساسی جبر ۱۸۰
تجزیه اولینه ۲۸۶
تجزیه دوری ۳۰۴
طبیعی ۴۳۳
کیلی-همیلتون ۳۰۹، ۲۵۴
محور اصلی ۴۱۸
- قطبی
تجزیه-تبديل خطی ←
قطری شدنی
جزء-تبديل خطی ←
عملگر ←
قطری کردن ۲۸۱، ۲۶۹، ۲۶۹
فرم دونخطی ۴۷۳
فرم دونخطی مقارن ۴۷۴
فرم هر میتی ۴۱۸
ماتریس (عملگر) خودالحاقی ۴۰۹
ماتریس (عملگر) نرمال ۴۰۹
همزمان ۲۶۹

- یکانی ۴۰۹ ←
 کرونکر، دلتای ←
 کلاسیک، الحاقی ←
 کهادهای اصلی ماتریس ۴۲۲ ←
- گروه ۱۱۰ ←
 جا بجایی ۱۱۰ ←
 حافظ فرم ۴۸۷ ←
 خطی عمومی ۳۹۷ ←
 شبیه متعامد ۴۸۹ ←
 لورنتز ۴۸۹ ←
 متعامد ۴۸۸ ←
 مقارن ۲۰۰ ←
 گویا ←
 اعداد ←
 فرمی ماتریسها ←
- لورنتز ←
 گروه ←
 تبدیل ←
 ماتریس ۱۰ ←
- ترانهاده ←
 ترانهاده مزدوج ←
 تشابه‌ها ←
 چندجمله‌ایهای مینیمال‌ها ←
 رتبه ←
 رتبه ستونی ←
 رتبه سط्रی ←
 رد ←
 سازه‌های پایایی ←
 ضرب‌ها ←
 فرم ژوردان ←
- فرم گویای ←
 کهادهای اصلی ←
 افزوده ۲۱ ←
 الحاقی کلاسیک ۱۹۶ (تمرین ۳)، ۲۰۸ ←
 بالامثلی ۳۹ (تمرین ۹) ←
 پوج توان ۳۱۹ ←
 تبدیلهای خطی ۱۱۷، ۱۱۶ ←
 در پایه متعامد یکه ۳۸۰ ←
 تحویل شده سطري ۱۵ ←
 ۱۸، ۷۶ ←
 خودالحاقی ← ماتریس هرمیتی ←
 صفر ۱۹ ←
 ضرایب ۱۱ ←
 ضرب داخلی ۳۵۶ ←
 فرم یک و نیم خطی ۴۱۶ ←
 فرم دوخطی ۴۶۴ ←
 متعامد ۲۱۲ (تمرین ۴)، ۴۸۸ ←
 مقارن ۲۷۵ ←
 مقارن کج ۲۱۲ (تمرین ۳)، ۴۷۵ ←
 مثبت ۴۲۵ ←
 مثالی ۲۰۲ (تمرین ۷) ←
 شونده ۴۰۸، ۲۶۴ ←
 مختصات ۶۹ ←
 معکوس پذیر ۳۲، ۲۰۹ ←
 مقدماتی ۳۳۰، ۲۹ ←
 ژورдан ۲۲۰ ←
 نرمال ۴۰۸ ←
 وندرموند ۱۶۳ ←
 هرمیتی ۴۰۶، ۵۰ ←
 همانی ۱۵ ←
 همدم ۳۰۰ ←
 همسازه‌های ←
 یکانی ۲۱۲ (تمرین ۵)، ۳۹۲ ←
 مجموع مستقیم‌ها ←

معکوس	→	۲۷۸	پایا
متعماد	→	۲۷۹	عمگرها
بردارهای	→	۲۷۹	ماتریسها
تبدیل خطی	→	۴۹۶	مجموعه
تصویر	→	۳۶۱	عنصر
گروه	→	۳۶۱	نهی
ماتریس	→	۳۶۱	متعماد
مجموعه	→	۳۶۱	یکه
مکمل	→	۴۹۶	مختصات
هم ارزی	→	۴۹۶	بردار
متعمادسازی	→	۳۶۳	ماتریس
متعماد یکه	→	۳۶۳	مختلط، اعداد
پایه	→	۲۱۴	مدول
مجموعه	→	۲۱۴	پایه برای
متقارن	→	۲۱۴	رتیه
فرم دوخطی	→	۲۱۵	آزاد
گروه	→	۲۱۵	به طور متناهی تولید شده
ماتریس	→	۲۱۶	دوگان
متقارن کج	→	۲۱۶	مزدوج
فرم دوخطی	→	۲۱۶	ترانهاده
ماتریس	→	۲۱۶	مستقل
متناوب، فرم	→	۲۱۶	زیرفضاهای
مثبت	→	۶۴	خطی
اعداد صحیح	→	۱۶۸	مشتق چندجمله‌ایها
عملگر	→	۱۶۸	مضرب بودن
فرم	→	۷	معادلات خطی
ماتریس	→	۲۲۴	معادلات دیفرانسیل (مثال ۸)
مثلث‌بندی	→	۲۲۴	(مثال ۱۴)
همزمان	→	۲۶۹	معکوس
مثلثی، ماتریس	→	۴۹۹	تابع
مثلثی‌شونده، ماتریس	→	۳۲	چپ
مجاز، زیرفضاهای	→	۳۲	دوطرفه
مجموع زیرفضاهای	→	۳۲	راست
مجموع مستقیم	→	۲۰۹	ماتریس

- معکوس پذیر ←
 تابع ←
 تبدیل خطی ←
 ماتریس ←
 معین مثبت ۴۷۲
 مقدار سرشت نما ۲۳۹، ۲۳۸
 مقدار طیفی ← مقدار سرشت نما
 مقدار ویژه ← مقدار سرشت نما
 مقدماتی ←
 اعمال ستونی ←
 اعمال سطري ←
 ماتریس ←
 ژورдан ←
 مکمل ۳۰۳
 متعامد ۳۶۹
 مینیمال، چندجمله‌ایهای ←
 ناتبھگون ←
 فرم دوخطی ←
 فرم ←
 نامساوی ←
 بدل ۳۷۲
 کوشی - شوارتز ۳۶۱
 نامنفرد ←
 تبدیل خطی ←
 فرم ← فرم ناتبھگون
 نامنفی ←
 عملگر ←
 فرم ←
 نرم ۳۵۵
 نرمال ←
 عملگر ←
 فرم ←
 ماتریس ←
- نشان فرم دوخطی متقارن ۴۷۷
 نظریه طیفی ۴۳۳
 نیمساده، عملگر ←
 وابستگی خطی ۶۴، ۵۶
 وجود تابع دترمینان ۱۹۱
 هادی ۳۰۴، ۲۶۴، ۲۶۳
 هرمیتی ← خودالحاق
 همارزی ←
 رابطه ←
 ستونی ۳۳۴
 سطري ۳۳۵، ۷۸، ۱۲
 متعامد ماتریسها ۳۹۸
 - یکانی تبدیلهای خطی ۴۵۷
 - یکانی ماتریسها ۳۹۸
 همانی ←
 تابع ←
 تفکیک ←
 عنصر ←
 ماتریس ←
 هدم، ماتریس ←
 همسازه‌های ماتریس ۲۰۷
 هممجموعه ۵۰۵، ۲۳۵
 همنهشتی ۵۰۵، ۵۰۲، ۱۸۱
 به‌پیمانه ۵۰۵
 هیأت ۶
 زیر ←
 سرشت نمایی ←
 بسته جبری ۱۸۰
 یکنایی تابع دترمینان ۱۹۹
 یکریختی ←
 فضاهای برداری ۱۱۲
 فضاهای ضرب داخلی ۳۸۸

یکانی	←	قطری کردن
	←	ماتریس
	←	هم ارزی - تبدیلهای خطی
	←	هم ارزی - ماتریسها
تبدیل	←	
تبدیلهای خطی	←	
عملگر	←	
فضای	←	

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir