



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...و

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$1, 2, 3, \dots$$

وسیله سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعه مشخص اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسه وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسه دو کمیت، شیی همچس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازه هر شیء مضرب صحیحی از اندازه آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط L_1 و L_2 نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی L که ۵ بار در L_1 و ۳ بار در L_2 می‌گذد. در این صورت نسبت طول L به طول L_1 را به $\frac{5}{3}$ نمایش می‌دهد. نسبت‌های $\frac{m}{n}$ که در آن m و n عدد طبیعی باشد امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس^۱ حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریه او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی L به عوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، یک عدد طبیعی باشد، و پاره‌خطی که L دقیقاً n بار در آن می‌گذد، نسبت طول L' به طول L برابر $\frac{n}{1}$ است. از آنجا که طول L' را می‌توان نتیجه n بار شمارش طول L در نظر گرفت، تمايزی میان $\frac{n}{1}$ و n قابل نمی‌شویم و از این رو مجموعه اعداد گویا را گسترشی از مجموعه اعداد طبیعی تلقی می‌کیم.

Eudoxus^۱

به طور کلی دو کمیت از یک جس را همسه‌گ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جس (به عوان "واحد" یا "سنه") وجود داشته باشد که اندازه هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازه سنه باشد. در شکل ۱، طول پاره خط‌های L_1 و L_2 همسه‌گ هستند و می‌توان از طول L به عوان سنه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسه هر دو کمیت هم‌جس، واحدی به اندازه کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند؛ یا به عبارتی دیگر، به نظر می‌آید که هر دو کمیت هم‌جس، همسه‌گ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسئله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می‌کیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت هم‌جس، همسه‌گ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال ممکن است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس^۲ کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی مشاء و عصر ساخت همه هستند و این کشف هیپاسوس که دو پاره خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد ببیناد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوء دهم کتاب اصول اقليدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسه‌گ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را $\sqrt{2}$ بگیریم، طول قطر آن طبق قضیه فیثاغورس برابر $\sqrt{2}$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{2}$ می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقليدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{2}$ ، برهان خلف است. فرض می‌کیم $\frac{M}{N} = \sqrt{2}$ که در آن M و N عدد صحیح هستند. کسر $\frac{M}{N}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کیم تا به صورت $\frac{m}{n}$ در آید؛ پس $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ در وضعیتی است که m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجدد کردن دو طرف داریم $m^2 = 2n^2$ ، پس m^2 زوج است پس $m = 2k$ و نتیجه می‌گیریم که $2k^2 = 2n^2$. باز به ترتیب بالا باید خود زوج باشد، $2l = n$. حال m و n هر دو زوج هستند؛ یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تاقض نشان می‌دهد که

Hippasus^۲

بیان $\sqrt{2}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست، یعنی $\sqrt{2}$ گویا نیست، و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسه‌گ نیستند.

در واقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر n خود مجدد را کامل نباشد \sqrt{n} گویا نیست. در قطعه ۱۴۷ کتاب تهاتوس افلاطون^۳ (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تودروس این مطلب را تا $n = 17$ به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از ماظره‌ک دگان از جهل آته‌ها نسبت به اعداد ابراز شرم‌سازی کرد و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمس‌گ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کیم. علامت ویره فیشاغورسیان موسوم به پتاگرام یک پنج‌ضلعی منتظم بود. در یک چهار پنج‌ضلعی با رسم قطرها پنج‌ضلعی منتظم دیگری در داخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسه نسبت طول قطر پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید a_1 و a_2 دو کمیت هم‌جنس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره خط) و $a_1 < a_2$. اگر a_1 دقیقاً n_1 بار در a_2 بگنجد، n_1 : عدد طبیعی، آنگاه a_1 و a_2 همسه‌گ هستند و داریم $n_1 a_1 = n_2 a_2$. در هر صورت n_1 را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که از $n_2 a_2$ تجاوز نکند و داریم

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2 \quad , \quad 0 \leq a_2 < a_1 \quad (1)$$

مالحظه کردیم که اگر $a_1, a_2 = 0$ خود سه‌گه ماسب برای مقایسه a_0 و a_1 است. حال فرض کنید $a_2 \neq 0$. در اینجا a_2 را به حداقل دفعات ممکن در a_1 می‌گنجاییم یعنی بزرگترین عدد طبیعی n_2 را انتخاب می‌کیم که $n_2 a_2 \leq a_1$. پس:

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 \quad , \quad 0 \leq a_3 < a_2 \quad (2)$$

اگر $a_3 = 0$ ، آنگاه a_1 مضرب صحیحی از a_2 است. از (1) می‌بینیم که در این صورت a_0 نیز مضرب صحیحی از a_2 خواهد شد و بدین ترتیب a_2 سه‌گه ماسب برای سه‌جشن a_0 و a_1 است. اگر $a_3 \neq 0$

^۳ دوره آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فراید را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 \quad , \quad 0 \leq a_4 < a_3 \quad (3)$$

که در آن n_3 یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a_4 = 0$ با دنبال کردن (۳)، (۲) و (۱) می‌بینیم که سکه‌ای برای سنجش a_1 و a_2 است و گزنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کیم:

(۱-۱) گزاره. a_1 و a_2 همسه‌گ هستند اگر و تنها اگر فراید بالا در تعدادی متأهی گام به باقیمانده صفر برسد، یعنی عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $n_k a_{k-1} = n_k a_k$: عدد طبیعی. در این صورت سکه‌ای برای سنجش a_1 و a_2 است.

اثبات. اگر فراید فوق در k گام به صفر برسد داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \quad : \text{عدد طبیعی } n_1 \\ a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \quad : \text{عدد طبیعی } n_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} \quad : \text{عدد طبیعی } n_{k-1} \\ a_{k-1} = n_k a_k & \quad : \text{عدد طبیعی } n_k \end{array} \right. \quad (4)$$

رابطه آخر نشان می‌دهد a_{k-1} مضرب صحیحی از a_k است، پس از رابطه یکی به آخر a_{k-2} مضربی از a_k است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطه اول نتیجه می‌شود که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از a_k هستند، یعنی سکه‌ای برای سنجش a_1 و a_2 است. بالعکس فرض کیم a_0 و a_1 هر دو مضرب همسه‌گ باشند، در این صورت عددی u به عوان سکه وجود دارد که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از u هستند. از رابطه اول بالا نتیجه می‌شود که a_2 نیز مضربی صحیح از u است، سپس از رابطه بعد a_3 مضربی صحیح از u است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که مضرب صحیح u هستند و رابطه بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد، نتیجه می‌گیریم که $a_{p+1} = a_{p-1} - n_p a_p$ مضرب صحیحی از u است. حال اگر این فراید به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

که در اینجا همه a_j ‌ها مضرب صحیحی از عدد مثبت u می‌باشد. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد u و a_1 فقط تعدادی مதاهی مضرب صحیح u می‌گجد. این امر نشان می‌دهد که اگر a_0 و a_1 همسنگ باشد، فراید بالا بالاخره به باقیماندهٔ صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به دست آمده سنگه لازم است. \square

با اتكاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فراید فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیماندهٔ صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج ضلعی منتظم مشاهده می‌کیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC \parallel ED$, $BE \parallel CD$, با براین مثلث‌های ABC و $EB'D$ به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج ضلعی را a_0 و طول ضلع آن را a_1 می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج ضلعی باز هستند (108°) داریم $a_0 > a_1$. چون چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است داریم

$$EB' = a_0 - a_1 \quad \text{پس}$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

را به a_2 نمایش می‌دهیم. داریم $EB' < a_2$ زیرا که در مثلث $EB'D$ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال $a_0 - a_1$ را به a_3 نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کیم که a_3 برابر طول پنج ضلعی منتظم کوچک است زیرا که طول AB' برابر AC' و طول AC' برابر a_2 است. از طرفی دیگر طول قطر

برابر است زیرا که اگر از A' به D' و C' وصل کیم متوازی الاضلاعی ایجاد می‌شود هر دو موازی BC هستند؛ $A'C'$ و AC هر دو موازی (DE) با براین $a_2 < a_3 < a_4$ و داریم:

$$a_1 = 1 \cdot a_2 + a_3 , \quad 0 < a_3 < a_2$$

حال اگر پنج ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'$ به ضلع a_3 و قطر a_2 را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول قطر به ترتیب a_1 و a_4 تکرار می‌شود، یعنی خواهیم داشت

$$a_2 = 1 \cdot a_3 + a_4 , \quad 0 < a_4 < a_3$$

$$a_3 = 1 \cdot a_4 + a_5 , \quad 0 < a_5 < a_4$$

به طور کلی اگر a_i ها تا a_n تعریف شده باشد، با تعریف $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$ ، و با توجه به اینکه همواره با رسم کردن قطرهای پنج ضلعی منتظم یک پنج ضلعی منتظم دیگر در درون پنج ضلعی پدید می‌آید خواهیم داشت:

$$a_{n-1} = 1 \cdot a_n + a_{n+1} , \quad 0 < a_{n+1} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱-۱ هستیم و در شقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس a_1 همسگ نیستد، یا به عبارت دیگر $\frac{a_1}{a}$ ناگوی است!

تمرین ۱. نشان دهید $\frac{1+\sqrt{5}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شاخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تماض اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان دهید این مستطیل‌ها، و فقط این مستطیل‌ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی n مجدور کامل نباشد، \sqrt{n} ناگوی است. (راهنمایی: از تجزیه اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کید.)

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متناول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبایی دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق (۱-۱) در k گام به سه‌گاه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شد:

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}} \quad (5)$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متمایز (یا مختومه) می‌نامند. توجه کید که طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= n_1 + \frac{a_2}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} \end{aligned}$$

و با ادامه استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (6)$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمره اعداد، بلکه به مظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایه ۱۰ یا هر پایه دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کید می‌خواهیم نسبت $\frac{m}{n}$ و n دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری ب‌ویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر m بر n بخش پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همه ارقام m ، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از n کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل $c_0/c_1c_2\dots c_k$ رسیده‌ایم به معنای

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد $1, 2, \dots, n$ باشد،
با براین قطعاً با n بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به
صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهد شد. با براین اگر نمایش اعشاری $\frac{m}{n}$ مختومه نشود،
ارقام پس از اعشار مالاً به صورت تماوی تکرار خواهد شد. با براین هر کسر اعشاری که مالاً تماوی
نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلًا:

$$0/10100100001\dots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تماوب در آن وجود
ندارد برابر هیچ کسر $\frac{m}{n}$ نیست. تهها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک «عدد»
است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_0/c_1c_2c_3\dots$$

که در آن c_i یک عدد صحیح نامفی و بقیه c_i ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک «عدد» تلقی
کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم «عدد» به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه
آینده انجام خواهد شد.

اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر c_i یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر $c_i = i$ ، یک رقم، یعنی عددی از مجموعه $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آیا می‌توان عبارت:

$$c_0/c_1c_2c_3\dots \quad (1)$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می‌دانیم و فعلاً همین جواب را مبننا قرار می‌دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول‌های دو پاره خط است. بالاخص اگر پاره خطی را به عنوان واحد انتخاب و ثابت کنیم، طول‌های همه پاره خط‌های ممکن، مجموعه اعداد (مثبت) را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اگر نیم خطی H انتخاب کنیم، مبدأ آن را 0 بنامیم و نقطه‌ای دیگر را به عنوان نقطهٔ واحد، 1 ، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم خط و اعداد (مثبت) منظور می‌شود. بدین ترتیب که هر نقطهٔ c روی این نیم خط، پاره خطی از 0 تا c تعریف می‌کند (شکل ۱) که طول این پاره خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می‌گردد. بدین ترتیب فرض می‌کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه‌ای نیست، برداشت همه انسان‌ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخه علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قابل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت $c_0/c_1 \dots c_n$ را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_0/c_1 \dots c_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n}$$

یک n خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازه C_n باشد زیرا که افزودن ارقام c_{n+1}, c_{n+2}, \dots به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداقل چقدر بزرگتر از C_n می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از $\frac{1}{10^n}$ بزرگتر از C_n باشد زیرا که در آن صورت می‌باشد رسم n ام پس از اعشار از c_n بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \leq c_0/c_1 c_2 c_3 \dots \leq C_n + \frac{1}{10^n} \quad (2)$$

رابطه (۲) باید به ازای هر n برقرار باشد. بدین ترتیب $c_0/c_1 c_2 c_3 \dots$ در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به ازای هر n صدق می‌کند، $n = 0, 1, 2, \dots$

(۱-۲) لم. حداقل یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به ازای هر n صدق کند.

اثبات. اگر دو عدد c و c' وجود داشته باشند که به ازای هر n در بازه $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرند، فاصله این دو عدد از هر $\frac{1}{10^n}$ کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن n ، $\frac{1}{10^n}$ را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله c و c' باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس $c = c'$. \square

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متناسب چیست. چنین عددی باید در همه بازه‌های

$$[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$$

$$C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \dots$$

$$C_0 + 1 \geq C_1 + \frac{1}{10} \geq C_2 + \frac{1}{10^2} \geq \dots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\dots \subset [C_2, C_2 + \frac{1}{10^2}] \subset [C_1, C_1 + \frac{1}{10}] \subset [C_0, C_0 + 1]$$

هر بازه طولی $\frac{1}{10}$ بازهٔ سمت راست خود دارد و عدد فرضی $c_0/c_1c_2\dots$ باید در همهٔ این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم خط H حکم می‌کند که این دنبالهٔ انقباضی بازه‌های پسته باید به یک تک نقطه روی نیم خط H متقارب شود که باید به ناچار همان نقطهٔ $c_0/c_1c_2\dots$ باشد که در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزیی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

(۲-۲) اصل تمامیت (صورت اول). عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همهٔ نامساوی‌های (2) ، به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطهٔ روی H نمایشی به شکل $c_0/c_1c_2c_3\dots$ ، مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت، $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد، طبق لم ۱-۱) است. همچنان که در جلسهٔ قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی $c_n = 0$ از یک n به بعد، و آنهایی که ملاً متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای m/n عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکتهٔ زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجهٔ مستقیم اصل تمامیت ول م ۱-۲ است:

مثال. می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$1/999\dots$$

پس در اینجا $c_0 = 1$ و $c_i = 9$ به ازای هر $i \geq 1$. طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همهٔ نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1/\underbrace{9\dots 9}_n \leq 1/999\dots \leq 1/\underbrace{9\dots 9}_n + \frac{1}{10^n} = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به ازای هر n صدق می‌کند. بنابراین طبق ۲-۱ داریم:

$$1/999\dots = 2$$

تمرین. فرض کنید $9 < c_n = \dots c_1 c_0$ به ازای هر $i > n$. به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_0/c_1 \dots c_n 999\dots$$

برابر $c_0/c_1 \dots c_{n-1}(c_n + 1)$ است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو H ، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر c عضوی از H باشد، دو عدد صحیح متولی $c_0 + 1$ و c_0 می‌توان یافت که $c_0 + 1 \leq c < c_0 + 1$. اگر بازه $[c_0, c_0 + 1]$ را به صورت زیر به 10 زیربازهٔ مجزا تجزیه

کنیم:

$$[c_0, c_0 + \frac{1}{10}] \cup [c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}] \cup \dots \cup [c_0 + \frac{9}{10}, c_0 + 1]$$

عدد c در یک و تنها یکی از این 10 بازه قرار دارد، مثلاً c عضو $\frac{c_1+1}{10}$ بازه است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$$

به همین ترتیب بازه $\frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1+1}{10}$ را به 10 بازه به طول $\frac{1}{100}$ تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی c_2 وجود دارد به طوری که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{1}{100}$$

با ادامه این عمل، اگر در گامی، c دقیقاً برابر نقطهٔ انتهایی سمت چپ شود، مثلاً $c = c_0/c_1 \dots c_k$. در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} &\leq c < c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &\leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

عددی که در هر همه این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایش دادیم.

معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲-۲) به مبنای عددنویسی ۱۰ را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم خط H است. نقطه آغازی این نیم خط را $\bar{0}$ نامیدیم و امتداد نیم خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطه ترتیبی $a < b$ از نظر هندسی بدین معنی است که b در طرف راست a قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر a و b در H باشند، $[a, b] = \{x \in H \mid a \leq x \leq b\}$ و به همین ترتیب $[a, b)$ و $(a, b]$ تعریف می‌شوند. اگر S زیرمجموعه‌ای از H باشد، عدد M را یک کران بالا برای S می‌نامیم در صورتی که:

$$s \leq M \text{ برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های S دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه $[a, b]$ و $[a, b)$ ، هر عدد $M \geq b$ که M یک کران بالایی برای مجموعه است، ولی مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots\}$ کران بالایی ندارد. عدد ∞ را کوچکترین کران بالایی برای مجموعه S می‌نامیم در صورتی که:

الف) یک کران بالا برای S باشد.

ب) به ازای هر کران بالای M برای مجموعه S داشته باشیم $M \leq M_0$.

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر M_1 و M_0 هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعه S باشند باید داشته باشیم $M_1 \leq M_0$ و $M_0 \leq M_1$ ، پس $M_1 = M_0$.

(۲-۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از H کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعه S ممکن است عضو S باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعه $[1, 2]$ و $[2, 1]$ ، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو $[1, 2]$ می‌باشد ولی عضو $[2, 1]$ نیست.

اکنون نشان می‌دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را پیذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می‌دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می‌دهد. بدین ترتیب S را مجموعه‌ای ناتهی از H می‌گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می‌کنیم. هر عضو S را به صورت اعشاری نمایش می‌دهیم. چون S کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش‌های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی n ، S عضوی بزرگتر از n خواهد داشت و S دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای S را c_0 می‌نامیم. حال S_1 را زیرمجموعه S می‌گیریم که از اعضای با جزء صحیح c_0 تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای S_1 نگاه می‌کنیم. این رقم باید یکی از اعداد $0, 1, \dots, 9$ باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای S_1 را c_1 می‌نامیم. حال S_2 را زیرمجموعه S_1 می‌گیریم که اعضاً با c_0/c_1 شروع می‌شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر S_2 نگاه می‌کنیم. بزرگترین رقم موجود را c_2 می‌نامیم و عمل بالا را ادامه می‌دهیم. حال $\dots = c_0/c_1c_2c_3\dots$ طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت c مشخص است که:

$$\text{برای هر } n = 0, 1, 2, \dots \quad c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

ادعا می‌کنیم c کوچکترین کران بالایی برای مجموعه S است. اینکه c کران بالایی برای S است از نامساوی‌های سمت چپ نتیجه می‌شود، در واقع در هر مرحله رقم n ام c بزرگترین رقم موجود در بین عناصر S انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از c برای S وجود ندارد زیرا که اگر $c' = c_0/c_1c_2c_3\dots$ کوچکتر از c باشد، در یک مرحله رقم متناظر، c'_n ، باید کوچکتر از c_n باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به ازای $n = k$ رخ دهد، عناصری از S وجود دارند که رقم k آنها بزرگتر از c'_k است، پس c' از بعضی عناصر S کوچکتر است و نمی‌تواند کران بالا برای S

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه c_i یک عدد صحیح از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots\}$ باشد و c_i ها یک مجموعه ارقام، یعنی اعضای مجموعه $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آنگاه عددی c وجود دارد که:

$$(3) \text{ برای هر } n = 0, 1, 2, \dots \quad c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

برای این کار، مجموعه T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_0, c_0/c_1, c_0/c_1c_2, \dots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثالاً $c_0 + 1$)، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به c نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد c در نامساوی‌های (3) صدق می‌کند. اینکه c کران بالایی برای S است نشان می‌دهید c از هیچ یک از $c_0/c_1 \dots c_n$ ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی k وجود دارد که

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} < c$$

ولی $\frac{1}{10^k} + \dots + \frac{c_1}{10} + \dots + c_0$ از همه عناصر T بزرگتر است (توجه کنید که $\frac{1}{10^k} < \frac{1}{10^0} \dots \frac{1}{10^0} / 0 \dots 0 c_{k+1} \dots c_n$ بنا براین یک کران بالایی برای T کوچکتر از c یافت شده است که خلاف انتخاب c به عنوان کوچکترین کران بالایی T است). بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم خط H به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینه

هر عضو x در H را به $-x$ نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مانوس را اعمال می‌کنیم و رابطه ترتیب $b < a$ به معنای a در طرف چپ b قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعه اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به دست می‌آیند مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و به \mathbb{R} نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

(۴-۲) اصل تمامیت برای \mathbb{R} . اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از \mathbb{R} کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.
اینکه (۴-۲) از (۳-۲) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

(۴-۲) اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از \mathbb{R} کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای S بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

تمرین. (۵-۲) را از (۴-۲) نتیجه بگیرید (راهنمایی). مجموعه $'S$ را در نظر بگیرید که از کلیه x ها، به ازای $s \in S$ ، تشکیل شده است).

تمرین. نشان دهید کران بالایی A برای مجموعه S کوچکترین کران بالایی است A اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی n ، عضوی از s از S وجود داشته باشد که $s > A - \frac{1}{10^n}$.
هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، بازه‌های $[a, b]$ ، $[a, b[$ ، $, a, b]$ و $[a, b]$ عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از $[a, \infty]$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ و مقصود از $[-\infty, a]$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ است. به همین ترتیب مجموعه‌های $[a, \infty)$ و $(-\infty, a]$ تعریف می‌شوند.

اعداد مختلط (۱)

۱. مقدمه §

در دو جلسه گذشته پیرامون اعداد حقیقی صحبت کردیم. دیدیم که مفهوم عدد در رابطه با شمارش و اندازه‌گیری کمیت‌ها پدید آمد و نخست به آنچه امروز اعداد گویای مثبت می‌نامیم محدود بود. لیکن ضرورت تجربه علمی توسعه مفهوم عدد را ایجاد کرد به قسمی که اعداد گویا و اعداد منفی نیز به عنوان "عدد" شناخته شدند و مجموعه این مفاهیم، امروز مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، خوانده می‌شود.

در طی کوشش‌هایی که در قرن شانزدهم میلادی مبدول حل معادلات درجه سه می‌گشت معلوم شد که مفهوم عدد حقیقی هنوز دستخوش کاستی‌هایی است که این کوشش‌ها را دچار معضل می‌سازد. با اندکی بازسازی تاریخ، این موضوع را اکنون بررسی می‌کنیم. هر معادله درجه ۳ بر حسب x با ضرایب حقیقی را می‌توان پس از تقسیم کردن بر ضریب جمله^۳ x^3 به صورت زیر نوشت:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

با یک جایگزینی ساده می‌توان جمله درجه دوم را حذف کرد. اگر قرار دهیم $t = x - \frac{a}{3}$ ، معادله (۱) به شکل

$$t^3 + pt + q = 0 \quad (2)$$

در می‌آید که در آن p, q عبارت‌هایی بر حسب ضرایب a, b و c هستند. حال کوشش می‌کنیم معادله

(۲) را حل کنیم. اگر بنویسیم $t = u + v$ ، داریم

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

برای هر زوج u, v که در این معادله صدق کند، یک جواب $t = u + v$ برای (۲) به دست می‌آید. برای به دست آوردن چنین زوجی نخست مشاهده می‌کنیم که (۳) یک معادله با دو مجهول است که انتظار داریم معمولاً^۱ بی‌نهایت جواب داشته باشد.

با افزودن یک رابطه دیگر میان u, v ، سعی می‌کنیم به جواب مشخصی برسیم. قرار می‌دهیم:

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ یا } 3uv + p = 0 \quad (4)$$

که در این صورت (۳) و (۴) به صورت دستگاه زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (5)$$

حال با داشتن مجموع و حاصل ضرب دو کمیت u^3 و v^3 می‌توانیم یک معادله درجه دوم بنویسیم که ریشه‌هایش u^3 و v^3 باشند:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (6)$$

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \quad \text{پس}$$

دو جواب z مقادیر u^3 و v^3 هستند، پس با گرفتن کعب آنها و با استفاده از $t = u + v$ ، جواب (۲) به دست می‌آید:

$$t = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} \quad (7)$$

این فرمول که به فرمول کاردانو^۱ معروف است ظاهراً دستور کامل حل معادلات درجه ۳ است، ولی کمی دقت در مورد عبارت فوق و استفاده عملی از آن دو مشکل را بر ملا می‌سازد:

^۱ جیرو لامو کاردانو Girolamo Cardano (۱۵۰۱–۱۵۷۶) دانشمند ایتالیایی که گفته می‌شود این فرمول و روش حل فوق را در واقع از ریاضیدان ایتالیایی دیگری نیکولو تارتالیا Niccoló Tartaglia (۱۵۰۰–۱۵۵۷) با قسم به مخفی نگاهداشتن آن دریافت کرده است.

۱) یک معادله درجه دوم، $ax^2 + bx + c = 0$ ممکن است هیچ یک یا دو جواب داشته باشد. وجود \pm در فرمول جواب، یعنی $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ بیانگر امکان وجود دو جواب است. معادلات درجه ۳ ممکن است تا سه جواب حقیقی داشته باشند ولی فرمول (۷) ظاهراً فقط یک جواب را به دست می‌دهد. در عمل این مشکلی نیست زیرا که اگر مثلاً یک جواب $t = \alpha$ برای (۲) در دست باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$t^3 + pt + q = (t - \alpha)(t^2 + At + B)$$

و با بررسی $t^3 + At + B = 0$ جواب‌های احتمالی دیگر پیدا خواهند شد. با این حال به نظر می‌رسد فرمول (۷) از عمومیتی مشابه فرمول حل معادلات درجه دوم برخوردار نیست. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

عبارت $t^3 - 3t + 2$ را می‌توان به صورت $(t + 1)^2(t - 1)$ نوشت، پس جواب‌های معادله بالا عبارتند از $-1, 1, -2$. حال اگر فرمول کارداو را به کار گیریم، با توجه به $-3 = p$ و $2 = q$ داریم:

$$t = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -2$$

و فقط یکی از جواب‌ها حاصل می‌شود.

۲) مشکل جدی‌تری را که منجر به توسعه مفهوم عدد و پذیرفتن اشیایی به شکل $\sqrt{-1}$ به عنوان ”عدد“ شد با ذکر یک مثال تشریح می‌کنیم. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$t^3 - 6t + 4 = 0 \quad (8)$$

مشاهده کنید که $t = 2$ در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توان جمله $(2 - t)$ را فاکتور گیری کرد و داریم:

$$t^3 - 6t + 4 = (t - 2)(t^2 + 2t - 2)$$

با قرار دادن $t^2 + 2t - 2 = 0$ کلیه جواب‌های معادله (۸) به دست می‌آیند:

$$t = 2 \quad , \quad -1 \pm \sqrt{2}$$

از طرفی دیگر از فرمول (۷) داریم:

$$t = \sqrt[3]{\frac{-4 + \sqrt{-16}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-4 - \sqrt{-16}}{2}}$$

اگر $\sqrt{-16} = 4\sqrt{-1}$ خلاصه کنیم خواهیم داشت:

$$t = \sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2 - 2\sqrt{-1}} \quad (9)$$

این عبارت در ظاهر هیچ یک از سه جواب ذکر شده نیست و به علاوه از نظر معنی مشکوک است زیرا که تاکنون برای $\sqrt{-1}$ معنایی قابل نشده‌ایم. ریاضیدانان قرن شانزدهم متوجه شدند که می‌توان به محاسبه صوری زیر متوصل شد. فرض کنید $\sqrt{-1}$ معنی دارد یا حداقل می‌توان با آن محاسبات عادی جبری را انجام داد. در این صورت توجه کنید که بنابر اتحاد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{-1})^3 &= 1 + 3\sqrt{-1} - 3 - \sqrt{-1} \\ &= -2 + 2\sqrt{-1} \end{aligned}$$

و مشابهًا داریم $(-1 - \sqrt{-1})^3 = -2 - \sqrt{-1}$ ، پس (۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$t = 1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2$$

یعنی علیرغم این که برای $\sqrt{-1}$ معنایی قابل نیستیم، اگر با آن به صورت یک عدد عملیات جبری انجام دهیم، جواب معادله را به دست خواهیم آورد! کار دانو در کتاب خود مقادیری مانند $\sqrt{-1}$ را "اعداد مجازی" قلمداد می‌کرد که هر چند خود عدد نیستند و لیکن رفتار جبری مشابه اعداد دارند و به کمک آنها می‌توان به حقایقی در مورد اعداد رسید، همچنان که پذیرفتن اعداد منفی در جبر راه را برای بررسی مقادیر مثبت هموارتر می‌کند.

طی دو تا سه قرن مفهوم $\sqrt{-1}$ و امثال آن تدریجیاً جای خود را در ریاضیات یافت و تعبیر معنایی دقیقی برای آن ارائه شد. اولین افرادی که تعبیری هندسی برای $\sqrt{-1}$ ارائه دادند مساح نروژی کاسپار وسل^۲ و حسابدار سوییسی زان روبر آرگان^۳ بودند ولی بررسی جامع و دقیق این گونه عدد و خواص جبری آنها در آثار ریاضیدان بزرگ آلمانی گاؤس^۴ به کمال رسید^۵. روش امروزی برخورد با "اعداد مختلط" روش گاؤس است. پس از بررسی اعداد مختلط در بخش‌های آینده، حل معادلات درجه ۳ را مجدداً بررسی کرده نشان خواهیم داد روشی که برای حل معادلات درجه ۳ ارائه کردیم اگر در چارچوب اعداد مختلط انجام گیرد؛ روشی کامل است و به یافتن کلیه جواب‌های معادله منجر می‌شود.

§ ۲. معرفی اعداد مختلط

اعداد حقیقی را در تناظریک به یک با نقاط یک خط راست قرار داده‌ایم. حال صفحه مختصاتی xy را در نظر می‌گیریم و محور x در آن را به عنوان جایگاه اعداد حقیقی تثبیت می‌کنیم، یعنی عدد حقیقی x را به نقطه $(x, 0)$ نمایش می‌دهیم. با گذر از این خط به تمام صفحه به تعمیمی از مفهوم عدد حقیقی خواهیم رسید که در برگیرنده اعداد حقیقی است. برای دو نقطه $(x, y) = z$ و $(x', y') = z'$ از صفحه مفهوم مجموع و حاصل ضرب را طوری تعریف خواهیم کرد که اگر به "اعداد حقیقی"، یعنی زوج‌های $(x, 0)$ و $(x', 0)$ محدود شود، همان مفهوم مجموع و حاصل ضرب معمولی؛ یعنی $(0, 0)$ و $(0, 0)$ را به دست دهد.

$$(1-2) \quad \text{جمع برای } (x, y) \text{ و } (x', y') \text{ تعریف می‌کنیم:} \quad z + z' = (x + x', y + y')$$

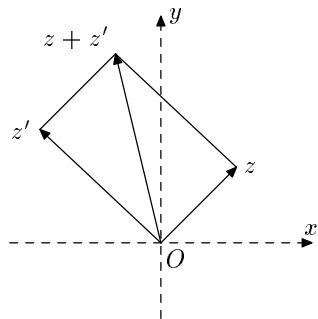
Caspar Wessel^۶

Jean Robert Argand^۷

Carl Friedrich Gauss^۸

^۶ برای مطالعه سیر تاریخی تحول مفهوم عدد مختلط به فصل ۳ کتاب زیر مراجعه کنید:
Ebbinghaus, H. D., et al *Numbers*, Springer 1991.

بدین ترتیب نقاط $(0, 0) = \underline{0}$, z, z' و $z + z'$ چهار رأس یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند و عمل جمع نقاط همان جمع برداری برای بردارهای ساطع از مبدأ مختصات است (شکل ۱).



۱-۱-۲) خواص جمع

$$. z + z' = z' + z \quad (جایگایی)$$

$$. z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \quad (شرکت‌پذیری)$$

۳-۱-۲) عنصر بی‌اثر نقطه $(0, 0) = \underline{0}$ (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

$$z + \underline{0} = \underline{0} + z = z$$

۴-۱-۲) عنصر قرینه برای $(x, y) = z$, قرینه یا منفی z به صورت

$$-z = (-x, -y)$$

تعریف می‌شود و (یگانه نقطه) دارای این ویژگی است که:

$$z + (-z) = (-z) + z = \underline{0}$$

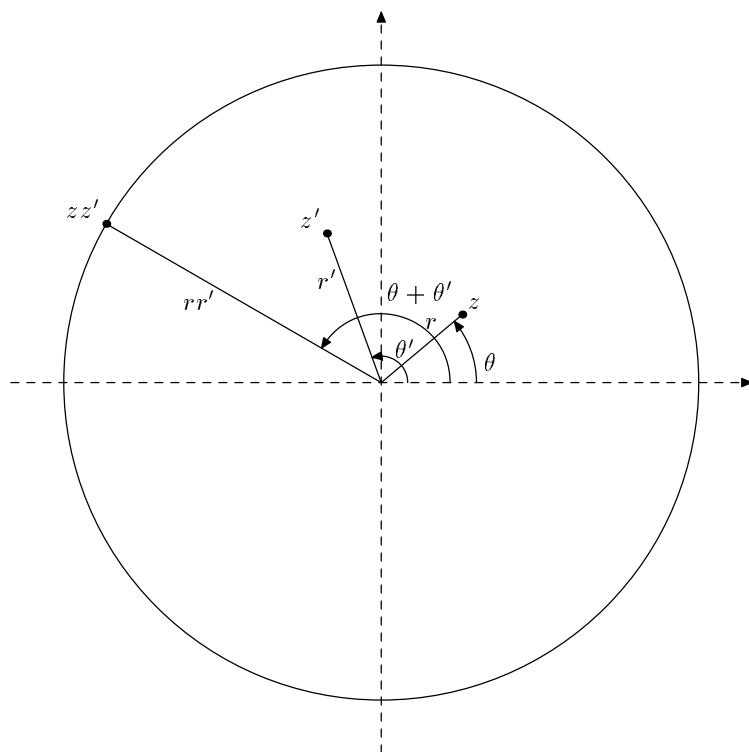
خواص فوق الذکر همه به سادگی از این نتیجه می‌شوند که ویژگی متناظر برای هر مؤلفه، که عدد حقیقی است، برقرار است.

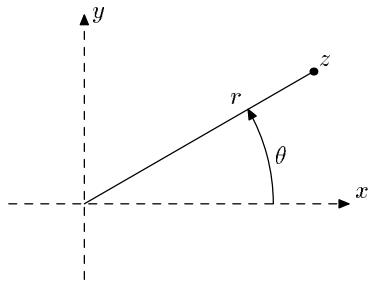
۱-۲) ضرب تعریف حاصل ضرب $(x, y) = z$ و $(x', y') = z'$ در آغاز دور از ذهن به نظر

خواهد رسید ولی تدریجاً موضوعیت آن روشن خواهد شد. نخست توجه کنید که برخلاف مجموع که

مؤلفه به مؤلفه تعریف شد، چنین تعریفی برای حاصل ضرب متضمن بروز خواصی خواهد شد که دور از خواص مأнос اعداد حقیقی است. اگر $z' \cdot z$ را به صورت (xx', yy') تعریف کنیم، نتیجه می‌شود که $(0, 0) = (0, 0)$ ، یعنی حاصل ضرب دو عنصر غیر صفر، صفر می‌شود، که خلاف خواص جبری اعداد حقیقی است. خواص حاصل ضربی که تعریف خواهیم کرد شبیه‌تر به خواص ضرب اعداد حقیقی است و با حاصل ضرب اعداد حقیقی سازگار خواهد بود، یعنی حاصل ضرب $(x, 0) \cdot (x', 0)$ برابر $(0, 0)$ می‌شود.

برای (x, y) و (x', y') $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. نقاطهای در صفحه خواهد بود که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر حاصل ضرب فواصل z و z' از مبدأ است. پس اگر فاصله z و z' از مبدأ به ترتیب r و r' باشد، $z \cdot z'$ روی دایره شعاع rr' به مرکز قرار خواهد داشت.





اگر z یا z' صفر باشد، r یا r' صفر خواهد شد و در نتیجه لزوماً $zz' = 0$. حال فرض می‌کنیم $z \neq 0$ و $z' \neq 0$. در این صورت θ را برابر زاویه از نیم خط مثبت محور x به نیم خط واصل z به z' می‌گیریم و به همین ترتیب θ' را برابر زاویه از نیم خط مثبت محور x به شعاع z' می‌گیریم. اکنون z' را آن نقطه روی دایره شعاع r' حول z می‌گیریم که زاویه از نیمه مثبت محور x به شعاع حامل آن برابر $\theta + \theta'$ باشد.

(۱-۲-۲) خواص ضرب

$$z \cdot z' = z' \cdot z \quad (1-1-2-2)$$

$$z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z'' \quad (2-1-2-2)$$

(۳-۱-۲-۲) عنصر بی اثر نقطه ($1, 0$) (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

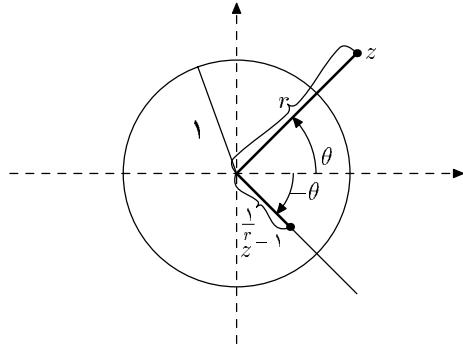
$$z \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z = z$$

(۴-۱-۲-۲) عنصر معکوس برای هر $z \neq 0$ عنصری (منحصر به فرد) z' وجود دارد که

$$z \cdot z' = z' \cdot z = (1, 0)$$

اثبات دو خاصیت اول کاملاً سرراست است. برای (۳-۱-۲-۲)، در مورد $(1, 0)$ داریم $1 = r = 1$ و $\theta = 0$ و حکم نتیجه می‌شود. بالاخره برای عنصر معکوس ضربی، اگر $z \neq 0$ ، فاصله z از 0 ، یعنی r نااصر است، آنگاه z' با فاصله r^{-1} و زاویه $(-\theta)$ یگانه نقطه‌ای است که در شرایط صدق می‌کند

(شکل ۲)



زوج (r, θ) که به نقطه $(x, y) = z$ نسبت داده شد (شکل ۲ (الف)) مختصات قطبی نقطه z خوانده می‌شوند. مؤلفه r ، فاصله از مبدأ، به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود ولی θ یگانه نیست، با افزودن هر مضرب صحیح (2π) به θ ، یک مقدار قابل قبول دیگر به دست می‌آید. r را به $|z|$ قدر مطلق (z) و θ را گاهی به $\arg(z)$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که برای همه نقاط روی یک نیم خط ساطع از $x < 0$ $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ برابر است. مثلاً $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ نقاط $(0, y)$ با $y > 0$ و نقاط $(0, y)$ با $y < 0$ را نمایش می‌دهند.

در (۱-۱) و (۱-۲) خواص جمع و ضرب خلاصه شد. برای تکمیل خواص جبری، رابطه + و . نیز مطرح است که در زیر می‌آید:

(۳-۲) قانون پخشی برای z' , z'' , z داریم:

$$z \cdot (z' + z'') = (z \cdot z'') + (z \cdot z'')$$

$$(z + z') \cdot z'' = (z \cdot z'') + (z' \cdot z'')$$

قبل از اثبات قانون پخشی، بعضی نتایج به دست آمده تا این لحظه را بررسی می‌کنیم.

(۴-۲) نمادگذاری مجموعه نقاط صفحه با عمل جمع و ضرب فوق را به \mathbb{C} نمایش داده، مجموعه اعداد مختلط می‌نامیم. به این ترتیب هر زوج (x, y) یک عدد مختلط خوانده می‌شود. توجه کنید که \mathbb{R} با جمع و ضرب معمول آن یک زیردستگاه \mathbb{C} است، یعنی اگر عناصر \mathbb{R} را به $(0, y)$ نمایش دهیم، مجموع و حاصل ضرب دو عدد حقیقی، به عنوان عدد حقیقی یا عدد مختلط یکی است. در

مورد حاصل ضرب $(z, \circ) \cdot (z', \circ) = (zz', \circ)$ توجه کنید که اگر x و x' هم علامت باشند، داریم $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$ پس در هر دو حالت $\arg(z) = \arg(z') = \pi$ یا $\arg(z) = \arg(z') = 0$ و چون $\arg(z \cdot z') = \arg(zz')$ پس $zz' = |zz'| \cdot (xx', \circ)$. در حالتی که x و x' مختلف علامت باشند، $|z||z'| = -xx'$ یکانه نقطه با $\arg(zz') = \pi$ است که فاصله آن از 0° برابر $\arg(zz') = \pi$ می‌باشد، پس مجدداً $(x, \circ) \cdot (x', \circ) = (xx', \circ)$.

بارزترین نتیجه فوری تعریف جمع و ضرب برای نقاط صفحه وجود جذر برای $(-1, 0)$ است. چون فاصله $(-1, 0)$ از مبدأ برابر واحد است، فاصله هر جذر احتمالی آن از مبدأ باید ۱ باشد. از طرفی دیگر $\arg(-1, 0) = \pi$ و دقیقاً دو نقطه $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ ویژگی مورد نظر را دارند:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

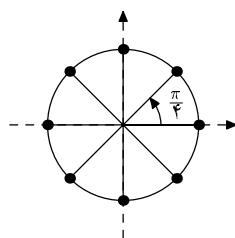
$$(0, -1) \cdot (0, -1) = (-1, 0)$$

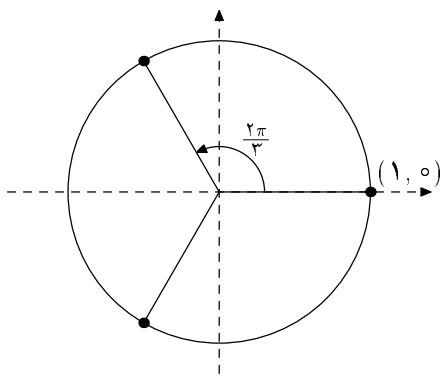
نقطه $(1, 0)$ را به n نمایش می‌دهند، پس $i = (0, -1)$ و $-i = (0, 1)$ (یا $(0, -1)$) هستند. نتیجه این که عدد ۱ (یا $(1, 0)$) دارای چهار ریشه چهارم است، یعنی $1 \pm i$.

به طور کلی ۱ دارای n ریشه n ام است. از تعریف ضرب نتیجه می‌شود که n نقطه زیر که به طور متساوی الفاصله روی دایره واحد توزیع شده‌اند ریشه‌های n ام ۱ می‌باشند:

$$(1, 0), (\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}), (\cos \frac{4\pi}{n}, \sin \frac{4\pi}{n}), \dots, (\cos \frac{(n-1)2\pi}{n}, \sin \frac{(n-1)2\pi}{n})$$

در شکل ۴ (الف) ریشه‌های سوم ۱ و در شکل ۴ (ب) ریشه‌های هشتم ۱ نمایش داده شده‌اند.





جهت ارجاع‌های بعدی توجه کنید که ریشه‌های سوم ۱ عبارتند از:

$$(1, 0)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3}\right)$$

اعداد مختلط (۲)

از جلسه قبیل به یاد آورید که اگر زوج (r, θ) مختصات قطبی نقطه (x, y) باشد، r فاصله نقطه (x, y) از مبدأ است و θ زاویه‌ای است که از نیم خط مثبت محور x به نیم خط واصل از z به (x, y) در نظر گرفته می‌شود. جهت مثلثاتی را برای θ مثبت و جهت عقریه ساعت را منفی می‌گیریم. داریم

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

در واقع هر زوج (r, θ) با $r \geq 0$ که در روابط فوق صدق کند یک زوج مختصات قطبی برای $z = (x, y)$ منظور می‌شود. حال فرض کنید (r', θ') مختصات قطبی برای $z' = (x', y')$ باشد. طبق تعریف ضرب اعداد مختلط داریم:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (rr' \cos(\theta + \theta'), rr' \sin(\theta + \theta')) \\ &= (rr' \cos \theta \cos \theta' - rr' \sin \theta \sin \theta', rr' \sin \theta \cos \theta' + rr' \cos \theta \sin \theta') \\ &= (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned}$$

پس

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \quad (2)$$

رابطه فوق بیان جبری حاصل ضرب دو عدد مختلط است و می‌توان از آن به عنوان تعریف حاصل ضرب استفاده کرد. با استفاده از (۲)، اکنون صحت قانون پخشی را تحقیق می‌کنیم. فرض

کید (۲) در این صورت:

$$\begin{aligned}
 z \cdot (z' + z'') &= (x, y) \cdot (x' + x'', y' + y'') \\
 &= (x(x' + x'') - y(y' + y''), x(y' + y'') + (x' + x'')y) \quad \text{طبق (۲)} \\
 &= ((xx' - yy') + (xx'' - yy''), (xy' + x'y) + (xy'' + x''y)) \\
 &= (xx' - yy', xy' + x'y) + (xx'' - yy'', xy'' + x''y) \\
 &= zz' + zz''
 \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، را به عنوان زیرمجموعه \mathbb{C} متشکل از نقاط روی محور x در نظر می‌گیریم، یعنی x و (\circ, x) یکی فرض می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= (x, \circ) + (\circ, y) \\
 &= (x, \circ) + (\circ, 1)(y, \circ) \quad \text{طبق (۱))} \\
 &= x + iy
 \end{aligned}$$

در واقع وقتی نقاط صفحه را به عنوان "عدد مختلط" تلقی می‌کنیم، نماد $x + iy$ معمول تر از (x, y) است. با توجه به قوانین جابجایی، شرکت‌پذیری و پخشی، کارکردن با iy مانند کار کردن با اعداد معمولی است. فقط باید توجه داشت که همه جا $i \cdot i$ تبدیل به (-1) می‌شود. مثلاً دستور (۲) را می‌توان به شکل زیر مجدداً تحقیق کرد:

$$\begin{aligned}
 (x + iy) \cdot (x' + iy') &= (x + iy) \cdot x' + (x + iy) \cdot (iy') \\
 &= xx' + iyx' + xi y' + (iy)(iy') \\
 &= xx' + i(yx' + xy') + (i \cdot i)(yy') \\
 &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y)
 \end{aligned}$$

نمایش یک عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ را نمایش متعارفی یک عدد مختلط می‌نامند. x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامند. به طور کلی اعداد روی محور y ، یعنی iy ، اعداد موهومی خوانده می‌شوند. فاصله $z = x + iy$ از $z = x + 0$ (که در مختصات قطبی به r نمایش می‌دادیم) قدر مطلق z خوانده می‌شود و به $|z|$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

روابط زیر برای اعداد مختلط z و z' برقرارند:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{نامساوی مثلث}) \quad (4)$$

$$|z \cdot z'| = |z||z'| \quad (5)$$

رابطه (5) نتیجه تعریف هندسی حاصل ضرب اعداد مختلط است و (4) قاعده‌ای کلی برای جمع بردارهاست که می‌توان اینجا با به کار گرفتن تعریف جمع و (3) تحقیق نمود (تمرین). معنی هندسی آن این است که مجموع دو ضلع مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.

نماد معمول و مفید دیگری نماد مزدوج است. برای $z = x + iy$ ، قرینه آن نسبت به محور x ، یعنی $iy - x$ به \bar{z} نمایش داده شده و مزدوج z خوانده می‌شود. اثبات روابط زیر سرراست است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad (6)$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad (7)$$

همچنین توجه کنید که

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (8)$$

بالاخره برای زاویه قطبی θ ، گاهی نماد $\arg(z)$ به کار می‌رود. بدین ترتیب

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))) \quad (9)$$

حال اعداد مختلط z با $1 = |z|$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

این عدد را به $cis(\theta)$ نیز نمایش می‌دهیم. از تعریف هندسی حاصل ضرب نتیجه می‌شود که اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد داریم

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (10)$$

فرمول (10) به فرمول دُمووار^۱ معروف است و کاربردهای فراوانی دارد. قبل از ارائه بعضی از این کاربردها، خاطر نشان می‌کنیم که (10) برای همه اعداد صحیح n ، اعم از مثبت، منفی و صفر، برقرار است. برای هر عدد مختلط z ، z^n را طبق قرارداد برابر ۱ قرار می‌دهیم که رابطه بالا را برقرار می‌کند. برای $1 - z^{-n}$ با توجه به تعریف معکوس ضربی داریم:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

حال مقصود از z^{-n} : عدد صحیح مثبت، معکوس ضربی z^n است، پس:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))^{-1} = \cos((-n)\theta) + i \sin((-n)\theta)$$

پس فرمول دموآور همچنان برقرار است.

کاربرد ۱: اتحادهای مثلثاتی

بعضی اتحادهای مثلثاتی را می‌توان به کمک فرمول دموآور به دست آورد. معمولاً باید عبارت مناسبی را به قسمت‌های حقیقی و موهومی تفکیک کرد. به عنوان نمونه فرض کنید می‌خواهیم $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را برحسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ بنویسیم. فرمول دموآور برای 3 می‌دهد:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

de Moivre^۱

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

کاربرد ۲: ریشه n -ام اعداد مختلط

در جلسه قبیل ریشه‌های n -ام واحد را محاسبه کردیم و دیدیم که ۱ دارای n ریشه n -ام متمایز است. این مطلب برای هر عدد مختلط $z \neq 0$ درست است. از (۹) استفاده می‌کنیم و برای ساده نویسی

را به θ نمایش می‌دهیم.

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

اگر w یک ریشه n -ام z باشد، داریم $w^n = z$. را به صورت $|w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ می‌نویسیم، پس:

$$|w|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

چون قدرمطلق طرف راست $|z|$ و قدرمطلق طرف چپ $|w|^n$ است داریم $|w|^n = |z|$ ، یعنی $|w|$ برابر است که مقصود از $\sqrt[n]{|z|}$ ریشه n -ام مثبت عدد مثبت $|z|$ می‌باشد. با مساوی قراردادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف داریم

$$\begin{cases} \cos n\alpha = \cos \theta \\ \sin n\alpha = \sin \theta \end{cases}$$

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \quad , \quad \text{عدد صحیح} : k$$

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$$

بنابراین ریشه‌های n -ام z عبارتند از اعداد:

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right) \quad \text{عدد صحیح} : k$$

توجه کنید که وقتی k کلیه اعداد صحیح را طی می‌کند فقط n مقدار متمایز در طرف راست پدید می‌آید زیرا که اگر مضربی صحیح از n به k افزوده شود، یک مضرب صحیح 2π به $k \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$ افزوده می‌شود که اثری بر کسینوس و سینوس ندارد، پس در واقع n ریشه‌ام برای $|z|$ به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{|z|} (\cos(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n})) \\ k = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \quad (11)$$

اکنون با توصیفی که از اعداد مختلط داشته‌ایم می‌توانیم بحث تاریخی در مورد حل معادلات درجه سوم را تکمیل کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای حل معادله $t^3 + pt + q = 0$ را به صورت $t = u + v$ نوشتیم و با افزودن یک رابطه $3uv + p = 0$ به این نتیجه رسیدیم که u, v باید ریشه‌های سوم جواب‌های معادله درجه دوم $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ ، یعنی ریشه‌های سوم دو مقدار:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \quad (12)$$

باشند. ما در آغاز p و q را حقیقی گرفتیم ولی اگر p و q مختلط نیز باشند هیچ خللی در استدلال پدید نمی‌آید زیرا که همان قوانین جبری حاکمند و تا اینجا همه ملاحظات در مورد معادلات درجه سوم با ضرایب مختلط نیز صادق است. توجه کنید که در (12) زیر رادیکال ممکن است منفی شود ولی اکنون این مطلب مشکلی ایجاد نخواهد کرد زیرا که اعداد موهومی و مختلط نیز معنی پیدا کرده‌اند. حال هر یک از دو مقدار z در (12) دارای سه ریشه سوم است (به استثنای حالتی که یک جواب با هر دو صفر شوند)، و در مجموع $3 \times 3 = 9$ انتخاب برای زوج (u, v) به دست خواهد آمد، ولی نشان می‌دهیم که حداقل سه انتخاب در اینجا در مسئله صدق می‌کند. توجه کنید که رابطه کمکی $3uv + p = 0$ ، یا $uv = -\frac{p}{3}$ باید برقرار باشد. یک جواب ممکن را به (u_1, v_1) نمایش دهید، پس

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}, \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

که در اینجا مقصود از $\sqrt[3]{\cdot}$ یک انتخاب ریشه سوم است به طوری که $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$. حال هر انتخاب

دیگر ریشه سوم برای جواب‌های (۱۱) باید به شکل

$$u = \omega_1 u_1, \quad v = \omega_2 u_2$$

باشد که ω_1 و ω_2 ریشه‌های سوم واحد هستند. برای این که $uv = -\frac{p}{3}$ همچنان برقرار بماند باید داشته باشیم $1 = \omega_1 \omega_2$. ولی سه ریشه واحد عبارتند از:

۱

$$\omega = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و تنها سه امکان برای $1 = \omega_1 \omega_2$ وجود دارد که عبارتند از:

$$(\omega_1 = \omega_2 = 1), \quad (\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega^2), \quad (\omega_1 = \omega^2, \omega_2 = \omega)$$

پس اگر (u_1, v_1) یک زوج قابل قبول باشد، زوج‌های قابل قبول دیگری عبارتند از $(\omega u_1, \omega^2 u_2)$ و

$(\omega^2 u_1, \omega u_2)$ ، پس سه جواب

$$t = u_1 + v_1$$

$$t = \omega u_1 + \omega^2 u_2$$

$$t = \omega^2 u_1 + \omega u_2$$

برای معادله درجه سه $t^3 + pt + q = 0$ به دست می‌آید.

با این ابزار دو مثال آغاز جلسه ۳ را به طور کامل بررسی می‌کنیم:

مثال ۱. معادله $0 = t^3 - 3t + 2 = p = -3$ و $q = 2$ را در نظر بگیرید. داریم u, v ریشه‌های سوم

دو مقدار

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

خواهند شد. بدین ترتیب هر یک از u, v باید یک ریشه سوم (۱)– انتخاب شود. ریشه‌های سوم

(۱) طبق (۱۱) عبارتند از:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

باید زوج‌هایی انتخاب شوند که حاصل ضربشان برابر $1 = v_1 = u_1$ باشد، مثلاً $\omega^2 - \omega = -\frac{p}{q}$ بدين ترتيب سه ریشهٔ معادله عبارتند از:

$$-1 - 1 = -2, \quad -\omega - \omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad -\omega^2 - \omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

مثال ۲. معادله $0 = 4 - 6t + t^3$ را در نظر می‌گيریم که برای آن $p = 6, q = 4$ و u, v هر یک

ریشه‌های سوم دو مقدار

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = -2 \pm 2i$$

هستند. این ریشه‌های سوم عبارتند از:

ریشه‌های سوم $-2 + 2i$

$$\sqrt{2} cis \frac{\pi}{4} = 1 + i, \quad \sqrt{2} cis \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sqrt{2} cis \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

ریشه‌های سوم $-2 - 2i$

$$\sqrt{2} cis \frac{5\pi}{12}, \quad \sqrt{2} cis \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sqrt{2} cis \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt{2} cis \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 1 - i$$

ملاحظه می‌کیم که $(1+i) + (1-i) = 2 = -\frac{p}{q}$ پس یک جواب عبارت است از 2 و همهٔ جواب‌ها به شرح زیرند:

$$(1+i) + (1-i) = 2$$

$$\omega(1+i) + \omega^2(1-i) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) = -1 - \sqrt{3}$$

$$\omega^2(1+i) + \omega(1-i) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) = -1 + \sqrt{3}$$

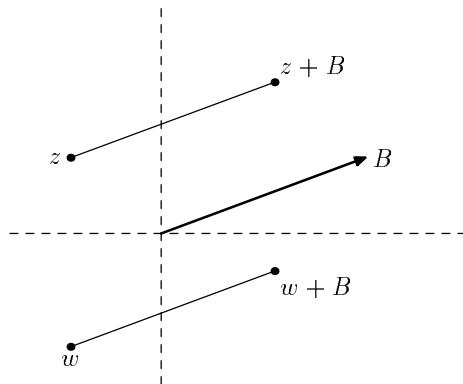
این مثال به خوبی نشان می‌دهد که چگونه با گذر از اعداد مختلط می‌توان به نتایجی با اعداد حقیقی رسید.

اعداد مختلط و تبدیلات صفحه

کاربردهای متنوعی برای اعداد مختلط وجود دارد. در اینجا به ارائه یک نمونه از این کاربردها می‌پردازیم. صفحه \mathbb{C} یا معادلاً \mathbb{R}^2 را در نظر بگیرید. به کمک اعداد مختلط به بررسی تبدیلهای "انتقال"؛ "دوران" و "تجانس" از صفحه خواهیم پرداخت. انتقال را به این مفهوم می‌گیریم که همه نقاط صفحه در یک امتداد و به یک مقدار حرکت کنند. به طور دقیق‌تر، برای بردار ثابتی B ، هر نقطه به اندازه B حرکت می‌کند. از آنجا که جمع اعداد مختلط متناظر با جمع بردارها تعریف شد، می‌توان انتقال را تابعی $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ به شکل

$$T(z) = z + B \quad (1)$$

تلقی کرد که در آن B یک عدد مختلط ثابت است. بدین ترتیب اگر B_1 و B_2 دو عدد مختلط ثابت

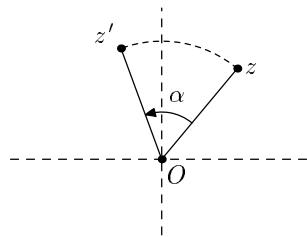


باشد حاصل دو انتقال متوالی با B_1 و B_2 عبارت است از:

$$z \rightarrow z + B_1 \rightarrow (z + B_1) + B_2 = z + (B_1 + B_2)$$

یعنی انتقال به وسیله $B_1 + B_2$.

حال دوران را در نظر می‌گیریم و نخست دوران حول مبدأ مختصات، یعنی \underline{z} ، را بررسی می‌کنیم.
برای هر زاویه α ، مقصود از دوران حول \underline{z} به زاویه α تبدیلی است که هر نقطه z را به نقطه‌ای z' می‌فرستد که فاصله آن از مبدأ برابر فاصله z از مبدأ است ولی زاویه از خط واصل از \underline{z} به z به خط واصل از \underline{z} به z' برابر مقدار ثابت α است. توجه داشته باشید که همواره طبق قرارداد، مقادیر مثبت α در جهت مثلثاتی (ضد عقربه ساعت) منظور می‌شود. با توجه به تعریف حاصل ضرب اعداد مختلط، اگر



$R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ یک دوران حول مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$R(z) = cis(\alpha) \cdot z \quad (2)$$

که α مقداری ثابت است. حال اگر بخواهیم دوران زاویه α حول نقطه دلخواهی \underline{z} را با اعداد مختلط نمایش دهیم به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست انتقالی به اندازه $(\underline{z} - z_0)$ - را انجام می‌دهیم که \underline{z} را به \underline{z} منتقل کند، سپس دوران زاویه α حول \underline{z} را انجام می‌دهیم (ضرب کردن در $cis(\alpha)$)، و بالاخره با انتقال به وسیله \underline{z} ، نقطه اولیه \underline{z} را به مکان اولیه‌اش باز می‌گردانیم. بدین ترتیب دوران زاویه α حول \underline{z} به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$z \rightarrow z - z_0 \rightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) \rightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0. \quad (3)$$

پس فرمول دوران زاویه α حول \underline{z} به صورت زیر نیز داده می‌شود:

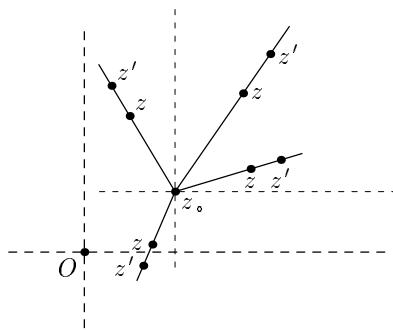
$$z \rightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_0) + z_0 = cis(\alpha) \cdot z + (1 - cis(\alpha)) \cdot z_0. \quad (4)$$

توجه کنید که چون $(1 - cis(\alpha)) \cdot z_0$ یک عدد مختلط ثابت است، بلا فاصله نتیجه می‌شود که

(۱-۵) هر دوران در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دوران حول z_0 با همان زاویه و یک انتقال نوشت.

بالعکس اگر متولیاً یک دوران زاویه α ، $\alpha \neq 2k\pi$ ، حول z_0 و سپس یک انتقال صورت گیرد، ادعا می‌کنیم حاصل یک دوران زاویه α حول نقطه‌ای z خواهد بود. چنین ترکیبی به صورت $cos(\alpha) \cdot z + B$ خواهد بود. چون فرض کردۀ ایم $1 \neq \cos(\alpha)$ داریم پس اگر z را به صورت $cis(\alpha) \cdot z + B = cis(\alpha) \cdot z + (1 - cis(\alpha)) \cdot z$ تعریف کنیم، داریم که طبق (۴) دوران زاویه α حول z است.

حال تبدیل تجانس را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی نامنفی k داده شده باشد و z یک نقطه در صفحه باشد، مقصود از تجانس به مرکز z_0 با ضرب k این است که هر نقطه z روی نیم خط واصل از z_0 به نقطه‌ای z' حرکت می‌کند که فاصله‌اش از z_0 برابر فاصله z از z_0 است.



چون فاصله z از z_0 صفر است و $z = z_0$ ، مرکز تجانس تحت اثر تجانس ثابت باقی می‌ماند. برای به‌دست آوردن فرمولی برای تجانس، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که مرکز تجانس مبدأ مختصات، z_0 ، است. در این حالت روشن است که نقطه z به نقطه z' فرستاده می‌شود (ضرب عدد k در "بردار" z). بدین ترتیب تابع تجانس به مرکز z_0 با ضرب k : $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ عبارت است از:

$$H(z) = kz \quad (5)$$

برای تجانس نسبت به مرکز دلخواه z_0 ، به روشی مشابه دوران حول z_0 عمل می‌کنیم، یعنی نخست با انتقال $(z - z_0)$ در صفحه، نقطه z را به $z - z_0$ منتقل می‌کنیم، سپس تجانس فوق، H ، را انجام می‌دهیم و

بالاخره حاصل را به اندازه z انتقال می دهیم:

$$z \rightarrow z - z_0 \rightarrow k(z - z_0) \rightarrow k(z - z_0) + z_0. \quad (6)$$

يعنى تابع تجانس به مرکز z_0 و ضریب k را می توان به صورت زیر نوشت:

$$z \rightarrow k(z - z_0) + z_0 = kz + (1 - k)z_0. \quad (7)$$

از آنجا که $(1 - k)z_0$ عددی ثابت است داریم

(۵-۶) هر تجانس در صفحه را می توان به صورت ترکیب تجانس حول z_0 با همان ضریب و یک انتقال نوشت.

در اینجا نیز عکس مطلب درست است. فرض کنید نخست تجانس با ضریب $1 \neq k$ انجام گیرد و سپس یک انتقال با بردار B . در این صورت حاصل اثر بر نقطه z عبارت است از $kz + B$. چون $1 \neq k \neq \frac{B}{1-k}$ تعریف شده است و اگر آن را z بنامیم داریم $kz + B = kz + (1 - k)z_0$ که طبق (۷) تجانس با ضریب k به مرکز z_0 است. حال اگر به فرمولهای کلی انتقال، دوران و تجانس، که توسط (۱)، (۴) و (۷) ارائه شده‌اند، نظر کنیم، ملاحظه می کنیم که هر سه، تابع‌های درجه یک نسبت به z تعریف می کنند. اکنون نشان می دهیم که عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی هر تابع درجه یک در واقع ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. فرض کنید تابع $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ به صورت

$$f(z) = Az + B \quad (8)$$

داده شده است که در آن A, B اعداد مختلط ثابت باشند. اگر $A = 0$ که همه نقاط صفحه به نقطه ثابت B فرستاده می شوند و این، تجانس به مرکز B با ضریب $0 = k$ است.

فرض کنید $A \neq 0$ ، می توان نوشت:

$$A = |A| cis(\alpha) \quad (9)$$

پس f را می توان به صورت ترکیب زیر نوشت:

$$z \xrightarrow{\text{تجانس به مرکز } cis(\alpha) \cdot z} \xrightarrow{\text{دوران حول } z} \xrightarrow{\text{انتقال}} |A| cis(\alpha) \cdot z + B \quad (10)$$

یعنی هر تابع درجه یک، ترکیب یک دوران حول z_0 ، یک تجانس به مرکز z_0 و یک انتقال است.

همچنین چون عمل ضرب جابجایی است، می‌توان ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد.

در واقع اگر $A = 1$ باشد، آن‌ها ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد.

مرکز مشترک:

حالت اول: $A = 1$ در این صورت تابع به $z \rightarrow z + B$ خلاصه می‌شود که یک انتقال است.

حالت دوم: $A \neq 1$ در این صورت نشان می‌دهیم که نقطه‌ای z_0 وجود دارد به طوری که

$z \rightarrow Az + B$ ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز z_0 است. یک چنین نقطه z_0 باید در رابطه

$Az_0 + B = z_0$ صدق کند چون مرکز دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس معادلاً $B = (1 - A)z_0$ و

چون $A \neq 1$ فرض شده است، $\frac{B}{1-A} = z_0$ بدست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که این نقطه فی الواقع

ویژگی مورد نظر را دارد، یعنی $z \rightarrow Az + B$ ترکیب دوران و تجانس حول z_0 است. داریم:

$$Az + B = A(z - \frac{B}{1-A}) + B + \frac{AB}{1-A} = A(z - z_0) + z_0$$

با نوشتن $A = |A| cis(\alpha)$ ملاحظه می‌کنیم که این تابع ترکیب دوران با زاویه α و تجانس با ضریب

حول z_0 است.

بالا خص دو حالت زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

اگر $|A| = 1$ و $A \neq 1$ ، تابع $z \rightarrow Az + B$ دوران به زاویه $cis(arg(A))$ حول z_0 است.

اگر $|A| \geq 1$ و $A \neq 0$ ، تابع $z \rightarrow Az + B$ تجانس با ضریب A حول z_0 است.

مثال ۱. فرض کنید $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویه α حول z_1 و $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویه β

حول z_2 است. در این صورت ترکیب $T_2 \circ T_1$ چگونه تبدیلی است؟

داریم $T_2(z) = cis(\beta) \cdot z + B_2$ و $T_1(z) = cis(\alpha) \cdot z + B_1$. پس

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(z) &= T_2(cis(\alpha) \cdot z + B_1) + B_2 \\ &= cis(\beta) \cdot cis(\alpha) \cdot z + cis(\beta) \cdot B_1 + B_2 \\ &= cis(\alpha + \beta) \cdot z + (cis(\beta) \cdot B_1 + B_2) \end{aligned}$$

که در اینجا $cis(\alpha + \beta) \cdot B_1 + B_2 = cis(\beta) \cdot B_1 + B_2$ یک عدد مختلط ثابت است. اگر $\alpha + \beta = 2k\pi$ باشد،

این تبدیل یک انتقال با مقدار $cis(\beta) \cdot B_1 + B_2$ است. اگر $\alpha + \beta \neq 2k\pi$, تبدیل فوق یک دوران به زاویه $\alpha + \beta$ حول $z_0 = \frac{cis(\beta) \cdot B_1 + B_2}{1 - cis(\alpha + \beta)}$ می‌باشد.

دنبالهٔ عددی و سری عددی (۱)

وقتی در جلسات اول مفهوم عدد حقیقی را مطرح کردیم، اشاره داشتیم به اینکه عملیات جبری را می‌توان همانند عملیاتی که برای اعداد گویا مطرح می‌شود به همهٔ اعداد حقیقی تعمیم داد. در واقع اگر چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را به صورت هندسی مطرح کیم هیچ تفاوتی میان اعداد گویا و ناگویا مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱ این چهار عمل نمایش داده شده‌اند. فرض کنید دو عدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. نقاط A و B در سمت راست محور حقیقی را طوری می‌گیریم که پاره‌خط‌های OA و OB طول‌های به ترتیب a و b داشته باشد. حال اگر دهانهٔ پرگاری را به اندازه OA باز کیم و به مرکز B و این شعاع دایره‌ای رسم کیم، نقطهٔ تقاطع دایره در سمت راست نقطهٔ B یعنی نقطهٔ C ، عدد $a + b$ را نمایش می‌دهد (یعنی طول پاره‌خط OC برابر $a + b$ است) و نقطهٔ تقاطع در سمت چپ B ، یعنی نقطهٔ D ، نمایشگر عدد $a - b$ است. برای عمل ضرب دو نیم خط از O رسم می‌کیم. روی یک نیم خط نقاط U و B را طوری می‌گیریم که طول OU برابر واحد و طول OB برابر b باشد. روی نیم خط دیگر نقطهٔ A به نحوی اختیار می‌کیم که طول OA برابر a باشد. حال اگر خط راستی از B به موازات UA رسم کیم، نقطهٔ تلاقی آن با نیم خط دیگر، یعنی C طوری است که طول OC برابر ab است (با برتر شابه مثلث‌ها). برای ترسیم نسبت $\frac{a}{b}$ کافی است بدانیم چگونه باید $\frac{1}{b}$ را رسم کیم. روی دو نیم خط متقارع در O ، نقاط U و V را طوری بگیرید که OU و OV هر دو طول واحد داشته باشد. نقطهٔ B را روی نیم خط OU طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. در این صورت خطی که از U به موازات BV رسم شود خط دیگر را در نقطه‌ای B' قطع می‌کند که فاصله‌اش از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجددًاً تشابه). روش معمول دیگری این است که دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز O رسم

می‌کیم. روی نیم خطی ساطع از O ، نقطه B را طوری می‌گیریم که طول OB برابر b باشد. نخست فرض کیم $1 > b$ ، پس B خارج دایره باشد. در این صورت از B مماسی بر دایره رسم می‌کیم و از نقطه تماس بر OB عمود می‌کیم. فاصله پای عمود، B' از O برابر $\frac{1}{b}$ است (مجدداً تشابه مثلث‌ها). برای $1 < b$ ، با مراجعه به همان شکل معکوس فراید بالا را در نظر می‌گیریم.

هرگاه یکی یا هر دوی a و b ممکن باشد، می‌توان با قریب‌های می‌گیری ماسب کماکان از روش‌های بالا استفاده کرد. این نیز قابل ذکر است که هرگاه پاره‌خط‌هایی به طول a و b داده شده باشد، ترسیمات هندسی فوق به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج قابل اجرا هستند.

حال می‌خواهیم چهار عمل اصلی را به صورت حسابی یا جبری توصیف کیم. فرض کیم $a + b = b_0/b_1b_2b_3\dots$ دو عدد مثبت باشد. چگونه باید $a + b$ را محاسبه کرد؟ اگر بسط اعشاری a و b مختومه باشد روش محاسبه $a + b$ را در دبستان آموخته‌ایم. به طور کلی اگر a و b گویا باشد، آنها را به صورت $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{m'}{n'}$ می‌نویسیم، که در اینجا n', m', n, m عدد صحیح مثبت هستند، و داریم $a + b = \frac{nm' + n'm}{nn'}$. مشکل وقتی است که a و b ناگویا باشد. روشن است که الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست در اینجا جواب‌گو نیست زیرا که در سمت راست این اعداد مختومه نمی‌شوند و نقطهٔ شروعی وجود ندارد.

$$\begin{array}{r} a_0 / a_1 a_2 a_3 \dots \\ + b_0 / b_1 b_2 b_3 \dots \\ \hline ? \end{array}$$

ولی می‌توان یک راه تقریب عملی به صورت زیر ارائه کرد. اگر هر یک از دو عدد بالا رقم پس از n رقم اعشار مختومه کیم عده‌های $b' = b_0/b_1\dots b_n$ و $a' = a_0/a_1\dots a_n$ به دست می‌آید که تقریب‌های a و b هر یک با خطای کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{10^n}$ هستند. حال اگر a' و b' را به طریق عادی جمع کیم حاصل حداقل $\frac{1}{10^n}$ با مجموع $a + b$ فاصله دارد. با بزرگ گرفتن n می‌توان $\frac{2}{10^n}$ ، یعنی حداقل خطای حاصل جمع، را به دلخواه کوچک کرد. اگر نمی‌توان به سادگی نشان داد که $a + b$ در واقع کوچکترین کران بالایی این تقریب‌های است. در مورد حاصل ضرب و خارج قسمت (به فرض مخرج $\neq 0$) می‌توان به روش مشابهی از کسرهای مختومه برای تقریب استفاده کرد ولی در این دو مورد اگر $|ab - a'b'| \leq \frac{1}{10^n}$ و $|a - a'| \leq \frac{1}{10^n}$ ، تخمین خطای حاصل ضرب و خارج قسمت، یعنی $|a'b' - ab| \leq \frac{1}{10^n}$

می‌کیم که در برگیرنده همه این موارد است و کاربردهای فراوان دیگری نیز خواهد داشت.
مقصودمان از یک قطعه از اعداد صحیح مجموعه‌ای به شکل زیر متشکل از اعداد صحیح است:

$$\{k, k+1, k+2, \dots\}$$

یعنی قطعه شامل همه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی k است. اگر S یک قطعه از اعداد صحیح باشد و E یک مجموعه، هر تابع $a : S \rightarrow E$ را یک دنباله (در E) می‌نامد. بدین ترتیب a به هر عضو n از S ، عصری $a(n)$ از E نسبت می‌دهد. معمولاً به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n و تصویر تابع a به ترتیب صعودی ردیف می‌کیم:

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \quad (1)$$

نماد $(a_i)_{i=k}^{\infty}$ نیز برای نمایش دنباله به کار می‌رود. بدین ترتیب معمولاً به جای اینکه دنباله را یک تابع از S به E تلقی کیم، دنباله را مجموعه‌ای از عناصر E تلقی می‌کیم که به ترتیب از k شماره‌گذاری شده است. ضمماً لزومی ندارد که a_i ها، به عنوان اعضای E ، متمایز باشند، یا به زبان تابعی، تابع لزوماً یک به یک فرض نمی‌شود.

۱-۶) چند مثال

۱-۱-۱) دنباله $\mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

این یک دنباله از اعداد حقیقی است که به سوی نقطهٔ 0 تجمع می‌کند.

۱-۱-۲) دنباله $\mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ که به صورت

$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

تعریف می‌شود دنباله‌ای دیگر از اعداد حقیقی است که با افزایش اندیس n به تدریج بزرگتر می‌شود و هیچ جا تجمع نمی‌کند.

(۱-۱-۳) دنباله $\mathbb{C} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{i^n}{n}$$

چند جملهٔ اول این دنباله عبارت‌دار:

$$i, -\frac{1}{2}, -i, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, \frac{-1}{5}, \dots$$

این اعداد به صورت چرخشی چهار نیم محور صفحه را متاواپاً سیر می‌کند و به سوی ° تجمع می‌کند (شکل ۲).

(۱-۱-۴) \mathcal{L} را مجموعهٔ خطوط راست در صفحه می‌گیریم و تابع $\mathcal{L} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

a_n خط راست گذرا از ° با شیب n است، یعنی خط راست $y = nx$ (شکل ۳). این یک دنبالهٔ خطوط راست است که به سوی محور y میل می‌کند.

(۱-۱-۵) \mathcal{F} را مجموعهٔ تابع‌های از \mathbb{R} به \mathbb{R} می‌گیریم و تابع $\mathcal{F} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$c(n)$ تابع $\cos nx$ است (شکل ۴). هر c_n یک تابع تماوی است با دورهٔ تماوب $\frac{2\pi}{n}$.

در این مرحله ما فقط به دنباله‌های عددی می‌پردازیم یعنی دنباله‌های $E \rightarrow S$ که در آن E معمولاً \mathbb{C} یا \mathbb{R} است. بحث کلی را برای دنباله‌های اعداد مختلط می‌نویسیم و از آنجا که \mathbb{R} زیرمجموعه‌ای از \mathbb{C} تلقی می‌شود، می‌توان دنباله‌های اعداد حقیقی را نیز به عنوان دنباله‌هایی از اعداد مختلط در نظر گرفت. در بعضی مثال‌ها مانند (۱-۱-۶) و (۱-۱-۳) می‌بیسیم که با افزایش اندیس n اعضای دنباله به نقطهٔ خاصی نزدیک می‌شوند. اگر دقیق دید یا تشخیص دستگاه‌های مشاهده مثلًا ° > e باشد، آنگاه اگر اعضای دنباله در فاصله‌ای کوچکتر از e نسبت به نقطهٔ تجمع قرار گیرند، آنگاه نمی‌توان آنها را از نقطهٔ تجمع تمیز داد، انگار که دنباله به حالت سکون رسیده است. این مفهوم را "همگرایی" می‌نامیم و به شکل دقیق زیر تعریف می‌کیم:

(۱-۱-۶) تعریف. دنباله $E \rightarrow S$: a را به نقطهٔ a همگرا می‌نامیم یا می‌گوییم a_n به a میل

می‌کند، (و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) یا $a_n \rightarrow a$

در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد که هرگاه $n \geq N$ آنگاه

$$|a_n - a| < \epsilon$$

توجه کید که طبق این تعریف، هر درجه تشخیص ϵ که مظور شود، قرار است مرحله‌ای N علی‌الاصول وابسته به ϵ ، وجود داشته باشد که از آن مرحله به بعد، a_n ها از a غیر قابل تشخیص باشند.

(۳-۶) چند مثال

(۱-۳-۶) به مثال ۶-۱-۱ توجه کید. درایجا داریم $\epsilon > 0$ زیرا که اگر $\epsilon \leq \frac{1}{n}$ مظور شود، با گرفتن عدد صحیح N بزرگتر از $\frac{1}{\epsilon}$ ، یعنی $n \geq N$ ، داریم: هرگاه $n \geq N$ آنگاه:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۲-۳-۶) در مثال ۶-۳-۳، دنباله به 0 همگراست زیرا که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، اگر مجدداً N را بزرگتر از $\frac{1}{\epsilon}$ می‌گیریم. برای $n \geq N$ داریم:

$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۳-۳-۶) فرض کید $c = c_0 + c_1 c_2 c_3 + \dots$ یک عدد مثبت به صورت بسط اعشاری باشد. دنباله C_n را به صورت بسط‌های مختومه این عدد تعریف می‌کیم؛ یعنی:

$$C_0 = c_0, \quad C_1 = c_0/c_1, \quad C_2 = c_0/c_1 c_2, \quad \dots$$

ادعا می‌کیم $c \rightarrow C_n$. فرض کید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد N را طوری می‌گیریم که برای $n \geq N$ داریم:

$$|c - C_n| = |c_0 + c_1 c_2 c_3 + \dots - (c_0 + c_1 c_2 + \dots)| \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^N} < \epsilon$$

(۴-۳-۶) مثال فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد. فرض کید $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ و مجموعه $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ دارای کران بالایی باشد.

نشان می‌دهیم a_n به کوچکترین کران بالایی مجموعه فوق میل می‌کند. نخست می‌دانیم که طبق اصل تمامیت برای مجموعه $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ کوچکترین کران بالایی a وجود دارد. حال هر $e > 0$ که مظور شود، به بازه $[a - e, a + e]$ نگاه می‌کیم. اگر هیچ a_N در این بازه قرار نگیرد، از آنجا که یک کران بالایی برای مجموعه a_n هاست، باید داشته باشیم $a_n \leq a - e$ برای هر n . با این هر عدد بین $a - e$ و $a + e$ یک کران بالایی برای مجموعه، کوچکتر از a ، خواهد بود که خلاف این فرض است که a کوچکترین کران بالایی برای $\{a_0, a_1, \dots\}$ می‌باشد. پس N وجود دارد که a_N در $[a - e, a + e]$ قرار می‌گیرد. البته $a - e < a_N \leq a + e$. از آنجا که دنباله (a_n) غیرنژولی است و هر a_n باید کوچکتر از کران بالایی a یا مساوی آن باشد، برای هر $n \geq N$ داریم:

$$a - e < a_N \leq a_n \leq a$$

با این برای هر $n \geq N$ ، $|a_n - a| < e$ برقرار است.

اکون به مسائلهایی که در آغاز این بخش مطرح شد باز می‌گردیم؛ یعنی روش محاسبه مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت اعداد حقیقی با تقریب مختومه ساختن را بررسی می‌کیم. گزاره زیر در واقع کلی‌تر از این نیاز خاص است و بعداً موارد استفاده بسیار دیگری نیز خواهد داشت.

(۶-۴) گزاره. فرض کیم $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ دو دنباله اعداد مختلط باشند که $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$. در این صورت:

الف) اگر دنباله $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n + b_n$ تعریف کیم؛ داریم $c_n \rightarrow a + b$.

ب) اگر دنباله $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = a_n - b_n$ تعریف کیم؛ داریم $c_n \rightarrow a - b$.

ج) اگر مضانیاً فرض کیم $b_n \neq 0$ برای هر n و $a_n \neq b_n$ و دنباله $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ را به صورت $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ تعریف کیم؛ داریم $c_n \rightarrow \frac{a}{b}$.

اثبات. (الف) فرض کیم $e > 0$ داده شده باشد، N را طوری جستجو می‌کیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|a_n - a| < e$. اگر بتوانیم N را طوری تأمین کیم که $\frac{e}{2} < |a_n - a| < e$ و

هر دو بهازای $n \geq N$ برقرار شوند، با بر نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

ولی از آنجا که $a_n \rightarrow a$ برای $n \geq N_1$ وجود دارد که $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ نتیجه می‌دهد که $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ و نیز از آنجا که $b_n \rightarrow b$ برای $n \geq N_2$ وجود دارد که $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. پس با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) در اینجا نیز برای $e > 0$ داده شده، N را طوری جستجو می‌کیم که $n \geq N$ نتیجه دهد $|a_n b_n - a b| < e$. در اینجا مرتبط ساختن $|a_n b_n - a b|$ با دو کمیت $|a_n - a|$ و $|b_n - b|$ به سادگی قسمت (الف) نیست؛ مثلاً حاصل ضرب $(a_n - a)(b_n - b)$ برابر است با $a_n b_n - a b_n + a b - a b_n + a b$ که در آن دو جمله زاید وجود دارد و به جای تفاضل $a_n b_n - a b$ ، مجموع این دو جمله ظاهر می‌شود. از حکم کمکی زیراستفاده می‌کیم:

(5-۶) لم. هرگاه (c_n) دنباله‌ای همگرا از اعداد مختلط باشد و $c_n \rightarrow c$ ، آنگاه عددی $K > 0$ وجود دارد که $|c_n| \leq K$ و $|c| \leq K$ برای هر n (یا به اصطلاح، هر دنباله همگرا کراندار است).

اثبات ۶-۵. حول c یک گوی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف همگرایی، عددی N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|c_n - c| < 1$. با براین برای $n \geq N$ داریم $|c_n| < |c| + 1$ زیرا که هر نقطه داخل گوی شعاع ۱ حول c باید نزدیکتر از $1 + |c|$ باشد. حال در بین تعداد متناهی عضو دنباله، قبل از مرحله N ، که در بیرون گوی هستند، فاصله دورترین آنها به c را به R نمایش می‌دهیم. در این صورت $K = \max\{R, |c| + 1\}$ عدد مورد نظر است. \square

اکنون به اثبات قسمت (ب) از گزاره باز می‌گردیم. عبارت $a_n b_n - a b$ را به صورت

می‌نویسیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a b| &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - a b| \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \end{aligned}$$

حال طبق لم ۶-۵، کرانی K_1 برای دنباله (a_n) و K_2 برای (b_n) وجود دارد،

پس:

$$|a_n b_n - a b| \leq K_1 |b_n - b| + K_2 |a_n - a| \quad (2)$$

از آنجا که $a_n \rightarrow a$ برای $n \geq N_1$ وجود دارد که برای $n \geq N_1$ داریم $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K_2}$ ؛ عددی N_1 وجود دارد که برای $n \geq N_2$ نتیجه می‌دهد که $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K_1}$ و نیز $b_n \rightarrow b$ برای $n \geq N_2$ وجود دارد که برای $n \geq N_2$ داریم $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K_1}$. با گرفتن $N = \max\{N_1, N_2\}$ هر دو نامساوی برقرارند و نتیجه می‌شود که $|a_n b_n - a b| < \epsilon$.

(ج) برای اثبات $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ کافی است نشان دهیم $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ و از حکم (ب) برای حاصل ضرب a_n استفاده کیم. در اینجا نیز یک لم کمکی مشابه و معکوس لم قبلی مورد نیاز است:

(۶-۶) لم. هرگاه (b_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصرف باشد که $b_n \rightarrow b$ و $b_n \neq 0$ آنگاه

عددی $k > 0$ وجود دارد که $|b_n| \geq k$ و $|b| \geq k$ برای هر n .

اثبات. نقطه b در فاصلهٔ مثبت $|b|$ از 0 قرار دارد. اگر گوی به شعاع $\frac{1}{r}$ به مرکز b را در نظر بگیریم، چون $b_n \rightarrow b$ وجود دارد که برای $n \geq N$ پس $\frac{|b_n - b|}{|b_n|} < \frac{|b|}{r}$ برای $n \geq N$. برای تعداد متناهی عضو دنباله که ممکن است در خارج این گوی باشد، یعنی برای $n < N$ چون همه غیر صفر هستند، یکی کوچکترین فاصلهٔ مثبت ممکن از 0 را دارد. این فاصله را به r نمایش می‌دهیم. حال $\min\{r, \frac{|b|}{r}\}$ عدد k مورد نظر است. \square

به اثبات (ج) باز می‌گردیم؛ می‌خواهیم ثابت کیم $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. فرض کیم $e > 0$ داده شده باشد.

می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \\ &\leq \frac{|b_n - b|}{k^2} \quad (\text{طبق لم ۶-۶}) \end{aligned} \quad (3)$$

حال چون $b_n \rightarrow b$ برای $n \geq N$ نتیجه می‌دهد $|b_n - b| < ek^2$ و $|b_n - b| < ek^2 > 0$ برای $n \geq N$ داریم

$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < e$.

بدین ترتیب، برای محاسبه حاصل ضرب و خارج قسمت دو عدد ... و $a = a_0 / a_1 a_2 a_3 \dots$

می‌توان از تقریب‌های مختومه $b = b_0 / b_1 \dots b_n$ و $a = a_0 / a_1 \dots a_n$ استفاده کرد

و با افزایش n به مقدار واقعی b نزدیکتر شد. اما در مورد حاصل ضرب و خارج قسمت تفاوت عمده‌ای با مجموع وجود دارد. در مورد مجموع دیدیم که اگر a و b هر یک پس از n رقم بعد از ممیز مختومه شوند، خطای مجموع از $\frac{2}{10^n}$ بیشتر نیست، مستقل از آنکه اعداد a و b چه باشد. در مورد $a = a_0/a_1 \dots a_n$ و $b = b_0/b_1 \dots b_n$ به عوایان تقریب‌های مختومه a و b در نظر گرفته شوند، انحراف حاصل ضرب (و خارج قسمت، به ترتیب) این دو عدد از ab (و $\frac{a}{b}$ ، به ترتیب) فقط به n وابسته نیست، بلکه به اندازه a و b نیز بستگی خواهد داشت. مثلاً در اثبات ۶-۴ (ب)، طبق (۲) داریم:

$$|a_n b_n - a b| \leq K_1 |b_n - b| + K_2 |a_n - a|$$

که در اینجا K_1 یک کران بالایی برای دنباله (a_n) و K_2 یک کران بالایی برای دنباله (b_n) است. بدین ترتیب اگر قدر مطلق a_n ‌ها به نسبت بزرگ باشد، باید $|b_n - b|$ را متناسبًا کوچک انتخاب کرد، و همین طور برای b_n ‌ها در رابطه با $|a_n - a|$ ، تا دقیق مورد نظر حاصل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

۷-۶) مثال

۱-۶) دو عدد $a = \frac{487}{r_1 r_2 r_3 \dots}$ و $b = \frac{3}{s_1 s_2 s_3 \dots}$ داده شده‌اند. می‌خواهیم n را طوری اختیار کیم که انحراف حاصل ضرب ab کوچکتر از 10^{-5} باشد. برای چنین n داریم $|a_n - a| \leq 10^{-n}$ و $|b_n - b| < 10^{-n}$ پس طبق :

$$|a_n b_n - ab| \leq (K_1 + K_2) 10^{-n}$$

می‌توان $K_1 = 488$ و $K_2 = 4$ را به عوایان کران بالایی برای دنباله‌های مختومه در نظر گرفت، پس طرف راست نامساوی بالا کوچکتر از 10^{-n} (۴۹۲) است. اگر بخواهیم این خط کوچکتر از 10^{-5} باشد، $n = 8$ کار می‌کند زیرا $10^3 < 492$ ولی $n = 7$ کار نمی‌کند. بدین ترتیب اگر هر یک از a و b

پس از هشت رقم پس از ممیز مختومه شوند، انحراف حاصل ضرب دو عدد مختومه از حاصل ضرب واقعی کوچکتر از 10^{-5} خواهد بود.

(۲-۷-۶) عدد ... $0/032190990999$ را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را پس از n

رقم بعد از ممیز مختومه کیم. تقریب را به b_n نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم n را طوری اختیار کیم که اختلاف $\frac{1}{b_n}$ با $\frac{1}{b}$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. طبق نامساوی (۳) در اثبات ۶-۶ داریم:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{1}{k^2} |b_n - b|$$

که در آن $0 < k$ عددی است که $k \geq |b_n| \geq |b|$. در اینجا می‌توانیم k را برابر $10/0321$ اختیار کیم و با توجه به این که $10^5 > 10^{-3} (321)^2 > 10^{-3} (0/0321)^2$ و $10^3 < \frac{1}{k^2}$ ، پس

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < (10^3) |b_n - b|$$

برای اینکه طرف راست کوچکتر از 10^{-3} باشد، کافی است که $|b_n - b|$ کوچکتر از 10^{-6} باشد، به این معکوس $0/032190$ از 10^{-6} انحرافی کوچکتر از 10^{-3} خواهد داشت. محاسبه با ماشین حساب به نسبت قوی نشان می‌دهد که:

$$(0/032190990999)^{-1} = 31/06459195$$

$$(0/032190)^{-1} = 31/06554830$$

اختلاف این دو عدد برابر $10/00095635$ است که از 10^{-3} کوچکتر می‌باشد.

دنباله عددی و سری عددی (۲)

در عمل دسته مهمی از دنباله‌ها از جمع زدن متوالی یا انباشتن جملات یک دنباله داده شده حاصل می‌شوند. مثلاً اگر به نمایش اعشاری عددی نگاه کیم:

$$c = c_0/c_1c_2c_3\dots$$

این در واقع حد دنباله اعداد اعشاری مختومه زیر است:

$$c_0, c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100}, \dots$$

که این دنباله از انباشتن متوالی دنباله زیر به دست می‌آید:

$$c_0, \frac{c_1}{10}, \frac{c_2}{100}, \dots$$

به طوری کلی اگر دنباله $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ داده شده باشد، مقصود از سری مجموع‌های جزیی این دنباله، دنباله زیر است:

$$a_k, a_k + a_{k+1}, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}, \dots$$

اگر دنباله اخیر به A همگرا باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$. در غیر این صورت، سری واگرا خوانده می‌شود. بدین ترتیب، اگر دنباله عدد صحیح نامنفی c_0, c_1, c_2, \dots داده شده باشد که در آن برای $1 \leq c_i \leq 9$ ، $i \geq 0$ ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$ طبق اصل تمامیت همگراست و حد آن به $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایش داده می‌شود. وقتی همه a_k ها اعداد حقیقی مثبت باشند واضح به نظر می‌رسد که انباشتن a_n ها فقط وقتی ممکن است منجر به یک حد متناهی شود که a_n ها سریعاً کوچک شوند. مثلاً برای $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$ ، جمله اندیس n برابر

است که به صفر میل می‌کند وقتی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow +\infty$. در واقع شرط $a_n \rightarrow 0$ یک شرط لازم برای همگرایی است حتی اگر a_n ها عدد مختلط باشند.

(۱-۷) شرط لازم همگرایی. اگر سری اعداد مختلط $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، داریم $a_n \rightarrow 0$ وقتی $n \rightarrow +\infty$.

اثبات. مجموع جزیی $a_k + \dots + a_n$ را به S_n نمایش می‌دهیم. فرض کنید سری $S = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به همگرایست، یعنی $S_n \rightarrow S$ داده شده باشد، می‌خواهیم N را طوری بیابیم که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| < e$. برای $S_n \rightarrow S$ وجود دارد که اگر $n > N_1$ آنگاه $|S_n - S| < \frac{e}{2}$. قرار می‌دهیم $N = N_1 + 1$ ، پس برای $n > N$ داریم:

$$|S_n - S| < \frac{e}{2}, \quad |S_{n-1} - S| < \frac{e}{2}$$

بنابراین طبق نامساوی مثلث

$$|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < e$$

ولی $S_n - S_{n-1} = a_n$ و حکم به اثبات می‌رسد.
لازم به تأکید است که این شرط به تنها یی برای همگرایی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ کافی نیست و در واقع a_n ها ممکن است در عین کوچکتر شدن و میل کردن به صفر، آنقدر سریع کوچک نشوند که مجموع آنها به عددی میل کند. مثال ساده و معروف زیر را باید همواره در ذهن داشت.

(۲-۷) سری هارمونیک. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا شرط لازم همگرایی برقرار است زیرا که $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ولی نشان می‌دهیم سری واگرای است. به گروه‌بندی زیر از جملات سری تا اندیس $2^k = n$ توجه کنید:

$$S_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

داریم $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

بنابراین $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ ، چون با افزایش k ، S_{2^k} به دلخواه بزرگ می‌شود، S_n ها به حدی (متناهی)

میل نمی‌کنند. این مثال نشان می‌دهد که بررسی همگرایی یک سری ممکن است در مواردی دشوار باشد. در این جلسه ضمن معرفی چند سری مرجع، آزمون‌هایی برای همگرایی سری‌ها مطرح خواهیم کرد.

دو مثال زیر نقطه ارجاع بسیاری از سری‌های دیگر و نیز بحث‌های نظری هستند.

دو مثال (۳-۷)

(۳-۱) سری هندسی. فرض کنید $a \neq 0$ و r دو عدد مختلف داده شده باشند. سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را در نظر می‌گیریم که از انباشتن دنباله زیر به دست می‌آید:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

مورد $a = 0$ را کنار گذاشتیم زیرا که در این حالت همه جملات صفر می‌شوند و وضعیت سری مشخص است. نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$. نخست به اتحاد زیر توجه کنید

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (1)$$

که صحت آن را می‌توان با طرفین-وسطین تحقیق کرد. بنابراین به عنوان مجموع جزیی سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^N ar^n = a \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

حال اگر $|r| < 1$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ وقتی $N \rightarrow +\infty$ به $\frac{a}{1-r} r^{N+1} \rightarrow 0$ همگراست. بالعکس اگر $|r| \geq 1$ ، آنگاه $|ar^n| \geq |a| > 0$ و جمله n ام به صفر میل نمی‌کند، پس شرط لازم همگرایی برقرار نیست.

(۳-۲) سری p . برای $p > 0$ داده شده، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ سری p می‌نامند. در اینجا سری را فقط برای مقادیر صحیح p در نظر می‌گیریم. در آینده مقادیر غیر عدد صحیح نیز در نظر گرفته خواهد شد. برای $p = 1$ ، سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به دست می‌آید که دیدیم واگراست هر چند که جمله n ام

آن به صفر میل می‌کند وقتی $n \rightarrow +\infty$. برای $p = 2$ ، توجه کنید که

$$n > 1 : \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

و داریم

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - n} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N})$$

$$= 1 - \frac{1}{N}$$

بنابراین $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ به مقدار ۱ همگراست. حال داریم:

$$N > 1 : \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - n} = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

بنابراین دنباله (S_N) ، یک دنباله صعودی با کران بالایی است که طبق ۶-۳-۴

جلسه قبل به کوچکترین کران بالایی خود میل می‌کند. به همین ترتیب اگر $p > 2$ ، داریم $\frac{1}{n^p} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ دنبالهای صعودی با کران بالایی هستند، پس سری همگراست.

ایده اثبات فوق را برای ارجاع بعدی به صورت زیر ثبت می‌کنیم:

۴-۷) فرض کنید (a_n) یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت سری همگراست اگر و تنها اگر برای دنباله مجموعهای جزیی یک کران بالایی وجود داشته باشد.

اثبات. دنباله مجموعهای جزیی را در نظر می‌گیریم:

$$S_k = a_k, S_{k+1} = a_k + a_{k+1}, \dots$$

چون $a_i \geq 0$ ، داریم $S_k \leq S_{k+1} \leq S_{k+2} \leq \dots$. پس اگر S_n ها دارای کران بالایی باشند، طبق ۶-۳-۴، S_n به کوچکترین کران بالایی مجموعه $\{S_k, S_{k+1}, \dots\}$ میل می‌کند. بالعکس اگر دنباله (S_n) همگرا باشد، می‌دانیم که در واقع هر دنباله همگرا در \mathbb{C} کراندار است. \square

به دلایلی که به زودی خواهیم دید، سریهای اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. برای این گونه سری‌ها اکنون می‌توانیم با توجه به (۴-۷) چند آزمون همگرایی ارائه کنیم:

(۵-۷) فرض کنید دو دنباله از اعداد حقیقی غیرمنفی باشند و اندیسی N وجود داشته باشد، $n \geq k, l$ برای $a_n \leq b_n$ داشته باشیم. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

اثبات. چون جمع کردن تعدادی متناهی جمله اولیه اثری بر همگرایی یا واگرایی ندارد، کافی است در مورد سری های $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ بحث کنیم. اگر $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، دنباله مجموع های جزیی آن از کران بالایی، مثلاً $M > b_n$ برخوردار است. چون $a_n \leq b_n$ ، M کران بالایی برای مجموع های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نیز می باشد، پس طبق ۴-۷، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست. بالعکس اگر $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا نباشد، مجموع های جزیی آن دارای کران بالایی نیستند و چون $b_n \geq a_n$ مجموع های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ نیز به طور اولی کران بالایی ندارند، پس $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ واگراست. \square

در این آزمون مقایسه اندازه a_n و b_n به صورت تفاضل مطرح بود (یعنی $b_n - a_n \geq 0$). آزمون مشابهی برای نسبت وجود دارد:

(۶-۷) دو دنباله اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq 0$ برای $n \geq N$ در این صورت:

الف) اگر عددی $M > 0$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ برای n از مرحله ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر عددی $m > 0$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ برای n از مرحله ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

اثبات. الف) شرط $\sum_{n=l}^{\infty} (Mb_n)$ معادل $\sum_{n=l}^{\infty} a_n \leq Mb_n$ است. اگر B همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq Mb_n$ نیز همگراست.

ب) شرط $\sum_{n=l}^{\infty} a_n \geq mb_n$ معادل $a_n \geq mb_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} (mb_n)$ نیز واگراست چون $m \neq 0$ (اگر $m = 0$ همگرا باشد، با ضرب کردن هر جمله در $\frac{1}{m}$ نتیجه می شود که سری $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگراست) پس چون $a_n \geq mb_n$ طبق ۴-۷ سری $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. \square

بسیاری اوقات حالت خاصی از (۵-۷) به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۷-۷) دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $0 \neq b_n$ برای $\sum_{n=l}^{\infty} (a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $\sum_{n=l}^{\infty} (b_n)$ وجود داشته باشد و برابر L باشد. در این صورت: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq N$. فرض کنید

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $0 < L < \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. این در واقع حالت خاصی از ۶-۷ است. در (الف)، می‌توان از $M = L + 1$ استفاده کرد زیرا که اگر $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ باشد، از مرحله‌ای به بعد همهٔ $\frac{a_n}{b_n}$ ها از $L + 1$ کوچکتر می‌شوند. در (ب)، اگر $0 < L < m = \frac{L}{2}$ باشند، با گرفتن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ می‌بینیم که چون $\frac{a_n}{b_n} > L$ باشد، از $m < \frac{a_n}{b_n}$ ها باید از $m < \frac{a_n}{b_n} < L$ باشند. \square

(۸-۷) مثال. وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - n + 3}{n^4 + 1}$ را از نظر همگرایی بررسی می‌کنیم. در این گونه مثال‌ها آنچه تعیین‌کننده است، اختلاف درجهٔ بالاترین جملهٔ صورت و مخرج است. اگر

(درجهٔ صورت) - (درجهٔ مخرج) = p ، مقایسه با $\frac{1}{n^p}$ کارساز است. در مثال فوق:

$$\frac{\frac{2n^3 - n + 3}{n^4 + 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^4 - n^2 + 3n}{n^4 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

بنابراین واگرایی $\frac{1}{n}$ نتیجهٔ می‌دهد که سری داده شده واگراست.

(۹-۷) نکته. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ دو سری همگرا، به ترتیب به A و B باشند. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن $c_n = a_n + b_n$. ادعا می‌کنیم که $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ به $A + B$ همگراست. در واقع اگر مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ به A و B نمایش دهیم، داریم $C_n = A_n + B_n$ و حکم از گزارهٔ ۶-۴ جلسهٔ قبل به ترتیب به A_n و B_n نمایش دهیم، به $C_n = A_n + B_n = A + B$ می‌رسد. به همین ترتیب اگر c یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می‌شود که نتیجهٔ می‌شود. به همین ترتیب اگر c یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty} cA_n$ به cA همگراست. ولی نباید تصور کرد که اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = B$ باشند، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} (ca_n)$ به cA نباشد. مجموع جزیی سری اخیر تا مرحلهٔ N برابر $\sum_{n=k}^N (a_n b_n) + \cdots + a_N b_N$ است. مجموع جزیی سری اخیر تا مرحلهٔ N برابر $\sum_{n=k}^N (a_n b_n)$ است

در حالی که حاصل ضرب مجموعهای جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ هر یک تا مرحله N ، برابر $(a_k + \cdots + a_N)(b_k + \cdots + b_N)$ می‌باشد.

به کمک سری هندسی می‌توان دو آزمون بسیار مؤثر برای سری‌های اعداد مثبت ارائه کرد. دو آزمون زیر هر یک، یکی از ویژگی‌های سری هندسی را مبنا قرار می‌دهد. به سری هندسی زیر توجه کنید که در آن r یک عدد حقیقی مثبت فرض می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

می‌دانیم شرطی لازم و کافی برای همگرازی این سری این است که $1 < r$. حال می‌توان r را دو گونه تعبیر کرد. از سویی r نسبت دو جمله متوالی است و از سویی دیگر r ریشه n ام جمله اندیس n این سری. در زیر "آزمون نسبت" در شرایطی که نسبت جملات متوالی تقریباً رفتاری مانند رفتار سری هندسی دارد، یعنی حدوداً ثابت است، کار می‌کند. "آزمون ریشه" وقتی کارایی دارد که ریشه n ام جمله اندیس n حدوداً ثابت باشد.

(۷-۱۰) آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $1 < \rho$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\rho \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر مرحله‌ای N وجود داشته باشد که برای $n \geq N$ داشته باشیم $1 \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ آنگاه واگراست.

اثبات. طبق فرض داریم $\rho \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ برای $n \geq N$ ، پس:

$$a_{N+1} \leq \rho a_N$$

$$a_{N+2} \leq \rho a_{N+1} \leq \rho^2 a_N$$

⋮

$$a_{N+k} \leq \rho a_{N+k-1} \leq \cdots \leq \rho^k a_N$$

بنابراین از مقایسه سری با جملات مثبت $\dots + a_{N+1} + a_{N+1} + \dots$ با سری هندسی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n < \rho + a_N \rho + a_N \rho^2 + a_N \rho^3 + \dots$ همگر است. در مورد (ب)، داریم

$$\dots \geq a_{N+2} \geq a_{N+1} \geq a_N > 0$$

بنابراین شرط لازم همگرایی، $a_n \rightarrow 0$ تأمین نمی‌شود، و سری واگر است. \square

گاهی اوقات یک نتیجه ایده آزمون فوق به صورت زیر کفایت می‌کند. فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$ و $\rho < R$. طبق تعریف حد دنباله، مراحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ ، پس $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < \rho - R$. اگر $R < \rho < 1$ در نظر می‌گیریم، $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < \rho - R = 1 - \rho$ داشته و برابر R باشد. اگر $R > \rho < 1$ ، عددی ρ بین R و 1 در نظر می‌گیریم و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > 1$ ، مجدداً مراحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < R - \rho = 1 - \rho$ و سری واگر است. در حالتی که $R = 1$ ، نتیجه قاطعی از این آزمون حاصل نمی‌شود. مثلاً برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^p} = 1$$

مستقل از اینکه p چه باشد. ولی این سری به ازای $1 = p$ واگرا و به ازای $1 > p$ همگر است.

(۱۱-۷) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > 0$ داده شده باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگر است. از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

پس این سری همگر است.

(۱۲-۷) آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $1 < \rho$ وجود داشته باشد و مراحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ ، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگر است.

ب) اگر برای بی‌نهایت اندیس n داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ، آنگاه سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگر است.

اثبات. برای (الف) داریم $a_n \leq \rho^n$ برای هر $N \geq n$ و مقایسه با سری هندسی $\sum \rho^n$ ، همگرایی سری را به اثبات می‌رساند. در مورد (ب)، $1 \geq \sqrt[n]{a_n}$ به ازای بی‌نهایت اندیس n ، نشان می‌دهد $1 \geq \sqrt[n]{a_n}$ به ازای بی‌نهایت اندیس n ، پس شرط لازم همگرایی $a_n \rightarrow 0$ نمی‌تواند برقرار باشد و سری واگراست.

در اینجا نیز بسیاری اوقات $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ در نظر گرفته می‌شود. اگر این حد وجود داشته باشد و آن را به R نمایش دهیم، سه وضعیت زیر ممکن است رخ دهد. اگر $1 < R$ سری همگراست زیرا که اگر عددی ρ بین R و 1 اختیار کنیم، $1 < \rho < R$ ، از تعریف حد دنباله نتیجه می‌گیریم مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|\sqrt[n]{a_n} - R| < \rho - R$ ، پس $\sqrt[n]{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $1 > R$ ، پس از مرحله‌ای N داریم $|\sqrt[n]{a_n} - R| < R - \sqrt[n]{a_n}$ و واگرایی نتیجه می‌شود. در اینجا نیز $1 = R$ نتیجه‌ای در مورد همگرایی نمی‌دهد زیرا که مجدداً در مورد سری p :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^p}}\right)^p$$

از آنجا که $1 = \sqrt[n]{n}$ ، حد عبارت بالا به ازای هر p برابر 1 است. پس این آزمون نمی‌تواند میان سری واگرای $\sum \frac{1}{n^p}$ و سری همگرای $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}}$ تمیز دهد.

(۱۳-۷) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > 0$ داده شده است، نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ همگراست.

طبق آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

پس سری همگراست. می‌توانستیم این امر را از مقایسه $\frac{x^n}{n^n} \leq \frac{x^n}{n!}$ نیز به کمک مثال ۷-۹ نتیجه بگیریم.

دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسه قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیر منفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیر منفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیر منفی قضیه زیر است:

(۱-۸) قضیه. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ یک دنباله اعداد مختلط باشد. اگر $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسه قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ سری قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیه بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیه بالا نخست به یک نکته کلی اشاره می‌کنیم.

(۲-۸) گزاره. فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$ یک دنباله اعداد مختلط باشد، $c_n = a_n + ib_n$ و $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$ عدد مختلط. در این صورت $c_n \rightarrow c$ اگر و تنها اگر $a_n \rightarrow a$ و $b_n \rightarrow b$.

اثبات. داریم

$$|a_n - a|, |b_n - b| \leq |c_n - c| \quad (1)$$

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (2)$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائم کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید $c \rightarrow c_n$ ، پس برای هر $\epsilon > 0$ وجود دارد که $|c_n - c| < \epsilon$. برای هر $N > n$ $|a_n - a| < \epsilon$ و $|b_n - b| < \epsilon$ وقتی $n > N$. پس $|a_n - a| < \epsilon$ و $|b_n - b| < \epsilon$.

بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که $|a_n - a| < \epsilon$ و $|b_n - b| < \epsilon$. برای a داده شده، نتیجه می‌دهد $a \rightarrow a_n$ و $b \rightarrow b_n$. بالعکس فرض کنید $a \rightarrow a_n$ و $b \rightarrow b_n$. برای e داده شده،

$$n > N_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{و وجود دارند که: } N_2 > N_1$$

$$n > N_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{3}$$

با قرار دادن $\{N_1, N_2\}$ می‌بینیم که اگر $N > n$ آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم

$$\square \quad |c_n - c| < e \quad \text{و حکم به اثبات می‌رسد.}$$

به زبان هندسی، گزاره ۸-۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای $c \rightarrow c_n$ این است که مؤلفه افقی (قسمت حقیقی) c_n به مؤلفه افقی (قسمت حقیقی) c میل کند و مؤلفه قائم (قسمت موهومی) به مؤلفه قائم (قسمت موهومی) c_n میل کند.

حال قضیه ۸-۱ را در حالتی که c_n ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد

$$\text{حقیقی: } (c_n)_{n=k}^{\infty} \text{ داریم که } \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| \text{ همگراست. می‌نویسیم:}$$

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون $|c_n| \sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت (۱) ضرب شوند، نتیجه می‌شود که $(-|c_n|) \sum_{n=k}^{\infty} (-|c_n|)$ همگراست. پس اگر ثابت شود که $(c_n + |c_n|) \sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$ نیز همگراست، آنگاه مجموع جمله به جمله دو سری همگرایی فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$0 \leq c_n + |c_n| \leq 2|c_n|$$

و $\sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسه جلسه قبل، ۵-۷، سری $\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگراست.

اکنون قضیه ۸-۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$ ، پس $|a_n| \leq |c_n|$. اگر $\sum |c_n|$ همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه، $\sum |a_n|$ و $\sum |b_n|$ همگرا خواهند شد. ولی a_n و b_n اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزاره ۸-۲، $\sum c_n = a_n + ib_n$ نیز همگراست و اثبات ۸-۱ به انجام می‌رسد.

۳-۸) چند مثال.

(۱-۳-۸) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ را بررسی می‌کنیم. داریم $|n+i| = \sqrt{n^2 + 1} > n$ ، پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+i|^2}$ سری p ، بهارای ۲ است و در مقایسه با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرایی دارد. نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$ همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیربرقرار است:

(۴-۸) آزمون سری متناوب لایپنیتس. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست.

اثبات. به دنباله مجموعهای جزئی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 - a_2, S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \dots$$

مجموعهای جزیی با اندیس فرد، یعنی S_1, S_3, S_5, \dots را در نظر بگیرید. چون $a_{2n+1} \geq a_{2n}$ داریم:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

پس

$$\dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

همین طور چون $a_{2n+2} \geq a_{2n+1}$ برای مجموعهای جزیی زوج داریم

$$S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$\dots \geq S_1 \geq S_4 \geq S_2$$

توجه کنید که a_1 یک کران بالایی برای دنباله مجموعهای جزیی زوج است زیرا که $a_i \geq a_{i+1}$ پس:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + - \dots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

بنابراین دنباله مجموعهای جزیی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً S میل می‌کند.

نشان می‌دهیم کل دنباله مجموعهای جزیی، $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ، به S میل می‌کند. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده

است. از آنجا که $N_1, S_{2n} \rightarrow S$ وجود دارد که:

$$n > N_1 : |S_{2n} - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم $n > N_2$ وجود دارد که:

$$n > N_2 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ داریم، پس $n = 2k > N_1$ ، $N = 2 \max\{N_1, N_2\}$ داریم

و اگر $n = 2k - 1 > N_2$ آنگاه $2k > N_2$ و:

$$\begin{aligned} |S_{2k-1} - S| &\leq |S_{2k-1} - S_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &= |a_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

□

پس $S_n \rightarrow S$ و حکم به اثبات می‌رسد.

در واقع ایدهٔ اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوبًا تغییر علامت می‌دهند و قدر مطلق جملات نوعاً کوچک‌تر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگ‌تر نمی‌شوند)، دنبالهٔ S_n روی محور حقیقی متناوبًا به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنهٔ جهش آن رو به تنازل به صفر است ($a_n \rightarrow 0$). به این ترتیب S_{2n} ها از طرف چپ و S_{2n+1} ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به کارگیری نماد \sum به عنوان حد سری گوشزد کنیم. معمولاً به معنای "مجموع" به کار می‌رود، مثلاً $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$. از آنجا که $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به معنای انباشتن متولی ولی تمام نشدنی a_i هاست، نماد \sum بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جملهٔ یک سری را در عدد ثابت c ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشی)، و نیز اگر $\sum b_n$ همگرا باشند، $(\sum a_n + b_n)$ نیز همگراست و به مجموع $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض‌پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر، یعنی $(\sum a_n + b_n)$ می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا باشد که همگرای مطلق نباشد، می‌توان با جایه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (3)$$

را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیرهمگراست که جمله نمونه هر یک به صفر میل می‌کند. یکی از این سری‌ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در $(\frac{1}{2})$ پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در -2 ، سری هارمونیک همگرا می‌شود). از طرفی دیگر چون $\frac{1}{2} > 1$ ، $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6} > \frac{1}{5}$ ، ...، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می‌شود. با این حال نشان می‌دهیم با جابجایی مناسب می‌توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد $\dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + 1$ را تا جایی جمع می‌کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می‌دهد باید تا $\frac{1}{15}$ جلو رفت:

$$\begin{aligned} 1 &< 2 \\ 1 + \frac{1}{3} &\simeq 1/32223 < 2 \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} &\simeq 1/52223 < 2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} &\simeq 1/9551 < 2 \\ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15} &\simeq 2/0218 > 2 \end{aligned}$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می‌کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن $\frac{1}{2}$ - کافی است:

$$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} \simeq 1/5218$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین

حساب می‌دهد:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) \simeq 2/0041 > 2$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} - (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) \simeq 1/7541$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریج‌گوچکتر می‌شود زیرا که $\frac{1}{n}$ به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد. قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی $\dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1$ قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیرنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.

پایداری محاسبه

از این بخش بررسی تابع‌های حقیقی یک متغیری را آغاز می‌کیم. مقصود از یک تابع حقیقی یک متغیری تابعی $S \rightarrow f$ است که در آن دامنه تابع، یعنی S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است. به این ترتیب به هر عضو s از S ، عدد حقیقی مشخصی $f(s)$ مسوب می‌شود. اگر f را، که معمولاً با یک فرمول یا دستورالعمل داده می‌شود، یک ماشین محاسبه یا برنامه‌ای رایانه‌ای فرض کیم، بهمازای ورودی s ، همواره خروجی مشخصی $f(s)$ حاصل می‌شود.

یکی از ملاحظاتی که در همهٔ محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود، موضوع تقریب است. نتیجه یک محاسبه یا حاصل به کارگیری یک تابع ممکن است عددی باشد که دانش "دقیق" آن به مظور کاربرد مورد نظر ضروری است. اما "دقیق" به چه معنی است؟ مثلاً توجه کنید که حتی عظیم‌ترین رایانه جهان حافظه‌ای محدود دارد و گنجایش ضبط و به کارگیری یک عدد اعشاری نامحدود ... c_1, c_2, c_3, \dots را ندارد. به علاوه در هر کاربرد نیز، حساسیت دستگاه‌ها و دقت سنجش، آستانه‌ای دارد که دقت بیش از آن نه عملی است و نه لزوماً ضروری. با براین در هر کاربرد یا مقوله، معمولاً اندازهٔ خطای قابل تحملی $0 < \epsilon$ مظور می‌شود که عملاً دو نتیجهٔ نزدیکتر از e به یکدیگر از هم غیرقابل تشخیص‌اند و تقریب تا این اندازه قابل قبول محسوب می‌شود.

در زمینهٔ محاسبهٔ مقدار توابع، معمولاً آستانهٔ دقتی برای نتیجهٔ حاصل از به کارگیری تابع مظور می‌شود و سوال اساسی این است که داده‌ها باید به چه دقتی معلوم باشد که حاصل محاسبه از دقت مورد نظر برخوردار شود. با ذکر چند مثال موضوع را پیگیری می‌کیم.

(۱-۹) چند مثال.

(۱-۹) تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f را به صورت $f(x) = 5x + 3$ تعریف می‌کیم. ورودی این تابع باید به چه دقت باشد که خطای خروجی آن کمتر از 10^{-4} باشد؟

حل و بحث. توجه کنید که چین سوالی می‌تواند مصدق عملی کاملاً معی‌داری داشته باشد. فرض کنید لازم است ابعاد یک تصویر رایانه‌ای را پنج برابر بزرگ کنیم به طوری که تصویر حاصل همچنان هموار به نظر رسد یعنی جزئیات عکس به صورت نقطه‌چین ظاهر نشود. به این مظور لازم است نقطه‌های مجاور از فاصلهٔ معی‌بی به هم نزدیک‌تر بمانند که چشم انسان عکس را به صورت هموار مشاهده کند. سوالی که در اینجا مطرح است این است که در شکل اولیه نقاط روشن باید چه اندازه به هم نزدیک باشند که پس از بزرگ‌سازی با ضریب ۵ تصویر قابل قبول بددست آید. در فرمول این تابع می‌توان جمع‌کردن عدد ۳ را به معنای انتقال تصویر تلقی کرد که باید اثری بر جواب مسئله داشته باشد.

حال به حل مسئله می‌پردازیم. دو ورودی x_1 و x_2 در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم فاصلهٔ این دو ورودی، یعنی $|x_1 - x_2|$ چقدر باشد که فاصلهٔ خروجی‌های متناظر، یعنی $|f(x_1) - f(x_2)|$ کوچکتر از 10^{-4} باشد. باید داشته باشیم:

$$|(5x_1 + 3) - (5x_2 + 3)| < 10^{-4}$$

یا معادلاً

$$5|x_1 - x_2| < 10^{-4}$$

با این واضح است که اگر $10^{-4} < |x_1 - x_2|$ ، آنگاه دقت مورد نظر در خروجی مظور می‌شود.

(۱-۹) تابع مجذور کردن، یعنی $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه وقتی معلوم باشد که خطای محاسبهٔ مجذور آن کوچکتر از 10^{-3} باشد.

حل و بحث. خواهیم دید که برخلاف مثال قبل، در اینجا جواب مطلقاً وجود ندارد، بلکه جواب به

حدود اندازه x وابسته است. اگر x_1 و x_2 دو ورودی اینتابع باشد، می خواهیم درجه دقیقی \circ مطلور کیم که اگر $|x_1 - x_2| < |x_1^2 - x_2^2|$ آنگاه فاصله خروجی های متناظر، یعنی $|x_1^2 - x_2^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|x_1^2 - x_2^2| < 10^{-3}$$

یا معادلاً:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

کمی توجه به عبارت بالا نشان می دهد که مسئله به این صورت جواب ندارد، یعنی هیچ مقدار \circ وجود ندارد که برای هر دو عدد x_1 و x_2 به فاصله کوچکتر از ، فاصله $|x_1^2 - x_2^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. فرض کیم چین ای وجود داشته باشد. اگر دو عدد x_1 و x_2 را هر دو بزرگتر از 1 ولی به فاصله $\frac{1}{4}$ از یکدیگر انتخاب کیم، مثلاً:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

از طرفی داریم $|x_1 - x_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ و از سویی دیگر $|x_1 + x_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4}$ پس:

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

که هرچه باشد $1 + \frac{1}{4}$ از 10^{-3} کوچکتر نمی شود. نکته این مسئله این است که وقتی عددی مجدول می شود، یعنی در خود ضرب می شود، هر خطای در عدد ورودی، خطای حدواداً دو برابر حاصل ضرب این خطای در مقدار عدد داده شده در نتیجه محاسبه ایجاد می کند. به طور دقیق، فرض کیم x مقدار ”واقعی“ و h خطای در ارائه آن باشد. در این صورت:

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

وقتی h کوچکتر از 1 باشد، h^2 از $2hx$ کوچکتر است، ولی $2hx$ می تواند بزرگ باشد اگر x بزرگ باشد.

بدین ترتیب سؤال مطرح شده را نمی‌توان به این کلیت پاسخ داد ولیکن در عمل، عددی که باید مجدور شود به طور تقریبی معلوم است و این دانش تقریبی، کافی است که ما را قادر سازد حدودی برای تقریب لازم به دست آوریم. مسأله خاص زیر را در نظر می‌گیریم. عددی a به صورت زیر داده شده است:

$$a = 15/a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

که ارقام پس از اعشار a_n ، تا n های خیلی بزرگ معلوم بدای قابل محاسبه‌اند. می‌خواهیم بدانیم این عدد را پس از چند رقم مختومه کیم که اختلاف مجدور عدد حاصل از مجدور a کوچکتر از 10^{-3} باشد. اگر عدد a را پس از n رقم اعشار مختومه کیم، عددی

$$A_n = 15/a_1 \dots a_n$$

به دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم تا چند رقم n باید جلو رفت که $|A^2 - A_n^2|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد. توجه کنید که این مصادقی از مسأله اولیه است. وقتی a را پس از n رقم اعشاری مختومه می‌کیم، اختلاف $|A - A_n|$ کوچکتر یا مساوی 10^{-n} است. پس در واقع سؤال این است که $|A - A_n| < 10^{-3}$ چه قدر کوچک گرفته شود که $|A^2 - A_n^2| < 10^{-3}$. داریم

$$|A^2 - A_n^2| = |A + A_n||A - A_n|$$

حال قطعاً A و A_n هر دو کوچکتر ۱۶ هستند، پس:

$$|A^2 - A_n^2| < 32|A - A_n| \leq (32)10^{-n}$$

پس اگر بتوانیم n را طوری بگیریم که $10^{-3} \leq 10^{-n} (32)$ ، دقت مورد نظر در محاسبه مجدور حاصل می‌شود. معادلاً باید داشته باشیم:

$$10^n \geq (32)10^3$$

اگر n برابر ۵ یا بزرگتر گرفته شود این نامساوی برقرار می‌شود. حاصل اینکه مجدور $15/a_1 \dots a_5$ از مجدور $\dots 15/a_1 a_2 a_3 \dots$ کمتر از 10^{-3} فاصله دارد.

در مثال خاص بالا ما فقط تقریب نقصانی برای A را در نظر گرفتیم زیرا $A_n \leq A$. همین استدلال را می‌توان در واقع به طور کلی، بدون استفاده از عددنويسي اعشاری برای محاسبه محدود اعداد نزدیک به ۱۵ تکرار کرد. فرض کیم a عددی باشد $16 < a < 15$ ، می‌خواهیم عددی $0 >$ بیابیم که اگر $|a - a'| < |a^2 - a'^2| < 10^{-3}$ آنگاه a' را کوچکتر یا مساوی $a - 15$ و $a - 16$ می‌گیریم، پس اگر $|a - a'| < |a^2 - a'^2| < 10^{-3}$ آنگاه a' نیز عددی در بازه $[15, 16]$ است. در این صورت داریم:

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'||a - a'| < (32)|a - a'|$$

با براین اگر $|a - a'| < 10^{-3}$ کوچکتر از 10^{-3} باشد، یعنی $|a^2 - a'^2| < \frac{1}{32}10^{-3}$ کوچکتر از 10^{-3} خواهد بود. پس

$$= \min\{16 - a, a - 15, \frac{1}{32}10^{-3}\}$$

ویژگی مورد نظر را دارد. اگر هیچ دانشی نسبت به اندازه $15 - a$ و $a - 16$ نداشته باشیم، یعنی ندانیم a کجاي بازه $[15, 16]$ قرار گرفته است می‌توانیم برای به دست آوردن مماس به طریق زیر عمل کیم. مقدمتاً فرض می‌کیم $1 < a' < 17$ ، آنگاه اگر $|a - a'| < 1$ ، قطعاً $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$ پس

$$|a + a'| = a + a' < 33$$

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'||a - a'| < 33|a - a'|$$

پس اگر $|a - a'| < 10^{-3}$ گرفته شود، داریم $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$. با براین

$$= \min\{1, \frac{1}{33}10^{-3}\} = \frac{1}{33}10^{-3}$$

به هر حال کار می‌کند.

(۹-۱-۳) تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم که می‌خواهیم بدانیم عدد x باید به چه دقت معلوم باشد که خطای معکوس محاسبه شده از 10^{-2} کوچکتر باشد.

حل و بحث. در اینجا نیز پدیدهای مشابه مثال قبل ظاهر می‌شود، یعنی به طور کلی جواب به حدود اندازه x وابسته خواهد بود. توجه کنید که اگر دو عدد بزرگ به اندازه 10^{-n} اختلاف داشته باشد (n بزرگ) اختلاف معکوس آنها بسیار کوچک است، در حالی که اگر دو عدد کوچک همین اندازه اختلاف داشته باشد معکوسشان می‌توانند به نسبت دور از هم باشد. به عوایان مثال:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 10 + 10^{-3}, \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \approx 0.000009999.$$

در حالی که

$$x_1 = 10^{-3}, \quad x_2 = 10^{-3} + 10^{-3}, \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 500$$

بایران لازم است سؤال اولیه را با قید بیشتری مطرح کیم. فرض کنید عدد a به صورت زیر داده شده است:

$$a = 0.02a_3a_4a_5\dots$$

می‌خواهیم $|a - a'| < 10^{-2}$ را طوری تعیین کیم که اگر آنگاه $|a - a'| < 10^{-2}$ باشد، چون دامنه f را اعداد حقیقی مثبت در نظر گرفته‌ایم؛ برای هر a' در دامنه f داریم:

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| = \frac{|a - a'|}{aa'}$$

از این عبارت روشن است که $a = 0.02a_3a_4a_5\dots$ نمی‌تواند تخمین $10^{-2} < \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right|$ را تأمین کند زیرا که اگر a' را می‌توان به دلخواه نزدیک به a گرفت و در این صورت کسر به دلخواه بزرگ می‌شود. برای رفع این اشکال، مقدمتاً $|a - a'| < 10^{-2}$ را عددی کوچکتر از a می‌گیریم؛ مثلاً $10^{-2} = 0.01$. بایران اگر $|a - a'| < 0.01$ ، چون $0.02a_3a_4a_5\dots \geq 0.02a_3a_4$ داریم $\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| < 0.01$ بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$|a - a'| < 10^{-2} : \quad \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| < \frac{|a - a'|}{(0.01)(0.02)} = \frac{10^4}{2} |a - a'|$$

اکنون می‌توانیم $|a - a'| < 10^{-2}$ نهایی مورد نظر را پیدا کیم. می‌خواهیم عبارت بالا از 10^{-2} کوچکتر شود، پس اگر را برابر با کوچکتر از $(10^{-6})(2)$ بگیریم داریم:

$$|a - a'| < 2 \cdot 10^{-2} : \quad \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| < \frac{10^4}{2} |a - a'| < 10^{-2}$$

ضماین از مقدماتی، یعنی $\lim_{x \rightarrow a}$ کوچکتر است، پس شرط اولیه دور ماندن از a نیز خود به خود برقرار می‌شود.

در دو مثال آخر سعی کردیم نشان دهیم تأمین دقت لازم در یک محاسبه ممکن است چندان آسان نباشد. گاهی اوقات درجه دقت در داده‌ها باید بسیار زیاد باشد تا دقت مورد نظر در نتیجه حاصل شود. به طور کلی این انتظار که بتوان با اعمال دقت کافی در ارائه داده‌ها، دقت مورد نظر در نتیجه مورد نظر را تأمین کرد "پایداری محاسبه" می‌نامیم. این ویرگی همیشه برقرار نیست. مثلاً تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲ نمایش داده شده است. مقدار این تابع در $x = 0$ برابر ۱ است. توجه کنید که هیچ $x > 0$ وجود ندارد که $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ باشد. لزوماً دقت مثلاً $\epsilon = 10^{-1}$ را تضمین کند زیرا که اگر $x > 0$ و $|f(x) - f(0)| = 1 - x < \epsilon$ آنگاه $x > 1 - \epsilon$ هر قدر کوچکتر شود، $x - 1$ بزرگتر می‌شود.

در زیر تعریف دقیق پایداری محاسبه f در نقطه‌ای از قلمرو f را توصیف می‌کیم. عواید معمول تری برای "پایداری محاسبه"، اصطلاح "پیوستگی" است که در اینجا نیز به کارخواهیم برد، ولی کلمه "پیوستگی" بار شهودی زیادی دارد که گاهی موجب سوءتفاهم می‌شود. دانشجو باید همواره تعریف دقیق زیر و آنچه با استدلال صحیح از آن نتیجه می‌شود در نظر داشته باشد و بیش از آن را از مفهوم پیوستگی انتظار نداشته باشد.

(۲-۹) تعریف. تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و $a \in S$. می‌گوییم تابع f در a پیوسته است (یا تابع f در a از پایداری محاسبه برخوردار است) در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ متناظری وجود داشته باشد که برای هر نقطه x از دامنه f که $|x - a| < \delta$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

اگر تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه دامنه خود پیوسته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامیم. همان طور که

اشاره کردیم، نباید از کلمه پیوستگی انتظاراتی فرای تعریف داشت. در مثال اول زیر تابع فقط در یک نقطه از دامنه خود پیوسته است و در مثال دوم تابعی پیوسته داریم که اطلاق کلمه پیوسته برای آن دور از انتظار به نظر خواهد رسید.

چند مثال

(۱-۳-۹) تابع $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$: f را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا} \\ 1-x & \text{ناگویا} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این تابع فقط در نقطه $\frac{1}{2}$ پیوسته است. از تمرین‌های بخش ۱ یادآوری می‌کیم که در هر بازه باز از اعداد حقیقی، هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند. با براین شکل تقریبی نمودار این تابع (شکل ۳) را می‌توان به صورت دو نقطه‌چین متراکم روی خطوط $y = x$ و $y = 1 - x$ تصور کرد که در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تجمع می‌باشد. نشان می‌دهیم این تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، ادعا می‌کیم $e = \frac{1}{2}$ در نقطه $\frac{1}{2}$ شرط تعریف را برآورده می‌کند. فرض کنید $|x - \frac{1}{2}| < e$. اگر x گویا شد که $f(x) = x$ و $|f(x) - f(\frac{1}{2})| < e$ باشد، داریم $|x - \frac{1}{2}| < e$. حال نشان می‌دهیم برای $a \neq \frac{1}{2}$ تابع در a پیوسته نیست. آنقدر نزدیک به a می‌گیریم که اولاً a و x در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند، ثانیاً $|x - a| < |x - \frac{1}{2}| < e$ را برابر $|a - \frac{1}{2}| < e$ می‌گیریم. هرچه باشد، نقطه‌ای x ارائه می‌کیم که $|x - a| < |x - \frac{1}{2}| < e$ باشد، نقطه‌ای x باشد داریم $f(a) = a$ و نقطه ناگویای x را $f(x) = 1 - x$ می‌گیریم. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر a گویا باشد داریم $|f(x) - f(a)| = |(1 - x) - (1 - a)| = |x - a| < e$. آنقدر نزدیک به a می‌گیریم که اولاً a و x در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشند، ثانیاً $|x - a| < |x - \frac{1}{2}| < e$. در این صورت

$$f(x) = 1 - x$$

$$|f(x) - f(a)| = |1 - x - a| = |(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - a)|$$

حالت دیگر ای که a ناگویا و $a - 1 = f(a)$. در این حالت x را نقطه‌ای گویا آنقدر نزدیک به a

می‌گیریم که x و a هر دو در یک طرف $\frac{1}{2}$ باشد و $|x - a| < \frac{1}{2}$. در این صورت نیز داریم:

$$|f(x) - f(a)| = |x - 1 + a| = |(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - a)|$$

چون x و a در یک طرف $\frac{1}{2}$ انتخاب شده‌اند، $-a - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < a - \frac{1}{2}$ هم علامته‌د، پس:

$$\begin{aligned} |(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - a)| &= |\frac{1}{2} - x| + |\frac{1}{2} - a| \\ &> |\frac{1}{2} - a| = e \end{aligned}$$

در نتیجه مستقل از اینکه x که $|f(x) - f(a)| > e$ باشد، برای چنین x داریم یعنی f در a پیوسته نیست.

(۲-۳-۹) مجموعه اعداد صحیح، \mathbb{Z} ، زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است. نشان می‌دهیم هر تابع $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. این ممکن است با شهود پیوستگی سازگار به نظر نرسد ولی ملاحظه خواهیم کرد که "گستگی دامنه" در واقع پیوستگی تابع را سهولتر می‌سازد. نشان می‌دهیم f در هر نقطه دامنه، $n \in \mathbb{Z}$ پیوسته است. هرچه باشد، می‌گیریم $1 = f(1)$. حال اگر x عددی از دامنه باشد که $|x - n| < 1$ ، چون x عدد صحیح است، لزوماً $f(x) = f(n)$ داریم، پس $|f(x) - f(n)| < e$ و شرط پیوستگی برقرار است. این مثال را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که اگر قرار باشد داده‌ها همه عدد صحیح باشد، تنها داده "نزدیک" به یک عدد صحیح خود آن است، پس خطابی در محاسبه صورت نمی‌گیرد.

(۳-۳-۹) در مقابل مثال قبل فرض کیم $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نابعی باشد که همه جا صفر است به استثنای در مقادیر صحیح n که در آن $f(n) \neq 0$. نشان می‌دهیم f در n پیوسته نیست. هرچه باشد، نقطه‌ای x وجود دارد که $|x - n| < 1$ و x عدد صحیح نیست. پس $|f(x) - f(n)| = |f(n)| > e$ و f در n پیوسته نیست. به سادگی می‌توان نشان داد f در هر نقطه غیر عدد صحیح پیوسته است.

در مورد کارایی تعریف پیوستگی در رابطه با محاسبات عملی آن‌گونه که در آغاز این بخش مورد بحث قرار گرفت، ممکن است ایراد زیر به ذهن برسد. ما پیوستگی یا پایداری محاسبه تابع f در یک

نقطه a را تعریف کردیم. از آنجا که مقدار a ممکن است فقط به طور تقریبی معلوم باشد و تابع ممکن است در نقاط به دلخواه نزدیک به a پیوسته نباشد (مانند مثال ۹-۳-۱)، این تعریف چه ارزش عملی می‌تواند داشته باشد؟ در زیر نشان می‌دهیم که در واقع اگر f در a پیوسته باشد، برای هر دو مقدار a_1 و a_2 به اندازهٔ کافی نزدیک به a ، فاصله $|f(a_1) - f(a_2)|$ نیز کوچک است، و بالعکس برقراری این رابطه دال بر پیوستگی f در a است.

(۴-۹) گزاره. تابع $\mathbb{R} \rightarrow S : f$ داده شده است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $0 < e$ عددی \exists وجود داشته باشد که برای هر دو نقطه a_1 و a_2 در دامنه f که در بازه $[a - , a +]$ باشد، داشته باشیم $|f(a_1) - f(a_2)| < e$.

برهان. نخست توجه کنید که اگر ویژگی ذکر شده برقرار باشد، تابع در a پیوسته است زیرا که می‌توان یکی از a_1 و a_2 را خود نقطه a گرفت و دیگری را نقطه‌ای دلخواه x در $[a - , a +]$. پس $|f(x) - f(a)| < e$ نتیجه می‌دهد $|x - a| <$

بالعکس فرض کنید f در a پیوسته است. اگر \exists داده شده باشد، طبق پیوستگی f در a ، برای $0 > \frac{a}{2}$ عددی \exists وجود دارد که $|f(x) - f(a)| < \frac{e}{2}$. حال اگر برای a_1 و a_2 در دامنه تابع داشته باشیم $|a - a_1| < \frac{e}{2}$ و $|a - a_2| < \frac{e}{2}$ ، نتیجه می‌شود که:

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq |f(a_1) - f(a)| + |f(a) - f(a_2)| < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

□

بدین ترتیب اگر داده‌ها همه نزدیک به یک نقطه پیوستگی تابع f باشد، می‌توان انتظار داشت که تابع محاسبه با آنها نیز به هم نزدیک باشد.

نکته قابل ذکر دیگر اینکه همچنان که مثال‌های ۹-۱-۲ و ۹-۱-۳ در آغاز این بخش نشان دادند، برای $0 > e$ داده شده، \exists ممکن است علاوه بر واپستگی به e ، به نقطه‌ای که در آن پیوستگی مطرح است واپسیه باشد. در مثال ۹-۱-۱، برای $0 > e$ داده شده، یک واحد برای هر نقطه دامنه تعریف پیوستگی را برقرار می‌ساخت ولی در مثال‌های ۹-۱-۲ و ۹-۱-۳، مقدار

به اندازه نقطه a در دامنه نیز وابسته بود. در حالتی که برای $\epsilon > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که در سراسر دامنه کار کند، یعنی هرگاه $|x_1 - x_2| < \delta$ آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ می‌گوییم. تابع f در دامنه خود به طور یک واخت پیوسته است. در حالت کلی، مانند مثال $f(x) = x^2$ در مثال ۹-۱-۲، یا مثال $f(x) = \frac{1}{x}$ در مثال ۹-۱-۳ با دامنه $x > 0$ ، تابع در سراسر دامنه خود پیوسته است ولیکن از پیوستگی یک واخت برخوردار نیست.

تابع‌های پیوسته: مثال‌های ابتدایی

مفهوم پیوستگی یا پایداری محاسبه در بخش قبل معرفی شد. خوانمده ممکن است شباهتی میان استدلال‌هایی که در بحث مثال‌های ۱-۲ و ۱-۳ به کار رفت و استدلال همگرایی حاصل ضرب و خارج قسمت دنباله‌های همگرا مشاهده کرده باشد. این شباهت تصادفی نیست. در واقع می‌توان پیوستگی را با ضابطه‌ای بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

(۱-۱۰) گزاره. تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است که S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است و $a \in S$. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله (a_n) از نقاط S که $a_n \rightarrow a$ داشته باشیم

$$f(a_n) \rightarrow f(a)$$

دنباله همگرا به a را می‌توان سلسله‌ای از اندازه‌گیری‌های تدریجاً دقیق‌تر یک داده تلقی کرد و محتوای این گزاره این است که در صورت پیوستگی f در a ، اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر واردی a ، نتیجه‌های دقیق‌تر خروجی را فراهم می‌آورند.

برهان. فرض کیم f در a پیوسته است و $a_n \rightarrow a$. می‌خواهیم ثابت کیم $f(a_n) \rightarrow f(a)$. پس برای $\epsilon > 0$ داده شده، می‌خواهیم N را طوری تعیین کیم که اگر $n > N$ آنگاه $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$. با برپیوستگی f در a ، برای همین ϵ وجود دارد که اگر $|x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. حال چون $a_n \rightarrow a$ ، برای این $n > N$ وجود دارد که اگر $|a_n - a| < \delta$. با برای این N شرط مورد نظر را ارضاء می‌کند.

بالعکس فرض کید برای هر دنباله (a_n) که $a_n \rightarrow a$ داریم $f(a_n) \rightarrow f(a)$ نشان می‌دهیم f در a پیوسته است. فرض کید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. اگر f در a پیوسته نباشد هیچ $\delta > 0$ نمی‌توان یافت که برای هر نقطه دامنه با $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| > \epsilon$. مثلاً برای $\epsilon = 1$ نقطه‌ای x_1 در دامنه وجود دارد که $|f(x_1) - f(a)| \geq \epsilon$ و $|x_1 - a| < \delta$. به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت n نقطه‌ای x_n در دامنه یافت می‌شود که $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ و $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. حال توجه کید که دنباله به دست آمده از نقاط دامنه، یعنی (x_n) به a همگراست. اگر $\rho > 0$ داده شده باشد، عدد N را طوری می‌گیریم که $\frac{1}{N} < \rho$ ، پس اگر $n > N$ داریم

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \rho$$

پس $x_n \rightarrow a$. طبق فرض باید داشته باشیم $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ، پس برای $\epsilon > 0$ بالا، باید N وجود داشته باشد که $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ در حالی که داریم $|x_n - a| < \frac{1}{N}$. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناپیوستگی f در a درست نیست. \square

به کمک گزاره بالا می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته را نتیجه گرفت.

(۱۰-۲) گزاره. فرض کید تابع‌های f و g دارای دامنه مشترک S تعریف S هستند، و هر دو تابع در نقطه a پیوسته‌اند. در این صورت:

الف) تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود در a پیوسته است.

ب) تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $(fg)(x) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود در a پیوسته است.

ج) فرض کید مضافاً $\neq 0$ و $g(a) \neq 0$. در این صورت تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود در a پیوسته است.

برهان. اثبات این احکام همه به سادگی از احکام مشابه برای دنباله‌ها، گزاره ۶-۴، و گزاره ۱-۱ است. نتیجه می‌شوند. به عوام نمونه، اثبات (ج) را ارائه می‌کیم. فرض کیم $f(x_n)$ در S' است که $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. با بر پیوستگی f و g در نقطه a داریم $f(x_n) \rightarrow f(a)$ و $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. طبق گزاره ۶-۴ نتیجه می‌شود که $g(x_n) \rightarrow g(a)$ و $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$. به کمک گزاره بالا می‌توان دسته بزرگی از تابع‌های پیوسته را شامل‌سازی کرد. نشان می‌دهیم تابع‌های گویا، یعنی تابع‌هایی که مقدار آنها برابر نسبت دو چندجمله‌ای است:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \quad (1)$$

در هر نقطه که مخرج صفر نباشد پیوسته‌اند.

گام اول. هر تابع ثابت پیوسته است. این واضح است زیرا که برای هر x مستقل از x .

گام دوم. "تابع همانی"، یعنی تابع $f(x) = x$ ، همه جا پیوسته است. برای $a \in \mathbb{R}$ و $e > 0$ داده شده، با گرفتن $|x - a| < e$ نتیجه می‌دهد $|x - a| < e$.

گام سوم. هر تابع تک جمله‌ای، $f(x) = cx^k$ پیوسته است، زیرا که حاصل ضرب متوالی تابع‌های با مقدار c, x, \dots, x است.

گام چهارم. هر تابع چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_p x^p$ پیوسته است زیرا که مجموع تابع‌های پیوسته گام سوم می‌باشد.

گام پنجم. در نقاطی که مخرج (۱) صفر نباشد. طبق قسمت (ج) گزاره ۲-۱ خارج قسمت دو تابع از نوع گام چهارم پیوسته است.

بدین ترتیب با اتکاء به گزاره ۱-۲ می‌توان با استفاده از عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده تابع‌های پیوسته جدید ساخت. حربه دیگری برای تولید تابع‌های پیوسته، استفاده از ترکیب

تابع‌های پیوسته است:

(۱۰-۳) گزاره. فرض کید $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های داده شده‌اند، $a \in S$ در قرار دارد، f در a پیوسته است و g در b پیوسته. در این صورت تابع $f \circ g$ در a پیوسته است.

برهان. قبل از ارائه اثبات لازم است بادآوری کیم که دامنه تعریف $f \circ g$ زیرمجموعهٔ زیرا_S است:

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

بدین ترتیب a در S' است و $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ معنی دارد. برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\exists x \in S'$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ و $|x - a| < \delta$ باشد. همچنان $y \in T$ باشد که $|y - f(a)| < \epsilon$. حال چون f در a پیوسته است و $\forall y \in T$ باشد، $\exists \delta' > 0$ مطابق با $|y - f(a)| < \epsilon$ باشد که $|x - a| < \delta'$ باشد. با این برخورد $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ باشد. بنابراین $x \in S'$ باشد. همین حکم برای عاشر x از S' که $|x - a| < \delta'$ نیز برقرار است. با این برای $x \in S'$ که $|x - a| < \delta'$ داریم $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ و طبق انتخاب ϵ آنگاه $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ باشد. بنابراین $f \circ g$ در a به اثبات می‌رسد. \square

در اینجا ضمن بادآوری توابع مثلثاتی، خواص پیوستگی آنها را بررسی می‌کیم. برای بیان "اندازه زاویه" به طریق زیر عمل می‌کیم. دایرهٔ واحد $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. همهٔ زوایا به صورت قطبی با رأس در مبدأً مختصات و نیم خط مثبت محور x به عنوان ضلع آغازی در نظر گرفته می‌شوند. اندازهٔ زاویه همواره به "رادیان" است، یعنی نسبت طول کمان مقابل به زاویه روی دایره، به شعاع دایره (که در اینجا واحد فرض شده است). از آنجا که این اندازه به صورت نسبت دو کمیت هم‌جنس (هر دو طول) است، اندازهٔ زاویه به رادیان یک "عدد" حقیقی است. جهت مثلثاتی را جهت مثبت و جهت عقربهٔ ساعت را مفهی قرارداد می‌کیم. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی یک زاویه مظور می‌شود که به معنای طی کردن مسافتی روی محیط دایره (در جهت مثبت یا ممافی؛ بسته به این که عدد داده شده مثبت یا ممافی باشد) بر حسب رادیان به اندازهٔ آن عدد است. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی θ ، نقطهٔ

مشخصی روی دایره واحد به دست می‌آید. مختصه x این نقطه را $\cos \theta$ و مختصه y این نقطه را $\sin \theta$ می‌نامیم. توابع مثلثاتی دیگر به صورت $csc = \frac{1}{\sin \theta}$, $sec = \frac{1}{\cos \theta}$, $cot = \frac{\cos}{\sin}$, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ تعریف می‌شوند که البته دامنه تعریف این چهار تابع حقیقی همه \mathbb{R} نیست، بلکه مجموعه نقاطی از \mathbb{R} است که در آن مخرج عبارت تعریف کده صفر نباشد. اتحادهای مربوط تابع مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا مازد $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$ همان طور که در بررسی اعداد مختلط دیدیم، همه از ضرب اعداد مختلط نتیجه می‌شوند و در اینجا دانسته فرض می‌شوند.

(۱۰-۴) گزاره. هر شش تابع مثلثاتی در دامنه تعریف خود پیوسته‌اند.

برهان. کافی است پیوستگی \sin و \cos ثابت شود زیرا سایر توابع از ضرب و تقسیم این دو به دست می‌آید و هر جا که مخرج صفر نباشد، طبق ۱۰-۲ پیوسته خواهد شد. به عوان نمونه پیوستگی \cos را ثابت می‌کیم، پیوستگی \sin مشابه است و نیز می‌توان با توجه به $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ پیوستگی آن را به عوان ترکیب دو تابع پیوسته $\theta - \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta$ و \cos نتیجه گرفت. نخست نشان می‌دهیم کسی وس در 0° پیوسته است. چون $1 = \cos 0^\circ$ باید ثابت کیم که برای هر $\theta > 0^\circ$ داده شده، وجود دارد که هرگاه و برای $|\theta|$ کوچک ممکن طول OK برابر $\cos \theta$ است

و برای $|\theta|$ کوچک و مثبت طول OH برابر $\cos \theta$ می‌باشد. با براین $|1 - \cos \theta| = |\cos \theta - 1| < |\theta - 0| = |\theta| < |$ برای $|\theta|$ کوچک ممکن طول AT برابر $1 - \cos \theta$ است، یعنی قائم‌الزاویه AHT (به ترتیب BKT) طول ضلع مجاور به زاویه قائم از طول وتر کوچکتر است، پس از طول کمان AT (به ترتیب BT) کوچکتر است، پس

$$0^\circ \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta| \quad (2)$$

حال اگر برای $e > 0^\circ$ داده شده، را برابر e بگیریم، از $|\theta - 0| < |e - 1|$ و پیوستگی \cos در 0° به اثبات می‌رسد. به همین ترتیب پیوستگی \sin در 0° را می‌توان ثابت کرد. در واقع توجه کید که $|\sin \theta|$ برابر طول AH یا BK است که هر یک به دلیل مشابه فوق از $|\theta|$ کوچکتر

است، با این

$$^{\circ} \leq |\sin \theta| \leq |\theta| \quad (3)$$

یا $|\theta - ^{\circ}| \leq |\sin \theta - \sin ^{\circ}| = e$ می‌توان پیوستگی \sin در $\theta = ^{\circ}$ را نتیجه گرفت.

حال نشان می‌دهیم \cos در هر نقطه θ پیوسته است. برای $h > 0$ داده شده، می‌خواهیم $|\cos(\theta + h) - \cos \theta| < e$ نتیجه دهد.

کیم که داریم $|\cos(\theta + h) - \cos \theta| = |\cos(\theta + h) - \cos(\theta + h - 1) + \cos(\theta + 1) - \cos \theta| < 2e$

$$|\cos(\theta + h) - \cos \theta| = |\cos \theta \cos h - \sin \theta \sin h - \cos \theta|$$

$$\leq |\cos \theta| |\cos h - 1| + |\sin \theta| |\sin h|$$

$$\leq |\cos h - 1| + |\sin h| \quad (|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1)$$

$$\leq 2|h| \quad (\text{طبق (2) و (3)})$$

با این با گرفتن $\frac{e}{2}$ حکم به اثبات می‌رسد. \square

بدین ترتیب اکون با توجه به گزاره‌های $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$ ، می‌توان در مورد پیوستگی

انواع آمیزه‌های توابع گویا و توابع مثلثاتی بحث کرد.

خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عوان «پایداری محاسبه» تأکید کیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کد بر حذر کیم. در واقع اگر دامنه یک تابع پیوسته بک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص «اتصال و یکپارچگی» را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱-۱) قضیهٔ مقدار بیانی. فرض کید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $f(a) = A$ و $f(b) = B$. در این صورت برای هر عدد حقیقی C بین A و B ، نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = C$.

اگر نمودار f را یک ریسمان فرض کیم که بین نقطه (a, A) و (b, B) کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریسمان برای گذر از ارتفاع A به ارتفاع B باید از هر ارتفاع بی‌مابی C نیز گذر کد که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریسمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به‌ازای مقادیر c_1 ، c_2 و c_3 در $[a, b]$ ، از ارتفاع C عبور می‌کد.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشد استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم، سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۲-۱) (حالت خاص) فرض کید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$: f تابعی پیوسته باشد که $0 < f(0) = g(0)$ و $g(r) > 0$ در این صورت نقطه‌ای r در $[0, 1]$ وجود دارد که $0 = f(r)$.

برهان. نقاط بازه $[1, \infty)$ در مبای ۲ می‌نماییم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل ... $n_1 n_2 n_3 \dots$ دارد که در آن n_i برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطه ۱ به صورت ... $1111 \dots$ نمایش داده می‌شود. ما در جستجوی نقطه‌ای

$$r = 0/r_1 r_2 r_3 \dots$$

هستیم که $g(r) = 0$. ارقام پس از ممیز چین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد. $(\frac{1}{2})$ را در نظر می‌گیریم. اگر $g(\frac{1}{2}) = 0$ عددی با خاصیت مطلوب در بازه $[1, \infty)$ پیدا شده است و $g(\frac{1}{2}) \neq 0$ (طرف راست به مبای ۲) جواب مورد نظر است. اگر $g(\frac{1}{2}) \neq 0$ ، یکی از دو حالت $g(\frac{1}{2}) > 0$ یا $g(\frac{1}{2}) < 0$ برقرار است. قرار می‌دهیم:

$$r_1 = \begin{cases} 0 & g(\frac{1}{2}) > 0 \\ 1 & g(\frac{1}{2}) < 0 \end{cases}$$

اگر $g(\frac{1}{2}) > 0$ بازه $[1, \infty)$ را I_1 می‌نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می‌دهیم زیرا که همانند بازه اولیه $[1, \infty)$ ،تابع در انتهای چپ این بازه مفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازه $[1, \infty)$ در مبای ۲ با رقم ۰ شروع می‌شود فراردادیم $r_1 = 0$. همین طور اگر $g(\frac{1}{2}) < 0$ بازه $[1, \frac{1}{2}]$ را I_1 خوانده و جستجو برای r را در این بازه ادامه می‌دهیم که g در انتهای چپ آن مفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبای ۲ با رقم ۱ شروع می‌شود فراردادیم $r_1 = 1$. در هر صورت حال به بازه I_1 توجه می‌کیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازه بسته چپ و راست تجزیه می‌کیم. اگر m_1 نقطه میانی (مکان تجزیه) باشد به علامت $g(m_1)$ نگاه می‌کیم. اگر $g(m_1) = 0$ ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است، در غیر این صورت $g(m_1)$ باید مثبت یا مفی باشد. اگر $g(m_1) > 0$ آنگاه نیمه چپ I_1 دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع g مفی و در انتهای راست آن g مثبت است. از این پس جستجو برای r را در این بازه پیگیری می‌کیم و قرار می‌دهیم $r_2 = 0$ زیرا در نمایش مبای ۲ نیمه چپ I_1 رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر $g(m_1) < 0$ نیمه راست I_1 دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع g به ترتیب مفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامه جستجو انتخاب می‌کیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم $1 = r_2$. در هر صورت بازه انتخاب شده را به I_2 نمایش می‌دهیم.
 حال مجدداً علامت نقطه وسط I_2, m_2 , را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کیم. به طور کلی
 بسته به این که علامت (m_k) مثبت یا مفی باشد رقم $-k$ -ام پس از ممیز را به ترتیب \circ یا 1 می‌گیریم،
 و اگر $\circ = g(m_k)$, عدد مورد نظر به صورت $r = \circ / r_1 \dots r_k$ به دست آمده است. وقتی هیچ (m_k)
 صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی $r = \circ / r_1 r_2 r_3 \dots$ به دست می‌آید. ادعا
 می‌کیم $\circ = g(r)$. مبای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم
 $[0, 1] \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ که طول آنها به ترتیب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ است و تابع g در انتهای چپ هر یک از
 این بازه‌ها مفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد r در همه این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای
 از چپ به آن میل می‌کند که در همه نقاط دنباله تابع g مفی است و دنباله از طرف راست به آن میل
 می‌کند که در تمام نقاط آن g مثبت است. از پیوستگی تابع g نتیجه خواهیم گرفت که $\circ = g(r)$.

به روش برهان خلف عمل می‌کیم. نشان می‌دهیم $\circ \neq g(r)$ به تناقض ممجر می‌شود. اگر
 $\circ \neq g(r)$, $g(r)$ باید مثبت یا مفی باشد. حالت $\circ > g(r)$ را در نظر می‌گیریم، مورد $\circ < g(r)$ کاملاً
 مشابه است. اگر $\circ > g(r)$, نشان می‌دهیم بازه‌ای $[r - e, r + e]$ حول r وجود دارد که برای هر نقطه x
 از $[0, 1]$ که در این بازه قرار گیرد داریم $\circ > g(x)$. دلیل، پیوستگی g در r است (و این در واقع تها
 استفاده ما از پیوستگی در اثبات است)، زیرا اگر $\circ > e$ را کوچکتر یا مساوی $g(r)$ بگیریم، طبق تعریف
 پیوستگی $\circ > e$ وجود دارد که برای هر عصر دامنه g (یعنی $[0, 1]$) که در فاصله کوچکتر از e
 قرار گیرد داریم:

$$-e < g(r) - g(x) < e$$

چون $\circ < e \leq g(r)$, از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که $\circ > g(x)$. حال توجه کنید که طول
 بازه I_n برابر $\frac{1}{2^n}$ است و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $\circ < \frac{1}{2^n}$. از آنجا که r عضو I_n هست و طول
 I_n کوچکتر از \circ نتیجه می‌شود که I_n به تمامی در $[r - e, r + e]$ قرار دارد. با این در هر نقطه x ,
 باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ I_n تابع g همواره مفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که
 $\circ > g(r)$ ممکن نیست. مشابهًا $\circ < g(r)$ نیز مجرب به تناقض می‌شود. پس لزوماً $\circ = g(r)$. \square

اکون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱۱-۱ به سادگی از ۱۱-۲ نتیجه می‌شود. فرض کیم در صورت ۱۱-۱ داریم $A < B$. حالت $B > A$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع f - نتیجه گرفت. پس $C < B$. ایده اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت C از $f(x)$ ، تابع پیوسته به دست می‌آوریم که در انتهای چپ مفی و در انتهای راست مثبت است، و از سویی دیگر با تغییر مقیاس و انتقال $[a, b]$ به $[1, 0]$: مسأله را به ۱۱-۲ تبدیل می‌کیم. برای این کار، تابع $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$g(t) = f((1-t)a + tb) - C$$

توجه کیم که وقتی متغیر t بازه $[0, 1]$ را طی می‌کند، عبارت درجه یک $(1-t)a + tb$ بازه $[a, b]$ را می‌پیماید.

تابع ϕ که به صورت $\phi(t) = (1-t)a + tb$ تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به t است، داریم $\phi'(t) = f'(\phi(t)) - C = g(t)$. چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است ϕ پیوسته است و افزودن تابع ثابت C - نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس g پیوسته است. ولی $g(0) = A - C < 0$ و $g(1) = B - C > 0$ ، پس طبق ۱۱-۲، نقطه‌ای r در $[0, 1]$ وجود دارد که $g(r) = 0$ ، یعنی

$$f((1-r)a + rb) - C = 0$$

حال $c = (1-r)a + rb$ نقطه متأثر r در $[a, b]$ است و داریم $f(c) = C$ چنان که حکم بود. تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحبت آنها مبنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیه مقدار بیانی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفاده ساده این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادله $x^3 + x + 3 = \sin x$ دارای دست کم دو ریشه در $[-\pi, \pi]$ است. عبارت $f(x) = \sin x - x^3 - x - 3$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست کم دو x متمایز در $[-\pi, \pi]$ وجود دارند که $f(x) = 0$. توجه

کید که:

$$f(-\pi) = -\pi^2 - \pi + 3 < 0$$

$$f(\pi) = -\pi^2 + \pi + 3 < 0$$

ولی $0 > 3 = f(0)$. با بر قضیه مقدار بیی $f(x) = 0$ هم در $[-\pi, \pi]$ ریشه دارد، که
با براین دو ریشه متمایزاند.

مثال ۲. فرض کید $[a, b] \rightarrow [a, b]$: f یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می‌توان f را یک تابع
پیوسته از $[a, b]$ به \mathbb{R} تصور کرد که برای هر x در دامنه، $f(x) \in [a, b]$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای x در
 $[a, b]$ وجود دارد که $f(x) = x$. چین نقطه x را یک نقطه ثابت برای تابع f می‌نامد. برای
این کار، تابع کمکی $\phi(x) = x - f(x)$ را در نظر بگیرید، $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. ϕ نیز پیوسته است زیرا
که تفاضل دو تابع پیوسته می‌باشد. چون $f(a) \in [a, b]$ داریم $f(a) \geq a$ ، پس $0 \leq \phi(a) = f(a) - a$. همچین
 $f(b) \in [a, b]$ نتیجه می‌دهد $b \leq f(b)$ ، پس $0 \geq f(b) - b = \phi(b)$. داریم $\phi(a) = 0$ یا $\phi(b) = 0$. اگر داشته باشیم $\phi(c) = 0$ ، پس $f(c) = c$ و $f(c) > 0$. از قضیه مقدار بیی نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای c در $[a, b]$ هست که $\phi(c) = 0$.
حکم به اثبات می‌رسد. نمایش هندسی این مطلب را می‌توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای
هر x در $[a, b]$ ، $f(x)$ نیز در $[a, b]$ است، نمودار f در مربع $[a, b] \times [a, b]$ محصور است. خط $y = x$ از
گوشه چپ پایین این مربع به گوشه راست بالا رسم شده است. نمودار f ضلع چپ مربع را به ضلع
راست مربع وصل می‌کند. حکم مسئله این است که این نمودار لزوماً خط $y = x$ را قطع می‌کند (شکل
.۳).

اکون به تشریح دو کاربرد قضیه مقدار بیی که قبل اشاره کردیم می‌پردازیم.

(۱۱-۳) گزاره. فرض کید I یک بازه است و $I \rightarrow \mathbb{R}$: f تابعی پیوسته و یک به یک. در این
صورت f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

برهان. فرض کید x یک نقطه درونی I است. در این صورت ادعا می‌کیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

(الف) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

(ب) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

برای اثبات فرض کید $x_1 > x_0$. از آنجا که f یک به یک است یا $f(x_1) > f(x_0)$ و یا $f(x_1) < f(x_0)$. نخست فرض کید $f(x_1) > f(x_0)$. نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر $x_2 < x_1$ باید داشته باشیم $f(x_2) < f(x_1) > f(x_0)$ و $f(x_2) > f(x_0)$. از یک به یک بودن f نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال هر یک از $f(x_1)$ و $f(x_2)$ که بزرگتر باشد، مثلًا $f(x_1)$ ، تابع پیوسته f باید در گذر از x_0 به $f(x_2)$ مقدار $f(x_1)$ را یک بار دیگر در بازه بین x_0 و x_2 اتخاذ کد که خلاف یک به یک بودن f است. حال فرض کید $x_2 > x_1$ نشان می‌دهیم $f(x_2) > f(x_1)$. اگر $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1) < f(x_0)$ ، آنگاه داریم $f(x_2) < f(x_1)$ ، پس تابع پیوسته f باید در گذر از مقدار x_1 به $f(x_2)$ دست کم یک بار مقدار $f(x_0)$ را بین x_1 و x_2 اتخاذ کد خلاف یک به یک بودن f است زیرا که در یک طرف x_1 و x_2 قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطه x_1 با $x_0 > x_1$ داشته باشیم $f(x_0) < f(x_1)$ ، می‌توانیم استدلال کیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی x از I را در نظر می‌گیریم. نسبت به x ، یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم f لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلًا فرض کید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم f نزولی است. دو نقطه x_1 و x_2 در I در نظر بگیرید که $x_1 < x_2$. باید ثابت کیم $f(x_1) > f(x_2)$. وضعیت نسبی سه نقطه x_1 و x_2 روی I به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کیم:

طبق (ب) داریم $x_0 < x_1 < x_2$ و $f(x_2) < f(x_1) < f(x_0)$. حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطه درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطه درونی x_1

به کار ببریم؛ چون $f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$ ، همان گونه که می خواستیم.

$x_1 < x_0 < x_2$ چون در وضعیت (ب) برای x_0 هستیم، داریم $f(x_0) > f(x_1) < f(x_2)$ پس $f(x_2) < f(x_1)$.

$x_1 < x_2 < x_0$ در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطهٔ درونی x_2 به کار می‌گیریم. چون طبق (ب)

$f(x_2) > f(x_1) > f(x_0)$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

استدلال در حالتنی که (الف) برای x_0 برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خوانده واگذار می‌شود.

کاربرد مهم دیگر قضیهٔ مقدار بیانی که ارائه می‌کیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، قرار می‌دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

T را مجموعهٔ مقدادیر f می‌نامد. اگر f یک به یک باشد، به ازای هر $y \in T$ یک و تنها یک x در S

وجود دارد که $y = f(x)$. به این ترتیب تابعی $\mathbb{R} \rightarrow T$ f^{-1} تعریف می‌شود که $x = f^{-1}(y)$.

را وارون یا معکوس (ترکیبی) f می‌نامد. دو حکم زیر برقرارند:

برای هر x در S $f(f(x)) = x$

برای هر y در T $f(f^{-1}(y)) = y$

لازم به ذکر است که چون f^{-1} نقش x و y نسبت به f را تعویض می‌کند، نمودار f^{-1} در واقع قریب

نمودار f نسبت به خط $y = x$ است (شکل ۴).

(۱۱-۴) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک و پیوسته. در این

صورت f^{-1} نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزاره ۱۱-۳ تابع f صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتنی که f صعودی است ثابت می‌کیم و حالت f نزولی را که مشابه است به خوانده واگذار می‌کیم. نخست توجه کنید که مجموعه

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر y_1 و y_2 دو نقطه J باشد که $y_1 < y_2$ ، آنگاه $[y_1, y_2]$ به تمامی در J قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کیم. چون y_1 و y_2 در J هستند، x_1 و x_2 یگانه در I وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون f صعده است، $x_2 < x_1$. حال اگر نقطه‌ای در $[x_1, x_2]$ باشد، چون f روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است، طبق قضیه مقدار بینی باید عددی x در $[x_1, x_2]$ باشد که $y = f(x)$ باشد. یافت شود که $y \in J$ ، پس $f(x) = y$.

برای اثبات پیوستگی f ، طبق گزاره ۱-۱ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله (y_n) از نقاط J (دامنه f^{-1}) که $y \in J$ ، $y_n \rightarrow y$ ، داریم $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$. اول فرض کیم y یک نقطه درونی J است و $y = f(x)$. ادعا می‌کیم که در این صورت x نیز یک نقطه درونی I است. برای این مظور، چون y نقطه درونی است، $\circ >$ وجود دارد که $[y - , y +]$ به تمامی در J قرار دارد. پس $x_1 < x < x_2$ و $y - = f(x_1)$ و $y + = f(x_2)$ صعده است. اکنون به اثبات پس بازه $[x_1, x_2]$ حول x به تمامی در I قرار دارد و x یک نقطه درونی است. اکنون به اثبات $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ می‌پردازیم. قرار می‌دهیم N به قسمی وجود دارد که برای $x + \rho > x - \rho$ ، حول x در I در نظر بگیرید. باید ثابت کیم N به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $x - \rho < x_n < x + \rho$. قرار دهید $y_n = f(x_n)$. چون $f(x + \rho) = \bar{y}$ و $f(x - \rho) = \underline{y}$ داریم $\underline{y} < y_n < \bar{y}$. وجود دارد که برای $n > N$ داریم $\underline{y}, \bar{y} \in J$. نتیجه این که برای $n > N$ داریم $x - \rho < x_n < x + \rho$. حکم به اثبات می‌رسد. وقتی y یک نقطه انتهایی J باشد، و این تها در صورتی است J از یک طرف بسته باشد، I نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعده بودن f) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود.

مثال ۱. فرض کیم \mathbb{R}^+ مجموعه اعداد حقیقی غیرمخفی است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کیم که در آن $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعده است، با این وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعه تصویر نیز برابر \mathbb{R}^+ است،

تابع وارون به دامه θ^+ است. این تابع عبارت است از $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

مثال ۲ (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تاوبی هستند، پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامه θ هر یک از این توابع را طوری محدود کیم که در آن دامه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متنوعی به عنوان دامه θ هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سیوس، دامه را به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کیم که در این بازه سیوس همه مقادیر $[1, -1]$ را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. با براین \sin^{-1} روی $[1, -1]$ تعریف می‌شود و مقادیر آن در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مظور می‌شوند. \sin^{-1} را گاهی به Arcsin (با "A" بزرگ) نمایش می‌دهد.

ب) برای کسیوس، دامه به $[\pi, 0]$ محدود می‌شود که کسیوس این بازه را به طور یک به یک بر $[1, -1]$ می‌نگارد. بدین ترتیب \cos^{-1} روی $[1, -1]$ تعریف شده و در $[\pi, 0]$ مقدار می‌گیرد. را به \cos^{-1} Arccos نیز نمایش می‌دهد.

ج) برای تانژانت، از $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ استفاده می‌کیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام \mathbb{R} می‌نگارد. \tan^{-1} یا Arctan \tan روی \mathbb{R} تعریف شده است و در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مقدار می‌گیرد.

تمرین. ثابت کید مجموعه تصویر تانژانت همه \mathbb{R} است.

د) برای $\cot \theta$, $\sec \theta$ و $\csc \theta$ ، به ترتیب دامه‌های $[\pi, 0]$ و $[0, \pi]$ و $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ را مظور می‌کند.

خواص تابع‌های پیوسته (۲)

فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow f : S$ یک تابع باشد. نقطهٔ x از S را یک نقطهٔ بیشیهٔ یا ماقسیم برای تابع f می‌نامیم در صورتی که $f(x) \geq f(x_0)$ برای هر x در S . به همین ترتیب نقطهٔ کمیهٔ یا مینیم به عوان نقطه‌ای x که در آن $f(x_0) \leq f(x)$ برای هر x در S ، تعریف می‌شود. در حالت اول $f(x_0)$ را بیشیهٔ یا ماقسیم تابع f در S ، و در حالت دوم، $f(x_0)$ را کمیهٔ یا مینیم تابع f در S می‌نامد.

به طور کلی، به دلایل مختلف، تابع $\mathbb{R} \rightarrow f : S$ ممکن است فاقد ماقسیم یا مینیم باشد. در شکل ۱ سه تابع نمایش داده شده‌اند. در (الف) تابع پیوسته نیست؛ بهارای مقادیر صحیح می‌نیم تابع اتخاذ می‌شود ولی تابع ماقسیم ندارد. در واقع تابع به دلخواه به کوچکترین کران بالایی مقادیر خود نزدیک می‌شود ولی بهارای هیچ نقطهٔ دامنهٔ برابر کوچکترین کران بالایی، یعنی $+1$ ، نمی‌شود. در (ب)، تابع پیوسته و صعودی است ولی از آنجا که دامنهٔ تابع یک بازهٔ باز است، تابع در هیچ نقطهٔ دامنهٔ به کوچکترین کران بالایی خود یا بزرگترین کران پایی نمی‌رسد. در (ج) نیز تابع پیوسته و صعودی است ولی در نزدیک شدن به دو انتهای بازهٔ تابع بی‌کران می‌شود. برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران بالایی داشته باشد، نقطهٔ ماقسیم نقطه‌ای در دامنهٔ است که تابع این مقدار را بگیرد؛ و به همین ترتیب، برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران پایی داشته باشد، نقطهٔ مینیم نقطه‌ای از دامنهٔ است که مقدار تابع در آن برابر بزرگترین کران پایی باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای یک تابع پیوسته تعریف شده روی $[a, b]$ ، عدد حقیقی، همواره نقطهٔ ماقسیم و نقطهٔ مینیم وجود دارد؛ بالاخص چین تابعی لزوماً کراندار است.

(۱-۱۲) قضیه. هر تابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ دارای نقطهٔ ماقسیم و مینیم در $[a, b]$ است.

برهان این قضیه را نیز، مانند برهان قضیهٔ مقدار بیانی در بخش پیش، نخست برای $[a, b] = [0, 1]$ ارائه می‌کیم. حالت کلی به روشنی کاملاً مانند اثبات قضیهٔ مقدار بیانی از همین حالت خاص نتیجهٔ خواهد شد که این نتیجهٔ گیری را به خواندهٔ واگذار می‌کیم.

برهان. فرض می‌کیم $[a, b] = [0, 1]$ را در مباین ۲ می‌نویسیم.

بدین ترتیب هر عضو $[0, 1]$ نمایشی به شکل

$$c = 0/c_1 c_2 c_3 \dots$$

دارد که در آن c_i ها رقم ۰ یا ۱ هستند. نقطه‌ای با نمایش بالا جستجو می‌کیم که نقطهٔ ماکسیمم تابع f باشد. مانند اثبات قضیهٔ مقدار بیانی ارقام c_1, c_2, c_3, \dots را به ترتیب می‌سازیم ولی روش کار در اینجا از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. بازه $[0, 1]$ را به صورت اجتماع دو زیربازه $[\frac{1}{7}, 0]$ و $[1, \frac{1}{7}]$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کیم دست کم یکی از دو بازه $[\frac{1}{7}, 0]$ و $[1, \frac{1}{7}]$ ویژگی زیر را دارد:

(*) هیچ نقطهٔ t از این بازه وجود ندارد که به ازای هر t در بازهٔ دیگر داشته باشیم:

$$f(t_0) > f(t)$$

این ادعا که دست کم یکی از دو بازه $[\frac{1}{7}, 0]$ و $[1, \frac{1}{7}]$ ویژگی (*) را دارد بدین طریق توجیه می‌شود: اگر یکی از این دو بازه ویژگی ذکر شده را نداشته باشد، آنگاه عصر t_0 از این بازه هست که $f(t_0)$ اکیداً بزرگتر از $f(t)$ برای هر t در بازهٔ دیگر است. با براین هیچ عصری از بازهٔ دیگر وجود ندارد که مقدار f در آن اکیداً بزرگتر از مقدار f در هر نقطهٔ این بازه (بالاخص $f(t_0)$) باشد، یعنی بازهٔ دیگر ویژگی (*) را دارد.

اگر فقط یکی از دو بازه ویژگی (*) را داشته باشد، بازهٔ دیگر را I_1 می‌نامیم، و اگر هر دو بازه این ویژگی را داشته، یکی از آنها را به دلخواه I_1 می‌نامیم. رقم c_1 را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$c_1 = \begin{cases} 0 & I_1 = [0, \frac{1}{7}] \\ 1 & I_1 = [\frac{1}{7}, 1] \end{cases}$$

از این پس جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به بازهٔ I_1 محدود می‌کیم. I_1 را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ چپ و راست، هر یک به طول $\frac{1}{n}$ می‌نویسیم. مجدداً به همان استدلالی که در بالا آمد ادعا می‌کیم دست کم یکی از این دو زیربازهٔ I_1 باید واجد شرط (*) نسبت به دیگری باشد. مانند قبل اگر فقط یک زیربازهٔ شرط (*) را احراز کرد، دیگری را I_2 می‌نامیم، و اگر هر دو واجد شرط (*) باشند، یکی را به دلخواه I_2 می‌نامیم. تعریف می‌کیم:

$$c_2 = \begin{cases} \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ چپ باشد} & \circ \\ \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ راست باشد} & 1 \end{cases}$$

واز این جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به I_2 محدود می‌کیم. این فراید را با نیمهٔ کردن I_2 ، ادعای ای که (*) باید برای دست کم یک نیمهٔ آن برقرار باشد، انتخاب I_3 و تعیین c_3 برابر صفر یا یک بسته به این که نیمهٔ چپ I_3 باشد یا نیمهٔ راست، ادامه می‌دهیم. با ادامهٔ روش به ترتیب رقم‌های c_n ساخته می‌شوند. ثابت می‌کیم نقطهٔ $\dots c_3 c_2 c_1$ که بدین طریق به دست می‌آید یک نقطهٔ ماکسیمم است. استدلال به طریق برهان خلف است. فرض می‌کیم c یک نقطهٔ ماکسیمم نباشد و به تماض می‌رسیم. اگر $f(c)$ ماکسیمم نباشد، نقطه‌ای d در $[1, 0]$ وجود دارد، $c \neq d$ ، که:

$$f(d) > f(c) \quad (1)$$

توجه کیید که هر نقطهٔ غیر از c در یک مرحلهٔ فراید نصف کردن بالا باید از c جدا شده باشد زیرا فاصلهٔ c تا d هرچه قدر کوچک باشد، عددی n وجود دارد $\frac{1}{n}$ (یعنی طول بازهٔ I_n)، که c همواره در آن است) از فاصلهٔ c تا d کوچکتر است و بازهٔ شامل c نمی‌تواند شامل d نیز باشد. فرض کیید I_n اولین مرحله‌ای است که d در زیربازهٔ کمار گذاشته شده واقع شده است. در این صورت طبق (*) نقطه‌ای d' وجود دارد، در بازهٔ I_n ، که:

$$f(d) \leq f(d') \quad (2)$$

از (1) و (2) می‌بیم که $f(d') > f(c)$. حال در مورد d' نیز استدلالی مشابه d انجام می‌دهیم. داریم $f(d') \neq f(c)$ ، پس d' را اولین مرحله‌ای می‌گیریم که از c جدا شده است، یعنی $d' \neq c$ چون

قرار ندارد. پس طبق (*) عصری d'' در I_{n_2} وجود دارد که:

$$f(d') \leq f(d'') \quad (3)$$

بدین ترتیب تاکون داریم $f(d'') \geq f(d') \geq f(d) \geq f(c)$ از نقاط $d^{(k)}$ از نقاط $[n_i, n_{i+1}]$ پیدا می‌کیم که $I_j \in I_{n_k}$ و $d^{(k)} \in I_j$ برابر $\frac{1}{\gamma}$ است و دنباله n_i اکیداً صعودی است، دنباله I_{n_k} به سوی نقطه c مقبض می‌شود و داریم:

$$k \rightarrow +\infty \quad d^{(k)} \rightarrow c$$

نشان می‌دهیم این در تماقض با $f(d) - f(c) < e$ نمایش دهیم، نتیجه می‌شود $|f(x) - f(c)| < e$ برای هر x با $|x - c| < \delta$ داریم، بالاخص $f(x) - f(c) < e$

$$f(x) < f(c) + e \quad (4)$$

چون c برای k بزرگ داریم $|d^{(k)} - c| < \delta$ پس

$$f(d^{(k)}) < f(c) + e = f(d)$$

که در تماقض با $f(d) > f(c) \geq f(d'') \geq f(d') \geq f(d)$ فرض $f(d) > f(c)$ است. این تماقض نشان می‌دهد f تابع f باشد. نادرست است و f باید ماکسیمم تابع f در $[n_1, n_2]$ باشد. استدلال مربوط به می‌نیم کاملاً مشابه است و به خوانده واگذار می‌شود.

(۱۲-۲) یادداشت. نکته مهمی در مورد اثبات بالا باید ذکر شود. در اثبات اینکه f ماکسیمم است، تنها استفاده می‌کنیم از پیوستگی f ، استفاده از نامساوی (۴) بود. این در واقع "نصف پیوستگی" است زیرا که طبق پیوستگی f در c برای $|x - c| < \delta$ وجود دارد که $|f(x) - f(c)| < e$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(c)| < e$. نامساوی اخیر شامل دو حکم است:

$$f(x) - f(c) < e$$

$$-e < f(x) - f(c)$$

در اثبات قبل فقط از نامساوی اول استفاده شد. اگر اثبات وجود می‌نیمم را به طور مشابه دنبال کیم خواهیم دید که در آن اثبات فقط از نامساوی دوم بالا استفاده می‌شود. تابع‌هایی که فقط یکی از دو نامساوی بالا برایشان برقرار باشد تابع‌های "نیم‌پیوسته" خوانده می‌شوند. به طور خاص، تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از بالا در نقطه c از دامنه می‌نامیم در صورتی که برای هر $x \in S$ و $|x - c| < e$ وجود داشته باشد که هرگاه $f(x) < f(c) + e$

به همین ترتیب f نیم‌پیوسته از پایین در نقطه c خوانده می‌شود اگر برای هر $x \in S$ و $|x - c| < e$ باشد که هرگاه $f(x) > f(c) - e$

f را نیم‌پیوسته از بالا در S (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین در S) می‌نامیم در صورتی که f در همه نقاط S نیم‌پیوسته از بالا (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین) باشد.

بدین ترتیب می‌توان برای بهره‌برداری بیشتر از قضیه ۱۲-۱، قضیه را به دو قسمت تجزیه کرد:

(۱۲-۳) قضیه. تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. (الف) اگر f نیم‌پیوسته از بالا باشد، f دارای ماکسیمم در $[a, b]$ است، (ب) اگر f نیم‌پیوسته از پایین باشد، f دارای می‌نیمم در $[a, b]$ است. \square

به زودی کاربرد مهمی از این صورت جامعتر قضیه خواهیم دید، ولی نخست مثال‌هایی ارائه می‌کیم.

مثال ۱. تابع $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x - [x]$ در نظر می‌گیریم که مقصود از $[x]$ جزء صحیح x است. در واقع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$. این تابع در همه نقاط به استثنای $x = 1$ نیم‌پیوسته است و در $x = 1$ نیم‌پیوسته از پایین است و نیم‌پیوسته از بالا نیست. فرض کیم $e > 0$ داده شده است. قطعاً برای هر x داریم:

$$f(x) > f(0) - e = -e$$

زیرا که f در $[0, 1]$ نامنفی است. از طرفی دیگر، اگر $e = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم، $\circ >$ هرچه باشد برای $x \in [0, 1]$ که $|x - 1| < e$ نمی‌توان حکم کرد که

$$f(x) < f(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

زیرا که اگر x از طرف چپ به 1 نزدیک باشد، $f(x) = x$ نزدیک 1 است. ضمماً توجه کنید که این تابع در $[0, 1]$ دارای می‌نیم است ولی دارای ماکسیمم نیست.

مثال ۲. تابعی که به صورت $f(x) = [x] - x$ ، $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود در نقطه ۱ نیمپیوسته از بالا است ولی نیمپیوسته از پایین نیست. در واقع داریم $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$. برای $0 < e < 1$ داده شده، x هر نقطه‌ای که در دامنه باشد، داریم $f(x) < f(0) + e = e$ زیرا که مقادیر f نامثبت‌اند، پس نیمپیوستگی از بالا برقرار است. بالعکس برای $0 < e = \frac{1}{2}$ هرچه باشد، $|x - 1| < e$ دلالت بر $f(1) - \frac{1}{2} < f(x)$ نمی‌کند زیرا که برای x نزدیک 1 از سمت چپ مقدار f نزدیک 1 است.

اکون کاربرد مهمی از نیمپیوستگی را در رابطه با بحث "پیوستگی یک واخت" که در پایان بخش ۹ آمد ارائه می‌کیم. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. از گزاره ۹-۴ به یاد می‌آوریم که هرگاه $0 < e < a$ داده شده باشد، برای هر نقطه $t \in [a, b]$ عددی $0 < \delta$ وجود دارد که برای هر دو نقطه t_1 و t_2 از $[a, b]$ که در $[t - \delta, t + \delta] \subset [a, b]$ قرار گیرند داریم $|f(t_1) - f(t_2)| < e$. برای هر $t \in [a, b]$ را برابر کوچکترین کران بالایی $0 < h$ می‌گیریم که در ویژگی بالا صدق می‌کند. ولی سقف $a - h$ را برای $t \in [a, b]$ مظور می‌کیم. توجه کنید که به هر حال اگر $a - h < b$ بزرگتر شود، آنگاه $[t - \delta, t + \delta] \subset [a, b]$ از بازه $[a, b]$ بزرگتر می‌شود و بزرگتر کردن آن نقاط جدیدی از $[a, b]$ به دست نمی‌دهد. بدین ترتیب اگر $t_1 < t_2$ که در $[a, b]$ باشد، $|f(t_1) - f(t_2)| < e$.

(۱۲-۹) لم. برای $0 < e$ ثابت، تابع $f(t)$ که برای $t \in [a, b]$ تعریف شده است، نیمپیوسته از پایین است.

برهان. باید ثابت کیم برای هر $t' \in]t - \epsilon, t + \epsilon[$ داده شده، $|f(t') - f(t)| < \epsilon$ وجود دارد که هرگاه $t_1, t_2 \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$ در فاصله از t قرار گیرند، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$. برای مطلب اخیر، کافی است نشان دهیم که اگر $t_1, t_2 \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$ در این بازه باشد، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$. باید این اگر در $[t_1, t_2]$ باشد، داریم:

$$i = 1, 2 : |t_i - t| \leq |t_i - t'| + |t' - t| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < \epsilon$$

□

و حکم به اثبات می‌رسد.

به کمک این لم اکون می‌توان به سادگی دید که هر تابع پیوسته $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ به طور یک واخت پیوسته است، یعنی هرگاه $t_1, t_2 \in [a, b]$ داده شده باشد، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$ وجود دارد که برای هر دو نقطه t_1, t_2 از $[a, b]$ با $|t_1 - t_2| < \epsilon$ ، داریم $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$. به این مظور، برای هر داده شده، برای هر $t \in [a, b]$ را طبق بحث فوق در نظر می‌گیریم. تابعی است با مقادیر اکیداً مشبّت که طبق لم نیم‌پیوسته از پایین است. باید این طبق ۱۲-۳، ب، (۱) در $[a, b]$ می‌نیمم خود را اتخاذ می‌کند. مقدار این می‌نیمم را به نمایش می‌دهیم؛ پس $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \epsilon$. در نتیجه اگر $t_1, t_2 \in [a, b]$ در فاصله کوچکتر یا مساوی باشند، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$ و حکم به اثبات می‌رسد:

□

(۱۲-۵) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ به طور یک واخت پیوسته است.

مفهوم حد

در بخش‌های ۶ تا ۸ مفهوم حد دنباله و سری را بررسی کردیم. در واقع دنباله، تابعی بود که روی یک مجموعه گسسته از نقاط (اعداد صحیح از یک مقدار k به بعد) تعریف شده و مقداری حقیقی یا مختلط می‌گرفت. حد دنباله وقتی وجود داشت که با سیر کردن دامنه تابع، یعنی با گذر به اعداد صحیح بزرگتر و بزرگتر، مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شد. مفهوم حد که در این بخش معرفی خواهیم کرد کاملاً مشابه است با این تفاوت که به جای دنباله، تابع‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که دامنه آنها یا یک مجموعه از نوع بازه است یا دست‌کم نقاط دامنه دارای مکان تجمع هستند، برخلاف مجموعه‌های عدد صحیح که عماصرش از فاصله معیی (واحد) به هم نزدیک‌تر نمی‌شوند. ایدهٔ حد زاده‌کوشش‌هایی است که طی دو قرن برای دقیق ساختن مفهوم "مشتق"، که خود بیان کردۀ آهگ لحظه‌ای تغییر یک کمیت متغیر است، صرف شد. امروزه مفهوم حد کاربردهایی خارج از محدوده مشتق نیز دارد، بالاخص همچنان که خواهیم دید با مفهوم پیوستگی در رابطهٔ نزدیک است.

فرض کیم S یک زیرمجموعهٔ \mathbb{R} باشد. نقطهٔ حدی $a \in S$ می‌نامیم اگر برای هر

◦ در "بازهٔ محدود شعاع حول a "، یعنی

$$]a - \delta, a + \delta[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

نقطه‌ای از S موجود باشد. تذکر یکی دو نقطه در مورد این تعریف بجاست:

(الف) ایکه بازه را "محذوف" گرفته‌ایم، یعنی $x = a$ مطرح نیست، بدین معنی است که تعریف مستقل از این است که خود a نقطه‌ای از S باشد یا نباشد، هر دو صورت ممکن است رخ دهد.

(ب) تعریف در واقع نتیجه می‌دهد که در هر بازهٔ محدود شعاع حول a ، بی‌نهایت عضو متمایز از S باید

موجود باشد زیرا اگر مثلاً $s_1 \in S$ در بازهٔ محدود شعاع ۱ حول a باشد، و ۲ را طوری بگیریم که $|s_1 - a| < \varepsilon$ ؛ آنگاه باید عضو دیگری s_2 از S در بازهٔ محدود شعاع ۲ حول قرار داشته باشد. به همین ترتیب اگر ۳ را کوچکتر از $|s_2 - a|$ و مشت در نظر بگیریم، نقطهٔ دیگری s_3 از S باید در این بازهٔ محدود باشد و همین طور با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ (s_n) از نقاط متمایز S به دست می‌آید که همه در بازهٔ محدود شعاع ۱ حول a قرار دارند.

در واقع با تغییر کوچکی در استدلال بالا می‌توان نشان داد اگر a یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ S باشد، آنگاه دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود دارد که $s_n \rightarrow a$. اگر در استدلال بالا بگیریم $1 = ۱$ ، نقطهٔ s_1 به فاصلهٔ کوچکتر از ۱ از a است، اگر بگیریم $2 < \min\{\frac{1}{n}, |s_1 - a|\}$ ، آنگاه نقطهٔ s_2 در فاصلهٔ کوچکتر از $\frac{1}{n}$ از a است و $s_1 \neq s_2$. به همین ترتیب با گرفتن $3 < \min\{\frac{1}{n}, |s_2 - a|\}$ نتیجه می‌شود که s_3 در فاصلهٔ کوچکتر از $\frac{1}{n}$ از a قرار دارد و متمایز از s_1 و s_2 است. به طور کلی اگر به استقراء، n را به صورت $n < \min\{\frac{1}{n}, |s_{n-1} - a|\}$ بگیریم و عضو s_n از S را در بازهٔ محدود شعاع n حول a اختیار کیم، نتیجه می‌شود که $\frac{1}{n} < |s_n - a|$ و عاصر s_1, s_2, \dots, s_n همه متمایزند. دنبالهٔ عاصر متمایز S که به این ترتیب ساخته می‌شود به a همگراست زیرا برای هر $\varepsilon > 0$ ، اگر N را طوری بگیریم که $\frac{1}{N} < \varepsilon$ برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.

بالعکس نیز، اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S به a میل کند، a یک نقطهٔ حدی S است. برای $\varepsilon > 0$ ، چون $a \rightarrow N$ وجود دارد که برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \varepsilon$. به علاوه چون همه نقاط s_n متمایزنند، حداقل یکی از آنها باید غیر از خود a باشد، بعیی s_n وجود دارد که $|s_n - a| < \varepsilon$. بدین ترتیب به تعریف معادلی برای نقطهٔ حدی دست یافته‌ایم:

(۱-۱۳) لم. اگر S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد و $a \in \mathbb{R}$ یک نقطهٔ حدی برای S است اگر و تنها اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود داشته باشد که $s_n \rightarrow a$.

۲-۱۳) چند مثال

۱-۲-۱۳) فرض کید S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{Z} ، یعنی مجموعه اعداد صحیح، است. در این صورت هیچ نقطه \mathbb{R} یک نقطه حدی برای \mathbb{Z} نیست زیرا که اگر بازه محدودی به شعاع کوچکتر از $\frac{1}{7}$ حول این نقطه بگیریم، حداکثر یک نقطه S می‌تواند در این بازه قرار گیرد.

۲-۲-۱۳) فرض کید S بازه $[a, b]$ است. در این صورت همه نقاط $[a, b]$ ، نقاط حدی $[a, b]$ هستند زیرا که در هر بازه محدود به شعاع مثبت حول $c \in [a, b]$ نقطه‌ای از $[a, b]$ یافت می‌شود. به علاوه اگر $c \notin [a, b]$ نقطه حدی $[a, b]$ نیست زیرا اگر $a < c < a - c$ ، آنگاه برای $b < c < b - a$ برای $b - a < c - b$ در بازه شعاع حول c هیچ نقطه از $[a, b]$ یافت نمی‌شود. به همین ترتیب مجموعه نقاط حدی $[a, b]$ و $[a, b]$ همه برابر $[a, b]$ هستند.

۳-۲-۱۳) S را برابر مجموعه $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ می‌گیریم. تنها نقطه حدی S نقطه 0 است. هرگوی محدود شعاع حول 0 شامل بینهایت نقطه S است (همه a_n ها که $a_n < \frac{1}{n}$ برای نقطه $\frac{1}{n}$ بازه محدود شعاع $(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ حول این نقطه شامل هیچ نقطه S نیست). برای $1 > a$ ، بازه شعاع $1 - a < a$ ، برای $0 < a$ ، بازه شعاع $-a < a$ ، و برای $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$ ، بازه شعاع $\min\{\frac{1}{n} - a, a - \frac{1}{n+1}\}$ فاقد نقاط S هستند. اکون آمده‌ایم تعریف حد را ارائه کیم.

۳-۱۳) تعریف. فرض کید S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است، a یک نقطه حدی S ، و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند برابر L است، و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - L| < \epsilon$.

نکات شباهت و تمایز تعریف حد و تعریف پیوستگی از تعریف مشهودند. در مورد پیوستگی، نقطه a باید در دامنه تعریف f باشد ولی در مورد حد کافی است a یک نقطه حدی مجموعه S باشد و اساساً به دلیل شرط $|x - a| < \delta$ ، مقدار f در نقطه a اصلًا مطرح نیست. از طرفی دیگر پیوستگی در همه

نقاط دامه f قابل طرح کردن است، در حالی که برای مطرح ساختن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ لازم است که a یک نقطه حدی دامه باشد. مثلاً برای تابعی که دامه آن \mathbb{Z} باشد، حد در هیچ نقطه‌ای تعريف نشده است در صورتی که دیدیم هر تابع با دامه \mathbb{Z} در همه نقاط دامه پیوسته است. قرابت حد و پیوستگی را می‌توان در گزاره زیر که نتیجهٔ فوری تعريف است خلاصه کرد:

(۴-۱۳) گزاره. فرض کید S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است و a یک نقطه حدی S نیز می‌باشد. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد.

در واقع اگر a یک نقطه حدی S باشد و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع، حد f وقتی x به a میل می‌کند مقداری است که اگر $f(a)$ را برابر آن تعريف کیم، تابع f در a پیوسته می‌شود. گزارهٔ زیر نیز عیاً مانند گزارهٔ مشابه در مورد پیوستگی ثابت می‌شود و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کیم.

(۵-۱۳) گزاره. فرض کید S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد، a یک نقطه حدی S ، و $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. در این صورت $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله (a_n) از عناصر S که $a_n \rightarrow a$ داشته باشیم $f(a_n) \rightarrow L$.

به کمک این گزاره، همچنان که در مورد مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته عمل کردیم، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(۶-۱۳) گزاره. فرض کید S یک زیرمجموعه \mathbb{R} است، a یک نقطه حدی S ، و $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع که $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ در این صورت:

الف) حد $f + g$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_1 + L_2$ است.

ب) حد $g \circ f$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_1 L_2$ است.

ج) اگر مساواً $0 \neq L_2$ و a یک نقطه حدی مجموعه $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$ باشد، آنگاه حد $\frac{f}{g}$ وقتی

□

x به a میل می‌کند و وجود دارد و برابر $\frac{L_1}{L_2}$ است.

در (ج) توجه کنید که مجموعه $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$ در واقع دامنه تعریف $\frac{f}{g}$ است و برای اینکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ مطرح شود، لازم است که a یک نقطهٔ حدی این مجموعه باشد. اثبات گزاره بالا که عیناً مانند گزاره مشابه در مورد تابع‌های پیوسته است به خواننده واگذار می‌شود.

۷-۱۳) چند مثال حد

(۱-۷-۱۳) فرض کنید در مورد وجود، و در صورت وجود، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ سؤال شده است که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. چون $f(x) = x^n - 1$ یک تابع پیوسته است، حد آن وقتی $1 \rightarrow x$ برابر مقدار $f(1)$ ، یعنی 0 است. پس نمی‌توان از قضیهٔ خارج قسمت در این مورد استفاده کرد. ولی از آنجا که وجود حد و مقدار آن هیچ‌گونه ارتباطی با مقدار یک تابع در نقطهٔ مورد نظر ندارد، می‌توان با شرط $x \neq 1$ ، یعنی در دامنه $S = \mathbb{R} - \{1\}$ ، تابع $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ را در نظر گرفت. چون 1 یک نقطهٔ حدی S است، می‌توان به هر حال $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ را مطرح کرد. حال در نقاط دامنه که $x \neq 1$ داریم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + \dots + \frac{x^n - 1}{x - 1}) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$. به این دلیل که $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$ چون چندجمله‌ای $1 + x + \dots + x^{n-1}$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند، حد آن وقتی $1 \rightarrow x$ برابر مقدار تابع یعنی n است.

تعداد زیادی از حدهای مقدماتی را می‌توان به روش بالا محاسبه کرد. در واقع همچنان که در بررسی مفهوم مشتق خواهیم دید، تعریف حد و تمایز آن از مقدار تابع، از بررسی عبارت‌هایی که صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کند وقتی متغیر به نقطه‌ای حدی از دامنه میل می‌کند، سرچشم‌گرفته است.

(۲-۷-۱۳) (دو حد اساسی مثلثاتی) در مورد وجود و مقدار حدهای زیر بحث می‌کیم:

$$\text{(۲-۷-۱۳) (برحسب رادیان)} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

توجه کنید که دامنه تعریف هر دو تابع بالا، یعنی $\frac{1 - \cos \theta}{\theta}$ و $\frac{\sin \theta}{\theta}$ ، مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصف،

است، و نقطهٔ حدی دامه است، پس مفهوم حد مطرح شدنی است.

برای $\theta \neq 0$ ، و $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ، با توجه به شکل ۱ داریم:

$$(\theta > 0) \quad \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$$(\theta < 0) \quad \tan \theta < \theta < \sin \theta$$

با این برای $\theta \neq 0$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

در بخش ۱ دیدیم که $\cos \theta$ تابعی پیوسته از θ است، پس $\frac{1}{\cos \theta}$ به ۱ میل می‌کند وقتی $\theta \rightarrow 0$. تابع ثابت ۱ نیز دارای حد ۱ است وقتی $\theta \rightarrow 0$. به سادگی دیده می‌شود که چون $\frac{\theta}{\sin \theta}$ بین ۱ و $\frac{1}{\cos \theta}$ قرار دارد و هردوی این توابع به مقدار واحدی، در اینجا ۱، میل می‌کند، $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$. با این طبق گزاره ۶-۱۳، ج، داریم

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

از طرفی دیگر $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ است، پس:

$$\frac{1 - \cos \theta}{\theta} = (\sin \frac{\theta}{2}) \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

چون تابع سینوس در صفر پیوسته است $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \frac{\theta}{2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \frac{\theta}{2} = 0$ و نیز

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0 \quad \text{پس طبق ۶-۱۳، ب،} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1$$

آیا می‌توان نوشت $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{\theta}}{\sin \frac{1}{\theta}} = 1$? سؤال اساسی در اینجا این است که آیا $\theta = 0$

یک نقطهٔ حدی دامه تعريف است یا نه؟ اگر چیزی باشد، و اگر در دامه تعريف داشته باشیم آنگاه با یک تابع ثابت با مقدار ۱ سروکار داریم که حد آن در هر نقطهٔ حدی برابر ۱ خواهد بود. تابع داده شده فقط در نقاطی که مخرج صفر شود قابل تعريف شدن نیست و اینها عبارتند از مقادیر:

$$\theta = 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots$$

با این دامه تعريف عبارت است از

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{1}{n\pi}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

توجه کید که ° یک نقطهٔ حدی S است زیرا که مثلاً دنبالهٔ متمایز نقاط S :

$$a_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

به ° میل می‌کند. با براین با تعریف ارائه شده از حد می‌توان نوشت $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{\theta}}{\sin \frac{1}{\theta}} = 1$. در واقع اگر در همهٔ نقاط \mathbb{R} که خارج از S هستند، مقدار تابع را برابر ۱ تعریف کیم، تابع ثابت ۱ روی همهٔ \mathbb{R} به دست می‌آید.

(۴-۷-۱۳) فرض کید $\mathbb{R} \rightarrow S : f, g$ تعریف شده‌اند، a یک نقطهٔ حدی S است، f, g در a تابع کراندار است، یعنی عددی $M > 0$ وجود دارد که $|g(x)| \leq M$ برای هر $x \in S$. در این صورت ادعا می‌کیم

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f - g)(x)) = 0$$

فرض کید $e > 0$ داده شده است. چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و

$$|x - a| < \delta, \text{ آنگاه: } |f(x) - 0| < e$$

$$|f(x) - 0| < \frac{e}{M}$$

پس با این شرط روی x داریم $|f(x) - 0| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد.

(۵-۷-۱۳) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ بحث کید. عبارت $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ بهاری هر $x \neq 0$ تعریف شده است، پس $x = 0$ یک نقطهٔ حدی دامنه است و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ قابل طرح کردن است. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = L$ وجود داشته باشد و برابر L باشد، باید برای هر دنباله (a_n) از اعداد حقیقی ناصفر (داخل دامنه) که $a_n \rightarrow 0$ داشته باشیم $\lim_{a_n} \frac{1}{a_n} \sin \frac{1}{a_n} = L$. اگر a_n را برابر $\frac{1}{n\pi}$ ، $n = 1, 2, \dots$ بگیریم، داریم $\lim_{a_n} \frac{1}{a_n} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{1}{n\pi} = 0$. پس اگر حد وجود داشته باشد برابر ۰ است. از طرفی دیگر، اگر بگیریم $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}$ داریم $\lim_{a_n} \frac{1}{a_n} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. پس حد وجود ندارد.

۶-۷-۱۳) علیرغم عدم وجود $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ کراندار است، اگر n یک

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ داریم}$$

در باقیمانده این بخش تعمیم هایی از مفهوم حد را در نظر می گیریم. بالاخص به توصیف نمادهایی

مانند نمادهای زیر می پردازیم:

$$\dots, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

۸-۱۳) تعریف L کاملاً مشابه تعریف حد دنباله ای است با این تفاوت که در

موردنی دنباله ها متغیر x فقط مقادیر عدد صحیح از یک k به بعد را سیر می کند، ولی در اینجا دامنه

تعریف f ، یعنی x های مجاز، یک بازه به شکل $[A, +\infty)$ یا $(-\infty, A]$ را تشکیل می دهد. فرض کنید

دامنه تعریف f بازه ای به شکل $[A, +\infty)$ یا $(-\infty, A]$ باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

بدین معنی است که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، وجود داشته باشد عدد حقیقی M به طوری که

برای هر x در دامنه f که $x > M$ داشته باشیم $|f(x) - L| < \epsilon$. مشابهانه برای $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

تابع های f تعریف می شود که دامنه های آنها به شکل $(-\infty, A]$ یا $[A, +\infty)$ باشد و در اینجا

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معنی است که برای هر $\epsilon > 0$ عدد حقیقی M وجود داشته باشد که برای

$$\text{هر } x \text{ در دامنه } f \text{ با } |f(x) - L| < \epsilon \text{ داشته باشیم.}$$

برای دنباله اعداد حقیقی (a_n) می نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$

وجود داشته باشد عدد صحیح N که هرگاه $a_n > N$ آنگاه $a_n > M$. تمرین زیر اثباتی مشابه قضیه

متاظر برای حد معمولی دارد.

تمرین. فرض کنید f روی $[A, +\infty)$ تعریف شده است. نشان دهید $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ اگر و تنها

اگر برای هر دنباله اعداد حقیقی (a_n) که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$

۹-۱۳) حال فرض کنید تابع f روی دامنه $[a, b]$ تعریف شده است که در آن $b \in \mathbb{R}$ و a

می تواند یک عدد حقیقی کوچکتر از b یا $-\infty$ باشد. مفهوم $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ (تابع

به $+∞$ میل می‌کند وقتی x از سمت چپ به b میل کند) این است که برای هر $0 < M$, وجود دارد $0 >$ که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه $[b-, b]$ باشد، آنگاه $M > f(x)$. مشابهًا $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ تعریف می‌شوند. وقتی $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ مقصود این است که دامنه تعریف شامل یک بازه محدود می‌نویسیم $0 > M > f(x) > \rho$ ، است و برای هر $0 > x - \rho, x + \rho$ وجود دارد که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه محدود $\{x | x - \rho < x < x + \rho\}$ قرار گیرد، آنگاه $M > f(x)$. به سادگی مشاهده می‌شود که این معادل برقراری دو شرط $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ است.

(۱۳-۱۰) بالاخره این تذکر لازم است که مفاهیم حد راست و چپ به طور کلی در چارچوب ارائه شده برای حد قابل بیان است. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ، یعنی در واقع دامنه تعریف f را به آن x های دامنه f که بزرگتر از a هستند محدود کرده‌ایم و حد تابع محدود شده را بررسی می‌کیم. فرض کیم D دامنه تعریف f باشد. برای اینکه $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ قابل طرح شدن باشد اولاً باید یک نقطه حدی مجموعه $D \cap [a, +\infty)$ باشد. سپس برای هر $0 > e$ باید $0 >$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D$ که $a < x < a + e$ داشته باشیم $|f(x) - L| < e$. مفهوم حد چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

مفهوم مشتق

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق است. متبلور شدن ایدهٔ مشتق و به کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز ریاضی و علمی ریشه‌دار است. پس از رواج فرمول بدی مسائل ریاضی به صورت جبری و به خصوص پیدایش زمینهٔ هدسهٔ تحلیلی، مفهوم مشتق در طی قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضیدانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لاپلایس به صورت بدی جامعتری رسید و ارتباط آن با مفهوم «انتگرال» که به اعتباری سابقهٔ تاریخی دیر به ترا داشت روشن گردید. تعریف مشتق که در آغاز از دقت ریاضی مرسوم برخوردار نبود، مدت‌ها مورد انتقاد و نارضایتی تعدادی از دانشمندان و فلاسفهٔ فرار داشت و حتی گاهی موجب مقاشات جدی ریاضی می‌شد. این مشکلات به مدت دو قرن همچنان دامگیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بود تا با شکل گرفتن مفهوم حد، صورت امروزی خود را یافت. در زیر ما با استفاده از مفهوم حد، به معرفی مشتق می‌پردازیم. می‌توان نیازهایی را که به پیدایش مفهوم مشتق مجرّد حول دو محور «آهگ تغییر لحظه‌ای» و «مسئلهٔ مماس» مطرح کرد. از نظر تاریخی مسئلهٔ مماس بود که مجرّبه تعریف مشتق شد ولی پس از چندی کاربرد مشتق در تعیین آهگ تغییر لحظه‌ای نیز معلوم شد و مشتق به عامل تعیین کدهای در رشد علم مکانیک مبدل گردید. جای تعجب است که نیوتن که خود حدود پانزده سال پس از مطالعاتش در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکانیک کلاسیک را نیز پایه گذاشت، در کتاب بزرگ مکانیک خود Principia Mathematica از مفهوم مشتق استفاده نکرده است و به کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در مکانیک، برخلاف تصوری که طبیعی نیز به نظر می‌رسد، سال‌ها بعد در میان ریاضیدانان سوییس، فرانسه و آلمان رایج شد.

(۱-۱۴) آهگ تغییر لحظه‌ای. شاید ساده‌ترین مثال از این نوع مسأله، صورت بندی دقیق مفهوم سرعت یک متوجه است. در ساده‌ترین حالت یک متوجه نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط راست جهت‌دار و مدرج حرکت می‌کند. مکان متوجه در زمان t به صورت تابعی از زمان: $s = f(t)$ داده شده است (شکل ۱).

می‌خواهیم مفهوم "سرعت" (= آهگ تغییر مکان) را برای این حرکت بررسی کیم. برای خط راست داده شده جهت قابل شده‌ایم، بدین ترتیب مثلاً حرکت به طرف راست، تغییر مکان در جهت مثبت و حرکت به سمت چپ، تغییر مکان در جهت مفهی تلقی می‌شود. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متوجه از زمان t_1 تا زمان t_2 به صورت نسبت $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده (با مشاهده کردن جهت) در واحد زمان است. اگر حرکت به صورت یک واخت در یکی از دو جهت صورت گیرد، نسبت $\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_2 - t_1}$ همواره مقدار ثابتی است، یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان پایان اندازه‌گیری، و نه به طول مدت اندازه‌گیری؛ بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت است که مسافت پیموده شده حاصل ضرب این سرعت ثابت (یک واخت) در طول بازه زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یک واخت نباشد، یعنی سرعت متغیر باشد. در این صورت سرعت متوسط در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ ممکن است اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوه حرکت در یک بازه خاص زمانی کوچکتر ندهد به خصوص اگر $[t_1, t_2]$ به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاع دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان t بهتر است دو بازه زمانی t_1 و t_2 نزدیک به t در نظر بگیریم که $t < t_1 < t_2$ و به سرعت متوسط $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ نگاه کیم. هر چه t_1 و t_2 به t نزدیک‌تر باشد، سرعت متوسط به دست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان t است. آیا می‌توان به "سرعت در لحظه t " معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازه زمانی را صفر بگیریم، یعنی $t_1 = t_2 = t$ آنگاه $f(t_2) = f(t_1)$ و صورت و مخرج کسر $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه گریز این است که سرعت در لحظه t را در واقع یک حد تلقی کیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی طول بازه زمانی به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به

سرعت متحرک در زمان t تعبیر می‌شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (1)$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف باره زمانی نسبت به t دخیل می‌شود. در واقع چون نزدیک شدن h به 0 هم از طرف راست و هم از طرف چپ مظور می‌شود، تقارن خود به خود اعمال می‌شود. تمرین زیر این ادعا را به طور قاطع ثابت می‌کند.

تمرین. اگر حد (1) وجود داشته باشد، ثابت کید حد زیر نیز موجود است و برابر حد (1) می‌باشد:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \quad (2)$$

اگر به جای تغییر مکان و مسافت، کمیت متغیر دیگری نسبت به زمان را به $f(t)$ نمایش دهیم، مجدداً می‌توان آنگ تغییر لحظه‌ای f در زمان t را به صورت (1) تعریف کرد. از این کلی‌تر، اگر دو کمیت x و y با رابطه تابعی $y = f(x)$ به هم مربوط باشند، آنگ تغییر y نسبت به x به صورت حد زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

(۱۴-۲) مسئله مماس. همه ما ایده‌ای شهودی و کاملاً روشی از تمایز میان مماس بودن و متقطع بودن دو ممیز داریم ولی بیان دقیق ریاضی این تمایز آسان به نظر نمی‌رسد. در عهد باستان ریاضیدانان خط مماس بر ممیز را برای هر یک از تعداد محدود ممیزهایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی‌های خاصی تعریف می‌کردند. مثلاً خط L بر دایره C در نقطه T مماس محسوب می‌شد اگر شعاع OT بر خط L عمود باشد. همین طور خط L بر بیضی E در نقطه T مماس محسوب می‌شد اگر زاویه‌های بین L و خطوط و اصل از T به دو کانون بیضی برابر

باشد (اگر بیضی را مقطع یک سطح صیقل تصور کیم و قانون فیزیکی زاویه تابش = زاویه بازتاب، را اعمال کیم اشعه نور ساطع از یک کانون پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر خواهد گذشت)، و به همین ترتیب خط مماس بر سهمی و هذلولی نیز تعریف می‌شد. این تعریف‌ها همه برخاسته از دانش و شماخت دقیق موحی‌های خاص بودند و یک تعریف کلی برای مماس بودن یک خط راست بر یک موحی نامشخص، یا مماس بودن دو موحی، وجود نداشت. پس از آنکه هدسه تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار موحی متوجه را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از "مماس بودن" در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید. راه حل زیر برای تعریف خط مماس بر یک موحی \mathcal{C} در نقطه T از موحی در قرن هفدهم کاملاً متداول شده بود.

روی موحی در نزدیکی نقطه T ، نقطه متحرکی P را در نظر می‌گیریم که تدریجاً به P نزدیک‌تر می‌شود. در هر وضعیت نقطه P ، وقتی هوز به T نرسیده است، خط راست گذرا از P و T را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، این خط برای وضعیت‌های گوناگون (P_1, P_2, P_3, \dots) از نقطه P نمایش داده شده است. وقتی P به T نزدیک می‌شود اگر این خط راست به وضعیت مشخصی، مانند t در شکل ۲ نزدیک شود، این "وضعیت حدی" را خط مماس بر \mathcal{C} در نقطه T می‌نامیم. برای نوشتن معادله این خط کافی است شب آن معلوم شود زیرا که یک نقطه خط، یعنی T ، داده شده است. فرض کیم قطعه‌ای از موحی \mathcal{C} که در نزدیکی P قرار دارد به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ قابل نمایش دادن است و مختصات T به صورت $(x_0, f(x_0))$ می‌باشد. حال اگر مختصات نقطه متحرک P را به $(x, y) = (x_0, f(x_0))$ نمایش دهیم، شب خط گذرا از P و T برابر است با

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4)$$

وقتی P به T میل کد، حد عبارت فوق، در صورت وجود، به

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (5)$$

نمایش داده می‌شود. توجه کیم که اگر بوسیم $x = x_0 + h$ ، حد بالا را می‌توان به

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (6)$$

نمایش داد که از نوع آه‌گ تغییر، یعنی (۳)، است. با توجه به شباهت عبارت‌های (۱)، (۳) و (۶)، ارائه و بررسی تعریف زیر کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد:

(۳-۱۴) تعریف. فرض کنید $S : \mathbb{R} \rightarrow S$ یک تابع است و a یک نقطه درونی S ، یعنی $\exists a \in S$ وجود دارد که بازه $[a, a+h]$ در S قرار دارد. در این صورت f را مشتق‌پذیر در a می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (7)$$

در صورت وجود، حد بالا را به $(a)'_+$ نمایش داده، آن را مشتق f در نقطه a می‌نامیم. تابع f را مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که f در همه نقاط دامنه خود مشتق‌پذیر باشد.

(۴-۱۴) یادداشت. در بالا فرض کردیم a یک نقطه درونی بازه تعریف f است. در واقع اگر a یک عضو دامنه و نیز یک نقطه حدی دامنه باشد، بررسی حد (۷) معی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه فقط این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شوند و لزومی ندارد حالت‌های کلی‌تری که بعض‌ پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند در اینجا مطرح کیم. دو مورد استثنایی بعض‌ مورد استفاده قرار خواهد گرفت. اگر $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ در دامنه تابع قرار گیرد، می‌توانیم h را به مقادیر مثبت محدود کیم که در این صورت "حد یک طرفه" بدین معنی است که فقط مقادیر $h > 0$ در نظر گرفته شده است. حد

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (8)$$

را مشتق f از راست در نقطه a می‌نامیم و به $(a)'_+$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ نیز که مشتق f از چپ در نقطه a خوانده می‌شود، مطرح شدنی است.

به تعریف اصلی باز می‌گردیم و مسأله مماس را پیگیری می‌کیم. فرض کنید تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب نمودار f حول a یک مسحی است که در نقطه $(a, f(a))$ دارای خط

مماس به شیب $f'(a)$ می‌باشد. چون $f'(a)$ یک عدد حقیقی است، در این حالت مماس بر مسیری نمی‌تواند حالت قائم داشته باشد. معادله خط مماس عبارت است از

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (9)$$

چند مثال.

(۱-۵-۱۴) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = Ax + B$ ، $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و ثابت، مشتق پذیر است و مشتق آن را محاسبه می‌کیم. در نقطه x_0 از دامنه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(Ax + B) - (Ax_0 + B)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

چون حد عبارت فوق وقتی $x \rightarrow x_0$ مطرح است، مقدار $x = x_0$ در نظر گرفته نمی‌شود، پس می‌توان $x - x_0$ را از صورت و مخرج حذف کرد و داریم $f'(x_0) = A$. البته نمودار f خط راستی با شیب A است و بدین ترتیب خط مماس بر این خط در هر نقطه، خود آن خط می‌شود. بالاخص توجه کید که مشتق تابع ثابت $f(x) = B$ همه‌جا صفر است.

(۲-۵-۱۴) تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = cx^n$ در نظر می‌گیریم که در آن، c یک عدد حقیقی داده شده است و n یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^n - cx_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [c \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}] \end{aligned}$$

مجدداً برای محاسبه حد، $x - x_0 = 0$ مطرح نیست، پس

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

حال چه دجمله‌ای طرف راست تابعی پیوسته نسبت به x تعریف می‌کند، پس حد آن وقتی $x \rightarrow x_0$

برابر می‌شود با $c n x_0^{n-1}$ ، و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c n x_0^{n-1}$$

(۱۴-۵-۳) می‌خواهیم معادله خط مماس بر بیضی $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ را در نقطه $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ ب‌ویسیم. تحقیق کید که این نقطه روی بیضی قرار دارد. باید جزیی از بیضی شامل نقطه $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ را به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ ب‌ویسیم و به‌ازای $x = 2$ مشتق تابع را محاسبه کیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. از معادله بیضی داده شده داریم:

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

که از آن دو تابع استخراج می‌شود، یکی شاخه بالایی بیضی و دیگری شاخه پایینی آن. نقطه $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ روی شاخه پایینی قرار دارد، ب‌ابراین از تابع $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ استفاده می‌کیم.

برای $x = 2$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{16 - x^2} - 2\sqrt{3}}{x - 2} \end{aligned}$$

وقتی $x \rightarrow 2$ صورت و مخرج کسر هر دو به صفر میل می‌کند، ب‌ابراین سعی می‌کیم کسر را از عوامل احتمالی مشترک ساده کیم. در عبارت‌های این گونه معمولاً ضرب کردن صورت و مخرج در

”مزدوج“ عبارت رادیکالی، درایجا $\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3}$ ، مؤثر واقع می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{(16 - x^2) - 12}{(x - 2)(\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(+\frac{3}{4}\right) \frac{x + 2}{(\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

حال توجه کید که صورت و مخرج هر دو تابع‌های پیوسته نسبت به x هستند و برای محاسبه حد به‌ازای $x \rightarrow 2$ می‌توان مقدار $x = 2$ را جایگزین کرد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

نتیجه ای که معادله خط مماس عبارت است از $y + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)$

(۱۴-۵-۴) تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و مشتق‌پذیری آن را در نقاط گوناگون x بررسی می‌کیم. اگر $x > 0$ ، قطعه کوچکی از نمودار $f(x) = |x|$ بر نمودار $g(x) = x$ مطابق است و از آنجا که مشتق فقط به مقادیر تابع برای x های نزدیک x (برای مشتق‌گیری) بستگی دارد، مشتق f در نقطه x برابر مشتق g در نقطه x ، یعنی ۱ است. این با انتظار طبیعی که خط مماس بر نمودار به ازای x باید خط $y = x$ باشد سازگار است.

همین طور برای $x < 0$ ، مشتق تابع برابر ۱ - به دست می‌آید و خط $y = -x$ بر نمودار در نقطه $(x_0, |x_0|)$ مماس است. حال نقطه x_0 را بررسی می‌کیم. حد زیر، در صورت وجود، مورد نظر است:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$$

اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مثلاً $x_n \rightarrow x_0$ در نظر بگیریم که $|x_n| = \frac{1}{n}$ در حد وجود داشته باشد، باید $\frac{|x_n|}{x_n} = \frac{1}{n}$ به آن حد میل کند. برای $x_n = \frac{1}{n} > 0$ ، داریم $|x_n| = x_n = \frac{1}{n}$ ، پس $1 = \frac{|x_n|}{x_n}$ ، به این حد، در صورت وجود باید برابر ۱ باشد. ولی اگر دنباله‌ای از اعداد منفی، مثلاً $x_n = -\frac{1}{n}$ را در نظر بگیریم که $x_n \rightarrow 0^-$ داریم $1 = \frac{|x_n|}{x_n} = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n$ و دنباله ثابت $(-n)$ به -1 میل نمی‌کند. به این تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید که در این مثال مشتق راست و مشتق چپ در $x = 0$ وجود دارند، $f'_-(0) = -1$ و $f'_+(0) = 1$.

در پیگیری مسئله مماس، سؤال طبیعی دیگری که مطرح است این است که اگر دو محی از یک نقطه (x_0, y_0) گذر کند، در چه صورتی این دو محی را در آن نقطه "مماس" برهمنمی‌کیم؟ در حالتی که هر دو محی در نقطه (x_0, y_0) دارای خط مماس باشند، دو محی مماس برهمنمی‌شوند در صورتی که خط مماس آنها یکی باشد. ولی می‌توان وضعیتی مانند شکل ۴ تجسم کرد که دو محی فاقد خط مماس در نقطه مشترک (x_0, y_0) هستند ولی در عین حال به نظر می‌آید که باید آنها را مماس بر یکدیگر تلقی کرد. در اینجا کوشش می‌کیم تعریف جامعتری از مماس بودن ارائه کنم که در حالت خاص تعریف خط مماس را شامل شود.

وضعیت‌های شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب) را مقایسه کید. در هر دو شکل نمودارهای دو تابع f و g از نقطه مشترک (x_0, y_0) می‌گذرند. در هر دو شکل، چون f و g پیوسته فرض شده‌اند، فاصله قائم بین دو نمودار وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود به صفر میل می‌کند. برداشت بعدی ما از دو شکل این است که در (الف) نمودارها متقاطع‌اند و در (ب) مماس می‌باشد.

چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی این دو وضعیت را از هم تمیز داد؟ در ۵ (الف) اگر قطعه کوچکی از دو نمودار حول (x_0, y_0) تقریباً خط راست فرض کیم می‌بیسیم که طول پاره‌خط‌های محصور میان دو نمودار به نسبت تقریباً ثابتی کوچک شده و به صفر میل می‌کند. در شکل ۵ (ب)، اگر قطعات کوچکی از نمودار حول (x_0, y_0) خط راست فرض شوند، این دو خط راست را باید بر هم مطابق فرض کرد و در نتیجه فاصله عمودی بین دو نمودار در نزدیکی (x_0, y_0) در مقایسه با ۵ (الف) عملأً صفر است. این برداشت شهودی را می‌توان به صورت دقیقی تعریف کرد:

(۱۴-۶) تعریف. فرض کید $\mathbb{R} \rightarrow S : f, g$ دو تابع هستند و x_0 یک نقطه درونی S است. در این صورت می‌گوییم f بر g در x_0 مماس است در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\text{(الف)} . f(x_0) = g(x_0)$$

$$\text{(ب)} . \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

شرط (الف) فقط بیانگر این است که نمودار دو تابع باید از یک نقطه بگذرد و در مورد نمودارهای متقاطع نیز برقرار است، ولی توضیح خواهیم داد که شرط (ب) در واقع تمیزده‌ده وضعیت مماس بودن است. توجه کید که قدرمطلق $|f(x) - g(x)|$ فاصله قائم دو نمودار به‌ازای مقدار x از متغیر است. شرط (ب) بیانگر این امر است که این فاصله قائم طوری شدید به صفر میل می‌کند که اگر بر کمیت $x - x_0$ که خود نیز به 0 میل می‌کند، تقسیم شود، هوزنیت به صفر میل می‌کند. کسر $\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$ نسبت فاصله دو نمودار به نزدیکی نقطه x_0 است. میل کردن این نسبت به صفر نشانگر این است که فاصله قائم دو نمودار شدیدتر از $x_0 - x$ کوچک می‌شود.

مثال. وضعیت شکل ۴ را بررسی می‌کیم. داریم $(\circ) f(x) = g(x)$, پس (الف) برقرار است. برای (ب):

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - \circ} = \frac{x^2 |x|}{x^2 + 1} \leq |x|$$

با براین وقتی $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{f(x) - g(x)}{x - \circ}$ به صفر میل می‌کند. با براین f و g در \circ بر هم مماس‌اند و این در حالی است که هیچ‌یک از دو تابع در \circ مشتق‌پذیر نیست.

۷-۱۴) مثال اساسی: خط مماس و تقریب خطی

فرض کنید \circ یک نقطه درونی دامنه تابع $S : f \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. می‌خواهیم خط مماس بر نمودار f در نقطه $(\circ, f(\circ))$ را از دیدگاه جدیدی بررسی کیم. کلیه خطوط راست غیرقائم گذران نقطه $(\circ, f(\circ))$ را در نظر می‌گیریم (خط قائم را مستثنی کرده‌ایم زیرا که این خط نمودار تابعی از x نیست). معادله کلی این خطوط هست:

$$y = f(\circ) + m(x - \circ)$$

که m ضریب زاویه خط است. طرف راست کلی ترین عبارت تعریف کرد. یک تابع درجه یک نسبت به x است که نمودار آن از $(\circ, f(\circ))$ می‌گذرد. می‌خواهیم این موضوع را بررسی کیم که آیا از میان این توابع درجه یک، تابعی هست که به مفهومی "نزدیکترین" به نمودار f در حوالی نقطه $(\circ, f(\circ))$ باشد؟ اگر "نزدیکترین" را به مفهوم مماس بودن طبق تعریف ۶-۱۴ تعبیر کیم، نشان می‌دهیم که حداقل یک تابع درجه یک از این امتیاز برخوردار است. می‌نویسیم $g(x) = f(\circ) + m(x - \circ)$. شرط (الف) برقرار است و برای (ب):

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - g(x)}{x - \circ} &= \frac{f(x) - [f(\circ) + m(x - \circ)]}{x - \circ} \\ &= \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} - m \quad (x \neq \circ) \end{aligned}$$

برای بررسی حد این عبارت وقتی $x = \circ$ مطرح نیست، پس فرض $x \neq \circ$ و ساده کردن $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ}$ مجاز است. پس برای m ثابت، $\lim_{x \rightarrow \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = 0$ اگر و تنها اگر وجود داشته و برابر m باشد. با براین در صورت وجود مشتق، خط راست با شبیه $f'(\circ)$ یگانه

خط گذرا از $(x_0, f(x_0))$ است که به تعبیر ۱۴-۶ بر نمودار f مماس است. با توضیحاتی که قبل از تعریف ۱۴-۶ دادیم، فاصله قائم بین این خط و نمودارتابع سریعتر از فاصله قائم هر خط راست دیگر به صفر میل می‌کند. با براین اطلاق "خط مماس" به $(x_0, f(x_0))$ در صورت مشتق‌پذیری f در x_0 توجیه تازه‌ای می‌باید. توجه کنید که به این تعبیر، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری f در نقطه x_0 وجود خط مماس غیرقائم برای نمودار در نقطه $(x_0, f(x_0))$ است. معادلاً مشتق‌پذیری f در x_0 بدین معنی است که یک تابع درجه یک مماس بر f در نقطه x_0 وجود داشته باشد. این تابع درجه یک، یعنی

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (10)$$

را تقریب خطی f در x_0 نیز می‌نامیم. با توجه به توضیحات ارائه شده، در میان همه تابع‌های درجه ۱، تقریب خطی نزدیک‌ترین مقدار به f را در نزدیکی x_0 دارد. از این ویژگی در جلسات آمده استفاده‌هایی عملی ذکر خواهیم کرد.

این بحث را با گزاره ساده زیر به اتمام می‌رسانیم:

۸-۱۴) گزاره. اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، f در x_0 پیوسته است.

برهان. از آنجا که $\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0}$ هر دو به صفر میل می‌کند، حاصل ضرب آنها نیز به صفر میل می‌کند وقتی x به x_0 میل کند، ولی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$$

که صفر بودن این حد بدین معنی است که $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(x_0)$ باشد. \square

تابع اولیه مشتق‌پذیری

در جلسه قبیل مفهوم مشتق و مشتق‌پذیری مورد بررسی قرار گرفت. در این جلسه نخست با بیان و اثبات یک گزاره در مورد آمیختن جبری تابع مشتق‌پذیر، چند دسته تابع مشتق‌پذیر معرفی می‌کیم؛ سپس به ذکر پاره‌ای خواص ابتدایی مشتق می‌پردازیم.

(۱-۱۵) گزاره. فرض کیم تابع‌های $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی x_0 از دامنه مشتق‌پذیرند. در این صورت:

الف) $f + g$ در x_0 مشتق‌پذیر است و $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ب) (قانون لایب نیتس) $f \cdot g$ در x_0 مشتق‌پذیر است و $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

ج) قرار دهید $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$. فرض کیم x_0 یک نقطه درونی S' است. در این

صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

برهان. (الف) $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ و حکم از این که حد مجموع برابر مجموع حد هاست نتیجه می‌شود.

(ب)

$$\begin{aligned}
 \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x) + f(x_0) \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)
 \end{aligned}$$

توجه کنید که طبق گزاره ۱۴-۸، چون g در x مشتق پذیر است، g در x_0 پیوسته نیز هست، پس $(g(x) - g(x_0)) / (x - x_0) \rightarrow g'(x_0)$. حکم از اینکه حد مجموع و حاصل ضرب برابر مجموع و حاصل ضرب حد است نتیجه می‌شود.

(ج)

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
 &= \left[\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \frac{1}{g(x)g(x_0)}
 \end{aligned}$$

در اینجا نیز حکم از پیوستگی g در x_0 و قوانین حد مجموع و حاصل ضرب نتیجه می‌شود. \square

(۲-۱۵) تابع‌های گویا. نخست یک تابع چندجمله‌ای

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (1)$$

را در نظر بگیرید. در مثال‌های ۱۴-۵-۱ و ۱۴-۵-۲ دیدیم که هر تک جمله‌ای $a_k x^k$ مشتق پذیر است و فرمولی برای مشتق آن پیدا کردیم. پس با توجه به ۱-۱۵

(الف)، این چندجمله‌ای به ازای هر x مشتق پذیر است و در واقع

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + m a_m x^{m-1} \quad (2)$$

حال فرض کنید $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ یک چندجمله‌ای دیگر باشد. از ۱-۱۵ (ج) نتیجه می‌شود که تابع گویای تعریف شده به صورت $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ در $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ روی دامنه S' در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و می‌توان مشتق آن را به کمک ۱-۱۵ محاسبه کرد. توجه کنید که هر نقطه x_0 از S' یک نقطه درونی S' است زیرا با بر پیوستگی q ، اگر $q(x_0) \neq 0$ آنگاه برای همه x های نزدیک x_0 نیز داریم $q(x) \neq 0$.

(۱۵-۳) تابع‌های مثلثاتی. در گزاره ۱۰-۴ از بخش ۱۰ دیدیم که تابع‌های مثلثاتی \cos , \sin , \tan , cot , sec و csc هر یک در دامنه تعریف خود پیوسته هستند. اکون نشان می‌دهیم این تابع‌ها در دامنه تعریف خود مشتق‌پذیر نیز هستند و فرمول‌هایی برای مشتق آنها به دست می‌آوریم. با توجه به گزاره ۱۵-۱ کافی است مشتق‌پذیری $\sin x$ و $\cos x$ ثابت شود زیرا چهار تابع دیگر به صورت خارج قسمت این تابع‌ها تعریف می‌شوند. بدین ترتیب نخست تابع $\sin x$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{(\sin x)(\cosh)+(cos x)(\sinh)-\sin x}{h} \\ &= (\sin x)\frac{\cosh-1}{h} + (\cos x)\frac{\sinh}{h}\end{aligned}$$

در ۱۳-۷-۲ دو حد اساسی مثلثاتی $1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos h}{h}$ و $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$ را ثابت کردیم.

با این

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$$

به بیان دیگر، تابع \sin به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\sin' x = \cos x \quad (3)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که تابع \cos به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\cos' x = -\sin x \quad (4)$$

حال با استفاده از ۱۵-۱ (ج) ثابت می‌شود که توابع csc , sec , cot , \tan به‌ازای هر x در دامنه تعریف (یعنی به‌ازای x هایی که مخرج عبارت تعریف کرده صفر نشود) مشتق‌پذیرند و فرمول‌های زیر به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\tan' x = sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad (5)$$

$$cot' x = -csc^2 x = -(1 + cot^2 x) \quad (6)$$

$$sec' x = (\tan x)(sec x) \quad (7)$$

$$\csc' x = -(\cot x)(\csc x) \quad (8)$$

در باقیمانده این بخش به بررسی دسته‌ای از خواص مشتق می‌پردازیم که به علامت مشتق و اندازه آن بستگی دارند.

۱۵-۴) علامت مشتق در یک نقطه

فرض کید $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی x_0 از S مشتق‌پذیر باشد. سه حالت $f'(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$ و $f'(x_0) < 0$ وجود دارد که هر یک را بررسی می‌کیم.

نخست فرض کید $f'(x_0) < e$. اگر عددی e طوری اختیار کیم که $0 < e < f'(x_0)$. طبق تعریف حد، $|x - x_0| < |x - x_0| < e$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - e > 0 \quad (9)$$

با این صورت و مخرج کسر سمت چپ باید هم علامت باشد و می‌توان حکم کرد که:

۱۵-۴-۱) اگر $f'(x_0) > 0$ آنگاه $x < x_0$ وجود دارد که اگر $x > x_0$ آنگاه $f(x) < f(x_0)$ و اگر $x < x_0$ آنگاه $f(x) > f(x_0)$

به بیان دیگر اگر $f'(x_0) > 0$ آنگاه برای x های نزدیک و بزرگتر از x_0 مقدار $f(x)$ بزرگتر از $f(x_0)$ است و برای x های نزدیک و کوچکتر از x_0 کوچکتر از $f(x_0)$ می‌باشد. نکته قابل تذکر این است که این حکم فقط مقدار $f(x_0)$ را با مقدار $f(x)$ نزدیک x_0 مقایسه می‌کند و دال بر صعودی بودن تابع f در یک بازه کوچک حول x_0 نیست. شکل ۱ وضعیتی را نشان می‌دهد که حکم ۱۵-۴-۱ برقرار است ($f'(x_0) > 0$) و لیکن f در هیچ بازه کوچک حول x_0 صعودی نیست.

در این شکل نمودار تابع در نزدیکی x_0 به نهایت "دنده" یا شاخهٔ صعودی- نزولی دارد که دامنه آنها به تدریج کوچک می‌شود ولی هر قدر هم که به x_0 نزدیک شویم هوز شاخه‌های نزولی و صعودی در دو طرف وجود دارند. در آیده عبارت صریحی برای تعریف چین تابعی ارائه خواهیم کرد.

حالت $f'(x_0) < 0$ مشابه است. در اینجا اگر e طوری بگیریم که $|x - x_0| < e$ ، آنگاه وجود دارد که برای $x \in (x_0 - e, x_0 + e)$:

$$f(x) - f(x_0) < f'(x_0)(x - x_0)$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + e < 0 \quad (10)$$

با این صورت و مخرج کسر سمت چپ باید علامت مختلف داشته باشد که از آن نتیجه می‌شود:

(۱۵-۴-۲) اگر $f'(x_0) < 0$ آنگاه x_0 نزدیک و کوچکتر از x باشد که اگر $x < x_0$

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{و اگر } x < x_0 \quad f(x) < f(x_0)$$

در اینجا اگر x نزدیک و بزرگتر از x_0 باشد، داریم $f(x) < f(x_0)$ ، و اگر x نزدیک و کوچکتر از x_0

باشد، $f(x) > f(x_0)$.

از (۱۵-۴-۲) نتیجه جالب توجهی حاصل می‌شود. برای یک تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

نقطهٔ درونی x_0 از S را یک نقطهٔ بیشیوهٔ موضعی (به ترتیب نقطهٔ کمیهٔ موضعی) می‌نامیم اگر

وجود داشته باشد که برای هر $x \in S$ که $|x - x_0| < r$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_0)$ (به ترتیب

).

حال فرض کیم تابع f در نقطهٔ بیشیوهٔ یا کمیهٔ موضعی x_0 مشتق‌پذیر است. در

این صورت هیچ یک از دو وضعیت $f'(x_0) < 0$ و $f'(x_0) > 0$ در x_0 ممکن نیست زیرا که با این

قدار تابع باید در یک طرف x_0 بزرگتر از $f(x_0)$ و در طرف دیگر کوچکتر

از $f(x_0)$ باشد. بدین ترتیب لاجرم:

(۱۵-۴-۳) اگر تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی x_0 از S بیشیوهٔ یا کمیهٔ موضعی داشته باشد و

در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_0) = 0$.

بدین ترتیب در نقاط بیشیه و کمیه موضعی درونی که تابع دارای خط مماس باشد، این خط مماس باید لزوماً افقی باشد (شکل ۲).

لازم به ذکر است که افقی شدن خط مماس لزوماً دال بر وجود بیشیه یا کمیه موضعی نیست. در شکل ۲، در نقاط x_1 و x_3 کمیه موضعی موجود است، در x_2 بیشیه موضعی، ولی در x_4 که خط مماس افقی است، نه بیشیه موضعی ظاهر شده است و نه کمیه موضعی. مثال‌های صریح زیر در تأیید این مطلب هستند.

مثال ۱. تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = x^4 - x^3$ تعریف شده است. این تابع به ازای هر x مشتق‌پذیر است. نقاطی را که در آن مشتق صفر می‌شود بررسی می‌کیم. داریم:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$$

پس مشتق در دو نقطه $x = 0$ و $x = \frac{3}{4}$ صفر می‌شود. با توجه به علامت یابی (۱) ملاحظه می‌شود که مقدار f برای $x < 0$ مثبت و برای $0 < x < \frac{3}{4}$ منفی است، پس $x = 0$ نمی‌تواند بیشیه یا کمیه موضعی باشد. چون تابع پیوسته $f(x) = x^4 - x^3$ روی $[0, 1]$ باید دارای کمیه باشد و مقدار تابع در $[0, 1]$ منفی است، مقدار کمیه باید منفی باشد. با براین این نقطه کمیه باید یک نقطه درونی $(0, 1)$ باشد زیرا که $f(0) = 0$. از طرفی دیگر مشتق در کمیه درونی باید صفر باشد، پس نقطه $x = \frac{3}{4}$ لزوماً یک کمیه است. نمودار f در شکل ۳ (الف) نمایش داده شده است.

مثال ۲. تابع مشتق‌پذیر $f(x) = x - \sin x$ را در نظر می‌گیریم. داریم $f'(x) = 1 - \cos x$ که در مضارب صحیح 2π صفر می‌شود. هیچ‌یک از این نقاط بیشیه یا کمیه موضعی برای تابع نیست (شکل ۳ (ب)).

در گام بعدی به بررسی مثبت یا منفی بودن علامت مشتق در سراسر یک بازه می‌برداریم. حریم مماس برای این کار "قضیه میانگین" است که کاربردهای بسیار دیگری نیز خواهد داشت. نخست حالت خاصی از این قضیه را که به قضیه رُل معروف است بیان و ثابت می‌کیم.

(۱۵-۵) قضیه رُل. فرض کید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همه نقاط درونی $[a, b]$ مشتق پذیر می‌باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، که $a < c < b$ باشد و $f'(c) = 0$.

برهان. اگر f در سراسر $[a, b]$ صفر باشد که مشتق آن در هر نقطه صفر است و نقطه c مورد نظر وجود دارد. حال فرض کید نقطه‌ای x در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x) \neq 0$ ، مثلاً فرض کید $f(x) > 0$. تابع پیوسته f روی $[a, b]$ دارای بیشیه است و از آنجا که f در حداقل یک نقطه مثبت است، مقدار این بیشیه باید مثبت باشد. از طرفی دیگر $f(a) = f(b) = 0$ ، پس نقطه بیشیه باید یک نقطه درونی بازه باشد، مثلاً c که $a < c < b$. حال طبق ۴-۳ داریم $f'(c) = 0$. به همین ترتیب اگر $f(x) < 0$ باشد، با استفاده از کمیه، نقطه مورد نظر را پیدا می‌کیم. \square

یک تعبیر قضیه بالا این است که نقاطی c بین a و b وجود دارد که مماس بر نمودار بهمازای c موازی خط واصل بین دو انتهای نمودار است. قضیه زیر را می‌توان دقیقاً این گونه تعبیر کرد.

(۱۵-۶) قضیه میانگین. فرض کید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همه نقاط درونی $[a, b]$ مشتق پذیر می‌باشد. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (11)$$

برهان. خط راست واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ معادله زیر را دارد:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

اگر مقدار سمت راست را از $f(x)$ کم کیم در وضعیت قضیه رُل قرار می‌گیریم. به طور دقیق، تعریف کید

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

تابع g در $[a, b]$ پیوسته و در $[a, b]$ مشتق‌پذیر است زیرا که مجموع دو تابع با این ویژگی‌هاست. از طرفی دیگر:

$$g(a) = \circ, \quad g(b) = \circ$$

پس طبق قضیه رل نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < b$ ، که $g'(c) = \circ$ ، یعنی:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \circ$$

که حکم قضیه است. \square

به یک تعبیر هندسی این قضیه اشاره کردیم. اگر متغیر x را زمان و $y = f(x)$ را مکان یک ذره متحرک در زمان x فرض کیم، سرعت متوسط ذره در بازه زمانی $[a, b]$ است. طبق این قضیه، زمانی c بین زمان شروع و زمان پایان حرکت وجود دارد که سرعت ذره در آن زمان برابر سرعت متوسط در طول مسیر است. در واقع مهمترین کاربردهای ۱۵-۶ به صورت نامساوی برای تخمین نمو یک تابع خواهد بود که بعداً به آن خواهیم پرداخت ولی فعلاً به چند کاربرد در تکمیل بررسی علامت مشتق می‌پردازیم.

۷-۱۵) علامت مشتق در یک بازه

فرض کیم I یک بازه باشد و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در نقاط درونی بازه مشتق‌پذیر است.

۷-۱۵) اگر $\circ = f'(x)$ برای هر نقطه درونی x از I ، آنگاه f در سراسر I ثابت است.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر دو نقطه متمایز a و b از I داریم $f(a) = f(b)$. مثلاً فرض کیم $a < b$. طبق قضیه میانگین نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \circ$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

۷-۱۵) تیجه. فرض کیم $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشد که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر دارند. در این صورت $g - f$ یک ثابت است.

(۱۵) اگر $f'(x) > 0$ برای هر نقطه درونی x از I , آنگاه f در I صعودی است، یعنی برای

$$\text{هر } a \text{ و } b \text{ در } I \text{ که } a < b \text{ داریم} . f(a) < f(b)$$

برهان. طبق قضیه میانگین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > 0$ پس $f(b) - f(a) > 0$ و $b - a > 0$ هم علامت هستند. \square

(۱۶) اگر $f'(x) < 0$ برای هر نقطه درونی x در I , آنگاه f در I نزولی است، یعنی برای

$$\text{هر } a \text{ و } b \text{ در } I \text{ که } a < b \text{ داریم} . f(a) > f(b)$$

(۱۷) تخمین نمو تابع. فرض کید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و f در نقاط درونی $[a, b]$ مشتقپذیر

است. اگر $M \geq |f'(x)|$ برای هر x در $[a, b]$, آنگاه از (۱۱) نتیجه

می‌شود که:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \quad (12)$$

از آنجا که $f'(x)$ آهگ تغییر کمیت $y = f(x)$ در نقطه x محسوب می‌شود. نامساوی (۱۲) بیانگر این واقعیت است که نمو y در بازه $[a, b]$ از حاصل ضرب طول بازه در حداقل آهگ نمو بیشتر نیست. گاهی نمو x , یعنی $a - b$ را به y نمو y , یعنی $f(b) - f(a)$ را به x نمایش می‌دهد. پس با این نمادگذاری:

$$|y| \leq M|x| \quad (13)$$

مثال ۱. نشان دهید برای هر a و b داریم

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad (14)$$

از آنجا که برای $f(x) = \sin x$, داریم $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$, این حکم از (۱۲) نتیجه می‌شود.

مثال ۲. نشان دهید برای هر a و b مثبت داریم:

$$\left| \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \right| \leq |a - b| \quad (15)$$

تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ را روی $[1, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. در این بازه تابع تعریف شده، مشتق پذیر است، و داریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

برای $x > 1$ بزرگتر است، پس $|f'(x)| < 1$ و (۱۵) حاصل می‌شود.

قاعده زنجیره‌ای

یکی از اساسی‌ترین قضایای ابتدایی مربوط به مشتق، مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر و فرمول حاصل برای مشتق ترکیب دو تابع است که به "قاعده زنجیره‌ای" معروف می‌باشد. قبل از بیان این مطلب، مفهوم مشتق‌پذیری را که تاکون به دو صورت معادل وجود یک حد، وجود تابع درجه یک مماس، بررسی کردہ‌ایم، به صورت معادل سومی ارائه می‌کیم.

فرض کید $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی a از S مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $(f'(a))$ می‌باشد.

در این صورت می‌دانیم که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} = 0 \quad (1)$$

که در اینجا $f(a) + f'(a)h$ مقدار تقریب خطی f در نقطه a به مازای $x = a + h$ است. اگر ب‌ویسیم

$$\phi(h) = \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} \quad (2)$$

ϕ تابعی است که در یک بازه محدود حول 0 تعریف شده است، یعنی برای $|h| < \delta$ ، زیرا $\phi(h)$ یک نقطه درونی S است و برای $|h| < \delta$ تعریف شده است. به علاوه $0 \rightarrow h$ وقتی $0 \rightarrow h$. پس از طرفین - وسطین در (2) می‌توان نوشت

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \phi(h)h \quad (3)$$

بایران اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، عددی حقیقی $(f'(a))$ وجود دارد و تابعی ϕ تعریف شده به مازای $|h|$ کوچک $\neq 0$ ، به طوری که $0 \rightarrow h$ و قسمی $0 \rightarrow \phi(h)$ برقرار است. بالعکس فرض کید

برای تابعی f که a یک نقطهٔ درونی دامنه آن است، عددی حقیقی m وجود داشته باشد و تابعی ϕ

تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq 0$ که $\phi(h) \rightarrow 0$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

در این صورت

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m = \phi(h)$$

و چون $\phi(h) \rightarrow 0$ وقتی $h \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود که حد $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ وجود دارد وقتی $h \rightarrow 0$ و

برابر m است. بدین ترتیب می‌توان مشتق‌پذیری f در a را به صورت معادل زیر بیان کرد

(۱-۱۵) گزاره. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است و a یک نقطهٔ درونی S است. در این صورت f در a

مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی حقیقی m و تابعی ϕ تعریف شده برای $|h|$ کوچک $\neq 0$ وجود

داشته باشد که $\phi(h) \rightarrow 0$ وقتی $h \rightarrow 0$ و داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

□

البته m را معمولاً به $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق f در نقطه a می‌نامیم. رابطه (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت گویای دیگری نیز نوشت. اگر متغیر تابع f را به x و مقدار f را به y نمایش دهیم، $y = f(x)$ تغییر کوچک در مقدار x را گاهی به جای h به x و تغییر متأثر در y را به جای $f(a+h) - f(a)$ به y نمایش می‌دهیم. در این صورت (۴) یا (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = f'(a)x + x\phi(x) \quad (4)$$

یا معادلاً

$$y - f'(a)x = x\phi(x) \quad (5)$$

توجه کید که x مقدار تغییر y روی خط مماس است. با براین مشتق‌پذیری f در a را می‌توان

بدین صورت تعبیر کرد که خطی وجود دارد گذرا از نقطه $(a, f(a))$ که اختلاف مقدار y روی این خط

و مقدار y تابع، در نزدیکی نقطه a ، "بسیار کوچک" است بدین معنی است که حاصل ضرب دو کمیت x و $\phi(x)$ می‌باشد که هر یک به صفر میل می‌کند وقتی $x \rightarrow a$.

(۲-۱۵) قاعدة زنجیره‌ای. فرض کید $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند، a یک نقطه درونی S است، b یک نقطه درونی T ، و $f(a) = b$. اگر تابع f در a و تابع g در b مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \quad (6)$$

برهان. نخست توجه کید که دامنه $f \circ g$ عبارت است از

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

برای اینکه مشتق‌پذیری $f \circ g$ در a مطرح شود، a باید یک نقطه درونی S' باشد. البته $a \in S'$ چون $f(a) = b$ عضو T است، ولی باید نشان دهیم برای x های به اندازه کافی نزدیک a نیز داریم $f(x) \in T$. چون b یک نقطه درونی T است، $e > 0$ وجود دارد که $[b - e, b + e]$ به تمامی در T قرار دارد. تابع f در a مشتق‌پذیر است، پس در a پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین $e > 0$ وجود دارد که هرگاه $|x - a| < e$ آنگاه $|f(x) - f(a)| < e$ ، یعنی $f(x)$ در T قرار دارد. چون a یک نقطه درونی S است، می‌توان فوق را در صورت لزوم کوچکتر کرد به طوری که برای هر x با $|x - a| < \delta$ داریم $|f(x) - f(a)| < e$. نتیجه اینکه برای x های به اندازه کافی نزدیک به a ، $f(x)$ در T قرار می‌گیرد، یعنی a یک نقطه درونی S' است.

حال به اثبات مشتق‌پذیری $f \circ g$ در a و محاسبه مشتق می‌پردازیم. می‌نویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$. چون f در a مشتق‌پذیر است، تابعی ϕ وجود دارد که برای $|x - a|$ کوچک $\neq 0$ تعريف شده است، $x \rightarrow a$ وقتی $y \rightarrow f(a)$ و داریم

$$y - f'(a)(x - a) = x\phi(x - a) \quad (7)$$

همچین چون g در b مشتق‌پذیر است، تابعی ψ وجود دارد که برای $|y - b|$ کوچک $\neq 0$ تعريف شده

است، $\circ \psi$ وقتی $y \rightarrow \circ$ و داریم

$$z - g'(b) \circ y = \circ y \psi(\circ y) \quad (\text{A})$$

با جایگزینی (A) در (9) حاصل می‌شود

$$z - g'(b)(f'(a) \circ x + \circ x \phi(\circ x)) = (f'(a) \circ x + \circ x \phi(\circ x))\psi(\circ y)$$

یا

$$z - (g'(b)f'(a)) \circ x = \circ x \{g'(b)\phi(\circ x) + [f'(a) + \phi(\circ x)]\psi(\circ y)\}$$

اگر نشان دهیم عبارت داخل آکلاد $\{ \circ x | \text{برای } x \text{ کوچک } \neq \circ \text{ تعريف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی } \circ x \rightarrow \circ x \text{ حکم به اثبات می‌رسد. در داخل } \{ \text{ کافی است نشان می‌دهیم } \psi(y) \circ x | \text{کوچک } \neq \circ \text{ تعريف شده است و به صفر میل می‌کند وقتی } \circ x \rightarrow \circ x \text{ وضعیت سایر جملات روشن است. } (\psi \circ y) \text{ برای } y \text{ کوچک تعريف شده است. چون } f \text{ در } a \text{ پیوسته است، اگر } |x| \text{ به اندازه کافی کوچک باشد، } |y| \text{ نیز به اندازه مورد نظر کوچک خواهد شد، پس } (\psi \circ y) \text{ برای } |x| \text{ کوچک تعريف شده است. از طرفی دیگر مجدداً با برپیوستگی } f, \text{ اگر } \circ x \rightarrow \circ y, \text{ داریم } \circ y \rightarrow \circ y, \text{ پس } \circ \psi \circ y \text{ وقتی } \circ x \rightarrow \circ y \text{ و حکم به اثبات می‌رسد.} \square$

مثال 1. مشتق تابع $h(x) = (x^2 + x + 1)^9$ را به دست آورید. البته درایم مجا تابع h به وضوح مشتق پذیر است زیرا که اگر عبارت $x^2 + x + 1$ در خود ۱۰ بار ضرب شود یک چدجمله‌ای (از درجه ۲۰) به دست می‌آید. اگر بنویسیم $h(x) = (g \circ f)(x)$ ، $g(x) = x^9$ و $f(x) = x^2 + x + 1$ داریم چون $g'(x) = 9x^8$ و $f'(x) = 2x + 1$ طبق قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \circ f'(x) \\ &= 9(x^2 + x + 1)^8(2x + 1) \end{aligned}$$

مثال 2. نشان دهید تابع $h(x) = \sin(\cos x)$ مشتق پذیر است و مشتق آن را به دست آورید. می‌نویسیم

و $f(x) = \cos x$ بازابین $h(x) = (g \circ f)(x)$ پس $g(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) \end{aligned}$$

مثال ۳. تابعی مشتق‌پذیر دارای این ویژگی است که $h(x) = f(f(x))$. مشتق تابع h را در $x = 0$ به دست آورید. طبق قاعده زنجیره‌ای داریم

$$h'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0)$$

چون $f'(0) = 2$ ، نتیجه می‌شود که $h'(0) = 4$.

(۱۵-۳) نمادگذاری لایبنتیس

لایبنتیس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است هرچند که بی‌دقیقی در استفاده از آن ممکن است موجب گمراهی شود. اگر تابع $y = f(x)$ را به y نمایش دهیم و مشتق‌پذیر باشد، $\frac{dy}{dx}$ را لایبنتیس به $\frac{dy}{dx}|_a$ نمایش داد که در اینجا نماد x در مخرج نمایشگر متغیر و نماد y در صورت نمایشگر مقدار تابع است. مقدار مشتق در نقطه $x = a$ به این ترتیب به $\frac{dy}{dx}(a)$ یا $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$ نمایش داده می‌شود هرچند که نمایش سوم کمتر به کار می‌رود. از آنجا که مشتق، حد یک کسر، یعنی حد $\frac{y}{x}$ است، این مفهوم از بعضی رفتارهای کسر گونه برخوردار است و گاهی شکل کسری احکام درستی را تداعی می‌کند. ولی باید توجه داشت که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ بدین معنی نیست که y حد x است و dx زیرا که در چارچوب ما حد x و y هردو صفر هستند. تعییر درستی که در این چارچوب می‌توان از $\frac{dy}{dx}$ به عوان یک کسر ارائه کرد به صورت زیر است. فرض کنید تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است، یعنی $f'(a)$ وجود دارد. اگر به جای f تقریب خطی f در نقطه a را در نظر بگیریم که نمودار آن یک خط راست به شیب $f'(a)$ است، این تابع به هر مقدار نمو h از متغیر dy مقدار نمو $h \cdot f'(a)$ در مقدار تابع را نظیر می‌کند. h را باید نمو متغیر تابع تقریب خطی و $f(a) + h \cdot f'(a)$ را نمو مقدار تابع تقریب خطی تلقی کرد، که در این صورت $dy(f(a)) = f'(a) \cdot dx(a)$. بدین ترتیب

پیشوند "d" در dx و dy بدین معنی است که متغیر، مربوط به تقریب خطی است، نه خود تابع. در مورد خود تابع، از x و y به عواین نمو متغیر و نمو مقدار تابع استفاده می‌کیم. شکل ۱ در توضیح این موضوع است.

با استفاده از نمادگذاری لایپنیتس، نتیجه قاعده زنجیره‌ای به شکلی یادماندنی در می‌آید. اگر در

۱۵- ۲- بوسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$ آنگاه $(g \circ f)(x) = z$ می‌شوند:

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)} = \frac{dz(g(b))}{dy(b)} \cdot \frac{dy(b)}{dx(a)} \quad (9)$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \quad (10)$$

که به اختصار نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (11)$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و محاسبات طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که $\frac{dz}{dx}$ و $\frac{dy}{dx}$ در نقاط مختلف مطرح هستند، اولی در a و دومی در b در حالی که $\frac{dz}{dx}$ در نقطه a مطرح است.

با روش تحریر (۱۰) ممکن است این سوال پیش آید که چرا قاعده زنجیره‌ای با حذف (b) از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد، اول اینکه تا مشتق‌پذیری $f \circ g$ در نقطه a ثابت نشود، اصلًا $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$ معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است $dy(b)$ صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۱. ظرفی قیف شکل به ارتفاع 20 cm و شعاع قاعده 10 cm طوری قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد. اگر آب به سرعت $20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ در این ظرف ریخته شود، آه‌گ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب 6 cm باشد پیدا کید.

متغیر زمان بر حسب ثانیه را به t ، ارتفاع آب در زمان t را به h ، و حجم آب در زمان t را به V نمایش می‌دهیم. h و V هر دو تابع t هستند و به فرض مشتق‌پذیری، $\frac{dh}{dt}$ (آهـگ تغییر ارتفاع سطح آب) و $\frac{dV}{dt}$ (آهـگ تغییر حجم آب) معی دارند. در واقع $2 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{4}{3}\pi r^2 h)$ داده شده است و مجھول مسأله است وقتی که $h = 6$. توجه کید که می‌توان V را به عوام تابعی صرفاً از h در نظر گرفت. اگر شعاع سطح آب در زمان t باشد، به سبب تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

پس

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

حال طبق قاعدة زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

از فرمول V بر حسب h نتیجه می‌شود که $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}h^2$ ، پس با جایگزینی در فرمول بالا داریم:

$$2 = (\frac{\pi}{4}h^2)(\frac{dh}{dt})$$

$$\text{مجھول مسأله } \frac{dh}{dt} \text{ است وقتی } h = 6. \text{ پس } \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} \frac{cm}{sec}.$$

مثال ۲. یک مبع نور S در فاصله ۴ متر از دیواری قرار دارد. این مبع نور در داخل محفظه مدوری به مرکز S قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\frac{1}{2}$ رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی می‌چرخد. روی سطح این محفظه سوراخی قرار دارد که نور از آن سوراخ بر دیوار می‌تابد و در نتیجه یک نقطه نورانی روی دیوار حرکت می‌کند. تبدیل حرکت نقطه نورانی روی دیوار را وقتی این نقطه در فاصله ۵ متری از S قرار دارد پیدا کید.

را زاویه بین امتداد موازی دیوار از نقطه S به شعاع حامل به سوراخ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \quad (\frac{rad}{sec})$$

از طرفی دیگر داریم $\cot \theta = \frac{4}{x}$. با این طبق قاعده زنجیره‌ای:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{4}{x}}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

که سرعت حرکت نقطه نورانی روی دیوار است. وقتی فاصله S از دیوار ۵ متر باشد داریم

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{4}{5}$$

با این:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100}{16} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{25}{2}$$

و چون تدی حرکت، یعنی قدر مطلق سرعت، مورد نظر است، نقطه نورانی وقتی فاصله آن از S پنج متر است با تدی $\frac{25}{2}$ متر بر ثانیه حرکت می‌کند.

یکی از کاربردهای قاعده زنجیره‌ای یافتن مشتق تابع وارون (ترکیبی) است. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته (اکیداً) صعودی یا (اکیداً) نزولی. می‌دانیم که f^{-1} نیز پیوسته است. در زیر حالتی را در نظر می‌گیریم که f مضافاً مشتق‌پذیر با مشتق مثبت یا مفی در سراسر درون بازه I است.

(۴-۱۵) قضیه. I یک بازه است، $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا مفی است. در این صورت تابع وارون ترکیبی، f^{-1} ، نیز در همه نقاط درونی دامنه خود مشتق‌پذیر است و به ازای هر نقطه درونی a از دامنه f^{-1} داریم:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)} \quad (12)$$

برهان. اگر مشتق‌پذیری f^{-1} ثابت شود، فرمول بالا به سادگی از به کارگیری قاعده زنجیره‌ای برای $f^{-1}(x) = f(x)$ نتیجه می‌شود، ولی اثبات مشتق‌پذیری که در زیر خواهد آمد خود این نتیجه را به دست می‌دهد. چون مشتق همه‌جا مثبت یا مفی است می‌دانیم که تابع صعودی یا نزولی است، و چون f پیوسته است، می‌دانیم که نقاط درونی بازه I تحت f به نقاط درونی بازه f^{-1} نگاشته

می‌شوند و بالعکس. حال فرض کیم a یک نقطهٔ درونی I است، پس $b = f(a)$ یک نقطهٔ درونی دامنهٔ f^{-1} می‌باشد. با براین اگر $|k|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $k + b$ نیز یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تعریف f^{-1} است. ولی دامنهٔ f^{-1} از نقاط $f(x)$ تشکیل شده است که x در دامنهٔ f است، پس داریم

برای h ماسب. با براین:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a+h)) - f^{-1}(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} \end{aligned}$$

از آنجا که f^{-1} پیوسته است نتیجه می‌گیریم که وقتی $h \rightarrow 0$ آنگاه $\lim_{k \rightarrow 0} h / (f(a+h) - f(a))$ حد بالا برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد. \square

۵-۱۵) چند مثال مهم

(۱-۵-۱۵) \mathbb{R}^+ را مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت بگیرید و فرض کیم n یک عدد صحیح ناصلفر است. تابع $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = x^n$ که به صورت f تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و برای $x \in \mathbb{R}^+$ داریم $f'(x) = nx^{n-1}$. با براین تابع

که به صورت $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

تعریف می‌شود طبق قضیهٔ بالا مشتق‌پذیر است. از (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x^n) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n} x^{1-n} \end{aligned}$$

و اگر به جای x^n مقدار x را جایگزین کیم:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad (13)$$

پس فرمول $\frac{d(x^p)}{dx} = px^{p-1}$ هم برای اعداد صحیح p و هم برای اعداد به شکل $\frac{1}{n}$ برقرار است. در واقع اگر $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ، $h(x) = x^{\frac{m}{n}}$ باشد که فرمول برقرار است زیرا تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $g(x) = x^m$ نوشت، $h = g \circ f$ پس طبق قاعده را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $g(x) = x^m$ نوشت.

زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

(۱۵-۲) دیدیم که اگر تابع مثلثاتی سینوس را به دامنه $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کیم، وارون ترکیبی آن، \sin^{-1} وجود دارد و پیوسته است. حال $\sin' x = \cos x$ در درون بازه تعریف، یعنی در $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ همواره مثبت است، پس \sin^{-1} در $[-1, 1]$ مشتق‌پذیر است. اگر با استفاده از قاعده زنجیره‌ای از

$\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

برای x در $[-1, 1]$ ، $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ در $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مقدار می‌گیرد، پس

نتیجه:

$$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (14)$$

ضمماً توجه کید که چون:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (15)$$

(۱۵-۳) تابع \tan^{-1} را در نظر می‌گیریم که روی \mathbb{R} تعریف شده است و در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ مقدار می‌گیرد. از آنجا که طبق قضیه، $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ مشتق بذیر است. به علاوه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، اگر از $x = \tan(\tan^{-1}(x))$ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\tan'(\tan^{-1} x) \quad (\tan^{-1})'(x) = 1$$

$$(1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))) \quad (\tan^{-1})'(x) = 1$$

پس

$$(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (16)$$

مجدداً از اینکه $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌گیریم که

$$(\cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad (17)$$

تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همه خطوط راستی که از یک نقطه نمودار یک تابع مشتق‌پذیر می‌گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطه داده شده، تفاضل مقدار y روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند $x\phi(x)$) به صفر میل می‌کند. طبیعی است که کوشش کیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کیم چه محاسبه y برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع f در نقطه درونی a از دامنه خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب زدن مقدار f در نزدیکی a را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h \quad (1)$$

با نوشتن $y = f(a+h)$ و $x = h$ به صورت

$$y \simeq f'(a)x \quad (2)$$

نیز نوشته می‌شود. به نماد لایپنیتس، اگر نمودار تغییر تقریب خطی، یعنی dx را به اندازه x بگیریم،
(2) به صورت زیر در می‌آید

$$Dy \simeq dy \quad (3)$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هر یک از سه صورت بالا برخورد کیم، که همه یک معنی دارند.
چند مثال محاسباتی ارائه می‌کیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای $\sqrt{1/012}$ ارائه کید.

در این نوع مسایل باید تابعی مماسب محاسبه مورد نظر را ائه کیم، مثلًا در اینجا $f(x) = \sqrt{x}$ است؛ سپس عددی a ، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبه مقدار تابع، یعنی $f(a)$ ، ساده باشد، در اینجا $a = 1$ ؛ و بالاخره h را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد a بگیریم، در اینجا $h = 0/012$. بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt{1/012} \simeq \sqrt{1} + f'(1)(0/012)$$

با مشتق‌گیری از $f(x) = x^{1/2}$ داریم $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ و داریم

$$\sqrt{1/012} \simeq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(0/012) = 1/004$$

مثال ۲. گفته می‌شود که برای مقادیر کوچک $|\theta|$ ، برحسب رادیان، $\sin \theta \simeq \theta$. نشان می‌دهیم ممای این ادعا، تقریب خطی است. می‌نویسیم $f(x) = \sin x$ ، پس $f'(x) = \cos x$ و $a = 0$ ، پس $0 = f'(0)$. با این با قراردادن θ به جای h در (۱) داریم

$$\sin \theta \simeq 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که ارتفاع آن 20 سانتی‌متر و شعاع قاعده آن 10 سانتی‌متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر 6 سانتی‌متر با خطای ممکن $1/0$ سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را بر اساس ارتفاع

اندازه‌گیری شده محاسبه کیم، خطای ممکن در محاسبه حجم حداقل چه قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به h و شعاع سطح آب را به r نمایش دهیم، از تشابه مثلث‌ها داریم

$$r = \frac{h}{2}. \text{ حال اگر حجم آب را به } V \text{ نمایش دهیم، داریم}$$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4} h^2$$

با استفاده از (۲) داریم

$$V \simeq \left(\frac{\pi}{4}(h^2)\right) h = \left(\frac{9\pi}{16}\right)(h)$$

خطای محاسبه ارتفاع سطح آب $1/0$ سانتی‌متر فرض شده است، یعنی $|h| \leq 1/0$ با براین $|V|$ حدوداً از $\frac{9}{16}\pi$ یعنی حدوداً $2/83$ سانتی‌متر مکعب کوچکter است.

مثال‌های بالا را باید از نظر علمی بدؤی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت‌های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتی است در کاربردی دیگر ممکن است مجرّب به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده‌ای عملی برای تخمین حدود خطای نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چین روشی برای تخمین خطای دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می‌کیم که از نظر عملی اغلب ضابطه‌ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطای دست خواهیم یافت که از نظر واقعی تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر نمو کوچک متغیر، یعنی x ، را به عوان خطای در اندازه‌گیری مقدار x متغیر فرض کیم، خطای نسبی $\frac{x}{x}$ خواهد بود، و نیز خطای نسبی متأثر برای مقدار نابع، $\frac{y}{y}$ می‌شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب 6 سانتی‌متر با خطای نسبی حداقل یک درصد اندازه‌گیری شده باشد، حداقل خطای نسبی حاصل در محاسبه حجم متأثر چیست؟

در اینجا داریم $\frac{1}{100} \leq \frac{h}{h} \leq 1$ و می‌خواهیم کران بالایی برای $\frac{V}{V}$ به دست آوردم. داشتیم

$$V \simeq f'(a) h$$

با تقسیم کردن بر V نتیجه می‌شود

$$\frac{V}{V} \simeq \left(\frac{\pi}{4} h^2\right) \frac{h}{\frac{9}{16} h^3} = \frac{h}{\frac{9}{16} h} = \frac{16}{9}$$

با براین $\left| \frac{V}{V} - 1 \right| \leq \frac{3}{100}$ ، یعنی خطای نسبی متوسط در محاسبه حجم حداقل ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می‌توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید $y = kx^n$ که در آن k ثابت است. اگر در محاسبه یا اندازه‌گیری x حداقل خطای نسبی r درصد باشد، حداقل خطای نسبی در محاسبه y چیست؟

$$\text{داریم } \frac{dy}{dx} = nkx^{n-1}, \text{ پس}$$

$$y \simeq nkx^{n-1} \quad x \\ \frac{y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-1}}{kx^n} \quad x = n \frac{x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت y متناسب با توان n ام کمیت x باشد خطای نسبی در y حدوداً n برابر خطای نسبی در x خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع a با خطای h داده شده است. می‌خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبه مساحت مربع را تخمین بزنیم.

داریم

$$(a-h)^2 - a^2 = -2ah + h^2$$

اگر h کوچک باشد، h^2 در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف نظر" تلقی می‌شود. h^2 برابر مساحت گوشہ کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. با براین داریم

$$(a-h)^2 - a^2 \simeq -2ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه‌های است که از تقریب خطی تابع $f(x) = x^2$ حاصل می‌شود، با تقسیم بر a^2 نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\frac{(a-h)^2 - a^2}{a^2} \simeq -2 \frac{h}{a}$$

در اینجا $\frac{h}{a}$ خطای نسبی در محاسبه طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبه مساحت مربع.

اکون به بررسی تخمین خطای در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونهٔ تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه $|h|$ کوچکتر باشد، فاصلهٔ بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد $|h|$ در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطای بیش از مقدار y میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطای میان نمودار تابع کم است. در (ج) و (د) نمودار تابع فاصله زیادی نسبت $(a, f(a))$ نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت بدمی کرد؟ اگر فرض کیم تابع f در سراسر دامنه، یا دست کم در بازه‌ای حول a ، مشتق پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همه نقاط نمودار یا دست کم نقاط نزدیک به $(a, f(a))$ وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهگ تغییر کمی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است، پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهگ تغییر مشتق تابع در قدر مطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهگ تغییر مشتق کوچک می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع f ، یعنی f' ، را به عوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق پذیر باشد، از آنجا که آهگ تغییر به وسیله مشتق سه‌جیده می‌شود، اندازه مشتق f' باید نشان دهد. شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق f' را که به $"f"$ نمایش می‌دهد، "مشتق دوم f " می‌نامد. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کیم:

(۱-۱۷) $S \rightarrow \mathbb{R}$: f یک تابع است و f در نقاط زیرمجموعه‌ای S' از S مشتق پذیر است، یعنی $S' \rightarrow \mathbb{R}$: f' ، تعریف شده است. برای نقطه درونی a از S' ، اگر مشتق f' در نقطه a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطه a خوانده و به (a) نمایش می‌دهیم.
اگر ب‌ویسیم $y = f(x)$ ، در نمادگذاری لایب‌نیتس، $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ یا اختصاراً $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش داده می‌شود.

اکون می‌توانیم به کمک مشتق دوم f ، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کیم.

(۲-۱۷) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کید تابع $S : f : \mathbb{R} \rightarrow S$ در یک بازه باز شامل نقطهٔ a دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم است. در این صورت اگر نقطهٔ $a + h$ در این بازه باشد داریم

$$f(a + h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2}f''(c)h^2 \quad (4)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a + h$ است.

توجه کید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر $|h|$ کوچکتر باشد، خطای متظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (۴) با مجدور h متناسب است)، و از طرفی دیگر اندازهٔ مشتق دوم بین a و $a + h$ می‌تواند بر مقدار خطأ اثر بگذارد. ظهور مجدور h بدین معنی است که در مسای عدندویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری a یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای h از $\frac{1}{10}$ استفاده کیم، طرف راست (۴) بر 100 تقسیم خواهد شد. در اثبات ۱۷-۲ خواهیم دید که حکم آن در واقع همتای قضیهٔ میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیهٔ میانگین با ارائه همتایی از قضیهٔ رل شروع خواهد شد.

(۳-۱۷) (همتای قضیهٔ رل برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $I : f : \mathbb{R} \rightarrow I$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I ، $a < b$ دو نقطهٔ I که $f(a) = f(b) = 0$ ، $a < b$ دو نقطهٔ I که $f'(a) = f'(b) = 0$. صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که $f''(c) = 0$.

برهان. شرایط قضیهٔ رل معمول برای $[a, b]$ برقرار است، پس نقطه‌ای c_1 وجود دارد، $a < c_1 < b$

$$\text{که } f'(c_1) = 0.$$

حال شرایط قضیهٔ رل معمولی برای تابع f' در $[a, c_1]$ برقرار می‌شود زیرا که $f'(a) = f'(c_1) = 0$.

پس نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < c_1$ ، که $f''(c) = (f')'(c) = 0$.

(۴-۱۷) (همتای قضیه میانگین برای مشتق دوم) I یک بازه باز است، $\mathbb{R} \rightarrow I : f$ تابعی دارای مشتق های مرتبه اول و دوم در I ، $a < b$ و نقطه I که $a < c < b$. در این صورت نقطه ای c وجود دارد، که:

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)] = \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 \quad (5)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = a + h$ ، (۵) به (۴) تبدیل می شود و پس از اثبات ۱۷-۴، صحت ۱۷-۲ نیز نتیجه می شود.

برهان ۱۷-۴. مشابه شیوه ای که از قضیه رل معمولی، قضیه میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می کیم. در آنجا با کم کردن مقدار y خط واصل از $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$ از $y = f(x)$ دیدیم که تفاضل در قضیه رل صدق می کند. در اینجا چون شب خط راست فوق لازم نیست برابر $f'(a)$ باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطه آغازی را برآورده نمی کند. با براین تابعی یک درجه پیچیده تر از تابع درجه یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کیم که در نقطه a مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب $f(a)$ و $f'(a)$ باشد، و در نقطه b ، مقدار تابع برابر $f(b)$. برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کافیت می کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$

برای اینکه $\phi(a) = f(a)$ ، باید داشته باشیم $A = f(a)$. اگر یک بار از ϕ مشتق بگیریم حاصل می شود:

$$\phi'(x) = B + 2C(x-a)$$

برای اینکه $\phi'(a) = f'(a)$ ، باید داشته باشیم $B = f'(a)$ ، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C(x-a)^2 \quad (6)$$

برای تعیین ضریب C ، از شرط $\phi(b) = f(b)$ استفاده می کیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + C(b-a)^2$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2} \quad (7)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای C ، تابع ϕ در (۶) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \quad (8)$$

حال تابع g را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می‌کیم. از (۸) نتیجه می‌شود که

$$g(a) = g(b) = 0 \quad , \quad g'(a) = 0$$

با این طبق (۳-۱۷) نقطه‌ای c وجود دارد، که $g''(c) = 0$ و $a < c < b$ باشد؛ ولی:

$$g''(c) = f''(c) - 2C = 0$$

یا

$$f''(c) = (2) \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2}$$

و با طرفین - وسطین حکم (۵) نتیجه می‌شود.

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول

(۴) و گزاره ۱۷-۲-۱۷-۴ نتیجه می‌شوند.

مثال ۶. تقریب خطی ۴ را که در مثال ۱ آوردیم بررسی می‌کیم. در این مثال داشتیم $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. با این طبق

$$\sqrt[3]{1.012} - 1.004 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\frac{1}{c^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{12}{1000}\right)^2 \quad (9)$$

۸

که در اینجا c بین 1 و $1/012$ است. $17-2$ - اطلاع دقیق‌تری در مورد c نمی‌دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خط را به راحتی و دقت به دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به دست می‌آمد. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدر مطلق خط است. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خط به دست آورдیم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتی است. در اینجا چون $1/012 < c < 1$ و در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن $1 = c$ ، قدر مطلق طرف راست (۹) یک کران بالایی برای قدر مطلق خط به دست می‌دهد:

$$|\sqrt[2]{1/012} - 1/004| < \frac{16}{106}$$

بما براین اگر مثلاً دقت 10^{-4} مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کیم، چون $\frac{1}{010} < \frac{1}{012} < \frac{1}{004}$ ، تقریب $1/004$ تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می‌دهد $1/0039841 \simeq \sqrt{1/012}$ که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان $1/0040$ می‌رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت ممی طرف راست (۹) نشان‌گر این است که تقریب $1/004$ از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت ممی $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{2}}$ مشاهده می‌کیم که $x > 0$ و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از $\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{2}} = f''(x)$ و نیز نمودار تابع $x^{\frac{1}{2}} = f(x)$ به صفر میل می‌کند وقتی که $|f''(x)| \rightarrow +\infty$ میل می‌کند وقتی $x \rightarrow 0^+$ در حالی که $|f''(x)| \rightarrow +\infty$. در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می‌شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی $x \rightarrow +\infty$ به شدت تغییر می‌کند در حالی که تغییر شیب وقتی $x \rightarrow 0^+$ بسیار کمتر است. بما براین می‌توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطه $a = 1$ برای $h = \sqrt{1+h}$ به دست می‌دهد، بعیی $\frac{h}{3} + 1$ ، برای $h > 0$ دقیق‌تر از h با همان $|h|$ باشد. مثلاً برای $h = 0/21$ مقدار تقریبی $1/07$ به دست می‌آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی

مقدار $1/\sqrt{656}$ را می‌دهد که با روند کردن به $1/\sqrt{7}$ تبدیل می‌شود). این در حالی است که برای $h = -0.21$ تقریب $1/\sqrt{93}$ با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت 0.92443 تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای $|h|$ بزرگتر تفاوت فاحش‌تر می‌شود. برای $h = 1$ اختلاف تقریب خطی $1/323233 = 1 + \frac{1}{3}$ با مقدار $1/\sqrt{259921} = 0.73412$ است در حالی که برای $h = -1$ تقریب خطی $\frac{2}{3}$ با مقدار واقعی 0.66666 اختلاف دارد.

نمودار تابع و کاربردهای آن

بحث جلسهٔ قبل اهمیت مشتق دوم را در تخمین خطای تقریب خطی نشان داد. در اینجا نخست به بررسی بیشتر کاربردهای مشتق دوم می‌پردازیم. یادآوری می‌کیم که اگر تابع f در بازهٔ باز I دوبار مشتق پذیر باشد و $a + h$ در این بازه باشد، آنگاه:

$$f(a + h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2}f''(c)h^2 \quad (1)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a + h$ است. از (1) بلافاصله نتیجه می‌شود که:

(۱-۱۸) گزاره. فرض کید I یک بازهٔ باز است و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق پذیر که مشتق دوم آن در سراسر بازهٔ I مثبت (به ترتیب مفی) است. در این صورت برای هر نقطهٔ درونی a از I ، نمودار تابع به ازای هر $x \neq a$ در بالا (به ترتیب پایین) خط مماس در نقطهٔ a قرار می‌گیرد. به بیان دیگر:

$$x \neq a \quad : \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

$$(x \neq a \quad : \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{به ترتیب}) \quad (3)$$

□

ضماءً در وضعیت $\circ > f''$ ، مشتق اول، یعنی شیب مماس، صعودی؛ و در وضعیت $\circ < f''$ ، شیب مماس نزولی خواهد بود. اگر $c < b < a$ طوری باشد که f'' روی $[a, b]$ و $[b, c]$ علامت مختلف داشته باشد، نقطهٔ b را یک نقطه عطف می‌نامد. اگر f'' پیوسته باشد در این نقطه که f'' تغییر علامت

می‌دهد باید داشته باشیم $f''(b) = 0$. در شکل ۱ (الف) تابعی با $f''(b) > 0$, در شکل ۱ (ب) تابعی با $f''(b) < 0$, و در شکل ۱ (ج) یک نقطه عطف نمایش داده شده است.

از شکل‌های ۱ (الف) و ۱ (ب) به نظر می‌رسد که وقتی $f''(b) > 0$, خط واصل بین هر دو نقطه نمودار باید در بالای نمودار قرار گیرد، و بالعکس وقتی $f''(b) < 0$, خط واصل بین دو نقطه نمودار در زیر نمودار تابع واقع می‌شود. این حدس در واقع درست است:

(۲-۱۸) گزاره. I یک بازه باز است و $I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق پذیر. فرض کیم $f''(x)$ در سراسر I مثبت (به ترتیب مفی) است. در این صورت برای هر دو نقطه a و b از I که $a < b$, خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بالای (به ترتیب پایین) نمودار f روی $[a, b]$ قرار می‌گیرد.

برهان. مطلب را برای $f''(x)$ ثابت می‌کیم، حالت $f''(x)$ مشابه است و نیز با تعویض x به $-x$ به دست می‌آید. توجه کیم که نقاط بازه $[a, b]$ را می‌توان به صورت $t(a + tb)$ نوشت که در آن $1 \leq t \leq 1$. همچین هر نقطه پاره خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ به صورت $f((1-t)a + tb)$ نمایش داده می‌شود. در واقع باید ثابت کیم:

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b) \quad (4)$$

فرض می‌کیم به ازای یک t , $0 < t < 1$, نامساوی (۴) برقرار نیست و به تا قض می‌رسیم. بدین ترتیب فرض کیم t وجود دارد که

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

پس

$$(1-t)f((1-t)a + tb) + tf((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

با این

$$(1-t)(f((1-t)a + tb) - f(a)) \geq t(f(b) - f((1-t)a + tb))$$

اگر دو طرف را بر $(1-t)(b-a)$ تقسیم کیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{t(b-a)} \geq \frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

یا:

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{(1-t)a+tb-a} \geq \frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{b - ((1-t)a+tb)}$$

برای سهولت در نوشتن، نقطه $(1-t)a+tb$ را به c نمایش دهید. پس داریم:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

کسر سمت چپ شبیه خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(c, f(c))$ است. طبق قضیه میانگین نقطه‌ای، بین a و c وجود دارد که کسر سمت چپ برابر $f'(c_1)$ است. به همین ترتیب نقطه‌ای c_2 وجود دارد، که $f'(c_2)$ برابر کسر سمت راست است. با این:

$$f'(c_1) \geq f'(c_2)$$

ولی چون $f''(c_1) < f''(c_2)$ صعودی است، پس $f''(c_1) < f''(c_2)$ و به تناقض مورد نظر رسیده‌ایم. \square
به طور کلی تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطه نمودار در بالای نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های محدب (محدب رو به پایین، یا مقعر رو به بالا)، و تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطه نمودار در زیر نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های مقعر (مقعر رو به پایین، یا محدب رو به بالا) می‌نامند. بدین ترتیب ثابت کردہ‌ایم که:

(۳-۱۸) نتیجه. فرض کیم I یک بازه باز و $\mathbb{R} \rightarrow I : f$ دوبار مشتق‌پذیر است. اگر f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب مفی) باشد، تابع f در I محدب (به ترتیب مقعر) است. \square
با توجه به این نتیجه می‌توان در رسم نمودار تابع‌ها، با توجه به علامت مشتق دوم بازه‌های تحدب و تغیر تابع را م‌ظور نمود.

حال فرض کیم تابع f در بازه‌ای حول نقطه درونی a از بازه خود مشتق‌پذیر است و در نقطه a دارای مشتق دوم، $f''(a)$ ، است. آیا علامت $f''(a)$ اطلاعی در مورد این نقطه

به دست می‌دهد؟ در بخش ۱۵، احکام ۱۵-۴-۲ نشان دادند که اگر برای تابعی g داشته باشیم $\circ > g'(a) <$ (به ترتیب $\circ < g'(a)$)، آنگاه برای x های نزدیک a و بزرگتر از a داریم $g(x) < g(a)$ (به ترتیب $g(x) > g(a)$)، برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) > f'(a)$). حال اگر به جای g تابع f' را جایگزین کیم، نتیجه می‌شود که به فرض $\circ > f''(a) <$ (به ترتیب $\circ < f''(a)$)، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) < f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) > f'(a)$)، برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) > f'(a)$. بالاخص اگر $\circ = f'(a)$ ، یعنی a یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد نتیجه می‌شود که اگر $\circ > f''(a)$ ، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $\circ > f'(x) < f'(a)$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $\circ < f'(x) < f'(a)$.

اگر $\circ < f''(a)$ ، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $\circ < f'(x) < f'(a)$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $\circ > f'(x) < f'(a)$.

پس در وضعیت $\circ = f'(a) \text{ و } \circ > f''(a)$ ، تابع در سمت راست a صعودی؛ در سمت چپ آن نزولی است، در نتیجه a یک نقطهٔ کمیمهٔ موضعی خواهد بود. به همین ترتیب، وقتی $\circ = f'(a) \text{ و } \circ < f''(a)$ ، نقطهٔ a یک بیشیمهٔ موضعی است. با براین "آزمون مشتق دوم" به شرح زیر ثابت شده است.

(۴-۱۸) آزمون مشتق دوم. فرض کید تابع f در یک بازه حول نقطهٔ درونی a از دامنهٔ خود مشتق پذیر است و در نقطهٔ a ، مشتق دوم $f''(a)$ وجود دارد. به علاوه فرض کید $\circ = f'(a)$. در این صورت:

الف) اگر $\circ > f''(a)$ ، نقطهٔ a یک کمیمه (مینیمم) موضعی است.

□ ب) اگر $\circ < f''(a)$ ، نقطهٔ a یک بیشیمه (ماکسیمم) موضعی است.

آزمون مشتق دوم نیز در رسم نمودار تابع‌ها گاهی مؤثر واقع می‌شود. اگر علاوه بر $\circ = f'(a)$ ، داشته باشیم $\circ = f''(a)$ ، اطلاعی در مورد ماهیت نقطهٔ a حاصل نمی‌شود. در شکل (۴) چهار نمونه با

نمایش داده شده‌اند که چهار وضعیت مختلف دارند.

چه مثال زیر شکل‌های ۱ و ۳ بخش ۱۵ را توجیه می‌کند.

مثال ۱. نمودار تابع $f(x) = x^4 - x^3$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را رسم کید.

داریم $f''(x) = 12x^2 - 6x$, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$. در جدول زیر علامت تابع و علامت

مشتق‌های اول و دوم آن را در بازه‌های گوناگون نمایش داده‌ایم:

x	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	۱
$f(x)$	+	۰	-	: - ۰ +
$f'(x)$	-	۰	-	: - ۰ + : +
$f''(x)$	+	۰	-	۰ + : + : +

با توجه به داده‌های بالا، شکل ۳ (الف) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. نمودار تابع $f(x) = x - \sin x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را رسم کید.

داریم $f''(x) = \sin x$ و $f'(x) = 1 - \cos x$. این تابع صعودی است زیرا که فقط در مجموعه‌ای

گسسته از نقاط، یعنی $x = 2k\pi$ مشتق صفر می‌شود و در سایر نقاط مشتق مثبت است؛ پس بین هر دو مضرب متوالی 2π تابع صعودی است. مشتق دوم تابع در مضارب π صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط همه نقاط عطف هستند. ضمماً داریم $0 = f(0)$ ، و از صعودی بودن تابع نتیجه می‌شود که $x < 0$ برای $f(x) < 0$ و $x > 0$ برای $f(x) > 0$. با در نظر گرفتن علامت f'' در بازه‌های

مختلف، شکل ۳ (ب) به‌دست می‌آید.

مثال ۳. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف شده است رسم کید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای $x \neq 0$ تابع داده شده ترکیب و حاصل ضرب تابع‌های مشتق‌پذیر است پس برای $x \neq 0$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در $x = 0$ مشتق‌پذیر بودن تابع را مستقیماً از تعریف تحقیق می‌کیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h) \left(\sin \frac{1}{h} \right)$$

از آنجا که $|\sin \frac{1}{h}|$ کراندار با کران ۱ است و $\dim_{h \rightarrow 0} h = 0$ حد بالا وجود دارد و برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار در $x = 0$ وجود دارد و افقی است. ضمناً فرمول مشتق f' به ازای $x \neq 0$ از فرمول لاپلایس و قاعده زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (5)$$

ادعا می‌کیم دنباله‌ای از نقاط (x_n) وجود دارد که $x_n \rightarrow 0$ و $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$. در واقع با قرار دادن $f'(x) = 0$ داریم:

$$\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

اگر قرار دهیم $t = \frac{1}{x}$ ، باید نشان دهیم دنباله‌ای t_n وجود دارد که $t_n \rightarrow +\infty$ و $\tan t_n = \frac{1}{2} t_n$. این مطلب با توجه به شکل ۴ بدیهی است زیرا که نمودار تابع $t = \frac{1}{2} \tan t$ همه شاخه‌های نمودار تابع تاوبی $t = \tan t$ را قطع می‌کند.

با قرار دادن $x_n = \frac{1}{t_n}$ حکم مورد نظر به‌دست می‌آید. ضمناً $f'(x_n) = 0$ در همه این نقاط تغییر علامت می‌دهد زیرا که اگر بویسیم

$$f'(x) = (2x \cos \frac{1}{x}) (\tan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x})$$

در نقاط x_n پرانتز دوم صفر شده تغییر علامت می‌دهد زیرا که خط راست $t = \frac{1}{x}$ متاباً در بالا و پایین نمودار $t = \tan t$ قرار می‌گیرد و $2x \cos \frac{1}{x}$ در $x = x_n$ تغییر علامت نمی‌دهد. نتیجه ای که نقاط (x_n) یکی در میان ماکسیمم و مینیمم موضعی هستند. نهایتاً ای که چون $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ، نمودار تابع $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ بین نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ محصور می‌ماند. این نمودار در شکل ۵ نمایش داده شده است.

توجه کنید که $f'(0) = 0$ ولی نقطه $x = 0$ کمیته موضعی، نه بیشیته موضعی و نه نقطه عطف معمولی آن است. در واقع چون تابع f' در $x = 0$ پیوسته نیست (عبارت (5) حد ندارد وقتی $x \rightarrow 0$) حالی که $f''(0) = 0$ نمی‌تواند در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، بعی $f'''(0)$ موجود نیست.

مثال ۴. شکل ۱ بخش ۱۵ نمودار تابعی f را نشان می‌دهد که f' در هیچ بازهٔ حول صعودی نیست. با اندک تغییری در مثال ۳ می‌توان فرمولی برای چنین تابعی ارائه کرد. می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

از محاسبات مثال ۳ نتیجه می‌شود که f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $f'(0) = \frac{1}{2}$. طبق ۱۵-۴-۱، این تابع برای $x > 0$ کوچک مقدار مثبت و برای $x < 0$ با قدر مطلق کوچک، مقدار مفی دارد. برای $x \neq 0$ داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

ادعا می‌کیم دنباله‌ای (x_n) وجود دارد که $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$ در این نقاط تغییر علامت می‌دهد. در واقع چون $\cos \frac{1}{x}$ با کوچک شدن x و $2x \sin \frac{1}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ بی‌نهایت نوسان بین -1 و $+1$ دارد، $f'(x) = 0$ بی‌نهایت جواب در نزدیکی 0 دارد. در این نقاط f' تغییر علامت می‌دهد زیرا نمودار $\cos \frac{1}{x}$ خطوط نزدیک ارتفاع $\frac{1}{2}$ را در گذر بین -1 و $+1$ قطع می‌کند. در شکل ۶ تقاطع نمودارهای تابع با مقدار $\frac{1}{2} - 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ و تابع با مقدار ثابت $\frac{1}{2}$ به طور تقریبی رسم شده است. بدین ترتیب شکل ۱ بخش ۱۵ توجیه می‌شود.

آنچه تا این مرحله از خواص مشتق اول و دوم آموخته‌ایم ابزاری نیرومند و مؤثر برای صورت بدی و حل بسیاری مسایل عملی در اختیار ما قرار می‌دهد. در باقیمانده این بخش و در جلسه آیده چند نمونه از این مسایل را بررسی خواهیم کرد. نخست در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کیم در آنها می‌توان به کمک شکل اطلاعات کیفی سودمند کسب کرد و در بخش آیده تعدادی مثال کمی بهمراهی مطرح خواهیم ساخت.

مثال ۱. گلدانی به صورت شکل ۷ (الف) داده شده است. در این گلدان با آه‌گ ثابت آب می‌ریزیم تا گلدان پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را بر حسب زمان رسم کیم. زمان را به t و ارتفاع آب را به h نمایش می‌دهیم. هدف در اینجا رسم نمودار h نسبت به t است. ارتفاع‌های حساس، مربوط به برآمدگی‌ها و تورفتگی‌های گلدان را به a , b و c نمایش داده‌ایم و

$h = h(t)$ را کف گلدان می‌گیریم. قطعاً با ریختن آب در گلدان ارتفاع سطح آب افزایش می‌یابد، پس تابعی صعودی از t خواهد بود. به فرض مشتق پذیری، مشتق اول h نسبت به t مشتب است. عامل دیگری که در شکل نمودار مؤثر است علامت مشتق دوم h نسبت به t است. اگر مشتق اول، یعنی آهگ افزایش h در زمان، خود صعودی باشد، مشتق دوم مثبت و نمودار محدب است، ولی اگر آهگ افزایش h نسبت به t نزولی باشد، مشتق دوم منفی و نمودار مقعر خواهد بود. پس لازم است تغییر ارتفاع را در بازه‌های مختلف بررسی کیم. در بازه $a \leq t \leq b$ ، ضخامت بدن گلدان رو به افزایش است، به این آهگ افزایش ارتفاع سطح آب به تدریج کمتر می‌شود، پس مشتق دوم h نسبت به t وقتی $a < t < b$ ، منفی است. بالعکس برای $b \leq t \leq c$ ، تگتر شدن مقطع گلدان موجب می‌شود که آهگ افزایش ارتفاع سطح آب فزونی باید و در نتیجه در $b < t < c$ ، مشتق دوم h نسبت به t مثبت خواهد بود. وبالاخره در $c \leq t \leq d$ ، نیز، مانند $a \leq t \leq b$ ، آهگ افزایش ارتفاع سطح آب نزولی است و $h''(t)$ منفی می‌باشد. یکی دو نکته دیگر در اینجا حائز اهمیت است. در هر دو بازه $a \leq t \leq b$ و $b \leq t \leq c$ داریم $h'(t) > h''(t)$ و $h''(t) > h''(c)$. ولی شکل مقطع گلدان در دو مورد متفاوت است، این اختلاف شکل گلدان را چگونه می‌توان در نمودار $h(t)$ معکس کرد؟ اگر فرض کیم طول بازه‌های $[a, b]$ و $[b, c]$ برابر است و مقطع گلدان در ارتفاع‌های a و b برابر و نیز در ارتفاع‌های b و c برابر است، می‌بینیم که حجم گلدان بین a و b ، به سبب برآمدگی، بیشتر از حجم گلدان بین b و c است. به این‌سان، توجه به اینکه آب با آهگ ثابت وارد گلدان می‌شود، مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع $c - a$ تا b بزرگ‌تر از مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع $b - a$ است. این نکته در نمودار مظور شده است، توجه کید که بازه $[t_b, t_c]$ کوچک‌تر از $[t_a, t_b]$ مظور شده است.

تمرین. همین بررسی را برای گلدان‌های شکل زیر انجام دهید. علاوه بر شکل کیفی، با توجه به داده‌های تصاویر فرمولی برای h بر حسب t به دست آورید و مشتق‌های اول، دوم و سوم h نسبت به t را مطالعه کید.

مثال ۲. نمودار مصرف $\frac{\text{لیتر}}{\text{ساعت}}$ بزین یک نوع اتومبیل بر حسب سرعت اتومبیل در شکل ۹ آمده است.

چگونه می‌توان سرعتی را پیدا کرد که در آن بهترین راندمان $\frac{\text{لیتر}}{\text{کیلومتر}}$ حاصل می‌شود؟

سرعت اتومبیل را به v نمایش می‌دهیم. برای هر سرعت v , p متابصر در نمودار، مصرف بزین

اتومبیل به لیتر است اگر اتومبیل یک ساعت با سرعت ثابت v حرکت کند، یا به بیان دیگر

صرف به لیتر $= p$ اگر اتومبیل با سرعت ثابت v حرکت کند. در شکل می‌بینیم که بهترین

راندمان نسبت به زمان، یعنی کمترین مصرف در ساعت، به ازای $v = 50$ کیلومتر در ساعت به دست

می‌آید. مجھولی که مطرح است، بهترین راندمان مصرف بزین نسبت به مسافت است. اگر

صرف به لیتر q را به v نمایش دهیم، در سرعت ثابت v داریم:

$$q = \frac{\frac{\text{صرف به لیتر}}{\text{زمان بر حسب ساعت}}}{\frac{\text{مسافت به کیلومتر}}{\text{زمان بر حسب ساعت}}} = \frac{p}{v}$$

با براین مسئله یافتن می‌بیم q مطرح است. توجه کنید که شهوداً نباید انتظار داشت که می‌بیم

q و می‌بیم p لزوماً در یک سرعت حاصل شوند. بهترین راندمان سوخت بزین در ساعت از نظر

حفظ و نگاهداری موتور بهبود است ولی ممکن است برای رسیدن به یک مقصد دور دست کمترین

صرف بزین را متضمن نباشد. در واقع اگر محوی p بر حسب v , طبق شکل ۹ باشد (این محوی از

آزمایش‌های واقعی گرفته شده است)، هدف ما می‌بیم کردن $\frac{p}{v}$ است نه می‌بیم کردن p . توجه کنید که

برای هر سرعت v , q متابصر برابر شب خط راستی است که از 0 به نقطه (v, p) روی نمودار رسم

می‌شود. با براین باید نقطه‌ای را روی نمودار پیدا کرد که شب این خط راست برای آن حداقل

ممکن باشد. واضح است که این حداقل برای خط مماسی که از 0 به نمودار رسم شود به دست

می‌آید و این سرعتی v_0 بالاتر از نقطه می‌بیم p به دست می‌دهد (در شکل ۹، $v_0 = v$). به عوان

یک تقریب محاسباتی، فرض کنید $5 + 50^2 - 50(v - 50)^2 = p$ که به ازای $v = 50$ می‌بیم دارد. داریم

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{50}v - 1$$

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv}}{v^2} = \frac{\frac{1}{50}v - 1}{v^2} = \frac{\frac{1}{50}v^2 - v - \frac{1}{50}(v - 50)^2 - 5}{v^2}$$

برای یافتن می‌یم q ، قرار می‌دهیم $\frac{dq}{dv} = 0$ (از ماهیت نمودار v روش است که q باید دارای می‌یم در یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف باشد) که نتیجهٔ می‌دهد $0 = 30 - \frac{1}{100}v^2$ ، یا $v \simeq 54/8$ کیلومتر بر ساعت.

یکی از کاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه سازی است. مقصود از بهینه سازی یافتن ماکسیمم یا مینیموم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل $S \rightarrow \mathbb{R}$ که $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} است. نمونه‌هایی از مسایل بهینه سازی که در عمل به آن بر می‌خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان کیلومتر لیتر را داشته باشد (مثال جلسه قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به طوری که کمترین مقدار حلبی در ساخت آن به کار گرفته شود، ... معمولاً دامنه تابع f یک بازه از اعداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازه کراندار یا بی‌کران باشد و نقاط انتهایی بازه کراندار ممکن است مطرح باشند یا نباشند.

نخست حالی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ داده شده است. می‌دانیم که اگر f پیوسته باشد، تابع f دارای ماکسیمم و مینیموم روی $[a, b]$ است. در این حالت انجام موفقیت‌آمیز سه‌گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینیموم می‌شود:

(۱-۱۹) گام‌های یافتن ماکسیمم و مینیموم روی $[a, b]$

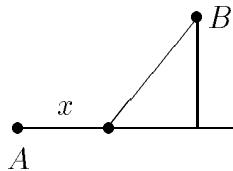
(الف) محاسبه $f(a)$ و $f(b)$.

(ب) یافتن مقدار f در نقاط درونی بازه که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. این نقاط شامل همه نقاط ماکسیمم مینیموم موضعی می‌شود که تابع در آن نقاط مشتقپذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می‌نامند.

(ج) یافتن مقدار f در نقاطی که در آن f مشتقپذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می‌نامند. این سه نوع نقطه همه نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینیموم را در بر می‌گیرند. با مقایسه مقدار f در این سه دسته نقطه می‌توان ماکسیمم و مینیموم تابع f را در $[a, b]$ پیدا کرد.

اگر $a = -\infty$, $b = +\infty$, هردو، و یا اگر باز \circ به شکل $[a, b]$ یا $[a, b)$ باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع را وقتی مقدار متغیر به هر انتهای مشمول نشده در دامنه تعریف f نزدیک می‌شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطه آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنه آن است. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل راهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوابهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیره B که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار دارد، فردی در نقطه A در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره فاصله دارد و می‌تواند از قایق موتوری و نیز یک اتومبیل برای حرکت در جاده ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری 20 km/hr و سرعت اتومبیل در جاده ساحلی 40 km/hr است. تعیین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان، t ، باید مینیمم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطه B مجموع دو زمان است، $t_1 + t_2$ ، که در آن $t_1 = t_1(x)$ زمان استفاده از اتومبیل و $t_2 = t_2(x)$ مدت زمان استفاده از قایق می‌باشد. اگر مسافت x کیلومتر نخست در جاده ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_1 = \frac{x}{40}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{3^2 + (5-x)^2}}{20}$$

بنابراین تابعی که باید مینیموم آن پیدا میشود عبارت است از:

$$t = \frac{x}{40} + \frac{\sqrt{9 + (5-x)^2}}{20}$$

لازم است که دامنه این تابع، یعنی حدود x ، نیز مشخص شود. در اینجا $5 \leq x \leq 0$. زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطه A به سوی B با قایق حرکت کند داریم $x = 0$ ، و از سوی دیگر حداکثر استفاده معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی $x = 5$ ، و استفاده از قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به صورت زیر پیاده میکنیم:

(الف) در $x = 0$ داریم (ساعت)، $t = \frac{\sqrt{34}}{20} \approx 0.275$ و برای $x = 5$ ساعت $t = 0.125 + 0.15 = 0.25$

(ب) و (ج). t به عنوان تابع x در داخل بازه $[0, 5]$ مشتقپذیر است زیرا تابع جذر فقط در نقطه $x = 5$ مشتقپذیر نیست و اینجا زیر رادیکان حداقل ۹ است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی $\frac{dt}{dx}$ برابر صفر قرار داده شده نقاط بحرانی و مقدار f در آنها مشخص شود. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{40} + \frac{-2(5-x)}{40\sqrt{9-(5-x)^2}} = 0 \\ \sqrt{9-(5-x)^2} &= 2(5-x) \\ 9-(5-x)^2 &= 4(5-x)^2 \\ (5-x)^2 &= \frac{9}{5} \\ 5-x &= \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

چون $5-x \geq 0$ تنها جواب عبارت است از

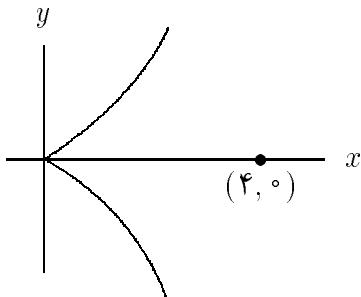
$$x = 5 - \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 3.658$$

و در این نقطه:

$$\begin{aligned} t &= \frac{5-\frac{3}{\sqrt{5}}}{40} + \frac{\sqrt{9+\frac{9}{5}}}{20} \\ &\approx 0.091 + 0.164 = 0.255 \text{ (ساعت)} \end{aligned}$$

در مقایسه این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می کنیم که مینیموم به ازای $x \approx 3/658^{km}$ به دست می آید.

مثال ۲. می خواهیم نزدیکترین نقطه منحنی $y = x^3$ را به نقطه $(0, 4)$ پیدا کنیم. این مساله ساده را از سه راه مختلف حل می کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسه روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع $y = x^{3/2}$ و $y = -x^{3/2}$ هر دو با دامنه $[0, +\infty]$ است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطه $(0, 4)$ کافی است مساله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینه نقطه به دست آمده در شاخه دیگر را نیز منظور کنیم. بنابراین فقط $y = x^{3/2}$ روی $[0, +\infty]$ را در نظر می گیریم. فاصله نقطه $(0, 4)$ از نقطه ای (x, y) روی این منحنی برابر است با $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$. از آنجاکه مینیموم کردن یک کمیت مشبّت مطرح است، می توان مجدد همین عبارت یعنی $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ را در نظر گرفت که فاقد نماد $\sqrt{}$ است و محاسبه با آن سر راست تر. ضمناً برای نقاط منحنی $y = x^3$ پس باید مینیموم تابع زیر را به دست آورد:

$$D(x) = (x-4)^2 + x^6, \quad 0 \leq x < +\infty$$

در نقطه انتهایی $x = 0$ داریم $D(0) = 16$. رفتار تابع وقتی $x \rightarrow +\infty$ را نیز باید در نظر بگیریم که $D(x) \rightarrow +\infty$ وقتی $x \rightarrow +\infty$. تابع $D(x)$ به عنوان تابع x در $0 < x < +\infty$ مشتقپذیر

است، پس باید $\frac{dD}{dx}$ را برابر صفر قرار داده مینیم و موضعی را پیدا کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = 2(x - 4) + 3x^2$$

معادله $3x^2 + 2x - 8 = 0$ دارای ریشه‌های $-2, \frac{4}{3}$ است که در دامنه تابع ما نیست، بنابراین فقط $x = \frac{4}{3}$ نیاز به بررسی دارد. داریم $D(\frac{4}{3}) = \frac{256}{27} < D(0) = 16$. با توجه به اینکه D در $(\frac{4}{3}, \infty)$ محدود است می‌دانیم که حداقل فاصله را می‌دهند عبارتند از $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3\sqrt{3}})$.

راه دوم. می‌توانیم بجای اینکه y را تابعی از x روی منحنی بگیریم، x را تابعی از y فرض کنیم، و در اینصورت به جای تابع D بالاکه برحسب x نمایش داده شده، محدود فاصله را برحسب y بررسی می‌کنیم:

$$E(y) = (y^{2/3} - 4)^2 + y^2, \quad -\infty < y < +\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح است و دامنه آن تمام \mathbb{R} می‌باشد. وقتی $y \rightarrow \infty$ داریم $E \rightarrow +\infty$. تابع داده شده در $y = 0$ مشتقپذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به طور جداگانه بررسی کرد. داریم $E(0) = 16$. در سایر نقاط تابع مشتقپذیر است و با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = 0$ نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy} = \frac{4}{3} \frac{1}{y^{1/3}} (y^{2/3} - 4) + 2y$$

با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = 0$ مضرب کردن در $y^{1/3}$ (توجه کنید که $y = 0$ قبلًاً بررسی شد). نتیجه می‌شود.

$$3y^{4/3} + 2y^{2/3} - 8 = 0$$

که یک معادله درجه ۲ برحسب $y^{2/3}$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود $y^{2/3} = -2$ که جواب منفی قابل قبول نیست، پس $y^{2/3} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ یا $y = \sqrt[3]{y^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. مجدداً $E(\frac{8}{3\sqrt{3}}) < E(0)$ و همان جواب راه اول نتیجه می‌شود.

راه سوم. وقتی از رابطه $f(x, y) = 0$ نتوان یکی از y یا x را به صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر x, y را بحسب متغیر جدیدی t بنویسیم. با تجسس t به عنوان زمان می‌توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه‌ای (x, y) بحسب زمان است. برای منحنی $x^3 = y^2$, می‌توان نوشت:

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty$$

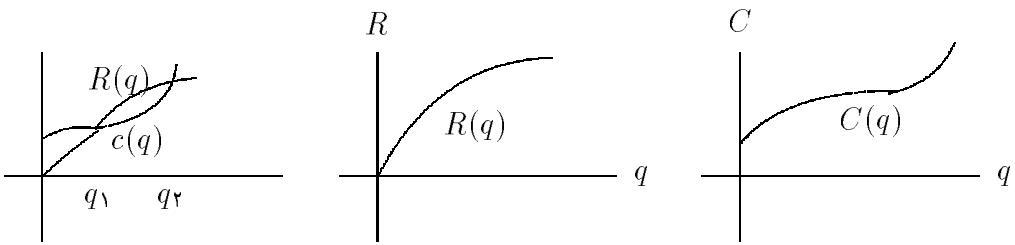
در اینصورت مجدد فاصله (x, y) از $(0, 0)$ به صورت تابعی از t ارائه می‌شود:

$$F(t) = (t^2 - 4)^2 + t^6, \quad -\infty < t < +\infty$$

داریم $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty$ وقتی $F(t) \rightarrow +\infty$ به عنوان تابعی از t همه‌جا مشتق‌پذیر است، مشتق آن نسبت به t را برابر صفر قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود $0 = 6t^5 + 4t^3 - 16t = 0$, یا $t(3t^2 + 2t - 8) = 0$, یا $t = 0$, $t = -2$ و $t = \frac{2}{3}$ (غیر قابل قبول) را می‌دهد. داریم $F(0) = 16$ و $F(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{256}{27}$ و جواب مساله همان نقاط $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$ هستند.

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطه $(0, 0)$ روی منحنی $x^3 = y^2$ است که یک ماسکیم موضعی برای فاصله از نقطه $(0, 0)$ می‌باشد. از راه حل اول، این نقطه به صورت یک انتهای بازه تابع ظاهر می‌شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست، و در راه حل سوم به عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است. بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورت‌پذیر شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود.

(۲-۱۹) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می‌کند که می‌توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد. مثلاً تولید شکر بحسب تن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هوایپیما یا زیردیایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می‌شود. هزینه تولید بر حسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است. اگر هزینه تولید q مقدار از کالا را به $C(q)$ نمایش دهیم (مثلاً بر حسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳



شکل ۵

شکل ۴

شکل ۳

به صورت زیر توجیه می شود. برای راه اندازی تولید، مقداری سرمایه‌گذاری اولیه لازم است، بنابر در آغاز (یعنی $q = 0$) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت $C(0)$ ظاهر می شود. با افزایش تولید، چون سرمایه‌گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینه نسبی تولید کاهش می یابد، یعنی پایین‌تر از یک خط راست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه‌ای که صرف تهیه فیلم و زینک می شود و به نسبت بالاست تکرار نمی شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینه نسبی، یعنی $\frac{C(q)}{q}$ کاهش می یابد. این واقعیت به صورت تقریبی در شکل ۴ نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزایش ماشین‌آلات و نیروی کار باشد که در اینصورت این افزایش برحسب تغییر جهت تقریبی $C(q)$ می شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به وقوع بپیوندد. در مقابل هزینه تولید، در شکل ۴ در آمد حاصل از فروش q مقدار کالا، $R(q)$ ، نمایش داده شده است. در اینجا $R(0) = 0$ ، یعنی قبیل از فروش درآمدی وجود ندارد. در آغاز فروش حدوداً خطی است، یعنی به تناسب فروش q واحد، در آمدی که برابر حاصل ضرب q در قیمت فروش یک واحد است حاصل می شود. ولی با افزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و آفت قیمت، تدریجیاً افزایش تولید موجب افزایش متناسب درآمد نمی شود و نمودار $R(q)$ رو به پایین مقعر می شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار داده شده‌اند. روی بازه $[q_1, q_2]$ میزان درآمد از هزینه بالاتر است و برای اینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازه $[q_1, q_2]$ بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی $p(q) = R(q) - C(q)$ را

به حداقل ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید، q ، را در بازه $[q_1, q_2]$ انتخاب کند که برای آن $P(q)$ ماکسیمم شود. برای اینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای $C(q)$ ، $R(q)$ عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتقپذیر نیز باشند. در اینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی q از تولید حادث می‌شود که در آن $\frac{dp}{dq} = 0$. برای درک اقتصادی این مطلب باید برداشتی اقتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dR}{dq}$ و $\frac{dC}{dq}$ چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان q_0 از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

پس در واقع برای q_0 نزدیک q_0 داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی‌داری به عنوان حداقل افزایش یا کاهش تولید مطرح است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت $q - q_0$ را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q_0 + 1) - C(q_0)}{1} = C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (1)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی $\frac{dC}{dq}(q_0)$ هزینه تولید یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد، $\frac{dC}{dq}(q_0)$ را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل استفاده از لغت نهایی را خواهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_0) \approx R(q_0 + 1) - R(q_0) \quad (2)$$

یعنی $\frac{dR}{dq}(q_0)$ درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به q_0 رسیده باشد. $\frac{dR}{dq}(q_0)$ را درآمد نهایی می‌نامند.

حال به مسأله ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر بهازای مقدار q در $[q_1, q_2]$ ماکسیمم

سود حاصل شود، داریم $\frac{dR}{dq}(q_0) - \frac{dC}{dq}(q_0) = 0$ و (1) و (2):

$$R(q_0 + 1) - R(q_0) \approx C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (3)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی از کالا برابر هزینه تولید یک واحد اضافی از کالاست. این مطلب را می‌توان به طور شهودی نیز توجیه کرد. برای اینکه یک نقطهٔ ماکسیمم باشد باید برای q^* و کوچکتر از q^* ، تابع $P = R - C$ صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر ایجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر واحد بیش از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بالعکس برای q^* و بزرگتر از q^* ، تابع $P = R - C$ باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر ایجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بنابراین در نقطه‌گذار از صعود به نزول P ، باید هزینهٔ تولید یک واحد اضافی با درآمد ناشی از فروش آن برابر شود. حال می‌توان به دلیل استفاده از لغت نهایی پی‌برد. مقدار q^* که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیرا که پس از آن سود تولید کاهش خواهد یافت.

به عنوان تمرینی در این مفاهیم، به عنوان مثال، روشی ترسیمی برای محاسبه هزینهٔ نهایی را که در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

مثال فرض کنید هزینهٔ تولید یک واحد از کالا را وقتی که مقدار تولید کالا q باشد به $a(q)$ نمایش دهیم. در اینصورت داریم:

$$C(q) = q \cdot a(q) \quad (3)$$

نمودار $a(q)$ بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینه تولید هر واحد ارزانتر می‌شود. برای یافتن $(q^*, \frac{dC}{dq}(q^*))$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد. در نقطه $(q^*, a(q^*))$ مماس نمودار $a(q)$ را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطه S قطع کند. از S خط راستی یا ضریب زاویهٔ دو برابر ضریب زاویهٔ خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم $q = q^*$ را در نقطه‌ای T قطع کند. مختصه قائم T برابر $\frac{dC}{dq}(q^*)$ است. توجیه این مطلب یک محاسبه سر راست است. با مشتقگیری از رابطهٔ (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q^*) = a(q^*) + q^* \frac{da}{dq}(q^*) \quad (4)$$

از طرفی دیگر معادله خط مماس بر نمودار $(q_0, a(q_0))$ در نقطه $a(q)$ هست:

$$y - a(q_0) = \frac{da}{dq}(q_0) \cdot (q - q_0)$$

این خط محور قائم، y ، را در $q = q_0$ قطع می‌کند، پس $S = (q_0, a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0)$. معادله خط راست گذرا از S با شیب $\frac{da}{dq}(q_0)$ هست:

$$y - a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 = \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q$$

اشتراك این خط راست با $q = q_0$ با قرار دادن $q = q_0$ حاصل می‌شود که بنابراین مقدار y آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \\ &= a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_0)$$

همانطور که ادعا شده بود.

چند جمله‌ای تیلور و تقریب‌های مرتبه بالا

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در نقطه a از دامنه خود مشتقپذیر باشد، تقریب خطی f در نقطه a تابعی از درجه یک است، در واقع تابع با مقدار $A(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$ ، که مقدار آن بهازی $x = a$ برابر مقدار تابع f در آن نقطه است و وقتی x از a دور می‌شود، $(x - a)$ به کنندی از $A(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$ فاصله می‌گیرد. این نزدیکی ترتیب خطی به تابع اصلی برای x ‌های نزدیک a ناشی از این است که تقریب خطی در واقع مقدار تابع درجه یک مماس بر تابع f است یعنی نه تنها $A(a) = f(a)$ بلکه مشتق A و f نیز در $x = a$ برابرند، $A'(a) = f'(a)$. هدف ما در این بخش ارائه یک دنباله تقریب‌های به طور فزاینده دقیق‌تر از یک تابع حول نقطه‌ای a از دامنه تابع است. در مقابل دقیق‌تر شدن تقریب، محاسبه این توابع تدریج‌اً دشوار‌تر می‌شود. به طور کلی برای اینکه یک روش تقریب از ارزش و اعتبار برخوردار باشد، شرایط زیر ضروری است:

(۱) محاسبه نامزد تقریب باید ساده‌تر از محاسبه تابع اصلی باشد.

(۲) نامزد تقریب باید واقعاً به تابع داده شده نزدیک باشد.

در مورد (۱)، تقریب خطی نمونه بارز تابعی است که محاسبه آن ساده است. پس از تابعهای ثابت، تابعهای خطی که نمودار آنها یک خط راست است ساده‌ترین تابع محسوب می‌شوند. در این بخش تابعهایی که به عنوان تقریب مطرح می‌کنیم چند جمله‌ایهای از درجات گوناگون هستند. به طور کلی چند جمله‌ایها نیز که از جمع و ضرب اعداد حقیقی به دست می‌آیند تابع به نسبت ساده محسوب می‌شوند. هر چه درجه چند جمله‌ای کوچک‌تر باشد، محاسبه چند جمله‌ای ساده‌تر است. چند جمله‌ایهای درجه صفر، تابع ثابت هستند، چند جمله‌ایهای درجه یک به عنوان تقریب خطی به کار می‌روند، و غیره.

در مورد (۲)، نزدیک بودن تقریب به تابع را چگونه باید ارزیابی کرد؟ در واقع برای سودمند بودن یک روش تقریب، باید بتوانیم اطمینان خاطر حاصل کنیم که خطای استفاده از این تقریب در حد قابل قبول برای به کارگیری در کاربرد مورد نظر است. به این منظور باید یک روش تخمین خطای همراه را با روش تقریب در دست باشد که بتوان به کمک آن یک کران بالایی برای قدر مطلق خطای ارائه کرد. در

مورد تقریب خطی دیدیم که اگر تابع f دوبار مشتقپذیر باشد، خطای $\frac{1}{2}M(x-a)^2$ تجاوز نمی‌کند که در اینجا M یک کران بالایی برای مشتق دوم تابع در بازه بین a و x است. بنابراین با محاسبه $\frac{1}{2}M(x-a)^2$ می‌توان ملاحظه کرد که حداکثر خطای احتمالی در حد قابل قبولی هست یا نیست. به همین ترتیب، برای روش‌های کلی تری که در این جلسه عرضه خواهیم کرد، یک روش تخمین خطای نیز به همراه خواهیم آورد که کرانی برای حداکثر خطای ممکن ارائه می‌کند.

به تعریف مشتق دوم یک تابع باز می‌گردیم. اگر a نقطه‌ای در دامنه تعریف f باشد و اگر مشتق f' در سراسر یک بازه باز حول a تعریف شده باشد، آنگاه a یک نقطه درونی بازه تعریف f' است و می‌توان وجود مشتق برای f' در نقطه a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نمایش می‌دهیم. همینطور اگر $f''(x)$ در همه نقاط یک بازه باز حول a وجود داشته باشد، می‌توان مشتقپذیری f'' در نقطه a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f'''(a)$ یا $f^{(3)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق سوم f در نقطه a می‌نامیم. به طور کلی، اگر مشتق n -ام تابع f در سراسر یک بازه باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان مشتقپذیری $f^{(n)}$ را در نقطه a مورد بررسی قرار دارد که در صورت وجود آن را به $f^{(n+1)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق (مرتبه) $(n+1)$ -ام f در نقطه a می‌نامیم. تابع $S : f \rightarrow \mathbb{R}$ را k بار مشتقپذیر می‌نامیم اگر f در همه نقاط دامنه دارای مشتق از مرتبه k -ام باشد. اگر f در یک نقطه a یا در زیر مجموعه T از دامنه خود دارای مشتق از هر مرتبه باشد، f را بینهایت بار مشتقپذیر در نقطه a یا در مجموعه T می‌نامیم.

مثال. یک تابع چند جمله‌ای در نظر بگیرید:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

از آنجا که مشتق p نیز یک چند جمله‌ای است (از درجه یکی پایین‌تر)، مشتق p نیز برای هر x مشتقپذیر است و با ادامه مشتقگیری می‌بینیم که p در سراسر \mathbb{R} بینهایت بار مشتقپذیر است. به علاوه توجه کنید که به‌سبب تقلیل درجه در مشتقگیری، برای $k > n$ داریم $p^{(k)}(x) = 0$.

مثال ۲. تابع $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم $\sin' = \cos$ و $\sin'' = -\sin$. بنابراین می‌توان مشتقگیری را همواره ادامه داد و پس از چهار بار مشتقگیری تابع سینوس مجدداً ظاهر می‌شود، $\sin^{(4)} = \sin$. تابع کسینوس وضعیت مشابهی دارد. چهار تابع مثلثاتی دیگر نیز در دامنه تعریف خود بینهایت بار مشتقپذیرند.

مثال ۳. تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases}$$

در اینجا n یک عدد صحیح مثبت داده شده است. برای $n = 1$ داریم $f(x) = |x|$ که در هر نقطه $x \neq 0$ مشتقپذیر است ولی در $x = 0$ مشتقپذیر نیست. حال $n > 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر $a \neq 0$ در یک بازه باز حول a ، تابع f همان مقدار x^n یا $-x^n$ را دارد که یک چند جمله‌ای است، بینهایت بار مشتقپذیر است، و $f^k(a) = 0$ برای $k > n$ داریم

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & x > 0 \\ -nx^{n-1} & x < 0 \end{cases}$$

در $a = 0$ از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^n - 0}{h} = h^{n-1}$$

با توجه به $n > 1$ ، حد عبارت بالا صفر است، پس $f'(0)$ را می‌توان به $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ تعمیم داد. به طور کلی به استقرا فرض کنید که برای $k < n$ ثابت کدهایم:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k} & x \geq 0 \\ -n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k} & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه برای مشتق مرتبه $(k+1)$ در a کسر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f^{(k)}(0+h) - f^{(k)}(0)}{h} = n(n-1)\dots(n-(k-1))h^{n-k-1}$$

تا زمانی که $n < k + 1$, حد عبارت بالا همچنان صفر است ولی برای $n = k + 1$ ، یا

داریم

$$\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(\circ)}{h} = n!$$

که علامت بستگی به این دارد که $\circ < h >$ یا $h < \circ$ ، بنابراین $f^{(n)}(\circ)$ وجود ندارد. خلاصه اینکه تابع f در همه نقاط \mathbb{R} به استثنای $x = \circ$ بینهایت بار مشتقپذیر است ولی در \circ فقط $(n-1)$ بار مشتقپذیر با مشتقهای صفر می‌باشد.

۱-۲۰) چند جمله‌ای تیلور درجه k

اکنون آماده‌ایم که تقریب درجه k یک تابع را معرفی کنیم. فرض کنیم I یک بازه است، a یک نقطه درونی بازه، $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی $(k-1)$ بار مشتقپذیر در سراسر I و k بار مشتقپذیر در نقطه a است، نشان می‌دهیم یک (و تنها یک) چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه k وجود دارد که

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \dots, \quad p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (1)$$

یعنی این چند جمله‌ای و مشتقات آن تا مرتبه k با تابع f و مشتقات متناظر آن تا مرتبه k در نقطه a تطابق دارند. چند جمله‌ای درجه k مورد نظر $p(x)$ به شکل $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ به شکل $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k$ را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_k(x-a)^k \quad (2)$$

مشتقات $p(x)$ تا مرتبه k به صورت زیر در می‌آیند:

(۳)

$$\left\{ \begin{array}{l} p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \dots + ka_k(x-a)^{k-1} \\ \vdots \\ p^{(i)}(x) = i!a_i + \dots + k(k-1)\dots(k-(i-1)a_k(x-a)^{k-i} \\ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k!a_k \end{array} \right.$$

بنابراین در مقایسه (۲) و (۳) با شرط (۱) داریم:

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \dots, \quad a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

پس ضرایب چند جمله‌ای (۲) از شرط (۱) به طور منحصر به فرد تعیین می‌شوند و داریم:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k. \quad (4)$$

این چند جمله‌ای یگانه چند جمله‌ای درجه k است که خود و مشتقات آن تا مرتبه k با f و مشتقات آن تا مرتبه k در نقطه a برابرند ($p(x)$). را اینک چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطه a یا تقریب درجه k تابع f در نقطه a می‌نامند. توجه کنید که برای $k=1$, تقریب خطی f در نقطه a حاصل می‌شود. نکته این است که برابری مشتقات f با مشتقات p در نقطه a , تا مرتبه k , موجب خواهد شد که به معنایی که در زیر خواهد آمد $(x-a)^k$ و $p(x)$ در نزدیکی نقطه a بسیار هم نزدیک باشند.

(۲-۲۰) قضیه اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطه a باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^k} = 0. \quad (5)$$

توجه کنید که برای $k=1$, این همان تعریف خط مماس یا تقریب خطی است. هرچه k بزرگتر باشد $(x-a)^k$ سریعتر کوچک می‌شود وقتی $x \rightarrow a$, بنابراین تقریب درجه k باید به تابع خیلی نزدیک باشد که نسبت $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k}$ به صفر میل کند.

برهان (۲-۲۰) حکم را با استقراء روی k ثابت می‌کنیم. همانطور که اشاره شد، برای $1 \leq k \leq n$ تعریف مشتقپذیری یا خط مماس حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا مرتبه $(k-1)$ ثابت شده است، بدین مفهوم که اگر تابعی g در نقطه a ، $(k-1)$ بار مشتقپذیر باشد و $q(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه $(k-1)$ آن در نقطه a باشد داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - q(x)}{(x-a)^{k-1}} = 0.$$

به بیان دیگر، هرگاه $\epsilon > 0$ داده شده باشد، $\exists \delta > 0$ وجود دارد که:

$$|x-a| < \delta \implies |g(x) - q(x)| < \epsilon \cdot |x-a|^{k-1} \quad (6)$$

اگر صورت کسر (5) را به $\varphi(x) = f(x) - p(x)$ نمایش دهیم، داریم

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}] \quad (7)$$

چون f و چند جمله‌ای $p(x)$ مشتقپذیرند، φ نیز مشتقپذیر است و داریم:

$$\varphi'(x) = f'(x) - [f'(a) + \dots + \frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-2}] \quad (8)$$

چون f در نقطه a ، k بار مشتقپذیر است، f' در نقطه a ، $(k-1)$ بار مشتقپذیر می‌شود. به علاوه عبارت داخل کروشه چند جمله‌ای تیلور درجه $(k-1)$ در a است، پس طبق فرض استقراء، برای $\epsilon > 0$ وجود دارد که طبق (6):

$$|x-a| < \delta \implies |\varphi'(x)| = |f'(x) - [f'(a) + \dots + \frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-2}]| < \epsilon |x-a|^{k-2}$$

از طرف دیگر طبق قضیه مقدار میانگین برای تابع مشتقپذیر φ داریم:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c) \cdot (x-a)$$

ولی طبق (7)، $\varphi(a) = 0$

$$|x-a| < \delta \implies |\varphi(x)| < \epsilon |x-a|^{k-2} |x-a|$$

و چون c بین a و x است، $|c - a| < |x - a|$ و در نتیجه:

$$^{\circ} < |x - a| < \implies |\varphi(x)| < e|x - a|^k$$

بنابراین با کوچک گرفتن $|x - a|$ می‌توان $\frac{|\varphi(x)|}{|x-a|^k}$ به دلخواه کوچک کرد و حکم به اثبات می‌رسد. \square

قضیه ۲.۲۰ معقول بودن چند جمله‌ای تیلور درجه k به عنوان تقریبی برای تابع f برای x های

نزدیک a را توجیه می‌کند. قبل از ادامه بحث به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۱ چند جمله‌ایهای تیلور درجه k توابع سینوسی و کسینوسی را در $a = 0$ می‌نویسیم. برای سینوس داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 0, \sin'(\theta) = \cos(\theta) = 1, \sin''(\theta) = -\sin(\theta) = -1 \\ &\quad - \sin(\theta) = 0 \end{aligned}$$

و چون مشتق چهارم سینوس همان سینوس می‌شود، از این پس مشتقهای $0, 1, 0, 1$ و 0 تکرار می‌شوند،

بنابراین اگر چند جمله‌ای تیلور درجه k سینوس در $\theta = 0$ باشد، داریم:

$$a_j = \begin{cases} 0 & j \text{ زوج} \\ 1 & j \text{ فرد} \end{cases}$$

مثلاً چند جمله‌ای تیلور درجه ۱ و درجه ۲ سینوس عبارتند از $x = p(x)$ ، چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ و درجه ۴ سینوس برابر $x - \frac{1}{3!}x^3$ و چند جمله‌ای تیلور درجه ۵ و درجه ۶ سینوس برابر $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$ می‌شوند. به همین ترتیب برای کسینوس چند جمله‌ای تیلور زیر در $\theta = 0$ به دست می‌آیند:

$$1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

و غیره.

مثال ۲. چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $a = 1$ بنویسید. این چند جمله‌ای به شکل $\sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(1)}{j!} (x - 1)^j$ خواهد بود. برای محاسبه مشتقها داریم $f(x) = x^{-1}$, پس $f'(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'(x) = -x^{-2}$, پس $f^{(j)}(1) = (-1)^j \frac{1}{j!}$, و چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع در $a = 1$ می‌شود.

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - \dots + (-1)^k (x - 1)^k$$

در اینجا این نکته باید تذکر داده شود که نزدیکی چند جمله‌ای بالا به $\frac{1}{x}$ حوالی $a = 1$ معتبر است ولی مثلاً وقتی x به 0 میل کند، $\frac{1}{x}$ بیکران می‌شود در حالی که چند جمله‌ای بالا به $(1 + 1)$ نزدیک می‌شود. همینطور وقتی x به 2 میل کند، $\frac{1}{x}$ به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند ولی چند جمله‌ای بالا بسته به اینکه فرد یا زوج باشد به 0 یا 1 میل می‌کند (که میانگین آنها $\frac{1}{2}$ است!).

مثال ۳ چند جمله‌ای تیلور تابع $f(x) = 1 - x + x^4$ از درجات مختلف را در $a = -1$ بنویسید. وقتی تابع داده شده یک چند جمله‌ای باشد لازم نیست از مشتقگیری استفاده کنیم. اگر به جای x قرار دهیم $x = (x - a) + a$ و جملات را به توانهای داده شده بسط داده به ترتیب درجه مرتب کنیم، چند جمله‌ایها تیلور درجات مختلف ظاهر می‌شوند. توجه کنید که روش یافتن ضرایب چند جمله‌ای تیلور این بود که چند جمله‌ای تیلور را بر حسب توانهای $(x - a)$ مرتب کردیم و با مشتقگیری متوالی دریافتیم که ضریب جمله $(x - a)^j$ همان $\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ است. بنابراین در این مثال:

$$f(x) = 1 - ((x + 1) - 1) + ((x + 1) - 1)^4$$

$$f(x) = 1 - 5(x + 1) + 6(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3 + (x + 1)^4 \quad (9)$$

بنابرای چند جمله‌ایها تیلور درجه 1 , 2 و 3 را عبارتند از به ترتیب $1 - 5(x + 1)$, $1 - 5(x + 1) + 6(x + 1)^2$ و $1 - 5(x + 1) + 6(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3$. چند جمله‌ایها تیلور درجه 4 به بالای تابع همان طرف راست عبارت (۹) هستند که دقیقاً برابر خود تابع می‌شوند.

بالاخره برای استفاده از تقریب درجه k ، همانطور که در حالت خاص تقریب خطی عمل کردیم، باید دستوری برای تخمین خطای ارائه کنیم. قضیه زیر تعمیم وضعیت تقریب خطی است.

(۳-۲۰) قضیه فرض کنید تابع f در سراسر بازه باز I ، $(k+1)$ بار مشتقپذیر است و $a \in I$. اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطه a باشد، برای هر x در I داریم:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x-a)^{k+1} \quad (10)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x است.

توجه کنید که به ازای $1 = k$ ، دقیقاً تخمین خطای تقریب خطی به دست می‌آید. عبارت طرف راست (10) را گاهی باقیمانده لاغرانژ سری تیلور می‌نامند.

اثبات ۳-۲۰ دقیقاً مانند حالت $1 = k$ است. نخست تعمیم زیر از قضیه زل را بیان می‌کنیم که اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود:

(۴-۲۰) فرض کنید تابع f درباره I ، $(k+1)$ بار مشتقپذیر باشد، $a < b$ دو نقطه I باشند، و داشته باشیم:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = f(b) = 0$$

در اینصورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$ ، که $\square . f^{(k+1)}(c) = 0$

حال همانطور که در حالت $1 = k$ عمل کردیم، یک چند جمله‌ای درجه $(k+1)$ در نظر می‌گیریم.

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1}$$

که $Q(b) = f(b)$ و $Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \dots, Q'(a) = f'(a), Q(a) = 0$ با مقایسه f و Q با مشتقگیری نتیجه می‌دهد که $c_{k+1} = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^{k+1}}$ و $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a), \dots, c_1 = f'(a), c_0 = f(a)$. حال با به کار گرفتن $(4-20)$ در مورد تابع $f(x) - Q(x)$ حکم (10) نتیجه می‌شود: جزئیات کاملاً مشابه اثبات در حالت $1 = k$ است و به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ اگر برای تقریب $\sin \frac{1}{x}$ (البته $\frac{1}{x}$ به رادیان) از تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ استفاده کنیم، کرانی بالایی برای خطای بدست آورید.

توجه کنید که $x - \frac{1}{6}x^3$ هم تقریب درجه ۳ و هم تقریب درجه ۴ تابع \sin در $a = ۰$ است.

اگر این چندجمله‌ای را تقریب درجه ۴ محسوب می‌کنیم تخمین دقیقتری بدست خواهد آمد زیرا که در طرف راست (۱۰)، کمیت کوچک $x - a = \frac{1}{x}$ به توان بالاتری رسانده می‌شود. طبق (۱۰) داریم:

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!} f^{(5)}(c) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

مشتق پنجم سینوس برابر کسینوس است که در بازه $[0, \frac{1}{x}]$ از ۱ کوچکتر است، پس

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!} \cdot 1^{-5} = \frac{1}{1/2} 1^{-7}$$

اگر از قرار داد روند کردن استفاده کنیم، با توجه به اینکه $1^{-5} < \frac{1}{5} 1^{-6} < \frac{1}{6} 1^{-7}$ ، بسط اعشاری تقریب تا ۶ رقم پس از اعشار با مقدار واقعی تطابق دارد.

مثال ۵. فرض کنید می‌خواهیم از چند جمله‌ای تیلور درجه k بدست آمده در مثال ۲ برای $\frac{1}{x}$ استفاده کنیم. $\frac{1}{1-x}$ را به صورت

$$1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^4} - \dots + (-1)^k \frac{1}{1^{2k}}$$

تقریب می‌زنیم. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

این مثال را از دو طریق بررسی خواهیم کرد. از روش باقیمانده لاغرانژ، طبق (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \text{خطا} &= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} (k+1)! (-1)^{k+1} \frac{1}{c^{k+2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

که c بین ۱ و $1/x$ است. برای یافتن کران بالایی، c را که در مخرج است برابر ۱ می‌گیریم، پس

$$\text{خطا} < 1^{-2k-2}$$

در این مثال خاص می‌توان خط را که یک سری هندسی است به طور دقیق محاسبه کرد. توجه کنید که

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{1+1^j}$$

بنابراین تقریب ارائه شده جملات این سری تا j هستند و باقیمانده (=خطا) می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} (-1)^j (1+1)^{-j} &= (-1)^{k+1} (1+1)^{-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (1+1)^{-j} \\ &= (-1)^{k+1} (1+1)^{-k-1} \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(1+1)^{-k}}{1+1} \end{aligned}$$

یا $|خطا| = \frac{(1+1)^{-k-1}}{1+1}$ که کمی دقیقتر از کران بالایی به دست آمده از باقیمانده لگارانز است.

(۵-۲۰) کاربرد در بررسی نقاط بحرانی

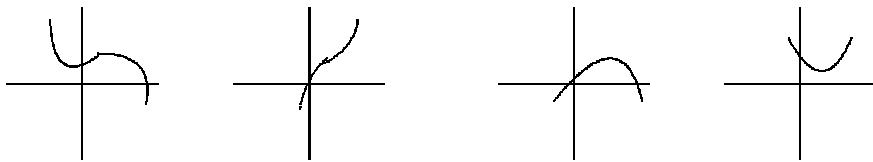
آزمون مشتق دوم برای بررسی نقاط بحرانی وقتی نتیجه می‌داد که مشتق دوم تابع در نقطه بحرانی ناصرف باشد. در اینجا با استفاده از ۵-۲۰ آزمون مشتق دوم را طوری تعمیم می‌دهیم که بسیاری حالاتی که در آن مشتق دوم نیز صفر می‌شود در بر می‌گیرد. نخست با اندکی شرط اضافی مبنای شهودی آزمونی را که ارائه خواهیم کرد ارائه می‌کنیم. فرض کنید تابع $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ در بازه I ، (a, b) بار مشتقپذیر است، مشتقات f در نقطه درونی a از بازه I تا مرتبه $(k-1)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq 0$ در اینصورت چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطه a به شکل $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ می‌باشد.

عدد $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ را به نمایش می‌دهیم طبق (۱۰) داریم:

$$f(x) = f(a) + (x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

فرض کنید $|f^{(k+1)}(c)|$ در نزدیکی نقطه a دارای کرانی M است (اگر $f^{(k+1)}(x)$ پیوسته باشد، چنین کرانی موجود است). در اینصورت برای مقادیر x نزدیک a که برای آن $|x-a|$ کوچک است. انتظار داریم $(x-a)^{k+1}$ در قدر مطلق به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از قدر مطلق $(x-a)^k$ باشد. بنابراین انتظار داریم شکل تقریبی نمودار f در نزدیکی a مشابه $f(a) + (x-a)^k$ باشد. در شکل

۱ وضعیت نمودار $f(a) + (x - a)^k$ را در چهار حالت ممکن، بسته به این که $\circ < \circ$ یا $\circ > \circ$ زوج یا فرد نمایش داده‌ایم. توجه کنید که اگر k زوج باشد، تابع در نقطه a ماکسیمم



$\circ < \circ$ فرد $\circ > \circ$ فرد $\circ < \circ$ زوج $\circ > \circ$ زوج

(د)

(ج)

(ب)

(الف)

یا مینی‌موم موضعی دارد بسته به اینکه $\circ < \circ$ یا $\circ > \circ$. وقتی k فرد باشد، نقطه a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی زیرا که $(x - a)^k$ در $x = a$ تغییر علامت می‌دهد. در واقع این مطلب را می‌توان بدون شرط اضافی وجود مشتق $(1 + k)$ ام مستقیماً از $2^\circ - 2^\circ$ نتیجه گرفت:

۶-۲۰) آزمون مشتق k -ام

فرض کنید تابع f در نقطه درونی a از دامنه تعریف خود دارای مشتق تا مرتبه k ام است ($k \geq 2$)، مشتقات آن در نقطه a تا مرتبه $(1 - k)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq 0$

$$f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

در اینصورت:

(الف) اگر k زوج باشد نقطه a یک مینی‌موم یا ماکسیمم موضعی است بسته به اینکه $\circ > \circ$ یا $\circ < \circ$.

(ب) اگر k فرد باشد، نقطه a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی.

برهان. چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطه a هست $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. طبق

:۲-۱۰

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^k} = 0.$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} - \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \right] = 0.$$

جمله $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ مثبت یا منفی است و عددی ثابت است. بنابراین برای x به اندازه کافی نزدیک a ، $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ باید هم‌علامت $f^{(k)}(a)$ باشد. اگر k زوج باشد، $0 > f(x) - f(a) > f(a)$ داریم و $f(x) > f(a)$ است (برای x نزدیک a). در نتیجه اگر $0 < f(x) - f(a) < f(a)$ و a یک نقطه مینی‌موم موضعی است، و اگر $0 < f(x) - f(a) < f(a)$ نتیجه می‌شود که $f(x) < f(a)$ و a یک نقطه ماکسیمم موضعی است. اگر k فرد باشد، $x = a$ در $f(x) - f(a)$ تغییر علامت دهد، پس $f(x) - f(a)$ نیز باید در $x = a$ تغییر علامت دهد که علامت $f(x) - f(a)$ همانند علامت باقی بماند. بنابراین در یک طرف a ، $f(x) < f(a)$ و در طرف دیگر، $f(x) > f(a)$ و نمی‌تواند ماکسیمم یا مینی‌موم موضعی باشد. \square

مثال ۶. وضعیت نقطه 0 برای تابع f که به صورت $f(x) = x^6 \cos x - x^5 \sin x$ تعریف شده است بررسی کنید.

می‌نویسیم $\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos c_1$ که نقطه‌ای بین 0 و x است، و نیز $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos c_2$ که نقطه‌ای بین x و 0 است. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 \left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos c_2\right) - x^5 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin c_1\right) \\ &= (-\frac{1}{3})x^8 + x^4 \left(\frac{1}{3!} \cos c_2 - \frac{1}{5!} \sin c_1\right) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در قدر مطلق از $\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!}$ بیشتر نیست و برای $|x|$ کوچک، جمله $(-\frac{1}{3})x^8$ غالب است. در واقع از تساوی بالا می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبه ۷ در $x = 0$ همه صفر هستند و $f^{(8)}(0) = (-\frac{1}{3})(8!) < 0$. بنابراین f در نقطه صفر یک ماکسیمم موضعی دارد.

مثال ۷. نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^2 - 2x)^{100}$ را بررسی کنید.

داریم $(2 - 2x)^{99} f'(x) = 100(x^2 - 2x)^{99}$, پس سه نقطه بحرانی $2, 0, -2$ به دست می آیند. در واقع می توان نوشت $x^{100}(x - 2)^{100} f(x) = x^{100}(x - 2)$ و از این عبارت واضح است که $x = 0, 2$ میینی موم موضعی برای تابع در این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. از طرفی دیگر، این تابع، که پیوسته است، باید در $[0, 2]$ ماکسیمم داشته باشد و در این نقطه ماکسیمم که لزوماً یک نقطه درونی است، مشتق f باید صفر شود. پس لزوماً $x = 1$ نقطه ماکسیمم واقع در $[0, 2]$ است. به این ترتیب وضعیت هر سه نقطه را می توان از ملاحظات ابتدایی روش ساخت. ولی همین نتایج را اکنون با توجه به آزمون $-2 \leq x \leq 2$ به دست می آوریم. در نقطه $x = 0$ تابع را به صورت توانهای x بسط می دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{100}(x - 2)^{100} = x^{100} \left(\sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} x^j (-2)^{100-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{100} (-1)^j (2)^{100-j} \binom{100}{j} x^{100+j} \end{aligned}$$

عبارت طرف راست لزوماً چند جمله‌ای تیلور درجه ≥ 200 تابع f در نقطه صفر است. از این عبارت می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبه ۹۹ در $x = 0$ همه صفر هستند و $f^{(100)}(0) = 2^{100} (100!)$, پس $x = 0$ یک مینی موم موضعی است. همینطور در نقطه $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x - 2) + 2)^{100}(x - 2)^{100} \\ &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} (x - 2)^j 2^{100-j} (x - 2)^{100} \\ &= \sum_{j=0}^{100} 2^{100-j} \binom{100}{j} (x - 2)^{100+j} \end{aligned}$$

مجدداً در اینجا مشتقات f تا مرتبه ۹۹ در $x = 2$ صفر می‌شوند و $f^{(100)}(2) = (100!) 2^{100}$ و

: $x = 1$ یک مینیموم موضعی است. بالاخره برای $x = 2$

$$\begin{aligned}f(x) &= ((x - 1) + 1)^{100}((x - 1) - 1)^{100} = ((x - 1)^2 - 1)^{100} \\&= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} (-1)^j (x - 1)^{2j} \\&= 1 - 100(x - 1)^2 + \dots\end{aligned}$$

در اینجا مشتق دوم تابع در $x = 1$ منفی است و یک ماکسیمم موضعی به دست می‌آید.

انتگرال یک متغیری

مفهوم انتگرال یکی از ارکان حساب دیفرانسیل و انتگرال است. از نظر قدمت سوابق این ایده بسیار قدیمی‌تر از مفهوم مشتق است و به صورتی در ریاضیات یونان قرون ۳ و ۴ پیش از میلاد زیر عنوان ”روش افنا^۱“ یافت می‌شود. هدف این روش یافتن مساحت ناحیه‌های محصور به منحنی‌ها یا احجام محصور به سطوح خمیده است. در این روش ناحیه مورد نظر به صورت اجتماعی نامتناهی از ناحیه‌های محصور به خطوط راست یا صفحات مستوی نمایش داده می‌شود. با یافتن حد مجموع مساحت‌ها یا احجام این ناحیه‌ها عددی به عنوان مساحت یا حجم ناحیه اولیه به‌دست می‌آید.

به عنوان نمونه روش ارشمیدس را برای محاسبه قطاعی از سهمی به طور خلاصه بیان می‌کنیم. سهمی $y = kx^2$ را در نظر بگیرید. مقصود از یک وتر سهمی پاره خط واصل بین دو نقطه نمودار است. ناحیه محصور به یک وترو کمان سهمی که به دو انتهای وتر محصور می‌شود را یک قطاع سهمی می‌نامیم و می‌خواهیم عددی را به عنوان مساحت قطاع تعریف شده توسط وتر AB نسبت دهیم.

شکل ۱

ارشمیدس از خواص هندسی سهمی که در مطالعه علم مخروطات شناخته شده بود بهره می‌گیرد. ما اثبات خواص مورد نیاز را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. امروزه با استفاده از هندسه تحلیلی اثبات این خواص سرراست است ولی شایان ذکر است که قدمما این گزاره‌ها به روش ترکیبی مانند هندسه کلاسیک استخراج می‌کردند.

حکم ۱. برای هر وتر AB ، نقطه منحصر به فردی C روی کمان AB وجود دارد که مماس بر سهمی

Method of Exhaustion^۱

در آن نقطه موازی AB است. (اثبات: تمرین).

نقطه C را رأس منسوب به وتر AB می‌نامند. حال فرض می‌کنیم D رأس منسوب به وتر AC باشد (شکل ۱). حکم زیر کلید محاسبه ارشمیدس است.

حکم ۲. مساحت مثلث BDC یک هشتم مساحت BCA است. (اثبات: تمرین).

حال توجه کنید که متناظر به وتر BC نیز رأس E پدید می‌آید و مساحت مثلث AEC نیز یک هشتم مساحت مثلث BCA است. به همین ترتیب نسبت به هر یک از چهار وتر AE , EC , CD و DB یک رأس اختیار می‌شود و چهار مثلث ساخته می‌شوند که مساحت هر یک $\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ مساحت ACB است. روش افنا عبارت از این است که این فرایند را به همین ترتیب ادامه دهیم و هر بار مجموع مساحت‌های مثلث‌های پدید آمده را اضافه کنیم. حد این مجموع‌ها را به عنوان مساحت قطاع سهمی تعریف می‌شود. اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، مجموع مساحت‌های دو مثلث CDB و AEC برابر $S = \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S$ است. به همین ترتیب در مرحله بعد مجموع مساحت‌های چهار مثلث برابر می‌شود با $\frac{S}{16} = \frac{S}{4} \times 4$. اگر این فرایند بلا انقطاع ادامه یابد با چنین مجموعی نامتناهی رویرو هستیم:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{4^3}S + \frac{1}{4^4}S + \dots = S(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots)$$

مجموع این سری هندسی برابر است با $S^{\frac{4}{3}}$ ، یعنی مساحت قطاع سهمی که توسط AB تعریف می‌شود $\frac{4}{3}$ مساحت مستطیل ACB است که C رأس مربوط به وتر AB می‌باشد.

روشن است که محاسبه بالا مبتنی بر دانش دقیق خواص هندسی سهمی است. مشکل قدما در توسعه این روش وابستگی آن به این اطلاعات خاص بود که از آن اجتنابی تصور نمی‌شد. با ابداع هندسه تحلیلی و بیان منحنی‌ها به صورت اجتماعی از نمودار توابع که تعریف تحلیلی دارند، در قرون ۱۶ و ۱۷ میلادی روش افنا به صورت حساب انتگرال تکامل یافت و رابطه آن با حساب دیفرانسیل تدریجاً کشف شد. رهیافت کلی محاسبه مساحت (و در واقع تعریف آن!) برای یک ناحیه محصور به یک منحنی (مانند شکل ۲) این خواهد بود که ناحیه را به اجزایی تجزیه کنیم که هر جزء عبارت از

ناحیه محصور به نمودار یک تابع، بازه دامنه آن تابع و خطوط راست عمود بر محور

شکل ۲

دامنه تعریف تابع باشد. در شکل ۲ یک بازه موازی محور افقی به عنوان دامنه دو تابع و یک بازه موازی محور \mathbb{R} به عنوان بازه تعریف تابع سوم در نظر گرفته شده است. به طور کلی هدف ما این خواهد بود که بتوانیم به ناحیه‌ای مانند ناحیه شکل ۳ که محصور به نمودار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ بازه $[a, b]$ و دو خط راست $x = a$ و $x = b$ است. عددی را به عنوان مساحت نسبت دهیم. با این انگیزه به تشریح حساب انتگرال می‌پردازیم.

شکل ۳

بازه بسته و کرانداری $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. مقصود از یک افزای $[a, b]$ انتخاب دنباله‌ای متناهی از نقاط $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ است به طوری که

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

بدین ترتیب هر افزای، بازه $[a, b]$ را به زیربازه‌هایی تجزیه می‌کند که فقط در نقاط انتهایی اشتراک دارند. فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ یک تابع کراندار باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B وجود داشته باشند که:

$$A \leq f(x) \leq B \quad x \in [a, b]$$

در این صورت اگر دامنه f را به $[x_{i-1}, x_i]$ محدود کنیم، مقادیر f روی $[x_{i-1}, x_i]$ دارای کران بالایی و کران پایین هستند. بنابراین طبق اصل تمامیت اعداد حقیقی، مجموعه مقادیر f روی $[x_{i-1}, x_i]$ دارای کوچکترین کران بالایی M_i و بزرگترین کران پایینی m_i است. دو مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i \quad , \quad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i$$

را مجموع ریمان پایینی f نسبت به افزای \mathcal{P} و $U(f, \mathcal{P})$ را مجموع ریمان بالایی f نسبت به \mathcal{P} می‌نامیم. وقتی f مثبت باشد، $L(f, \mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از بالا محصور به نمودار

f و (f, \mathcal{P}) مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از پایین محصور به نمودار f است (شکل ۴). می‌توان $L(f, \mathcal{P})$ را یک تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار و $U(f, \mathcal{P})$ را یک تقریب بالایی برای همین مساحت تصور کرد.

شکل ۴

چون $m_i \leq M_i$ ، طبعاً داریم:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) \quad (1)$$

اگر $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ یک افراز دیگر $[a, b]$ باشد، می‌گوییم \mathcal{P}' یک تظریف \mathcal{P} است در صورتی که هر x_i یکی از x'_j ها باشد، $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

(۱-۱) گزاره. اگر \mathcal{P}' یک تظریف \mathcal{P} باشد داریم:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}) \quad (2)$$

اثبات. فرض کنید S و S' دو زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشند، M و m به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S ، S' و M' و m' به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S . حال اگر $S' \subset S$ نتیجه می‌شود که:

$$m' \leq m \leq M \leq M' \quad (3)$$

زیرا که هر کران بالایی برای S' یک کران بالایی برای S است و هر کران پایینی برای S' یک کران پایینی برای S . بنابراین اگر \mathcal{P}' یک تظریف \mathcal{P} باشد، از آنجا که هر زیربازه I' مربوط به \mathcal{P}' زیرمجموعه‌ای از یک زیربازه I مربوط به \mathcal{P} است، کوچکترین کران بالایی I' روی f کوچکتر یا مساوی کوچکترین کران بالایی f روی I است و بزرگترین کران پایینی f روی I' بزرگتر یا مساوی بزرگترین کران پایینی f روی I است. حکم از این نکته نتیجه می‌شود. \square

(۲-۱) گزاره. اگر \mathcal{P} و \mathcal{Q} دو افزار $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ باشند و $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار، آنگاه

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{Q}) \quad (4)$$

اثبات. برای مشاهده این مطلب الحق دو افزار \mathcal{P} و \mathcal{Q} را در نظر می‌گیریم که در واقع اجتماع مرتب شده نقاط \mathcal{P} و \mathcal{Q} است، یعنی اگر $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ و $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ و $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ، $\mathcal{Q} = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ ، الحق \mathcal{P} و \mathcal{Q} است که به ترتیب صعودی منظم شده باشد. $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ نمایش داده می‌شود، اجتماع x_i ها و y_j هاست که به ترتیب صعودی منظم شده باشد. واضح است که $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ تظریف \mathcal{P} و نیز تظریف \mathcal{Q} است، پس طبق گزاره (۱-۱) :

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}), \quad U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{Q})$$

از طرفی دیگر بنابر (۱)، $L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ ، پس حکم نتیجه می‌شود. \square

حال مجموعه کلیه مجموعه‌های ریمان پایینی برای $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: f را نسبت به همه افزارهای ممکن در نظر بگیرید. اگر B یک کران بالایی برای f روی $[a, b]$ باشد، هر یک از این مجموعه‌های ریمان از $M(b-a)$ کوچکتر است، پس این مجموعه ناتهی دارای کوچکترین کران بالایی است که آن را به $\underline{\int_a^b f}$ نمایش می‌دهیم و انتگرال پایینی f روی $[a, b]$ می‌نامیم. به همین ترتیب اگر A یک کران پایینی برای f روی $[a, b]$ باشد، $(b-a)$ یک کران پایینی برای مجموعه کلیه مجموعه‌های ریمان بالایی برای f است، پس مجموعه مجموعه‌های ریمان بالایی دارای بزرگترین کران پایینی است که به $\overline{\int_a^b f}$ نمایش می‌دهیم و انتگرال بالایی f می‌نامیم. چون طبق (۱-۲) هر مجموع ریمان پایین کوچکتر یا مساوی هر مجموع ریمان بالایی است نتیجه می‌شود که:

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \quad (5)$$

(دقیقاً چرا؟: تمرین). به تعبیری می‌توان $\overline{\int_a^b f}$ را بهترین تقریب بالایی برای مساحت زیر نمودار و $\underline{\int_a^b f}$ را بهترین تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار f تصور کرد. در صورتی که $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ ، تابع کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ را انتگرال پذیر (به مفهوم ریمان) می‌نامیم و مقدار مشترک را به $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم.

(۳-۱) گزاره. تابع کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ است اگر و تنها اگر بهازی هر $e > 0$ ، افزایی \mathcal{P} از $[a, b]$ وجود داشته باشد که:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

اثبات. فرض کنید بهازی هر $e > 0$ ، افزایی \mathcal{P} با شرط فوق وجود داشته باشد. از آنجا که

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \leq U(f, \mathcal{P})$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر $e > 0$ داریم:

$$\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} < e$$

چون $e > 0$ را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت، تساوی $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ نتیجه می‌شود.

بالعکس فرض کنید f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، یعنی $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$. چون $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ کوچکترین کران بالایی مجموعه‌ای ریمان پایینی است، برای هر $e > 0$ ، افزایی \mathcal{P} وجود دارد که

$$\underline{\int_a^b f} - L(f, \mathcal{P}) < \frac{e}{2}$$

به همین ترتیب افزایی \mathcal{Q} از $[a, b]$ یافت می‌شود که:

$$U(f, \mathcal{Q}) - \overline{\int_a^b f} < \frac{e}{2}$$

ولی $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ پس

$$U(f, \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

حال $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ، الحق \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، تظریفی از \mathcal{P} و \mathcal{Q} است، پس طبق گزاره ۱-۱ داریم

$$U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) < e$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

□

مثال ۱. تابع $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x : \text{گویا} \\ 0 & x : \text{ناگویا} \end{cases}$$

اگر \mathcal{P} یک افزار $[0, 1]$ باشد، در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ به طول ناصفر هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند، پس $m_i = 0$ و $M_i = 1$. بنابراین

$$U(f, \mathcal{P}) = 1, \quad L(f, \mathcal{P}) = 0$$

چون این روابط برای هر افزار \mathcal{P} برقرارند، داریم:

$$\overline{\int_a^b} f = 1, \quad \underline{\int_a^b} f = 0$$

بدین ترتیب f انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۲. سهمی $y = kx^2$ را روی بازه $[0, c]$ ، در نظر بگیرید. افزار \mathcal{P}_n را با تقسیم n به بازه با طول‌های برابر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{P} : 0 = x_0 < x_1 = \frac{c}{n} < x_2 = 2\frac{c}{n} < \dots < x_n = n\frac{c}{n} = c$$

چون f روی $[0, c]$ صعودی است، برای زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$m_i = k\left(\frac{i-1}{n}c\right)^2, \quad M_i = k\left(\frac{i}{n}c\right)^2$$

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{n} k\left(\frac{i-1}{n}c\right)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^n (i-1)^2$$

و به همین ترتیب:

$$U(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{n} k\left(\frac{i}{n}c\right)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^n i^2$$

بنابراین:

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \frac{c^3 k}{n}$$

حال اگر $e >$ داده شده باشد با بزرگ گرفتن n می‌توان تضمین کرد که $e < \frac{c^3 k}{n}$ ، پس طبق گزاره ۱-۳، f روی $[0, c]$ انتگرال‌پذیر است. برای محاسبه $\int_a^b f$ ، نشان می‌دهیم که $L(f, \mathcal{P}_n)$ و $U(f, \mathcal{P}_n)$ هر دو به یک حد میل می‌کنند وقتی $n \rightarrow +\infty$ ، پس این حد مشترک لاجرم انتگرال f روی $[0, c]$ است. با استفاده از فرمول $\sum_{i=1}^p i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ داریم:

$$L(f, \mathcal{P}_n) = (c^3 k) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}, \quad U(f, \mathcal{P}_n) = (c^3 k) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

وقتی $n \rightarrow +\infty$ ، هر دو عبارت بالا به $\frac{1}{3}c^3 k$ میل می‌کنند که مقدار $\int_0^c f$ است. این همان مقداری است که از محاسبه ارشمیدس به دست می‌آید زیرا بنا بر تقارن مساحت زیر نمودار روی $[-c, c]$ برابر $\frac{2}{3}c^3 k$ است، پس حجم قطاع مربوط برابر $\frac{4}{3}c^3 k - \frac{2}{3}c^3 k = \frac{2}{3}c^3 k$ می‌شود که چهار سوم مساحت مثلث با رئوس (c, kc^3) و $(-c, kc^3)$ است.

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

انتگرال یک متغیری (۲)

مفهوم انتگرال پذیری برای تابع‌های کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ در جلسه گذشته مورد بحث قرار گرفت. در این جلسه نخست پاره‌ای خواص ابتدایی تابع‌های انتگرال پذیر و نتایج فوری تعریف را ثبت می‌کنیم.

(۱-۱) خواص ابتدایی انتگرال

(۱-۱-۱) هر تابع ثابت $f(x) = c$ برای هر x در $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b f = c(b - a)$$

اثبات. هر مجموع ریمان بالایی و هر مجموع ریمان پایینی f برابر می‌شود با $c(b - a)$ و حکم نتیجه می‌شود. \square

(۱-۱-۲) اگر دو تابع $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ انتگرال پذیر باشند، $f + g$ نیز انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

اثبات. فرض کنید $\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ یک افزار $[a, b]$ باشد. اگر کوچکترین کران بالایی f و g روی $[x_{i-1}, x_i]$ را به ترتیب M'_i, M''_i, M_i و بزرگترین کران پایینی $f + g$ را به ترتیب به m'_i, m''_i و m_i نمایش دهیم، داریم:

$$m'_i + m''_i \leq m_i \leq M_i \leq M'_i + M''_i \quad (1)$$

زیرا که $M'_i + M''_i$ یک کران بالایی برای x در $[x_{i-1}, x_i]$ نتیجه می‌دهد $f(x) \leq M'_i + M''_i$ و $g(x) \leq M'_i + M''_i$ یک کران بالایی برای $f + g$ روی $[x_{i-1}, x_i]$ است، بنابراین کوچکترین کران بالایی $f + g$ روی $[x_{i-1}, x_i]$ حداقل برابر است. استدلال مشابهی برای m'_i و m''_i برقرار است. بنابراین:

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f + g, \mathcal{P}) \leq U(f + g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \quad (2)$$

چون f و g انتگرال‌پذیر فرض شده‌اند، می‌توان برای $e > 0$ داده شده، با انتخاب مناسب افزایش‌های \mathcal{P} و \mathcal{Q} نامساوی‌های زیر را تأمین کرد:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{e}{2} \quad (3)$$

$$U(g, \mathcal{Q}) - L(g, \mathcal{Q}) \leq \frac{e}{2} \quad (4)$$

حال برای $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ که تظریف \mathcal{P} و \mathcal{Q} دو نامساوی فوق همچنان برقرار می‌مانند، پس اگر به جای \mathcal{P} و \mathcal{Q} را در (3) و (4) جایگزین کرده و طرف‌های متناظر نامساویها را جمع کنیم:

$$[U(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + U(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] - [L(f, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + L(g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] \leq e$$

بنابراین از (2) نتیجه می‌شود که

$$U(f + g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f + g, \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq e$$

پس $f + g$ انتگرال‌پذیر است. به علاوه چون بزرگترین کران بالایی طرف راست (2) و نیز کوچکترین کران بالایی طرف چپ (2) هردو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند، نتیجه می‌شود که انتگرال بالایی و انتگرال پایینی $f + g$ هردو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند و حکم به اثبات می‌رسد. \square

(۱-۲-۳) اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $c \in \mathbb{R}$ ، آنگاه cf انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

اثبات. نخست اگر $\circ \geq c$ ، و M_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی f روی یک بازه $[x_{i-1}, x_i]$ از افزار \mathcal{P} باشند، کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی cf روی $[x_{i-1}, x_i]$ به ترتیب برابر cM_i و cm_i خواهد شد و با فاکتورگیری از c می‌توان به سادگی به نتیجه cM_i در حالت $\circ < c$ ، کوچکترین کران بالایی cm_i و بزرگترین کران پایینی آن برابر cf می‌شود و مجدداً می‌توان به نتیجه مورد نظر رسید. \square

(۱-۱-۴) اگر برای تابع انتگرال‌پذیر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ داشته باشیم $\circ f(x) \geq 0$ برای هر x در $[a, b]$ ،

$$\text{آنگاه } \circ \int_a^b f \geq 0.$$

اثبات. برای چنین تابع f ، $m_i \leq M_i \leq \overline{\int}_f$ و $\underline{\int}_f$ و همه مجموعهای ریمان غیرمنفی خواهند بود. پس $\overline{\int}_f$ و $\underline{\int}_f$ غیرمنفی می‌شوند و چون f انتگرال‌پذیر است، $\circ \int_a^b f = \overline{\int}_f = \underline{\int}_f \geq 0$. \square

(۱-۱-۵) نتیجه. اگر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ داریم $\circ f(x) \geq g(x)$ برای هر x در $[a, b]$

آنگاه

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

اثبات. تابع $f - g$ طبق (۱-۱-۲) و (۱-۱-۳) انتگرال‌پذیر است و

ولی طبق (۱-۱-۴) داریم $\circ \int_a^b (f - g) \geq 0$ پس حکم نتیجه می‌شود.

اگر تابع کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ داشت، تعریف می‌کنیم:

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \quad (5)$$

این قرار داد را می‌توان اینگونه توجیه کرد که در حالت $\circ f \geq 0$ تعبیر هندسی مساحت زیر نمودار را دارد، اگر جهت محور دامنه را تعویض کنیم، نقش a و b به عنوان نقاط چپ و راست دامنه تعویض می‌شود و مساحت مورد نظر زیر محور قرار خواهد گرفت. بدین ترتیب باید علامت منفی برای مساحت

منظور کرد.

(۱-۶) برای هر سه نقطه a, b و c در \mathbb{R} داریم:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c \quad (6)$$

مشروط بر این که انتگرال‌های فوق تعریف شده باشند. در واقع هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال بالا تعریف شده باشند، سومی نیز تعریف شدنی است و تساوی برقرار است.
برای اثبات (۱-۶)، دو لم سودمند بیان و ثابت می‌کنیم.

(۲-۱) لم ۱. اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $[c, d] \subset [a, b]$ آنگاه تحدید f به $[c, d]$ نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات. تحدید f به زیربازه $[c, d]$ از $[a, b]$ را به \bar{f} نمایش می‌دهیم. برای $e > 0$ ، باید افزار $\bar{\mathcal{P}}$ از $[c, d]$ ارائه کنیم که $U(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) - L(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) < e$. چون f انتگرال‌پذیر است افزاری \mathcal{P} از $[a, b]$ وجود دارد که $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

چون $[c, d] \subset [a, b]$ ، اندیس‌های i و j بین 0 و n وجود دارند که:

$$x_i \leq c \leq x_{i+1} \quad , \quad x_{j-1} \leq d \leq x_j$$

افزار $\bar{\mathcal{P}}$ را به صورت زیر برای $[c, d]$ در نظر می‌گیریم:

$$\bar{\mathcal{P}} : c = x'_i \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_{j-1} \leq x'_j = d$$

فرض کنید M'_{i+1} و m'_{i+1} کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی \bar{f} روی $[x'_i, x_{i+1}]$ باشند. در مقایسه با M_{i+1} و m_{i+1} مقادیر متناظر برای f روی بازه (احتمالاً) بزرگتر $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$m_{i+1} \leq m'_{i+1} \leq M'_{i+1} \leq M_{i+1}$$

به همین ترتیب اگر M'_j و m'_j را به $[x_{j-1}, x'_j]$ نسبت دهیم، داریم:

$$m_j \leq m'_j \leq M'_j \leq M_j$$

نتیجه می‌شود که:

$$U(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) - L(\bar{f}, \bar{\mathcal{P}}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

و حکم به اثبات می‌رسد. \square

لما ۱-۲-۸. اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع $\int_A^B \tilde{f} = \int_a^b f$ انتگرال پذیر باشد و $[a, b] \subset [A, B]$ ، تابع $\tilde{f} : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ را

به صورت

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت \tilde{f} روی $[A, B]$ انتگرال پذیر است و $\int_A^B \tilde{f} = \int_a^b f$.

اثبات. برای $\epsilon > 0$ باید افزایش $\tilde{\mathcal{P}}$ برای $[A, B]$ بیابیم که

$$U(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) - L(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) < \epsilon$$

چون f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، افزایش \mathcal{P} به صورت زیر برای $[a, b]$ وجود دارد که

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon$$

$$\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_p = b$$

حال $\tilde{\mathcal{P}}$ را با افزودن نقاط A و B تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\mathcal{P}} : A = \tilde{x}_0 \leq a = x_0 \leq \dots \leq x_p = b \leq \tilde{x}_p = B$$

چون تابع تعریف شده \tilde{f} خارج $[a, b]$ صفر است نتیجه می‌شود که $U(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) = U(f, \mathcal{P})$ و

$$L(\tilde{f}, \tilde{\mathcal{P}}) = L(f, \mathcal{P}).$$

حال به اثبات ۱-۲-۶ باز می‌گردیم. نخست فرض کنید c و f روی $[a, b]$ و $a \leq b \leq c$ داریم. تحدید f' به $[a, b]$ را و تحدید f'' به $[b, c]$ را به نمایش می‌دهیم. فرض کنید \tilde{f}' انتگرال پذیر است.

و \tilde{f} توسعه f' و \tilde{f}'' به همه $[a, c]$ به ترتیب لم ۲ باشند، یعنی بیرون بازه تعریف تابع را برابر صفر قرار دهید. از لم ۲ نتیجه می‌شود که $\tilde{f}' + \tilde{f}''$ انتگرال پذیرند. به علاوه چون $\tilde{f} = \tilde{f}' + \tilde{f}''$

$$\begin{aligned}\int_a^c f &= \int_a^c \tilde{f}' + \int_a^c \tilde{f}'' \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f \quad (\text{طبق لم ۲})\end{aligned}$$

و حکم در حالت $c \leq b \leq a$ به اثبات می‌رسد. حالت‌های دیگر به ترتیب a, b و c نیز از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می‌شود.

تاکنون مثالی جز تابع ثابت و سهمی برای تابع انتگرال پذیر ارائه نکرده‌ایم و لم ۲ نشان می‌دهد پیوستگی یک شرط لازم برای انتگرال پذیری نیست زیرا اگر مقدار f در یکی از دو انتهای بازه $[a, b]$ ناصرف باشد، با توسعه f با مقدار صفر بیرون $[a, b]$ به یک دامنه بزرگ‌تر، تابع به دست آمده همچنان انتگرال پذیر است ولی در نقاط a و b ممکن است پیوسته نباشد. گزاره زیر نشان می‌دهد که پیوستگی یک شرط کافی برای پیوستگی است.

(۲-۲) گزاره. هر تابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ انتگرال پذیر است.

اثبات این گزاره را به کمک لم زیر ارائه خواهیم کرد ولی اثبات لم را به جلسات آینده وقتی درباره دنباله‌های اعداد حقیقی صحبت می‌شود موقول می‌کنیم.

(۳-۲) لم. اگر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه ویژگی زیر برقرار است: برای هر $e > 0$ عددی $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که هرگاه برای x_1 و x_2 در $[a, b]$ داشته باشیم $\delta < |x_1 - x_2| < e$. آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < e$.

در نگاه اول به نظر می‌آید حکم این لم چیزی فرای پیوستگی نباشد ولی کمی دقیق تفاوت ظریف آن را مشخص می‌کند. پیوستگی f در $[a, b]$ بدین معنی است که f در همه نقاط $[a, b]$ پیوسته است، یعنی برای هر x در $[a, b]$ عددی $e' > 0$ وجود دارد که هرگاه $|x - x_0| < e'$ در $[a, b]$ آنگاه $|f(x) - f(x_0)| < e'$. نکته این است که اندازه e' به نقطه x وابسته است و ممکن است یک واحد وجود نداشته باشد که برای هر x کار کند. طبق لم اگر دامنه تابع پیوسته f یک بازه بسته و

کراندار باشد، آنگاه می‌توان یک $\circ > e'$ واحد (که در لس δ خوانده شده است) پیدا کرد که هرگاه دو نقطه در دامنه فاصله‌شان کوچکتر از این e' باشد، فاصله مقادیر آنها از e کوچکter است. این وضعیت پیوستگی یکنواخت خوانده می‌شود و ممکن است اگر دامنه یک تابع پیوسته یکی از دو شرط کراندار بودن یا بسته بودن را حایز نباشد برقرار نشود. به عنوان مثال، تابع‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$h :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$$

هر یک از این دو تابع در دامنه خود پیوسته است، ولی نشان می‌دهیم پیوستگی یکنواخت برقرار نیست. نخست تابع g را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\circ > e$ داده شده است. برای این که مقدار g در دو نقطه x_1 و x_2 ، مثلًا $x_2 < x_1 \leq x_1 + d$ کوچکتر از e باشد، حداکثر فاصله x_1 و x_2 چه قدر می‌تواند باشد؟ می‌نویسیم d فاصله x_1 و x_2 است. داریم:

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= (x_1 + d)^2 - x_1^2 \\ &= 2dx_1 + d^2 < e \end{aligned}$$

توجه کنید که d هر قدر کوچک (ولی مشبّت) گرفته شود، می‌توان با بزرگ کردن x_1 ، $2dx_1$ را از e بزرگتر ساخت. البته اگر x_1 نخست مفروض باشد، می‌توان d را طوری گرفت که $2dx_1$ و d^2 هر دو کوچکتر از $\frac{e}{2}$ شوند و در نتیجه پیوستگی در x_1 برقرار است. اگر به نمودار g توجه کنیم می‌بینیم که با سوق دادن x به $+\infty$ در دامنه، شیب نمودار به $+\infty$ میل می‌کند. در نتیجه باید d را تدریجیًّا کوچکتر ساخت تا نامساوی مورد نظر برقرار بماند. در واقع $x_1 \rightarrow +\infty$ وقتی $d \rightarrow 0^+$.

شکل ۱

در مورد تابع h ، که دامنه‌اش کراندار است، به وضعیت مشابهی برمی‌خوریم. مجدداً اگر $\circ > e$ داده شده باشد و x_1 و x_2 در $[1, \circ)$ باشند به طوری که $x_2 - x_1 = d < e$ ، می‌خواهیم d را آنقدر کوچک بگیریم که $|h(x_1) - h(x_2)|$ کوچکتر از e باشد:

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + d} \\ &= \frac{d}{(x_1 + d)x_1} < e \end{aligned}$$

در اینجا نیز توجه کنید که هر $x_1 > d$ که داده شده باشد، می‌توان x_1 را آنقدر کوچکتر (نزدیکتر به نقطهٔ انتهایی ∞) گرفت که نسبت $\frac{d}{(x_1 + d)x_1}$ بزرگتر از e شود. در عین حال تابع در x_1 پیوسته است زیرا که اگر x_1 داده شده باشد می‌توان d را متناسبًا کوچک گرفت، مثلاً $x_1 < d - e$ ، به طوری که:

$$\frac{d}{(x_1 + d)x_1} < \frac{d}{x_1^2} < e$$

در این مثال نیز، با نزدیک شدن x_1 به نقطهٔ ∞ (که در دامنهٔ تابع نیست) شیب نمودار به $+\infty$ می‌کند و اندازهٔ d لزوماً به صفر میل می‌کند.

طبق لم ۲-۳، هرگاه قلمرو یک تابع پیوسته، یک بازهٔ بسته و کراندار باشد، می‌توان برای هر $e > 0$ داده شده یک $\delta > 0$ یکنواخت پیدا کرد که برای هر دو نقطهٔ دامنه در فاصلهٔ کوچکتر از δ ، فاصلهٔ مقادیر از e کوچکتر باشد. حال به کمک این لم، گزاره ۲-۲ را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که هرگاه $e > 0$ داده شده باشد، افزایی \mathcal{P} از $[a, b]$ وجود دارد که:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

طبق لم، برای $\frac{e}{b-a}$ عددی $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $|x - x'| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(x')| < e$. افزای \mathcal{P} را طوری می‌گیریم که فاصلهٔ دو نقطهٔ متولی افزای از δ کوچکتر باشد نتیجه می‌شود که اگر M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم f روی یک زیربازهٔ افزای باشند، داریم $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= \sum (x_i - x_{i-1}) M_i - \sum (x_i - x_{i-1}) m_i \\ &= \sum (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \frac{e}{b-a} \sum (x_i - x_{i-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

□ و حکم ۲-۲ به اثبات می‌رسد.

سؤالی که در اینجا طبعاً مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان توابع انتگرال‌پذیر را به گونه‌ای ساده مشخص کرد؟ قضیهٔ معروف زیر از لبگ^۱ که اثبات آن فرای این درس است شرطی لازم و کافی به

H. Lebesgue^۱

این منظور ارائه می‌کند. یک زیرمجموعه Z از \mathbb{R} را یک مجموعه اندازه صفر می‌نامیم در صورتی که برای هر $\epsilon > 0$ دنباله‌ای از بازه‌ها $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموع سری $(l(I_n))$ طول بازه I_n ، کوچکتر از ϵ باشد.

(۴-۲) قضیه لبگ. تابع کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$: انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی f یک مجموعه اندازه صفر باشد.

هر مجموعه متناهی و در واقع هر مجموعه شمارا یک مجموعه اندازه صفر است. بدین ترتیب تابع‌های کراندار $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$: که به جز در تعدادی شمارا نقطه پیوسته باشند انتگرال‌پذیرند.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

بحث این جلسه پیرامون قضیه‌ای است که پل ارتباطی میان حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال محسوب می‌شود و "قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال" نام دارد. در جلسه گذشته دیدیم که هر تابع پیوسته انتگرال پذیر است. گزاره زیر در مورد انتگرال تابع‌های پیوسته مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

(۱-۳) قضیه میانگین انتگرال. اگر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b] : f$ پیوسته باشد نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f = f(c)(b - a)$$

بدین ترتیب در حالتی که $\int_a^b f > 0$ ، نقطه‌ای c وجود دارد که مساحت مستطیل به قاعده $[a, b]$ و ارتفاع $f(c)$ برابر $\int_a^b f$ است.

اثبات. تابع پیوسته f در نقطه‌ای c_1 مینیمم و در نقطه‌ای c_2 ماکسیمم مقادیر خود در $[a, b]$ را می‌گیرد.
داریم

$$m \leq f(x) \leq M$$

که در آن M و m به ترتیب مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم f هستند. اگر M و m را به عنوان تابع‌های ثابت با مقدار M و m در نظر بگیریم، داریم:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

تابع f در نقطه c_1 مقدار m و در نقطه c_2 مقدار M را می‌گیرد. طبق قضیه مقدار بینی، تابع پیوسته f در نقطه‌ای c بین c_1 و c_2 مقدار $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ را می‌گیرد:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

که حکم قضیه است.

(۲-۳) قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. نقطه‌ای a در I در نظر می‌گیریم و $F(x) = \int_a^x f$ را به صورت F تعریف می‌کنیم. در این صورت F مشتق‌پذیر است و $F' = f$

اثبات. حد عبارت $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ را بررسی می‌کنیم وقتی $h \rightarrow 0$. داریم:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{a+h} f - \int_a^x f \\ &= \int_x^{x+h} f \end{aligned}$$

طبق (۱-۳)، نقطه‌ای c بین x و $x+h$ وجود دارد که $\int_x^{x+h} f = f(c)h$. پس

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

حال وقتی $h \rightarrow 0$ ، نقطه c که بین x و $x+h$ قرار دارد به x میل می‌کند و چون f در x پیوسته است، $f(x) = f(c)$ میل می‌کند.

تابعی F که مشتق آن برابر تابع داده شده f باشد، یک تابع اولیه f یا یک تابع انتگرال نامعین f خوانده می‌شود. قضیه بالا یک تابع اولیه برای تابع پیوسته f معرفی می‌کند. اگر $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اولیه دیگر برای f باشد، مشتق $G - F$ صفر است، بنابراین $G - F$ روی بازه I ثابت است. بالاخص

اگر به جای a ، نقطه دیگری b در I در نظر بگیریم، $f(x) = \int_b^x f$ تابع اولیه دیگری برای f است و مقدار ثابت $\int_b^a f$ را داراست.

در اینجا باید توجه داشت که اگر دامنه تعریف یک تابع مشتق پذیر یک بازه واحد نباشد، صفر شدن مشتق دلالت بر ثابت بودن تابع نمی‌کند. مثلًاً اگر I_1 و I_2 دو بازه باز مجزا باشند و تابع مشتق پذیر f دارای مشتق صفر باشد، f می‌تواند روی I_1 و I_2 مقادیر ثابت متفاوت داشته باشد.

مثال. می‌خواهیم کلیه تابع‌های اولیه تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت $f(x) = \frac{1}{x}$ تعریف شده است مشخص کنیم. دامنه تعریف f اجتماع دو بازه باز مجزای $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ است. روی $[0, +\infty)$ تابع $\ln x$ یک تابع اولیه برای $\frac{1}{x}$ است. برای $(-\infty, 0]$ تابع $\ln(-x)$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

پس $\ln(-x)$ یک تابع اولیه برای $\frac{1}{x}$ روی $(-\infty, 0]$ است. بنابراین می‌توان $\ln|x|$ را به عنوان یک تابع اولیه $\frac{1}{x}$ در نظر گرفت ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که هر تابع اولیه $\frac{1}{x}$ به شکل $\ln|x| + c$ ، برای یک مقدار ثابت c ، است زیرا که دامنه تعریف $\frac{1}{x}$ از دو بازه مجزا تشکیل شده است. کلی‌ترین تابع اولیه $\frac{1}{x}$ به شکل زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

که در اینجا C_1 و C_2 ثابت‌های دلخواه هستند.

برای تابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، اگر تابع $F(x) = \int_x^a f$ در I را در نظر بگیریم که در آن نقطه‌ای در I است، داریم $\int_x^a f = -\int_a^x f$. زیرا $F'(x) = -f(x)$ به طور کلی:

(۳-۳) اگر I یک بازه در \mathbb{R} باشد، $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، و $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های مشتق پذیر، آنگاه تابع $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

تعريف می‌شود مشتق‌پذیر است و

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \quad (1)$$

اثبات. تابع دو متغیری G با دامنه مربع:

$$\{(u, v) \mid u, v \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

را به صورت

$$G(u, v) = \int_u^v f$$

تعريف می‌کنیم. اگر c مقداری در I باشد، داریم $G(u, v) = \int_u^c f + \int_c^v f$ ، پس G مجموع دو تابع مشتق‌پذیر است و خود مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین $F(x) = G(\alpha(x), \beta(x))$ بنابر قاعده زنجیره‌ای مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{dv}{dx} \\ &= -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x) \end{aligned}$$

چنان که حکم بود. \square

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه بسیاری انتگرال‌ها را از طریق تابع اولیه ممکن می‌سازد. اگر f روی بازه I پیوسته باشد، $a \in I$ ، و $F(x) = \int_a^x f$ ، داریم $F(a) = 0$ ، پس

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \quad (2)$$

در واقع برای هر تابع اولیه Φ برای f روی بازه I ، چون $\Phi(x) = F(x) + C$ ، داریم:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \quad (3)$$

جدول زیر تعدادی از تابع‌های اولیه ساده را نمایش می‌دهد. در سمت چپ یک تابع f داده شده است و در سمت راست یکی از تابع‌های اولیه f با نماد F مشخص شده است. برای یافتن کلی‌ترین تابع اولیه

باید برای هر بازه در دامنه تعریف یک ثابت دلخواه اضافه کرد. موارد ذکر شده همه از یک مشتق‌گیری

ساده نتیجه می‌شوند:

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$

از آنجا که مشتق مجموع دوتابع برای مجموع مشتق‌ها است می‌توان تابع اولیه تابع‌های به صورت مجموع توابع سمت چپ را نیز محاسبه کرد. در جلسه آینده نتیجه‌گیری‌های لازم از قانون لایپنیتس برای حاصل ضرب و قاعده زنجیره‌ای به عمل خواهد آمد.

(۴-۳) مجموع‌های ریمان کلی. در آغاز بحث انتگرال مجموع‌های ریمان بالایی و پایینی را بررسی کردیم. به طور کلی، برای تابع کراندار $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و افراز $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ اگر نقطه‌ای x_i^* در $[x_{i-1}, x_i]$ اختیار کنیم، $i = 1, \dots, n$ ، هر مجموع به شکل:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i^*)$$

یک مجموع ریمان خوانده می‌شود. اگر M_i و m_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران

پایینی f روی $[x_{i-1}, x_i]$ باشند، چون $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$ داریم:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i^*) \leq U(f, \mathcal{P}) \quad (4)$$

طول بزرگترین زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ از افزار را به $\delta(\mathcal{P})$ نمایش می‌دهیم و ضخامت افزار می‌نامیم. اکنون فرض کنید f پیوسته است. برای هر $0 < e < \delta(\mathcal{P})$ وجود دارد به طوری که اگر

$M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$ ، آنگاه برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $\delta(\mathcal{P}) < \delta$

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

چون $\int_a^b f$ بین $L(f, \mathcal{P})$ و $U(f, \mathcal{P})$ قرار دارد نتیجه می‌شود که اگر $\delta(\mathcal{P}) < \delta$ ، آنگاه:

$$|U(f, \mathcal{P}) - \int_a^b f| < e \quad , \quad |\int_a^b f - L(f, \mathcal{P})| < e$$

بنابراین از (4) نتیجه می‌شود که: برای هر $0 < e < \delta$ وجود دارد که برای هر افزار \mathcal{P} با ضخامت

کوچکتر از δ و هر مجموع ریمان مربوط داریم:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i^*) \right| < e$$

به این مفهوم گفته می‌شود که $\int_a^b f$ حد مجموع‌های ریمان است وقتی ضخامت افزار به صفر میل کند. گاهی اوقات می‌توان از این مطلب بعضی حدها را محاسبه کرد.

مثال. می‌خواهیم حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right\}$$

توجه کنید که هر جمله داخل آکلاد به صفر میل می‌کند وقتی $n \rightarrow \infty$ ، ولی تعداد جملات نیز به ∞ میل می‌کند. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \right) \end{aligned}$$

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را روی بازه $[1, 2]$ در نظر بگیرید. افزایش x در بازه $[1, 2]$ باعث می‌شود که مجموع $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ افزایش یابد. با قرار دادن $\Delta x = \frac{1}{n}$ ، مجموع بالا برابر است با $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^*} \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{n+i-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i-1}{n}}$. بنابراین مجموع یک مجموعه از n عبارت می‌باشد که مقدار آن افزایش می‌شود. وقتی $n \rightarrow \infty$ ، مقدار این مجموعه به حد معینی می‌رسد. این حد را می‌توان از طریق انتگرال $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ بدست آورد.

$$\ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

دو قضیه اساسی

در جلسه قبل دیدیم که قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطه‌ای تنگاتنگ میان مفهوم انتگرال و مفهوم تابع اولیه بیان می‌کند. از این رو تابع اولیه گاهی انتگرال نامعین نیز خوانده می‌شود. این ارتباط موجب می‌شود که بهارای هر قاعده مشتقگیری یک قاعده متناظر انتگرال گیری وجود داشته باشد. در این جلسه قواعد انتگرال متناظر با قاعده مشتق حاصل ضرب و قاعده زنجیره‌ای را که به ترتیب به "قاعده انتگرال جزء به جزء" و "فرمول تعویض متغیر انتگرال" معروفند بیان و ثابت می‌کنیم.

نخست یک نماد متدال را معرفی می‌کنیم. برای تابع انتگرال پذیر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$: f انتگرال f روی $[a, b]$ را به $\int_a^b f$ نمایش دادیم. به جای $\int_a^b f$ بسیاری اوقات x ، $\int_a^b f(x)dx$ ، $\int_a^b f(t)dt$ یا به طور کلی $\int_a^b f(*)dx$ به کار می‌رود، که در اینجا مقصود از x ، t یا $*$ حرفي است که برای نمایش عناصر $[a, b]$ به کار می‌رود. همان‌طور که نماد دیفرانسیل منجر به نمایش سودمند قاعده زنجیره‌ای به شکل قابل استفاده $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ گردید، خواهیم دید که این شیوه نمادگذاری منجر به بیانی به ذهن ماندنی از فرمول تعویض متغیر انتگرال خواهد شد. نکته قابل تأکید در مورد $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$ این است که در هر دوی $f(x)$ و dx از یک حرف x برای متغیر استفاده می‌شود. با این نمادگذاری، تابع‌های اولیه f به $\int f(x)dx$ نمایش داده می‌شوند.

حال فرمول لاپلاس برای مشتق حاصل ضرب دو تابع مشتق‌پذیر را یادآوری می‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (1)$$

اگر f' و g' روی بازه $[a, b]$ وجود داشته و پیوسته باشند، طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x) &= \int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \end{aligned}$$

یا معادلاً:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad (2)$$

فرمول (2) فرمول انتگرال جزء به جزء (برای انتگرال نامعین) خوانده می‌شود. نخست همین شرایط یک تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ می‌شود، پس

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (3)$$

که به فرمول انتگرال جزء به جزء برای انتگرال نامعین معروف است. وقتی قلمرو کلیه تابع‌های بالا یک بازه $[a, b]$ باشد، هر یک از انتگرال‌های نامعین فرمول (3) با تقریب جمع یک عدد ثابت منظور می‌شود. فرمول (3) بسیاری اوقات حریه نیرومندی برای یافتن تابع‌های اولیه است.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیه $\ln x$ روی $x > 0$ را محاسبه کنیم. در $\int \ln x dx$ ، می‌نویسیم

$$f(x) = \ln x \quad \text{و} \quad g'(x) = 1, \quad \text{بنابراین با گرفتن} \quad g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x \ln x - x \end{aligned}$$

البته با افزودن یک ثابت به $x \ln x - x$ تابع اولیه دیگری روی $x > 0$ برای $\ln x$ به دست می‌آید.

مثال ۲. برای عدد صحیح مثبت n می‌خواهیم تابع اولیه $x^n e^x$ را به دست آوریم. با نوشتن

$$f(x) = x^n, \quad g'(x) = e^x \quad \text{و} \quad g(x) = e^x \quad \text{داریم:}$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

برای $n = 1$ ، انتگرال سمت راست برابر $e^x - xe^x$ است و نتیجه به دست می‌آید. برای $n > 1$ می‌توان از $\int x^{n-1} e^x dx$ با فرمول انتگرال جزء به جزء به $\int x^{n-1} e^x dx$ رسید و به همین ترتیب با n بار استفاده از فرمول جزء به جزء به نتیجه خواهیم رسید.

مثال ۳. می‌خواهیم $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$ را محاسبه کنیم. با قرار دادن $g'(x) = e^x$ و $f(x) = \sin x$ را محاسبه کنیم.

داریم: $g(x) = e^x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx &= e^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} - e^0 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx \end{aligned} \quad (4)$$

بدین ترتیب از $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx$ به انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$ رسیده‌ایم که از همان نوع است ولی یک بار استفاده دیگر از انتگرال جزء به جزء به طور غیرمنتظره منجر به یافتن جواب می‌شود. این بار می‌گیریم

: $g(x) = g'(x) = e^x$ ، $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx &= e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4} - e^0 \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx \end{aligned}$$

پس با جایگزینی در (4) داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{4}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$$

و در نتیجه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{4}} + 1)$$

اکنون به بحث پیرامون "فرمول تعویض متغیر انتگرال" می‌پردازیم.

(۱-۴) **فرمول تعویض متغیر در انتگرال** (صورت انتگرال نامعین) تابع‌های $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ و $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ بازه در \mathbb{R} ، داده شده‌اند به طوری که $J \subset \phi(I)$ و F مشتق‌پذیر با مشتق

پیوسته‌اند و $F' = f$. در این صورت $F \circ \phi$ یک تابع اولیه برای $f \circ \phi \cdot \phi'$ است:

$$\int (f \circ \phi) \cdot \phi' dt = F \circ \phi \quad (5)$$

فرمول (5) نتیجه مستقیم قاعده زنجیری است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(\phi(t))) &= F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \end{aligned}$$

در واقع اگر بنویسیم $x = \phi(t)$ ، فرمول (5) به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = F(x) \quad (6)$$

مثال ۱. فرض کنید تابع ϕ در بازه تعريف خود نا صیفر با مشتق پیوسته است، در این صورت یک

تابع اولیه برای $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ تابع $\ln|\phi(x)|$ است. کافی است در (6) $f(x) = \frac{1}{x}$ و $|x|$ را جایگزین کیم. به عنوان نمونه تابع اولیه‌ای برای $\tan \theta$ ، تابع $\ln|\cos \theta| = -\ln|\cos \theta|$ و قطبی است.

مثال ۲. به عنوان یک مثال نه چندان واضح، تابع اولیه $\frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}}$ را که دامنه تعريف آن

است محاسبه می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}} &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^2} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}+1\right) = -\frac{1}{x^2}$ ، پس اگر در فرمول (5) جایگزینی‌های زیر را قرار دهیم:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad , \quad f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad F(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x^4}} dx &= - \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx \\ &= -2\sqrt{\frac{1}{x}+1} \end{aligned}$$

(۲-۴) جایگزینی متناول در عبارت‌های به شکل $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$

در اینجا $a > 0$ یک عدد حقیقی داده شده است. جایگزینی‌های زیر معمولاً در محاسبه تابع اولیه عبارت‌هایی که شامل $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ باشند، جوابگو هستند:

الف) $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\sec \theta|$ نتیجه می‌دهد $x = a \tan \theta$ ، و نیز جایگزینی $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\cos \theta|$ نتیجه می‌دهد $x = a \sinh t$ از بین می‌رود.

ب) $\sqrt{-x^2 + a^2} = a|\cos \theta|$ نتیجه می‌دهد $x = a \sin \theta$

ج) $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan \theta|$ نتیجه می‌دهد $x = a \sec \theta$ و جایگزینی $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\sinh t|$ نتیجه می‌دهد $x = a \cosh t$

د) $\sqrt{-x^2 + a^2}$ حقیقی نیست و مطرح نمی‌شود.

لازم به ذکر است که هر عبارت درجه دوم $At^2 + Bt + C$ را می‌توان پس از تکمیل مجذور به یکی از چهار شکل بالا تبدیل کرد.

بالاخره همان‌طور که در آغاز جلسه اشاره کردیم نماد دیفرانسیل در $\int f(x)dx$ به جای f این ویژگی جالب توجه را دارد که فرمول تعویض متغیر به نوعی در آن نهفته است. همان‌طور که در (۵) عمل کردیم، اگر بنویسیم $x = \phi(t)$ ، فرمول (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int f(\phi(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int f(x) dx \quad (7)$$

به این صورت، اگر محاسبه $\int f(x)dx$ مطرح باشد، با جایگزینی بر حسب t ، $x = \phi(t)$ ، باید به جای $\frac{dx}{dt}$ را جایگزین نمود. در بررسی صورت انتگرال معین فرمول تعویض متغیر، به تعبیری هندسی از این فرمول اشاره خواهیم کرد.

(۳-۴) فرمول تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال معین) فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow \phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow$ فرمول $\phi[\alpha, \beta] \subset I$ ، $\phi(\alpha) = a$ و $\phi(\beta) = b$ و $F : \mathbb{R} \longrightarrow$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است،

مشتق پذیر با مشتق پیوسته f است. در این صورت:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx \quad (8)$$

صحت این فرمول را به این طریق مشاهده می‌کنیم: طبق ۱-۴، $F \circ \phi$ یک تابع اولیه برای ϕ' است، پس طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt &= (F \circ \phi)(\beta) - (F \circ \phi)(\alpha) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

که طرف راست مجدداً بنابر قضیه اساسی برابر $\int_a^b f(x)dx$ است.

(۴-۴) تعبیر هندسی فرمول تعویض متغیر در انتگرال معین برای فرمول (۷) تعبیری هندسی ارائه می‌کنیم که در آینده مبنای درک فرمول تعویض متغیر در انتگرال‌های چند متغیری خواهد بود. برای سهولت نخست فرض کنید $f \geq 0$ و ϕ یک تابع یک به یک است. بدین ترتیب $\int_a^b f(x)dx$ تعبیر مساحت زیر نمودار f را دارد و ϕ بازه $[\alpha, \beta]$ را به طوریک به یک بر بازه $[a, b]$ یا $[a, b] \subset [a, b]$ می‌نگارد، بسته به این که $a < b$ یا $b < a$. وقتی تابع یک به یک ϕ صعودی باشد (معادلاً وقتی $\phi' > 0$)، داریم $\phi[\alpha, \beta] = [b, a]$ ، وقتی ϕ نزولی باشد (معادلاً وقتی $\phi' < 0$)، داریم $\phi[\alpha, \beta] = [a, b]$ (شکل ۱). حال نمودار تابع‌های $\phi \circ f$ و f را مقایسه می‌کنیم (شکل ۲، برای ϕ صعودی). توجه کنید که ارتفاع

شکل ۱

نمودار $\phi \circ f$ به ازای مقدار t از متغیر برابر ارتفاع نمودار f به ازای مقدار $x = \phi(t)$ از متغیر f است. اگر ناحیه

شکل ۲

زیر نمودار را به صورت اجتماع پاره خط‌های قائم تجسم کنیم، می‌بینیم که یک تناظر یک به یک میان طول پاره خط‌ها در دو نمودار وجود دارد. با این حال نمی‌توان حکم کرد که $\int_a^b f \circ \phi dt = \int_{\phi[\alpha, \beta]}^{\phi[\beta, \alpha]} f dx$ زیرا که مثلاً در شکل ۲ همان پاره خط‌های قائم روی دو قاعده به طول‌های نابرابر توزیع شده‌اند. خاصیت

ضریب ϕ' در فرمول $\int_a^b f \circ \phi \cdot \phi' = \int_a^b f$ این است که تغییر طول پایه را با تغییر ارتفاع نمودار خنثی می‌کند به نحوی که مساحت زیر نمودار $f \circ \phi$ روی بازه $[\alpha, \beta]$ برابر مساحت زیر نمودار f روی بازه $[a, b]$ باقی می‌ماند. به طور دقیق‌تر، اگر $1 < \phi'(t) < \infty$ ، ϕ یک بازه کوچک حول t را به بازه‌ای کوچک‌تر حول $x = \phi(t)$ نگارد، پس تقلیل ارتفاع $\phi \circ f$ با ضرب کردن در عدد کوچک‌تر از واحد $\phi'(t)$ موجب می‌شود که مساحت مربوط تغییر نکند. به همین ترتیب وقتی $1 > \phi'(t) > 0$ بازه کوچکی حول t به بازه بزرگ‌تری حول x نگاشته می‌شود و ضرب کردن ارتفاع $\phi \circ f$ در عدد بزرگ‌تر از واحد $\phi'(t)$ بزرگ‌تر شدن قاعده را خنثی می‌کند.

مثال. فرض کنید f تابع ثابت با مقدار ۱ است و $\phi : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ به صورت $t^2 = \phi(t)$ تعریف می‌شود. در شکل ۳ نمودارهای f روی محور x و $\phi \circ f$ روی محور t و نیز نمودار ϕ نمایش داده شده‌اند. چون f تابع ثابت با مقدار یک است، $\int_0^4 f(x) dx = 4$ و $\int_0^2 \phi(t) dt = 2$. داریم $2t = \phi(t)$. وقتی $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ، پس ϕ زیر بازه‌های $[\frac{1}{2}, 1]$ را منقبض می‌کند

شکل ۳

زیرا که طبق قضیه میانگین خواهیم داشت $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$ هرگاه t_1 و t_2 در $[\frac{1}{2}, 2]$ باشند. کل بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ به بازه کوچک‌تر $[\frac{1}{2}, 0]$ نگاشته می‌شود. مساحت زیر نمودار f روی بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ نصف مساحت زیر نمودار $\phi \circ f$ روی بازه $[\frac{1}{2}, 0]$ است. ضرب کردن در $2t = \phi(t)$ برای $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ مساحت مثلثی شکل نمایش داده شده را جایگزین مساحت زیر نمودار $\phi \circ f$ می‌کند که نصف آن مقدار را دارد. بر عکس برای t_1, t_2 در $[\frac{1}{2}, 2]$ داریم $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \geq |t_1 - t_2|$ و مساحت زیر $\phi \circ f$ روی $[t_1, t_2]$ کوچک‌تر از مساحت زیر f روی $[\phi(t_1), \phi(t_2)]$ است. در اینجا ضرب کردن در $\phi'(t)$ مجدداً برابری را برقرار می‌کند.

به بحث کلی باز می‌گردیم. لازم است حالتی که ϕ نزولی است بررسی کنیم. در اینجا ϕ' منفی است پس نمودار $\phi \circ f$ زیر محور t است و انتظار داریم مقداری منفی برای انتگرال به دست آید، ولی اینکه $a > b = \phi(\beta) - \phi(\alpha)$ ، یعنی حد بالای انتگرال کوچک‌تر از حد پایین انتگرال است علامت

منفی را خنثی می‌کند. می‌توان در این حالت نوشت:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(\phi(t))|\phi'(t)|dt = \int_a^b f(x)dx$$

بدین ترتیب در این حالت نیز همان تحلیل حالت ϕ صعودی کارساز است. بالاخره توجه کنید که (۳-۴) بدون فرض یک به یک بودن ϕ برقرار است. چگونه می‌توان این مطلب را برحسب مقایسه مساحت‌ها توجیه کرد؟ در اینجا اتفاقی که رخ می‌دهد این است که مقدار انتگرال روی بازه‌های صعود و نزول ϕ در $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \phi) \cdot \phi'(t) dt$ طوری همدیگر را خنثی می‌کنند که نتیجه برابر $\int_a^b f(x)dx$ به دست می‌آید. مثال زیر موضوع را به خوبی بیان می‌کند.

مثال. فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت با مقدار ۱ باشد و $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

داریم $b = 2, a = -1, \beta = 2, \alpha = -1$ و:

$$\int_1^2 f(x)dx = 3, \quad \int_{-1}^2 f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{-1}^2 (2t)dt = 3$$

در شکل ۴ می‌بینیم که انتگرال‌های $\int_{-1}^2 (2t)dt$ و $\int_{-1}^2 f(\phi(t))\phi'(t)dt$ یکدیگر را حذف می‌کنند که اولی مربوط به نزول تابع ϕ و دومی مربوط به صعود ϕ است.

شکل ۳

انتگرال توابع گویا

در این جلسه نشان می‌دهیم که برای هر تابع گویا، یعنی تابعی که مقدار آن به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ چندجمله‌ای باشد، می‌توان تابع اولیه‌ای برحسب تابع مأнос پیدا کرد. به طور دقیق تابع اولیه آمیزه‌ای از توابع گویا، لگاریتم، توابع مثلثاتی و \tan^{-1} خواهد بود. این که به انواع توابع فوق الذکر نیاز خواهد بود از مثال‌های زیر روشن است:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \ln|x| & n = -1 \\ \frac{1}{n+1}x^{n+1} & n \neq -1 \end{cases} \quad \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \cos^{2n-2} \theta d\theta$$

که انتگرال سمت راست با جایگزین کردن $x = \tan \theta$ به دست آمده است. برای $n = 1$ جواب $x \tan^{-1} x$ به دست می‌آید و برای $n > 1$ مخلوطی از تابع‌های مثلثاتی و \tan^{-1} حاصل می‌شود. خواهیم دید که نوع دیگری تابع برای محاسبه تابع اولیه عبارت‌های گویا مورد نیاز نیست.

بدين ترتیب فرض کنید عبارت گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ داده شده است. در زیر به طور گام به گام دستور رسیدن به تابع اولیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ارائه می‌کنیم.

گام اول. اگر درجه $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کوچکتر باشد به گام دوم می‌رویم. در غیر این صورت چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم می‌کنیم:

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x) \quad (1)$$

که در اینجا $A(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای هستند و درجه $R(x)$ از درجه $Q(x)$ اکیداً کوچکتر است. اگر $P(x)$ بر $Q(x)$ قابل تقسیم باشد که $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + R(x)$ ، یعنی خارج قسمت خود یک

چندجمله‌ای است، مثلاً $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ که در این صورت

$$\int A(x)dx = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{k+1}a_kx^{k+1}$$

اگر $0 \neq R(x)$ ، به گام دوم می‌رویم.

گام دوم. اکنون محاسبه انتگرال نسبت دو چندجمله‌ای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ را بررسی می‌کنیم که در آن درجه $(R(x))$ از درجه $(Q(x))$ اکیداً کوچکتر است ولی $0 \neq R(x)$. برای این کار، توجه به چند واقعیت علم جبر ضروری است.

واقعیت جبری ۱ (قضیه اساسی جبر). برای هر چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ با ضرایب مختلف c_i ، که $c_n \neq 0$ ، اعداد مختلف $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارند که:

$$Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = c_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n) \quad (2)$$

بدین ترتیب $0 = Q(x)$ دارای n ریشه مختلط α_i (احتمالاً بعضی برابر) است. توجه کنید که این یک حکم صرفاً جبری است و روشی برای تجزیه (۲) ارائه نمی‌کند. در واقع هر چند که برای یافتن ریشه‌های $0 = Q(x)$ روش‌های تقریبی بسیار مؤثر وجود دارد، لکن نمی‌توان انتظار داشت که ریشه‌های α_i به سادگی بیان شدنی باشند. در واقع از نظریه گالوا نتیجه می‌شود که برای $n \geq 5$ ریشه‌های فوق را به طور کلی نمی‌توان با چهار عمل اصلی واستخراج ریشه برحسب c_0, c_1, \dots, c_n بیان کرد، یعنی فرمولی جبری مانند فرمول حل معادله درجه ۲ یا فرمول کاردانو (برای معادلات درجه ۳) برای معادلات درجه ۵ به بالا وجود ندارد.

واقعیت جبری ۲. برای چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ ، اگر همه ضرایب c_i حقیقی باشند، یک تجزیه $Q(x)$ به عوامل درجه ۱ و درجه ۲ وجود دارد:

$$Q(x) = c_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_k)(x^2 + a_1x + b_1)\cdots(x^2 + a_lx + b_l) \quad (3)$$

که در آن $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ریشه‌های حقیقی هستند، a_i ها و b_i ها حقیقی‌اند و

$$.i = 1, \dots, l \text{ برای } \Delta_i = a_i^2 - 4b_i < 0$$

بدین ترتیب $n = k + 2l$ و ریشه‌های غیرحقیقی $Q(x) = 0$ همه ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجه

دوم $x^2 + a_i x + b_i = 0$ هستند. این مطلب به سادگی از واقعیت جبری ۱ نتیجه می‌شود. نکته اصلی

این است که اگر عدد مختلط α ریشه $Q(x) = 0$ (با ضرایب حقیقی) باشد، آنگاه مزدوج α ، یعنی $\bar{\alpha}$

نیز ریشه $Q(x) = 0$ است زیرا که اگر

$$c_0 + c_1 \alpha + \dots + c_n \alpha^n = 0$$

با گرفتن مزدوج و با توجه به حقیقی بودن ضرایب، یعنی $c_i = \bar{c}_i$ ، داریم:

$$c_0 + c_1 \bar{\alpha} + \dots + c_n \bar{\alpha}^n = 0$$

بنابراین در تجزیه (۲)، وقتی c_i ها حقیقی باشند، به ازای هر فاکتور $x - \alpha$ ، غیرحقیقی، فاکتور

$x - \bar{\alpha}$ نیز وجود دارد و داریم:

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$$

حال $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = |\alpha|^2$ و $\alpha\bar{\alpha} = | \alpha |^2$ حقیقی هستند، پس حاصل ضرب

عبارت درجه دوم با مبین منفی تبدیل می‌شود.

بالاخره از آنجا که ممکن است ریشه‌های تکراری (معادلاً فاکتورهای تکراری) در تجزیه (۳)

وجود داشته باشد، (۳) را به صورت نهایی زیر می‌نویسیم:

$$Q(x) = c_n(x - \beta_1)^{\rho_1} \cdots (x - \beta_r)^{\rho_r} (x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \cdots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s} \quad (4)$$

که در آن β_i ها متمایز و نیز عبارت‌های درجه دوم متمایز هستند، $1 \leq \rho_i \leq 1$ و $1 \leq \sigma_i \leq 1$ اعداد صحیح

هستند.

اکنون با توجه به تجزیه (۴) می‌توان واقعیت جبری بعدی را بیان کرد:

واقعیت جبری ۳. عبارت گویای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ که در آن $R(x) \neq 0$ و درجه $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجه

است می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \left(\frac{1}{c_n} \right) \left\{ \frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \cdots + \frac{R_N(x)}{Q_N(x)} \right\} \quad (5)$$

که در آن $\frac{R_i(x)}{Q_i(x)}$ ها، موسوم به کسرهای جزیی، به طریق زیر به دست می‌آیند:

الف) به ازای هر $(x - \beta)^{\rho}$ در (۴)، یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{c_1}{x - \beta} + \frac{c_2}{(x - \beta)^2} + \cdots + \frac{c_{\rho}}{(x - \beta)^{\rho}} \quad (6)$$

ب) به ازای هر $(x^2 + Ax + B)^{\sigma}$ یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{D_1 x + E_1}{x^2 + Ax + B} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + Ax + B)^2} + \cdots + \frac{D_{\sigma} x + E_{\sigma}}{(x^2 + Ax + B)^{\sigma}} \quad (7)$$

جمع‌بندی گام دوم این است که کسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ درجه $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجه $Q(x)$ را به صورت مجموعی از کسرهای جزیی به صورت (۶) و (۷) می‌نویسیم.

گام سوم (انتگرال‌گیری کسرهای جزیی). با توجه به این که $\frac{R(x)}{Q(x)}$ به صورت مجموعی از کسرهای جزیی در می‌آید، کافی است روشی برای محاسبه تابع اولیه هر کسر جزیی ارائه کنیم که چنین خواهیم کرد.

الف) برای کسرهای جزیی که در (۶) ظاهر می‌شوند:

$$\int \frac{1}{(x - \beta)^i} dx = \begin{cases} \ln|x - \beta| & i = 1 \\ \frac{1}{-i+1}(x - \beta)^{-i+1} & i > 1 \end{cases}$$

ب) با توجه به این که میان هر عبارت درجه دوم $x^2 + Ax + B$ در (۷) منفی است، می‌دانیم با تکمیل مجدد و تعویض متغیر، هر یک از کسرهای جزیی (۷) به صورت مجموعی از عبارت‌های زیر در می‌آید:

$$c \frac{2t}{(t^2 + 1)^j} \quad \text{یا} \quad \frac{c'}{(t^2 + 1)^j}$$

که در آن c و c' ثابت‌های مناسب هستند و $dt = dx$. محاسبه تابع اولیه این عبارت‌ها ساده است:

$$\int \frac{2t}{(t^j + 1)^j} dx = \begin{cases} \ln(t^j + 1) & j = 1 \\ \frac{1}{-j+1}(t^j + 1)^{-j+1} & j > 1 \end{cases}$$

بالاخره برای $t = \tan \theta$ ، اگر $j = 1$ که از $\tan^{-1} t$ استفاده می‌کنیم، و اگر $j > 1$ با جایگزینی

$dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ ، یک انتگرال برحسب توانی از $\cos \theta$ به دست می‌آید که می‌توانیم محاسبه کنیم.

روش بالا را با ذکر چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیه $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x^7+x^5-x^4+x+1}{x^6+x^4+x^2}$ را محاسبه کنیم. با تقسیم داریم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -x + \frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2}$$

حال

$$\begin{aligned} x^6 + x^4 + x^2 &= x^2(x^4 + x^2 + 1) \\ &= x^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

که دو عبارت درجه دوم بالا هر دو مبین منفی دارند. بنابراین طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 - x + 1}$$

راه کلی به دست آوردن ضرایب طرف راست این است که از طرف راست مخرج مشترک بگیریم و ضرایب به دست آمده برای صورت کسر را برابر ضرایب متناظر در طرف چپ قرار دهیم: در این صورت شش معادله شش مجهولی با جواب منحصر به فرد به دست خواهد آمد (در واقع اینکه در حالت کلی همواره n معادله n مجهولی با جواب منحصر به فرد به دست می‌آید توجیه روش تجزیه به کسرهای جزیی است. این اثبات که در اینجا نخواهد آمد دشوار نیست ولی کمی وقت‌گیر است). در حالت

موجود داریم

$$\begin{aligned} &\frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2} \\ &= \frac{(A + C + E)x^5 + (B - D + F)x^4 + (A - C + E)x^3 + (B + D + F)x^2 + Ax + B}{x^6 + x^4 + x^2} \end{aligned}$$

چون این تساوی به مازای هر x بقرار است باید ضرایب متناظر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \\ B + D + F = 0 \\ A - C + E = 1 \\ B - D + F = -1 \\ A + C + E = 2 \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به سادگی حل کرد و نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$A = 1, B = 1, C = \frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}, E = \frac{1}{2}, F = -\frac{1}{2}$$

پس باید انتگرال عبارت‌های زیر را محاسبه کرد:

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, (\frac{1}{2})\frac{x+1}{x^2+x+1}, (\frac{1}{2})\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

تابع اولیه $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ را به عنوان نمونه محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2+x+1} &= (\frac{1}{2})\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1} \\ &= (\frac{1}{2})\frac{2x+1}{x^2+x+1} + (\frac{1}{2})\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= (\frac{1}{2})\frac{2x+1}{x^2+x+1} + (\frac{2}{\sqrt{3}})\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \end{aligned}$$

انتگرال عبارت اول سمت راست برابر $(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}})$ است و انتگرال عبارت سمت راست برابر

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$$

مثال ۲. گاهی اوقات روش‌های ساده‌تری برای تجزیه به کسرهای ساده وجود دارد. مثال زیر را در

نظر بگیرید:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x^2}$$

طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \quad (8)$$

اگر دو طرف را در $(x+1)$ ضرب کنیم داریم:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = A + B\frac{x+1}{x} + C\frac{x+1}{x^2}$$

در طرف راست اگر x به (-1) میل داده شود ضریب A حاصل می‌شود، پس:

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) = 2$$

با جایگزینی این مقدار در (8) نتیجه می‌شود که

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

پس

$$\frac{-x^2 + 1}{x^3 + x^2} = \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \quad (9)$$

حال اگر دو طرف را در x^2 ضرب کنیم و $\lim_{x \rightarrow 0}$ را محاسبه کنیم، مقدار C حاصل می‌شود:

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{x+1} = 1$$

بالاخره با جایگزینی در (9) داریم:

$$\frac{-x^2 - x}{x^3 + x^2} = \frac{B}{x}$$

که نتیجه می‌دهد $B = -1$.

یک سؤال اساسی. مثال‌های بالا طوری انتخاب شده بودند که فاکتورگیری مخرج‌ها ساده بود. همان طور که اشاره شد اگر درجهٔ مخرج ۵ یا بزرگ‌تر باشد، ممکن است تجزیه به روش جبری میسر نباشد هر چند که یافتن ریشه‌های مخرج به هر درجهٔ دقت عملی است. حتی فرای این وضعیت، می‌توان به

طور کلی این سؤال را مطرح کرد که اگر تابعی را با یک نابع "نزدیک" جایگزین کنیم، آیا نتیجه انتگرال‌گیری نیز نزدیک به تابع اولیه تابع اصلی خواهد بود؟ به این کلیت سؤال دقیق نیست زیرا که با افزودن یک مقدار ثابت به یک تابع اولیه می‌توان آن را از مقدار اولیه‌اش به دلخواه دور ساخت. سؤال دقیق‌تر، و از نظر کاربرد با اهمیت‌تر، این است که مثلًا اگر دو تابع انتگرال‌پذیر f و g روی بازه $[a, b]$ به هم "نزدیک" باشند، یعنی مثلًا عددی $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد که

$$[a, b] \text{ برای هر } x \text{ در } |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

در این صورت در مورد اندازه $|\int_a^b f - \int_a^b g|$ می‌توان گفت؟ داریم از

$$[a, b] \text{ برای هر } x \text{ در } -\epsilon \leq f(x) - g(x) \leq \epsilon$$

نتیجه می‌گیریم که

$$(b-a)(-\epsilon) \leq \int_a^b (f-g) \leq (b-a)\epsilon$$

یا

$$\left| \int_a^b (f-g) \right| \leq (b-a)\epsilon$$

بدین ترتیب اندازه خطای انتگرال‌گیری، یعنی $(b-a)\epsilon$ را می‌توان با نزدیکترین دو تابع، یعنی اندازه ϵ ، کنترل کرد.

محاسبه تقریبی انتگرال

در محاسبات علمی به ندرت انتگرال معین از روش‌های یافتن تابع اولیه محاسبه می‌شود هر چند که این روش‌ها ممکن است برای یافتن فرمول‌های مناسب مفید واقع شوند. دو دلیل ساده برای این امر وجود دارد، یکی اینکه بسیاری تابع‌های اولیه را نمی‌توان بر حسب تابع‌های شناخته شده بیان کرد و دوم اینکه حتی در صورت دست یافتن به یک عبارت شناخته شده مانند $\sqrt[5]{\tan^{-1}(\sqrt{2} + x) + 3x^2}$ ، این عبارت خود بدون تقریب قابل استفاده نیست. خوبی‌ختناه روش‌های بسیار مؤثر و عملی برای محاسبه تقریبی انتگرال معین وجود دارد که به دقت مورد نیاز قابل بهره‌گیری هستند و نرم‌افزارهای متعددی نیز به این منظور فراهم شده است. روش‌های تقریب بر دو رکن اصلی تکیه دارند:

الف) افزایش بازه انتگرال‌گیری به زیربازه‌های کوچکتر.

ب) جایگزینی تابع روی هر بازه کوچکتر با یک تابع که انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه است، مانند یک تابع ثابت یا یک چندجمله‌ای.

روشن است که این ایده رابطه نزدیکی با خود تعریف انتگرال (معین) دارد. در زیر چند روش تقریب را معرفی می‌کنیم.

۱-۶) تقریب چپ و تقریب راست

برای $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، بازه $[a, b]$ را به n زیربازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad , \quad a_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

و قرار می‌دهیم:

$$L(n) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1}) = \frac{b-a}{n} (f(a_0) + \cdots + f(a_{n-1}))$$

$$R(n) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(a_i) = \frac{b-a}{n} (f(a_1) + \cdots + f(a_n))$$

بدین ترتیب وقتی $f > 0$ ، $L(n)$ و $R(n)$ هر دو تقریب $\int_a^b f$ با مجموعی از مساحت‌های مستطیل

شکل هستند، که برای $L(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای چپ زیربازه و برای $R(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای راست زیربازه است.

(۲-۶) تقریب نقطهٔ میانی

در افزای بالا، اگر به جای استفاده از نقاط چپ یا راست از نقطهٔ میانی هر زیربازه استفاده کنیم،

حاصل را تقریب میانی، می‌نامیم:

$$M(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)$$

تقریب میانی نیز در حالت $f > 0$ ، مجموع مساحت‌های n مستطیل است، اگر از نقطهٔ

$x = a_1$ و $x = a_i$ خط راستی رسم شود، نقاط تقاطع این خط را خطوط قائم $\frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ و $\frac{a_{i-1}+a_i}{2}$)

شکل ۱

همراه با دو نقطهٔ a_{i-1} و a_i روی محور x یک ذوزنقه ایجاد می‌کنند که مساحت آن برابر مساحت مستطیل بنا شده به ارتفاع $\frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ است. بالاخص وقتی f مشتق‌پذیر باشد، می‌توان از خط مماس بر نمودار تابع به‌ازای نقطهٔ میانی $x = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ استفاده کرد (شکل ۱).

در نگاه اول به نظر نمی‌آید میان سه مقدار $L(n)$ ، $R(n)$ و $M(n)$ ، هیچیک به عنوان تقریب ارجحیتی بر دوتای دیگر داشته باشد، یکی نقطهٔ چپ بازه را در نظر می‌گیرد، دومی نقطهٔ میانی و سومی نقطهٔ سمت راست را. برای یک "تابع کاملاً تصادفی" نباید تمایزی میان این سه نقطه به عنوان "نقطهٔ نوعی" دامنهٔ تابع وجود داشته باشد، ولی تابع‌هایی که در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند کاملاً هم تصادفی نیستند. بالاخص اگر تابع مشتق‌پذیر باشد، خط مماس بر یک نقطهٔ نمودار در فاصله‌ای کوچک تقریبی خوب از تابع به‌دست می‌دهد. اگر نقطهٔ تماس نقطهٔ متناظر با نقطهٔ میانی روی نمودار

گرفته شود، میزان انحراف تابع در دو نقطه انتهایی از تقریب خطی، معمولاً کوچکتر از انحراف تابع از مقدارهای ثابت $(a_{i-1}, f(a_i))$ است. بدین ترتیب این انتظار شهودی می‌تواند وجود داشته باشد که برای تابع‌های مشتقپذیر، $M(n)$ معمولاً تقریبی بهتر از $R(n)$ یا $L(n)$ باشد. بعداً به طور دقیق‌تر به این مطلب خواهیم پرداخت.

۶-۳) تقریب ذوزنقه

در این روش مجموع مساحت‌های ذوزنقه‌هایی را که رئوس آنها در نقاط $(x_{i-1}, 0)$ ، $(x_i, 0)$ و $(x_i, f(x_i))$ هستند به عنوان تقریب مساحت زیر نمودار در نظر گرفته می‌شود:

$$T(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

اکنون به بررسی دقت تقریب‌های $T(n)$ ، $R(n)$ و $L(n)$ برای $\int_a^b f$ می‌پردازیم و در مورد حدود خطأ در هر مورد تخمین‌هایی ارائه خواهیم کرد.

۶-۴) تخمین خطای $L(n)$ و $R(n)$

خطای $L(n)$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظات مشابهی در مورد $R(n)$ برقرار است. علی‌الاصول میزان انحراف $L(n)$ از $\int_a^b f$ به انحراف تابع f از مقدار ثابت (a, f) بستگی دارد. اگر تابع f مشتقپذیر باشد، $|f'|$ نمایانگر انحراف تابع از مقدار ثابت است، بنابراین باید انتظار داشت خطای این تقریب به اندازه $|f'|$ وابسته باشد. خطای تقریب، E ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \int_a^b f - L(n)$$

پس

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f - (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \right)$$

اگر تابع f را پیوسته فرض کنیم، طبق قضیه میانگین انتگرال داریم $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}^*)$. بنابراین برای نقطه مناسبی x_{i-1}^* در بازه $[x_{i-1}, x_i]$.

$$E = \sum_{i=1}^n ((x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}^*) - f(x_{i-1})))$$

حال مضافاً فرض کنید تابع f مشتقپذیر است. در این صورت طبق قضیه میانگین نقطه‌ای c_{i-1} بین

و وجود دارد که x_{i-1}^*

$$f(x_{i-1}^*) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(c_{i-1})$$

بنابراین

$$E = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^* f'(c_{i-1})$$

می‌نویسیم $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, پس

$$E = h^* \sum_{i=1}^n f'(c_{i-1})$$

فرض کنید M یک کران بالایی برای $|f'|$ در بازه $[a, b]$ باشد، در این صورت از که $h \cdot n = b - a$

داریم:

$$|E| \leq h \cdot (b - a) \cdot M \quad (1)$$

طرف راست این تقریب خطای کاملاً گویا است. خطای به سه عامل زیر بستگی دارد: کران بالایی قدر مطلق مشتق که میزان تغییر تابع را نمایش می‌دهد، طول بازه، و طول زیربازه‌های افزایشی برای بازه ثابت $[a, b]$ و تابع داده شده f (بنابراین M ثابت). هر چه افزایش ظریف‌تر باشد، یعنی h کوچکتر، خطای کوچکتر است. مثلاً برای اینکه تقریب یک رقم اضافی اعشار دقیق‌تر شود، لازم است معمولاً افزایش را ۱۰ برابر ظریف‌تر کنیم.

۶-۵) تخمین خطای $M(n)$ و $T(n)$

در اینجا فرض می‌کنیم تابع f دو بار مشتقپذیر است. ادعا می‌کنیم:

$$M(n) \leq \int_a^b f \leq T(n) \quad [a, b] \text{ در سراسر } f'' > 0 \quad \text{اگر و فقط اگر } f'' > 0 \text{ در سراسر } [a, b] \quad (2)$$

$$T(n) \leq \int_a^b f \leq M(n) \quad [a, b] \text{ در سراسر } f'' > 0 \quad \text{اگر و فقط اگر } f'' > 0 \text{ در سراسر } [a, b] \quad (3)$$

شکل ۲

در واقع برای یک تابع محدب ($f'' > 0$) خط مماس در هر نقطه زیر نمودار تابع قرار می‌گیرد، پس $M(n) < \int_a^b f$ و خط واصل بین هر دو نقطه نمودار بالاتر از نمودار واقع می‌شود عکس این مطلب در مورد تابع‌های مقعر ($f'' < 0$) برقرار است. برای تابع‌های مستوی ($f'' = 0$)، $M(n) = T(n)$ هر دو \int_a^b خواهد بود. اگر خطای تقریب ذوزنقه و تقریب نقطه میانی را به ترتیب به E_T و E_M نمایش دهیم، یعنی $E_M = \int_a^b f - M(n)$ و $E_T = \int_a^b f - T(n)$ می‌توان ثابت کرد که:

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} h^2 \cdot (b-a) \cdot M \quad (4)$$

$$|E_M| \leq \frac{1}{24} h^2 \cdot (b-a) \cdot M \quad (5)$$

که در اینجا M یک کران بالایی برای قدر مطلق مشتق دوم، f'' ، در بازه $[a, b]$ است. در مقایسه با (۱) به دو تفاوت زیر برمی‌خوریم:

- خطای $L(n)$ و $R(n)$ به اندازه مشتق اول، یعنی میزان رشد تابع، وابسته است، ولی خطای $T(n)$ و $M(n)$ به مشتق دوم تابع، یعنی میزان خمیدگی نمودار، وابسته می‌باشد.

- مقایسه h^2 در فرمول‌های E_T و E_M با h در (۱) نشان می‌دهد که تظریف اثر مضاعفی بر دقت $M(n)$ و $T(n)$ دارد. در مورد $M(n)$ با افزایاد ده برابر نقاط تقسیم، دقت تقریب تا دو رقم اعشار دقیق‌تر می‌شود زیرا h^2 در $\frac{1}{10}$ ضرب می‌شود. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که برای تابع‌های دو بار مشتق‌پذیر با $T(n)$ و $M(n)$ معمولاً تقریب‌های بهتری از $L(n)$ و $R(n)$ به دست دهند.

نکته دیگری که در (۴) و (۵) مشاهده می‌شود این است که به نظر می‌آید نوعاً دقت $M(n)$ دو برابر دقت $T(n)$ باشد. در واقع می‌توان دلیلی شهودی برای این امر ارائه کرد. اگر روی هر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ شکل نمودار را تقریباً سهمی فرض کنیم، با محاسبه سرراست دیده می‌شود که

E_T (تمرین) ضمناً همچنان که در رابطه با جهت تقریر مشاهده کردیم علامت E_T و E_M مخالف یکدیگر است، از این دو مطلب روش دقیق‌تری را برای تقریر انتگرال به ذهن می‌رسد. مجموع $2M(n) + T(n)$ از یک سو باید حدوداً سه برابر $\int_a^b f$ باشد، ولی با توجه به این که علامت خطای $T(n)$ و $M(n)$ مخالف و قدرمطلق خطای $M(n)$ حدوداً نصف قدرمطلق خطای $T(n)$ است، باید خطای $2M(n) + T(n)$ کوچک باشد. بنابراین تقریر زیر:

$$S(n) = \frac{1}{3}(2M(n) + T(n)) \quad \text{تقریر سیمسن}$$

تقریر مناسبی به نظر می‌رسد. در واقع محاسبه سراسرت نشان می‌دهد که برای مجموعه سهمی‌های گذرا از سه نقطه $(x_i, f(x_i)), (x_{i-1}, f(x_{i-1})),$ و $(\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i))$ برای $i = 1, \dots, n$ ، دقیقاً $S(n)$ حاصل می‌شود.

روش سیمسن معمولاً تقریر بسیار خوبی از مقدار انتگرال معین ارائه می‌کند. می‌توان ثابت کرد که اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ چهار بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تخمین زیر برای خطای روش سیمسن، E_S ، برقرار است:

$$|E_S| \leq \frac{1}{16} h^4 \cdot (b - a) \cdot M \quad (6)$$

که در آن M یک کران بالایی برای قدرمطلق مشتق چهارم f است. بدین ترتیب برای چندجمله‌ای‌های از درجه ۳ و پایین‌تر، که مشتق چهارم آنها صفر است، روش سیمسن مقدار انتگرال را با دقت کامل ارائه می‌کند. با توجه به اینکه در این روش از سهمی‌ها برای تقریر استفاده کردیم، موضوع برای تابع‌های تا درجه ۲ بدیهی است. اینکه برای تابع‌های درجه سه نیز، $E_S = 0$ ، در نگاه اول واضح نیست ولی موضوع را می‌توان با محاسبه مستقیم بدون استفاده از (۶) نیز تحقیق کرد (تمرین). بالاخره توجه کنید که اثر ضریب h^4 در (۶) این است که تظریف دهگانه موجب می‌شود که تقریر سیمسن حدوداً چهار رقم اعشار دقیق‌تر شود که این نیز مؤید دقت برتر این روش است.

انتگرال‌های ناسره

مفهوم انتگرال که تاکنون بررسی شد به تابع‌های کراندار روی بازه‌های کراندار محدود بود. در مواردی می‌توان با حذف یکی از این دو محدودیت یا هر دوی آن، به تعمیمی از مفهوم انتگرال دست یافت که به انتگرال ناسره معروف است. در زیر به بررسی دو نوع اساسی از این انتگرال‌ها و ترکیب آنها می‌پردازیم.

(۱-۷) انتگرال ناسره نوع اول: دامنه بی‌کران

در اینجا تابع‌هایی را در نظر می‌گیریم که دامنه آنها به شکل $[a, \infty)$ یا $(-\infty, a]$ است. نخست تابع‌های $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. ملاحظات مشابهی در مورد تابع‌های $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ حکم‌فرماست. فرض کنید بهازای هر $A > a$ ، $A \in \mathbb{R}$ روی $[a, A]$ انتگرال‌پذیر باشد و $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f$ وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم $\int_a^\infty f$ همگراست و قرار می‌دهیم:

$$\int_a^\infty f = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f \quad (1)$$

نفی همگرایی، واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p > 0$ داده شده، همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ را بررسی کنید. داریم:

شکل ۱

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{-p+1} (A^{-p+1} - 1) & p \neq 1 \\ \ln A & p = 1 \end{cases}$$

بنابراین $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx$ دقیقاً وقتی وجود دارد که $1 > p$. پس شرط لازم و کافی برای همگرایی

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

مثال ۲. برای $0 < \alpha$ داده شده، همگرایی $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ را بررسی می‌کنیم. این مثال نیز با محاسبه سرراست قابل بررسی است:

$$\int_0^A e^{-\alpha x} dx = \frac{-1}{\alpha} (e^{-\alpha A} - 1)$$

برای هر $0 < \alpha$ حد بالا وجود دارد وقتی $A \rightarrow \infty$ و برابر $\frac{1}{\alpha}$ است.

مثال ۳. حال کنید $1 > p$ داده شده است. نشان می‌دهیم $\int_0^\infty e^{-x^p} dx$ همگرایی را نمی‌توان با محاسبه مستقیم به دست آورد. زیرا مثلاً برای $2 = p$ ، تابع اولیه e^{-x^2} بر حسب تابع‌های شناخته شده قابل بیان نیست. ولی اگر $1 > p$ ، داریم $x^p \geq x$ برای $1 \geq x \geq e^{-x}$ برای

$$x \geq 1$$

$$\int_1^A e^{-x^p} dx \leq \int_1^A e^{-x} dx$$

چون $0 < e^{-x^p}$ کمیت سمت چپ نسبت به A صعودی است. از طرفی دیگر، طبق مثال قبل، حد طرف راست وجود دارد، پس حد سمت چپ نیز وجود دارد وقتی $\infty \rightarrow A$ ، و $\int_1^\infty e^{-x^p} dx$ همگرایی است. افزودن مقدار ثابت $\int_0^1 e^{-x^p} dx$ نیز اثری بر همگرایی ندارد.

این روش مقایسه با انتگرال ناسره تابع‌های ساده یا شناخته شده حربه اصلی بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال‌هاست و می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد:

(۲-۷) آزمون مقایسه. فرض کنید تابع‌های نامنفی f و g روی $[a, \infty]$ داده شده‌اند که هر یک روی هر بازه $[a, A]$ انتگرال‌پذیر است و فرض کنید $a > K$ وجود دارد که به ازای هر $x > K$ داریم

$$f(x) \leq g(x) \text{ در این صورت:}$$

الف) اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f$ نیز همگرایی است.

ب) اگر f \int_a^∞ واگرا باشد، g نیز واگرایی است.

تنها این توضیح اضافی در مورد آزمون بالا لازم است که مقایسه $f(x) \leq g(x)$ فقط برای مقادیر x بزرگتر از یک مقدار ثابت K کافی است زیرا که $\int_a^K f$ و $\int_a^K g$ به هر حال وجود دارند و همگرایی \int_a^∞ معادل همگرایی \int_K^∞ می‌باشد.

(۳-۷) انتگرال ناسره نوع دوم: تابع بی کران در یک انتهای بازه کراندار

در اینجا تابع‌های $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ یا $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که وقتی x به انتهای بازه نزدیک می‌شود، $f(x)$ به $+\infty$ یا $-\infty$ می‌کند. مثلاً برای $p > 0$ داده شده اگر $f(x) = \frac{1}{x^p}$ را روی $[1, \infty)$ در نظر بگیریم، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، مقدار تابع بی کران بزرگ می‌شود. حالت $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم، وضعیت $[a, b]$ کاملاً مشابه است. برای f که به ازای هر $\varepsilon > 0$ روی $[a + \varepsilon, b]$ انتگرال پذیر باشد، می‌گوییم $\int_a^b f$ همگرای است در صورتی که $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ وجود داشته باشد، و در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f \quad (2)$$

نفی همگرایی مانند گذشته واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p > 0$ داده شده در همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ بحث می‌کنیم. برای $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{-p+1} (1 - \varepsilon^{-p+1}) & p \neq 1 \\ -\ln \varepsilon & p = 1 \end{cases}$$

وقتی $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ، عبارت سمت راست در صورتی حد دارد که $1 < p$ ، بنابراین شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ این است که $1 < p$.

مثال ۲. در مورد همگرایی $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^5 - 1}} dx$ بحث می‌کنیم. توجه کنید که در $[1, 2]$ تعریف شده است و وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، تابع بی کران می‌شود. برای $2 \leq x \leq 4$ داریم $x^2 < x^4$ و از طرفی دیگر:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) > 5(x - 1)$$

پس برای $1 < x \leq 2$:

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^5 - 1}} < \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

از طرفی دیگر

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

که طبق مثال قبل همگراست، پس انتگرال داده شده در مقایسه همگرا می باشد.

در مثال بالا از آزمون مقایسه‌ای کاملاً مشابه ۲-۷ استفاده کردہایم که بیان و اثبات دقیق آن را به خواننده واگذار می کنیم.

وقتی بیش از یک ناسرگی در مورد یک انتگرال وجود داشته باشد، انتگرال را با انتخاب نقاط کمکی به صورت مجموع دو یا چند انتگرال می نویسیم و در صورتی که همه انتگرال‌های دارای یک ناسرگی، همگرا باشند، انتگرال ناسره را همگرا می نامیم. با چند مثال به توضیح این مطلب می پردازیم:

مثال ۱. برای $0 < p$ داده شده، در مورد همگرایی $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ بحث کنید.

در اینجا نقطه کمکی $x = 1$ را انتخاب می کنیم و همگرایی دو انتگرال \int_0^∞ و \int_1^∞ را در نظر می گیریم. توجه کنید که نقطه خاص $x = 1$ اثری بر نتیجه نهایی نخواهد داشت زیرا که اگر به جای $x = 1$ نقطه $x = c \neq 0$ انتخاب شود، در مورد هر دو انتگرال ناسره، اختلاف در انتگرال معین \int_0^∞ خواهد بود که به هر حال متناهی است. حال برای $1 \leq p$ ، $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ واگرای است، پس $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ واگرای است، و نیز برای $p > 1$ ، $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ واگرای است، پس برای هر $0 < p$ ، انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ واگرای است.

مثال ۲. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx$ را بررسی می کنیم. با درنظر گرفتن نقطه کمکی $x = 1$ ، وضعیت دو انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx$ و $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx$ را مورد مطالعه قرار می دهیم. برای $0 < x < 1$ داریم $x^3 + x > x^3$ ، پس $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ و چون $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ همگراست، در مقایسه $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx < \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx < \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ همگراست. از طرفی دیگر $x^3 + x > x$ ، پس $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx < \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ و چون $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ همگراست، بنابراین انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} dx$ همگرا می باشد.

مثال ۳. انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در اینجا دو ناسرگی وجود دارد. یکی در انتهای چپ $[1, 0]$ و دیگری در انتهای راست $[0, -1]$. بنابراین باید همگرایی دو انتگرال \int_1^0 و \int_{-1}^0 را بررسی کرد. این دو انتگرال هر دو واگرا هستند، پس $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ واگرا محسوب می‌شود.

شکل ۲

رهیافت دیگری در مورد مثال بالا به ذهن می‌رسد. اگر بازهٔ متقارن $[-\varepsilon, \varepsilon]$ را حول 0 حذف کنیم، به سبب تقارن داریم:

$$\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} dx = 0$$

حال اگر $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ را حد مجموع $\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} dx$ فرض کنیم وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ \Rightarrow این حد صفر است، یعنی به اعتباری باید $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ را همگرا و برابر صفر تلقی کرد. فرض کنید به جای گرفتن یک بازهٔ متقارن حول 0 ، یک بازهٔ $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ در نظر گرفته شود که $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ و دو عدد $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ را به صفر میل دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \frac{1}{x} dx &= \ln(-x)|_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_1} + \ln x|_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \\ &= \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \end{aligned}$$

حال وقتی $\varepsilon_1 \rightarrow 0^+$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0^+$ ، حد بالا به طور کلی وجود ندارد، بلکه به نسبت $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ وابسته است. مثلاً وقتی $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{(1/\varepsilon_2)}$ به ∞ میل می‌کند، وقتی $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ، حد صفر است، و وقتی $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}$ ، عبارت $\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$ به ∞ میل می‌کند. اگر عدد حقیقی r داده شده باشد و بگیریم $\varepsilon_1 = e^r \varepsilon_2$ ، حد $\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$ خواهد شد. پس بسته به این که بازهٔ منقبض شونده حول 0 چگونه اختیار شود، می‌توان عبارت $\int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \frac{1}{x} dx$ را به هر عددی میل داد! برای بعضی کاربردها باید یک بازهٔ متقارن یا بازه‌ای به شکل خاص حول نقطهٔ ناسرگی در نظر گرفت که در این صورت حد خاصی مورد نظر است. این حد خاص را که ویژگی مسئله تحمیل می‌کند مقدار اصلی (کوشی) می‌نامند.

(۴-۷) تابع Γ (گاما). تابعی با دامنه اعداد حقیقی مثبت می‌سازیم که به ازای مقادیر عدد صحیح مقدارهای $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ را می‌گیرد. به عنوان انگیزه، انتگرال زیر را به ازای عدد صحیح نامنفی داده شده n در نظر بگیرید:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt \quad (3)$$

این یک انتگرال ناسره از نوع اول است. از آنجا که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\frac{t}{n}}} = 0$ ، برای t به اندازه کافی بزرگ داریم $t^n < e^{\frac{t}{n}}$ ، پس $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt < e^{-\frac{t}{n}} dt$ همگراست، (۳) همگرا می‌باشد.

می‌توان به روش انتگرال جزء به جزء مقدار (۳) را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \int_0^A t^n e^{-t} dt &= -t^n e^{-t} \Big|_0^A + \int_0^A n t^{n-1} t^{-t} dt \\ &= -\frac{A^n}{e^A} + n \int_0^A t^{n-1} e^{-t} dt \\ &\text{چون } \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A^n}{e^A} = 0, \text{ داریم:} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

با ادامه استفاده از انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌شود که:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \int_0^\infty e^{-t} dt = n! \quad (4)$$

با الهام از این فرمول تابع گاما Γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (5)$$

وقتی $x \geq 1$ فقط یک ناسرگی از نوع اول وجود دارد و مشابه آنچه در بالا دیدیم، انتگرال ناسره همگراست. برای $0 < x < 1$ ، انتگرال $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ نیز ناسرگی نوع دوم را دارد که در اینجا:

$$\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} < \frac{1}{t^{1-x}}$$

چون $1 < x < 0$ و در نتیجه انتگرال مورد نظر همگراست. پس $\Gamma(x)$ به ازای هر $x > 0$ تعریف شده است. با روش انتگرال جزء به جزء مانند محاسبه بالا داریم:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (6)$$

از آنجا که $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ نتیجه می‌شود که:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (7)$$

می‌توان بعضی مقادیر دیگر Γ را نیز محاسبه کرد. مثلاً

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$$

با تعویض متغیر $t = u^2$ داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

در بررسی انتگرال‌های دو متغیری ثابت خواهیم کرد که $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ، پس نمودار تابع Γ به صورت شکل ۳ است.

شکل ۳

سری تیلور و سری توانی (۱)

در جلسه ۲۰ چندجمله‌ای تیلور را بررسی کردیم. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبه n باشد، چندجمله‌ای تیلور درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a ، یا تقریب درجهٔ n تابع f در نقطهٔ a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - a)^n \quad (1)$$

حال فرض کید تابع f دارای مشتق از هر مرتبه در نقطهٔ a است، پس می‌توان $f^{(k)}(a)$ را به‌ازای هر k در نظر گرفت. بدین ترتیب می‌توان به‌ازای هر عدد x ، سری زیر را تشکیل داد:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \quad (2)$$

سری فوق را سری تیلور تابع f در نقطهٔ a می‌نامیم. دو سؤال طبیعی در اینجا به ذهن می‌رسد.

الف) آیا سری (۲) به‌ازای هر x یا بعضی x ‌ها همگراست؟

ب) اگر x در دامنهٔ تعریف f باشد و سری (۲) به‌ازای x همگرا، آیا حد سری برابر $f(x)$ می‌شود؟

توجه کید که زمینه‌ای معقول برای جواب مثبت به (ب) وجود دارد. به طور کلی دیدیم که با افزایش درجهٔ تقریب تابع، یعنی افزایش n در (۱)، تقریب درجهٔ n در نزدیکی a از تابع دورتر نمی‌شود. با این غیرقابل تصور به نظر نمی‌رسد که با افزایش n ، حد (۱)، یعنی سری (۲)، به خود تابع میل کند. مثال‌های زیر نوع وضعیت‌های ممکن را تا حدی بیان خواهد کرد.

۱-۳۳) چند مثال

۱-۱-۳۳) تابع $f(x) = e^x$ را با \circ در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f^{(n)}(\circ) = e^{\circ}$ بهارای هر n

سری تیلور تابع در \circ به شکل زیر است:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3)$$

می‌خواهیم همگرایی سری فوق را بهارای x های مختلف بررسی کیم و اینکه اگر بهارای یک x این سری همگرا باشد، آیا مجموع سری برابر e^x است؟ در اینجا، در بسیاری موارد دیگر، هر روشی که برای تخمین خطای تقریب درجه n در اختیار داشته باشیم می‌تواند مفید واقع شود. می‌دانیم که اگر

تقریب درجه n تابع f در a باشد، داریم:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (4)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x (و البته وابسته به n) است جمله دوم سمت را باقیمانده لاغرانژ نامیدیم. اگر برای x داده شده داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$$

آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - p_n(x)) = 0$ یعنی سری تیلور بهارای x به مقدار $f(x)$ میل می‌کند. پس در این صورت بهارای چین مقدار x ، جواب (الف) و (ب) هر دو مثبت می‌شود. در مورد تابع $f(x) = e^x$ و \circ داریم:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

که c نقطه نامشخصی بین \circ و x و وابسته به n است. هرچه باشد می‌توان نوشت $|x| \leq c \leq |x|$ ، پس $\frac{e^c}{(n+1)!} \leq e^{|x|}$. با این برای x داده شده، چنانچه ثابت کیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ باقیمانده لاغرانژ به صفر میل می‌کند و نتیجه خواهد شد که سری تیلور (۴) به e^x همگراست. در واقع برای x داده شده، N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ می‌گیریم. در این صورت برای $N > n$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{n+1} \\ &\leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

چون نسبت ثابت $\frac{|x|}{N+1}$ اکیداً از یک کوچکتر است، وقتی $n \rightarrow \infty$ طرف راست بالا به صفر میل می‌کد، پس باقیمانده لاغرانژ به صفر میل می‌کند. با براین برای هر x داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (5)$$

بدین ترتیب برای این مثال، سری تیلور e^x در $a = 0$ به ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. در اثبات بالا دیدیم که برای کوچک کردن باقیمانده لازم بود N را بزرگتر یا مساوی $|x|$ بگیریم. به طور کلی باید انتظار داشت که هرچه x از a دورتر شود، برای نزدیک کردن مجموع سری تیلور به $f(x)$ جملات بیشتری از سری تیلور لازم باشد. در شکل ۱ مجموعهای $1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ و $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ به عوان تقریب‌های e^x نمایش داده شده‌اند. ملاحظه کنید که هرچه $|x|$ بزرگتر شود، تقریب از مقدار واقعی دورتر است هرچند که به ازای هر x داده شده، با افزودن جملات سری تیلور می‌توان به e^x به دلخواه نزدیک شد.

?

(۳۳-۱-۲) تابع‌های $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\sinh x$ و $\cosh x$ را در نظر می‌گیریم. سری‌های تیلور این توابع در $a = 0$ به سادگی محاسبه می‌شوند زیرا که

$$\begin{aligned} \sin^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases} & \cos^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 1 & n = 4k \\ -1 & n = 4k+2 \end{cases} \\ \sinh^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & \text{فرد } n \end{cases} & \cosh^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases} \end{aligned}$$

پس سری‌های تیلور این توابع در $a = 0$ به شرح زیرند:

$$\sin x : \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x : \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x : \quad x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x : \quad 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

در واقع به سبب شیاهت ضرایب این سری‌ها به ضرایب سری تیلور e^x ، می‌توان با استفاده از باقیمانده لاگرانژ به روشی مشابه آنچه در مثال قبل گذشت نشان داد که هر یک از این سری‌ها به ازای هر x به تابع مربوط میل می‌کند، یعنی به ازای هر x داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \quad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \quad (7)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \quad (8)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \quad (9)$$

به عوایان مثال، چهار تقریب متوالی $\sin x$ با چهار جمله‌ای‌های تیلور در شکل ۲ نمایش داده شده است.

?

(۱-۳-۳) تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم. سری تیلور این تابع را در نقطه $a = 1$ از قلمرو بررسی می‌کیم. داریم $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$ ، $f'(x) = x^{-2}$ ، و با استقراء $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n$ و $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$ پس $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$. به این سری تیلور تابع در $a = 1$ به صورت زیر است:

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + -$$

ملاحظه می‌کیم که این یک سری هدسمی با قدر نسبت $|x - 1|$ است، پس شرطی لازم و کافی برای همگرای آن این است که $1 < |x - 1| < 2$ یا $0 < x < 2$. از طرفی دیگر از فرمول مجموع

سری هدسمی همگرا، برای $|x - 1| < 1$ داریم:

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - + = \frac{1}{1 - (-(x - 1))} = \frac{1}{x}$$

بدین ترتیب برای تابع $\frac{1}{x}$ و $a = 1$ ، نتیجهٔ زیر در مورد (الف) و (ب) حاصل می‌شود: سری تیلور در بازه $[0, 2]$ همگراست و در این بازه به خود تابع میل می‌کند. از آنجا که تابع $\frac{1}{x}$ در $x = 0$ تعریف نشده است، واگرایی سری تیلور به ازای $x = 0$ شاید عجیب به نظر نرسد، ولی برای $x \geq 2$ تابع $\frac{1}{x}$ تعریف شده است و در عین حال سری تیلور در $a = 1$ همگرا نیست.

(۴-۱-۳۲) یک تابع چندجمله‌ای در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$

داریم $f^{(n)}(x) = 0$ اگر $k < n$. دیده‌ایم که اگر به جای x جایگزین کیم، نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

پس در واقع سری تیلور f در نقطه a برابر چندجمله‌ای تیلور تابع در نقطه a و برابر خود تابع است.

(۴-۱-۳۳) تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای $x \neq 0$ با استفاده مکرر از قاعده زنجیره‌ای می‌توان ملاحظه کرد که این تابع از هر مرتبه مشتق دارد. در واقع ادعا می‌کیم که به ازای $n = 0$ نیز تابع از هر مرتبه مشتق دارد و $f^{(n)}(0)$ برای هر n . اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که همه ضرایب سری تیلور، $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ در $a = 0$ صفر هستند، پس سری تیلور f در $a = 0$ به صورت:

$$\dots + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 +$$

است، پس سری تیلور به ازای هر x همگراست ولی به جای ایکه به تابع f میل کند، به تابع ثابت صفر میل می‌کند! در واقع تقریب درجه n تابع f در صفر، برای هر n ، تابع ثابت صفر است. برای اثبات

ادعا، به طور استقرایی ثابت می‌کیم که

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c \frac{e^{-\frac{1}{x^p}}}{x^p} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در عبارت بالا، c یک عدد حقیقی و p یک عدد صحیح مثبت است. نخست توجه کنید که حکم برای

$n = 1$ درست است زیرا که برای $x \neq 0$ داریم

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^p}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

و

$$f'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^p}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^p}}{e^{-\frac{1}{x^p}}}$$

اگر $\frac{1}{x}$ را برابر t قرار دهیم حد بالا برابر $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^p}}$ می‌شود که صفر است. حال فرض می‌کیم حکم تا n ثابت شده است و حکم را برای $(n+1)$ ثابت می‌کیم. طبق فرض، مشتق n -ام تابع f در $x \neq 0$ مجموع جملاتی هر یک به شکل $c \frac{e^{-\frac{1}{x^p}}}{x^p} = ce^{-x^{-p}} x^{-p}$ است پس مشتق $(n+1)$ -ام در $x \neq 0$ مجموع جملاتی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (ce^{-x^{-p}} x^{-p}) &= c [2e^{-x^{-p}} x^{-p-3} + e^{-x^{-p}} (-p) x^{-p-1}] \\ &= (2c) \frac{e^{-x^{-p}}}{x^{p+2}} - p \frac{e^{-x^{-p}}}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

پس مشتق $(n+1)$ -ام نیز همچنان مجموع جملاتی به شکل مورد نظر است. حال برای مشتق $(n+1)$ -ام در صفر باید حد زیر را محاسبه کیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x}$$

که در آن $f^{(n)}(x) = ce^{-x^{-p}} x^{-p}$ است. برای هر چین چند جمله‌ای داریم:

$$\frac{ce^{-x^{-p}} x^{-p}}{x} = c \frac{e^{-x^{-p}}}{x^{p+1}} = c \frac{t^{p+1}}{e^{t^p}}$$

که در اینجا t را جایگزین $\frac{1}{x}$ کردہ‌ایم. وقتی $x \rightarrow 0$ داریم، $t \rightarrow \infty$ و حد بالا صفر است. بدین ترتیب ادعا به اثبات می‌رسد.

مثال‌های متعدد بالا نشان داد که اولاً جواب سؤال (الف) ممکن است به‌ازای بعضی x ‌ها ممکن باشد، یعنی سری تیلور تابع f در نقطه a از دامنه f ممکن است به‌ازای بعضی x ‌ها همگرا نباشد، و ثانیاً در جواب (ب)، حتی اگر سری تیلور به‌ازای x همگرا باشد، ممکن است مجموع سری برابر خود تابع نشود. در مقابل دیدیم که در مورد بعضی توابع مأнос و مهم مانند $\sinh x$, $\cos x$, $\sin x$, e^{x^2} , $\cosh x$ ، سری تیلور در $x = a$ به‌ازای هر x به خود تابع میل می‌کند. برای درک بهتر نظام حاکم بر این امر، به یک بحث جامع‌تر می‌پردازیم.

فرض کنید c یک عدد حقیقی یا مختلط باشد و c_0, c_1, c_2, \dots اعداد حقیقی یا مختلط داده شده برای هر z مختلط، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$c_0 + c_1(z - c) + c_2(z - c)^2 + \dots \quad (10)$$

سری (10) را یک سری توانی در c (یا حول c ، یا به مرکز c) می‌نامند. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است، بحث بعدی را در مورد اعداد مختلط انجام خواهیم داد، که در واقع روشن‌کرده‌تر است؛ ولی خواننده می‌تواند c_i ‌ها، c و z را حقیقی فرض کند و هیچ تغییری در بحث حاصل نخواهد شد. اگر سری بالا به‌ازای z هایی همگرا باشد، مجموع سری تابعی به دامنه این z ‌ها تعریف می‌کند. شیوه‌تی (10) را به نمایش اعداد حقیقی در یک مبدأ، مثلاً مبدأی $z = a + bi$ ملاحظه کنید. هر عدد مثبت را می‌توانیم به صورت:

$$a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots \quad (11)$$

بویسیم که در آن a_0 یک عدد صحیح مثبت است و a_1, a_2, \dots ارقامی از میان 0 تا 9 . همان طور که اعداد (مثبت) را به صورت (11) نمایش می‌دهیم، جالب خواهد بود اگر بتوانیم تابع‌ها، یا دست کم دسته بزرگی از تابع‌ها، را به صورت واحد (10) نمایش دهیم. در این صورت چند جمله‌ای‌ها متأثر کسرهای اعشاری مختومه می‌شوند. قضیه ساده زیر کلید بحث‌های بعدی است.

(۳۳-۲) قضیه. اعداد مختلط c_0, c_1, c_2, \dots داده شده‌اند. در این صورت ρ وجود دارد، $0 < \rho \leq \infty$ ، به طوری که:

الف) بهازای هر z که $\rho < |z - c|$, سری توانی (۱۰) همگرای مطلق است.

ب) بهازای هر z که $\rho > |z - c|$, سری توانی (۱۰) واگراست.

قبل از ارائه اثبات ۲-۳۳، نتایج حکم آن را مختصرآ تشریح می‌کیم. نخست توجه کنید که بهازای $c = z$ تمام جملات سری (۱۰) از اندیس ۱ به بعد صفر می‌شوند و سری به ∞ همگرایست. اگر $\rho = 0$, (الف) مصدقی ندارد و هر $c \neq z$ در $|z - c| > 0$ صدق می‌کند، پس سری (۱۰) بهازای $z \neq c$ واگراست. بالعکس اگر $\rho = +\infty$, حکم (ب) مصدقی ندارد و بهازای هر z , سری (۱۰) همگرای مطلق است. در حالت $\infty < \rho < 0$, اگر دایره به شعاع ρ و مرکز c را در نظر بگیریم، طبق حکم قضیه، سری (۱۰) بهازای هر z در درون دایره همگرای مطلق و بهازای هر z در بیرون این دایره واگراست. قضیه حکمی در مورد نقاط روی دایره ارائه نمی‌کند و در واقع بررسی این نقاط را باید جداگانه در هر مورد خاص انجام داد. بدین ترتیب نظام مشخصی بر مجموعه نقاط همگرایی و واگرایی یک سری مانند (۱۰) حکمفرماس است. در حالتی که همه داده‌ها، یعنی $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ حقیقی باشد و نظر خود را فقط به z ‌های حقیقی محدود کیم، $x = z$, قضیه ۲-۳۳ نتیجه می‌دهد که بازه‌ای به شعاع ρ حول c وجود دارد به طوری که برای هر x در $[c - \rho, c + \rho]$, سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - c)^n$ همگرای مطلق است و بهازای هر x که $|x - c| > \rho$ ، قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع می‌باشد. در مورد دو نقطه انتهایی بازه، یعنی $x = c - \rho$ و $x = c + \rho$, قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع بستگی به مورد خاص دارد. توجه کنید که سری تیلور یکتابع f در نقطه a , یک سری توانی حول a است. بدین ترتیب دامنه همگرایی سری تیلور نیز از نظام خاص برخوردار است یعنی بازه‌ای متقارن به مرکز a وجود دارد که سری در تمام نقاط داخل این بازه همگرای مطلق و در همه نقاط بیرون بازه واگرای است. مثلاً در مثال ۳-۱-۳، تابع $\frac{1}{x}$ حول $1 = \rho$ و سری تیلور مربوط بیرون [۲, ۰] واگرای است هرچند که $\frac{1}{x}$ برای همه $x \geq 2$ تعریف شده است.

برهان ۲-۳۳. کافی نشان دهیم اگر (۱۰) بهازای $z_1 = z$ همگرا باشد، آنگاه بهازای هر z که $|z_1 - c| < |z - c|$, یعنی بهازای هر z نزدیکتر از z_1 به c , نیز سری همگرا و در واقع همگرای مطلق

است. پس فرض کید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - c)^n$ همگراست. در این صورت کرانی K برای قدر مطلق جملات این سری وجود دارد، یعنی عددی $0 < K$ هست که:

$$|c_n(z_1 - c)^n| \leq K \quad : \quad n \text{ برای هر}$$

حال z را طوری در نظر بگیرید که $|z - c| < |z_1 - c|$ و $\frac{|z - c|}{|z_1 - c|} \leq \sigma < 1$. داریم

$$|c_n(z - c)^n| = |c_n(z_1 - c)^n| \cdot \left| \frac{z - c}{z_1 - c} \right|^n \leq K \cdot \sigma^n$$

مقایسه با سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ همگراست،
□ یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$ همگرا است و حکم به اثبات می‌رسد.

عدد ρ را شعاع همگرایی سری (۱۰) می‌نامد و گوی باز $|z - c| < \rho$ (یا در حالت حقیقی بازهٔ باز $[c - \rho, c + \rho]$) ناحیه همگرایی سری خوانده می‌شود. محاسبهٔ ρ بسیاری اوقات ساده است. در واقع می‌توان بر اساس هر آزمون همگرایی مطلق روشی برای محاسبهٔ ρ ارائه کرد. مثلاً آزمون نسبت را در نظر بگیرید. فرض کید $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \leq L \leq +\infty$. در این صورت ادعا می‌کیم که:

$$\rho = \frac{1}{L} \tag{۱۲}$$

در واقع حد نسبت قدر مطلق دو جملهٔ توانی (۱۰) عبارت است از:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(z - c)^{n+1}|}{|c_n(z - c)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z - c| \right) = L \cdot |z - c|$$

اگر این حد کوچکتر از ۱ باشد، یعنی $|z - c| < \frac{1}{L}$ ، سری همگرای مطلق است، و اگر بزرگتر از ۱ باشد، یعنی $|z - c| > \frac{1}{L}$ ، سری واگراست، پس $\frac{1}{L}$ شعاع همگرایی سری است.

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه، چه مانچه $\sqrt[n]{|c_n|}$ وجود داشته و برابر L باشد، مجدداً $\rho = \frac{1}{L}$ شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$ خواهد بود.

چند مثال (۳-۳۳)

(۱-۳-۳۳) در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ قبلاً دیدیم (مثال ۱-۱-۳۳) به ازای هر z حقیقی این سری به e^x میل می‌کند. حال چون هر z مختلط نزدیکتر از یک x حقیقی به 0 است (مثلاً نزدیکتر از $|z| = 2$)، از قضیه نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ به ازای هر z همگرا (ی مطلق) است. مجموع این سری را به تبعیت از حالت حقیقی $\exp z$ یا e^z می‌نامیم. بدون استفاده از مطالب چندجمله‌ای تیلور و باقیمانده نیز می‌توان شعاع همگرایی این سری را به دست آورد. مثلاً از آزمون نسبت، داریم

$$\rho = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(۲-۳-۳۳) سری‌های توانی طرف راست (۶)، (۷)، (۸) و (۹) را با جایگزینی z مختلط به جای x در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از این سری‌ها به ازای هر x حقیقی همگراست، از قضیه نتیجه می‌شود که این سری‌ها به ازای هر z مختلط نیز همگرا می‌شوند. در واقع $\sinh z, \cos z, \sin z$ و $\cosh z$ را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (13)$$

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (14)$$

سایر توابع مثلثاتی و هذلولوی برای مقادیر مختلط نیز بر حسب $\cosh z, \sinh z, \cos z, \sin z$ تعریف می‌شوند. مجدداً می‌توان مستقیماً نشان داد شعاع همگرایی هر یک از سری‌های توانی بالا $+\infty$ است.

مثلاً برای $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ داریم $a_n = c_n = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. برای $n = 2k$ فرد $c_n = 0$. برای $n = 2k+1$ فرد باشد و $c_n = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. نشان می‌دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. چون $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{(2k+1)!}}$ و برای n زوج، $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{(2k)!}}$.

برای هر عدد صحیح مثبت m ، $\sqrt[m]{m} \geq 1$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt[2k+1]{(2k)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}} \quad \frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

و حد جمله طرف راست صفر است وقتی $k \rightarrow +\infty$.

(۳-۳-۳۳) برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$ از آنجا که $\frac{(n+1)!}{n!} \rightarrow +\infty$ وقتی $n \rightarrow +\infty$ داریم

$$\cdot\rho = \circ$$

(۴-۳-۳۳) برای عدد حقیقی و نامنفی داده شده p ، سری توانی p را به صورت زیر در نظر

می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$$

از آنجا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p = 1$ است، داریم $1 < |z| < 1$ هر چه باشد. بدین ترتیب برای هر z با $|z| < 1$ این سری همگرا و بهازای هر z با $1 < |z|$ این سری واگراست. برای مقادیر مختلف p ، رفتار این سری روی دایره $|z| = 1$ متفاوت است. برای $1 < p$ ، چون $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ بهازای هر z با $1 < |z|$ همگراست. برای $1 < p = 1$ ، سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ که بهازای $z = 1$ به دست می‌آید واگراست و لیکن سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ سری همگراست. برای $p = 0$ ، سری همدسی $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ بهازای هر z با $|z| = 1$ واگراست.

سری تیلور و سری توانی (۲)

در جلسه قبل نخست سری تیلور و سپس به طور کلی سری توانی را در نظر گرفتیم. هر سری تیلور یک سری توانی است. یکی از دستاوردهای بحث این جلسه این خواهد بود که هر سری توانی با شاعع همگرایی مثبت، خود سری تیلور تابعی است که در ناحیه همگرایی سری به آن میل می‌کند. در این جلسه بحث را به سری‌های توانی حقیقی محدود خواهیم کرد هر چند که همین ملاحظات در حالت مختلط نیز معتبر است. دلیل محدود کردن بحث این است که مفاهیم مشتق و انتگرال را که در اینجا به کار گرفته خواهد شد در حال حاضر فقط برای تابع‌های حقیقی در اختیار داریم. در یکی دو جا اشاراتی به حالت مختلط نیز خواهد شد. بدین ترتیب سری توانی

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a, a_0, a_1, a_2, \dots اعداد حقیقی داده شده‌اند و x متغیر حقیقی است. طبق قضیهٔ جلسهٔ قبل، ρ وجود دارد، $0 < \rho \leq +\infty$ که سری فوق برای هر x با $|x - a| < \rho$ همگرای مطلق است و برای هر x با $|x - a| > \rho$ واگرا. ρ را شاعع همگرایی سری توانی خواندیم. قضیهٔ اساسی زیر که در اینجا ثابت نخواهیم کرد جمع‌بندی خواص مهم (۱) است:

فرض کیم $0 < \rho$ ، پس $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ برای x به عددی میل می‌کند که آن

را $f(x)$ می‌نامیم. بدین ترتیب تابعی $f : [a - \rho, a + \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. داریم:

(۱-۳۴) قضیه. الف) f در $[a - \rho, a + \rho]$ مشتق‌پذیر است و به ازای هر x در این بازه داریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1} \quad (2)$$

ب) بهازای هر x در بازه $[a - \rho, a + \rho]$ انتگرال $\int_a^x f$ وجود دارد و:

$$\int_a^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad (3)$$

تذکر چند نکته در اینجا ضروری است:

(۲-۳۴) یادداشت

(۱-۲-۳۴) توجه کنید که (۲) و (۳) بیانگر این مطلب هستند که برای مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از f می‌توانیم از تک تک جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ مشتق و انتگرال گرفته و سپس مجموع سری مشتق‌ها یا انتگرال‌ها را در نظر بگیریم. این مطلب ممکن است واضح به نظر برسد؛ و در واقع برای مجموع‌های متناهی درست است، ولی برای مجموع یک سری (که در واقع یک حد است) به طور کلی درست نیست. به زودی در بررسی سری فوریه خواهیم دید که مجموع یک سری تابع‌های مشتق‌پذیر ممکن است اصلًا پیوسته نباشد. بدین ترتیب قضیه ۳-۱ تعمیم قضیه مجموع مشتق = مشتق مجموع، و مجموع انتگرال = انتگرال مجموع، به جملات تشکیل‌دهنده یک سری توانی است.

(۲-۲-۳۴) حکم (الف) نشان می‌دهد که شاعع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} na_n (x-a)^{n-1}$ دست کم ρ است زیرا که برای x در $[a-\rho, a+\rho]$ سری بالا به عدد $f'(x)$ میل می‌کند. در واقع شاعع همگرایی سری مشتق‌ها دقیقاً برابر ρ است زیرا که طبق (ب) شاعع همگرایی سری تابع‌های اولیه نیز دست کم ρ است. بدین ترتیب شاعع‌های همگرایی سری‌های توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ هر سه برابرند. رفتار این سری‌ها در نقاط انتهایی a ممکن است متفاوت باشد همچنان که مثال‌های آیده نشان خواهد داد.

(۳-۳۴) چند مثال

(۱-۳-۳۴) در مثال ۱-۳-۱ دیدیم که سری توانی (هندسی) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ در

با مشتق‌گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \frac{1}{x} \quad (4)$$

با مشتق‌گیری طبق قسمت (الف) قضیه ۳۴-۱ حاصل می‌شود:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(x-1)^{n-1} = \frac{-1}{x^2} \quad (5)$$

با مشتق‌گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)(x-1)^{n-2} = \frac{2}{x^3} \quad (6)$$

و به این ترتیب می‌توان با مشتق‌گیری مکرر یک نمایش سری توانی برای تابع $\frac{1}{x^k}$ در $0 < x < 2$ به دست آورد.

(۲-۲-۳۴) اگر قسمت (ب) قضیه ۳۴-۱ را در مورد (۴) به کار گیریم حاصل می‌شود:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

یا

$$0 < x < 2, \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + = \ln x \quad (7)$$

مقایسه (۴) و (۷) در نقاط انتهایی بازه همگرایی قابل توجه است. سری توانی (۴) که یک سری هندسی است در هیچ‌یک از دو نقطه انتهایی $x=0$ و $x=2$ همگرا نیست. سری توانی سمت چپ (۷) در $x=0$ برابر مفهی سری هارمونیک است و همگرا نمی‌باشد ولی به ازای $x=2$ سری متداوب زیر به دست می‌آید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -$$

که همگرایست. سوالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا مجموع این سری را می‌توان با جایگزینی $x=2$ در سمت راست (۷) به دست آورد، یعنی آیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ قضیه زیر از آبل (که در اینجا ثابت نخواهد شد) گویای این مطلب در حالت کلی است:

(۴-۳۴) قضیه. فرض کید سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی ρ است، $+\infty < \rho < \infty$ و در به تابع f میل می‌کند. اگر به‌ازای نقطهٔ انتها $x = a + p$ (به ترتیب نقطهٔ انتها $x - a$) $|x - a| < \rho$

(سری $x = a - p$ همگرا باشد، آنگاه داریم

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n \right) \text{ به ترتیب } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \rightarrow (a-\rho)^+} f(x) \quad (8)$$

در مورد مثال بالا، از آنجا که $x = \ln 2$ پیوسته است، حد آن همان مقدار $\ln 2$ می‌باشد و

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad (9)$$

اکنون به بهره‌برداری از قضیه ۳-۱ ادامه می‌دهیم. همان طور که در یادداشت ۲-۳۴ در مثال ۳-۱ دیدیم، سری مشتق یک سری توانی، یعنی (۲)، خود در $\rho < |x - a|$ همگراست (به تابع f' ، پس با استفاده مکرر از قضیه، می‌توان نتیجه گرفت که تابع $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ دارای مشتق از هر مرتبه در بازه $[a - \rho, a + \rho]$ است و

$$a - \rho < x < a + \rho, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k} \quad (10)$$

در نقطهٔ $x = a$ نتیجه می‌شود که:

$$f^{(k)}(a) = (k!)a_k \quad (11)$$

زیرا که به‌ازای $k > n$ جملات $(x - a)^{n-k}$ صفر می‌شوند. این نتیجه رابطهٔ تگاتگ سری توانی (۱) و تابعی را که توسط آن تعریف می‌شود نشان می‌دهد. در واقع می‌توان نوشت:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

یعنی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ در واقع سری تیلور تابع f در نقطهٔ a است! بدین ترتیب نه تنها هر سری تیلور یک سری توانی است، بلکه هر سری توانی، سری تیلور تابعی است که آن سری توانی در $\rho < |x - a|$ تعریف می‌کند. قضیه زیر آخرین قضیه از دنباله قضایایی است که بدون اثبات به ذکر صورت آن خواهیم پرداخت. ساده‌ترین و طبیعی‌ترین روش اثبات قضایایی که در این جلسه بدون

اثبات ذکر شدند گذر به صفحهٔ مختلط و استفاده از مشتق و انتگرال تابعی مختلط است که این کار زمینه‌سازی قابل توجهی نیاز دارد. می‌توان این قضایا را در محدودهٔ اعداد حقیقی ثابت کرد ولی اثبات‌ها به نسبت دشوارند.

فرض کید تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. f را در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی می‌نامیم در صورتی که f دارای مشتق از هر مرتبه در a باشد و عددی σ وجود داشته باشد که بازه $[a - \sigma, a + \sigma]$ در S بوده و سری تیلور f در a به ازای هر x در $[a - \sigma, a + \sigma]$ به $f(x)$ میل کند.

به عوایان مثل، در جلسه قبل دیدیم که توابع $\cosh x, \sinh x, \cos x, \sin x, e^x$ در \mathbb{C} تحلیلی هستند (و در واقع $\sigma = +\infty$ ، تابع $\frac{1}{x}$ در $a = 1$ تحلیلی است با $\sigma = 1$) و تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-1}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در \mathbb{C} تحلیلی نیست. حال داریم:

(۵-۳۴) قضیه. فرض کید $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی است و سری تیلور آن در نقطهٔ a ، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ در $|x-a| < \sigma$ به $f(x)$ میل می‌کند. در این صورت برای هر b در $[a - \sigma, a + \sigma]$ تابع f در b نیز تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور f به تابع f در b دست‌کم به اندازهٔ حداقل فاصلهٔ b از دو انتهای $[a - \sigma, a + \sigma]$ است. \square

(۶-۳۴) چند مثال

(۱-۶-۳۴) در مورد پنج تابع e^x و $\sin x$ و $\cos x$ و $\sinh x$ و $\cosh x$ می‌بینیم که تابع‌ها در \mathbb{C} تحلیلی هستند و $\sigma = +\infty$. پس به ازای هر b حقیقی، تابع‌ها در b تحلیلی هستند و سری تیلور در b به ازای همهٔ مقادیر x به تابع میل می‌کند. در مورد این پنج تابع، به سبب سادگی ضرایب، می‌توان موضوع را مستقیماً بدون استفاده از قضیه بالا تحقیق کرد و این کار را به خواننده واگذار می‌کیم. در اینجا سری تیلور e^x و $\sin x$ را در نقاطی غیر از $a = 0$ می‌نویسیم. برای e^x ، نقطهٔ دلخواه a را در نظر

بگیرید. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x)|_{x=a} = e^a$$

پس سری تیلور e^x در نقطه a به شکل زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \quad (12)$$

البته این فرمول، با فاکتورگیری از e^a ، چیزی جز $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$ نیست.

سری تیلور $\sin x$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ (-1)^k & \text{زوج } n \end{cases}$$

با این

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \quad (13)$$

می‌توان (12) را از بسط $(x - \frac{\pi}{2})$ و سری تیلور $\cos x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ نیز نتیجه گرفت.

(۳۴-۶-۲) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر نقطه $x \neq a$ تحلیلی است و سری تیلور آن در شعاع $|x - a| < |a|$ به خود تابع میل می‌کند. در حالت $a = 1$ ، این همان مثال ۱-۳۳-۱-۳ جلسه قبل است. داریم:

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$$

برای $|x - a| < |a|$ ، کسر $\frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$ برابر مجموع سری هندسی است

پس:

$$|x - a| < |a| \quad , \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n \quad (14)$$

با مشتق‌گیری متوالی از این عبارت می‌توان سری تیلور $\frac{1}{x^k}$ برای عدد صحیح مثبت k را در $x \neq 0$ نوشت. توجه کنید که نمی‌توان انتظار داشت شعاع همگرایی سری از $|a|$ تجاوز کند زیرا نقطه O که در آن f تعریف نشده است در فاصله $|a|$ از 0 قرار دارد.

۳-۶-۳۴) به روال مثال قبل، با استفاده از سری هندسی، سری تیلور $\frac{1}{1+x}$ را در $|x| < 1$ داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \quad (15)$$

در اینجا نیز چونتابع سمت چپ در $x = 1$ تعریف نشده است. شعاع همگرایی سری توانی سمت راست نمی‌تواند از ۱ تجاوز کد. ولی برای $|x| < 1$ ، داریم $1 < |x|^2$ ، پس با جایگزینی:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + -$$

نکتهٔ جالب توجه در مورد این سری اینکه طرف راست، که یک سری هندسی است، فقط در $|x| < a$ همگرایست، ولی طرف چپ بهازای هر x تعریف شده است و در واقع می‌توان نشان داد در هر نقطه a تحلیلی است. در اینجا شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+x^2}$ در $x = 0$ برابر ۱ است در حالی کهتابع در سراسر \mathbb{R} تعریف شده است. در پس این مطلب اعداد مختلف نهفته‌اند. توجه کنید که $\frac{1}{1+z^2}$ بهازای $z = i\rho$ تعریف شده نیست، با این شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+z^2}$ حول $z = 0$ نمی‌تواند از ۱ تجاوز کد!

۳-۶-۴) فرض کنید $0 < a$. با انتگرال‌گیری از (۱۴)، سری تیلور $\ln x$ را در a بهدست می‌آوریم:

$$|x - a| < a \quad , \quad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x - a)^{n+1} \quad (16)$$

این سری را قبلاً بهازای $t = x - a$ دیده‌ایم. با قراردادن $t = 1 - a$ و $x = t + a$ ، شکل معمول‌تری از (۱۶) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} |t| < 1 \quad , \quad \ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n \\ &= 1 - \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} - + \end{aligned} \quad (17)$$

۳-۶-۵) انتگرال‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$|x| < 1 \quad , \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \quad (18)$$

در دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی، یعنی $x = 1$ و $x = 0$ سری‌های مذکوب همگرا حاصل می‌شوند و طبق قضیهٔ آبل داریم:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (19)$$

سری تیلور و سری توانی (۳)

یکی از پر استفاده‌ترین نمایش‌های تابعی به صورت سری تیلور، نمایش تابع $f(x) = (1+x)^n$ ، عدد حقیقی دلخواه، است. این نمایش را نیوتن در آغاز تحقیقات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف کرد و تعمیمی از اتحاد $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ است.

(۱-۳۵) سری دوجمله‌ای فرض کید یک عدد حقیقی داده شده است. تابع:

$$f(x) = (1+x)^n = \exp(-\ln(1+x))$$

برای $x > -1$ تعریف شده است و ترکیب بالا نشان می‌دهد که در این دامنه دارای مشتق از هر مرتبه است. نخست سری تیلور f را در $a = 0$ می‌نویسیم و سپس نشان می‌دهیم این سری در $|x| < 1$ به خود تابع همگراست. مشتقات f به سادگی محاسبه می‌شوند:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \dots, f^{(k)}(x) = (-1)^k (-k+1)(1+x)^{-k} \quad (1)$$

با براین سری تیلور f در $a = 0$ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-n+1)x^n = 1 + x + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (2)$$

ضریب $\frac{(-1)^n}{n!} (-n+1)$ را گاهی به n نمایش می‌دهد زیرا که در واقع برای عدد صحیح $n < 0$ داریم $\frac{(-1)^n}{n!} (-n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)}$. شاعع همگرایی سری توانی (۲) را محاسبه می‌کیم. از آزمون

نسبت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-n+1)|}{|\binom{n+1}{n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|-n|}{n+1} = 1$$

پس شعاع همگرایی برابر ۱ است. مجموع سری فوق را در $1 < |x|$ به $g(x)$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کیم $f(x) = g(x)$. برای این کار از روشی غیر مستقیم استفاده می‌کیم که در موارد مشابه دیگر نیز گاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق قضیه (۳۴)، قسمت (الف)، می‌توان از w در $[1, -1]$ جمله به جمله مشتق گرفت و داریم:

$$g'(x) = + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \\ xg'(x) = x + (-1)x^2 + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^3 +$$

پس با جمع جملات هم مرتبه داریم:

$$(1+x)g'(x) = + ((-1)+1)x + (\frac{(-1)(-2)}{2!} + (-1))x^2 + \\ = [1 + x + \frac{(-1)}{2!}x^2 +] \\ = g(x)$$

بدین ترتیب تابع g در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$|x| < 1 , (1+x)g'(x) = g(x) \quad (3)$$

اگر بویسیم $y = g(x)$ ، با توجه به ایکه در $|x| < 1$ ، می‌توان نوشت:

$$|x| < 1 , \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x} \quad (4)$$

طبق قضیه اساسی وجود و یگانگی جواب معادله دیفرانسیل عادی، این دستگاه به ازای شرط آغازی $(1, y=0)$ جواب یگانه دارد. از طرفی دیگر تابع $f(x) = (1+x)$ واجد این شرط آغازی است و با مشتق‌گیری ملاحظه می‌شود که در (۴) صدق می‌کند، پس در واقع ثابت کردہ‌ایم که:

$$|x| < 1 , g(x) = (1+x)$$

بعی سری تیلور تابع $f(x) = (1+x)$ در $|x| < 1$ به خود تابع میل می‌کند.

۲-۳۵) چند مثال

اگر $p = 1-2-35$ یک عدد صحیح مثبت باشد، برای $f(x) = (1+x)^p$ مشتقات از مرتبه بزرگتر از p صفر می‌شوند و در واقع بسط دوجمله‌ای مانوس

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k$$

به دست می‌آید. این نمایش در واقع برای هر x حقیقی برقرار است.

۲-۳۵) برای $n = -p$ عدد صحیح مثبت، داریم

$$\begin{aligned} |x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{(1+x)^p} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p+1)}{n!} \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} x^n \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $\binom{n+p-1}{n} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!n!}$ سری (5) در محاسبه تقریبی عبارتی به صورت $\frac{1}{(a+h)^p}$ که در آن

نسبت به $|a|$ کوچک است مؤثر واقع می‌شود. برای $|h| < |a|$ داریم $1 < |\frac{h}{a}|$ ، پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+h)^p} &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^p} \\ &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} \left(\frac{h}{a}\right)^n \end{aligned}$$

یا:

$$|h| < |a| \quad , \quad \frac{1}{(a+h)^p} = \frac{1}{a^p} - \frac{ph}{a^{p+1}} + \frac{p(p+1)h^2}{2a^{p+2}} - + \quad (6)$$

برای $|h|$ بسیار کوچک، حتی تقریب خطی

$$\frac{1}{(a+h)^p} - \frac{1}{a^p} \simeq \frac{ph}{a^{p+1}} \quad (7)$$

برای بسیاری مقاصد بسده می‌کند.

لازم به ذکر است که این مثال خاص، یعنی $p = -1$ را می‌توانستیم از مشتق‌گیری مکرر سری هدسى مربوط به تابع $\frac{1}{1+x}$ نیز به دست آوریم.

را در نظر می‌گیریم: $(3-2-35)$ حالت $\frac{1}{2}$

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 +$$

با جایگزینی x به جای x داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + (\frac{1}{2})x + \frac{(1-3)}{(2-4)}x^2 + \frac{(1-3-5)}{(2-4-6)}x^3 +$$

و اگر x را جایگزین x کیم

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + (\frac{1}{2})x^2 + \frac{(1-3)}{(2-4)}x^4 + \frac{(1-3-5)}{(2-4-6)}x^6 + \quad (8)$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جمله به جمله، قضیه $34-1$ ، ب، داریم:

$$|x| < 1 \quad , \quad \sin^{-1} x = x + (\frac{1}{2})\frac{x^3}{3} + (\frac{1-3}{2-4})\frac{x^5}{5} + \quad (9)$$

که سری تیلور x در 0 است.

در اینجا لازم است به عملیات جبری بین سری‌های توانی اشاره‌ای داشته باشیم. فرض کیم دو

سری توانی حول a : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی

ρ_1 داده شده باشد. فرض کیم سری اول در $|x-a| < \rho_1$ به $f(x)$ و سری دوم در $|x-a| < \rho_2$ به

$g(x)$ میل می‌کند. برای $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ ، هر دو سری همگرا هستند، پس با توجه به

اینکه سری مجموع جملات متأثر دو سری همگرا، به مجموع حد دو سری میل می‌کند؛ داریم:

$$|x-a| < \rho \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n = f(x) + g(x) \quad (10)$$

برای به دست آوردن یک سری توانی که به $f(x)g(x)$ میل کند به طریق زیر عمل می‌کیم. توجه کیم

که برای اینکه حاصل ضرب دو جمله سری‌های توانی داده شده از درجه n باشد لازم و کافی است که

مجموع اندیس‌های ضرایب برابر n شود. تعریف می‌کیم:

$$c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0. \quad (11)$$

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ را حاصل ضرب کوشی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ می‌نامد.

(۳-۳۵) گزاره. برای $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ ، که $|x-a| < \rho$ ، حاصل ضرب کوشی به همگراست.

برهان. داریم $|c_n| \leq |a_0||b_n| + \dots + |a_n||b_n|$ پس:

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \dots + |c_n||x-a|^n \leq (|a_0| + \dots + |a_n||x-a|^n)(|b_0| + \dots + |b_n||x-a|^n)$$

از طرفی دیگر سری‌های $|x-a| < \rho$ به ازای $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ همگراست. نتیجه ای که مجموع‌های جزیی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ نیز به طور مطلق همگرا هستند. با براین می‌توان مجموع جملات $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را جابجا کرد بدون ای که در مجموع تغییری حاصل شود. \square

می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_1$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_2$ به ازای هر x در $\rho_1 < |x-a| < \rho_2$ وجود دارد که $h(x) = g(x)h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho$ تحلیلی است. در این صورت با نوشتن $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ و با استفاده از حاصل ضرب کوشی، می‌توان با مقایسه ضرایب دو طرف $f(x) = g(x)h(x)$ ضرایب c_n را محاسبه کرد. این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کیم می‌دانیم $\tan x$ در $a = 0$ تحلیلی است، چند ضریب اول سری تیلور آن را در $a = 0$ محاسبه کیم. محاسبه مستقیم از طریق مشتق‌گیری و محاسبه ضرایب $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به سرعت افزایش n پیچیده می‌شود. به جای آن می‌نویسیم

$$\sin x = (\cos x)(\tan x)$$

پس اگر بسط تیلور $\tan x$ در $a = 0$ باشد داریم:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots)$$

با محاسبه حاصل ضرب کوشی طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب آن با ضرایب مذکور طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= t_0 \\ 1 &= t_1 \\ \circ &= t_2 - \frac{1}{1!}t_0 \\ -\frac{1}{2!} &= t_3 - \frac{1}{2!}t_1 \\ \circ &= t_4 - \frac{1}{3!}t_2 + \frac{1}{3!}t_0 \\ \frac{1}{12!} &= t_5 - \frac{1}{4!}t_3 + \frac{1}{4!}t_1 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

می‌توان این دستگاه را از بالا به پایین حل کرد و متولیاً ضرایب t_n را به دست آورد:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{3}, \quad t_4 = 0, \quad t_5 = \frac{2}{15}, \quad \dots$$

توجه کنید که چون $\tan x$ یک تابع فرد است، مشتقات آن از مرتبه زوج همه فرد هستند و در $a = 0$ برابر صفر می‌شوند، با این در سری تیلور $\tan x$ در $a = 0$ فقط جملات درجه فرد ظاهر می‌شوند. در بالا ضرایب را تا درجه ۵ محاسبه کردیم:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (12)$$

(۴-۳۵) محاسبه حد به کمک سری تیلور

بسیاری از محاسبات حدی که در مباحث مقدماتی از طریق استفاده مکرر از روش‌هایی مانند قاعده هوپیتال حل می‌شوند می‌توان به سادگی با توجه به سری تیلور انجام داد. به مثال زیر توجه کنید

مثال. می خواهیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 \cos x - x^5 \sin x}{x^8}$ را محاسبه کیم. محاسبه این حد از طریق قاعده هوپیتال هشت بار مشتق‌گیری می‌طلبد ولی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} x^7 \cos x - x^5 \sin x &= x^7(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) - x^5(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4})x^4 + \text{(جملات توان ۱۰ در } x \text{ به بالا)} \end{aligned}$$

باید برای $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{x^7 \cos x - x^5 \sin x}{x^8} = (-\frac{1}{2}) + \text{(جملات توان ۲ در } x \text{ به بالا)}$$

باید حد عبارت بالا وقتی x به 0° میل کد برابر $-\frac{1}{2}$ است.

سری فوریه

تا این مرحله با چندجمله‌ای‌های تیلور به عواین حریه تقریب توابع و سری تیلور به عواین روش نمایشی برای خانواده بزرگی از توابع آشایی پیدا کرده‌ایم. هر یک از این دو، از مجموع عماصر ساختی $(x - a)^n$ با ضرایب ماسب تشکیل شده‌اند. یک خصوصیت مهم تقریب به وسیله چندجمله‌ای تیلور "موقعی" بودن آن است بدین معنی که هرچه x به a نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر است و با دور شدن x از a باید معمولاً تعداد جملات را به شدت افزایش داد تا تقریب معقولی حاصل شود. روش‌های تقریب و روش‌های نمایش دیگری نیز برای توابع موجود است که در اینجا به مهمترین آنها موسوم به چندجمله‌ای فوریه و سری فوریه می‌پردازیم. دو ویژگی متمایز که این روش در مقابل روش چندجمله‌ای و سری تیلور به این شرح‌اند:

یکی ایکه تقریب به وسیله چندجمله‌ای‌های فوریه به نوعی سرتاسری است یعنی معمولاً هیچ نقطه خاصی از دامنه، "مرکز تقریب" نیست، بلکه فاصله عمومی بین نمودار تابع و نمودار تقریب به مفهومی که ذکر خواهد شد کوچک می‌شود، و نکته دوم ایکه این روش حریه مهمی برای بررسی پدیده‌های تابعی و تقریباً تابعی مانند پدیده‌های موجی است.

فرض کیم $T > 0$ داده شده است، قرار می‌دهیم $\frac{2\pi}{T} = \omega$. تابع‌های $\cos m\omega x$ و $\sin m\omega x$ عدد صحیح، همه دوره تابع T دارند. اگر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع با دوره تابع T باشد، هدف ما نمایش f به صورت یک سری با عماصر ساختی $\cos n\omega x$ و $\sin n\omega x$ مقصود از یک سری مثلثاتی با دوره تابع T عبارتی به شکل زیر است:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (1)$$

جمله ثابت را به جای a به $\frac{a_0}{\pi}$ نمایش داده ایم که بعداً هماهنگی کاملی در فرمول محاسبه a_m ها ایجاد شود. فرض کید بتوان مقدار تابع f را به صورت مجموع بالا نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \quad (2)$$

سعی می کیم با یک "بحث اکتشافی" رابطه a_m ها و b_m ها را با f مشخص کیم. از فرمول های انتگرالی زیر که به سادگی از فرمول های مثلثاتی حاصل ضرب سیوس با سیوس، سیوس با کسیوس و کسیوس با کسیوس نتیجه می شوند استفاده خواهیم کرد:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\cos m\omega x)(\sin n\omega x) dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{\pi} & m = n \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{\pi} & m = n \end{cases} \quad (5)$$

توجه کید که اگر به جای بازه انتگرال گیری $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$ از هر بازه دیگر به طول دوره تابع، مثلاً $[0, T]$ نیز استفاده کیم همان نتایج (3)، (4) و (5) به دست می آید. استفاده از بازه متقاضی $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$ این حسن را دارد که در موارد خاص که بعداً به تابع های فرد یا زوج برمی خوریم بعضی انتگرال گیری ساده تر می شود. همچین توجه کید که داریم:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \cos m\omega x dx = 0 \quad , \quad \int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \sin m\omega x dx = 0 \quad (6)$$

محاسبه a_m ها و b_m ها را اکنون بدین طریق پیش می بریم. نخست از دو طرف (2) روی بازه $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$ انتگرال می گیریم:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} f(x) dx = \frac{a_0}{\pi} T + \int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \right) dx$$

در طرف راست بالا انتگرال مجموع یک سری مطرح است. همان طور که قبلاً در بحث سری‌های تیلور بحث شد، به طور کلی نمی‌توان نوشت $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ ولی در اینجا چون فقط یک بحث اکشافی را دنبال می‌کیم، این جابجایی انتگرال و مجموع نامتناهی را انجام می‌دهیم. نهایتاً قضیه‌ای ذکر خواهیم کرد که نتیجه به دست آمده را توجیه می‌کند. با براین نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} f(x) dx = \frac{a_0}{\gamma} T + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} \cos n\omega x + b_n \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} \sin n\omega x) dx)$$

طبق (۶) مقدار هر یک از انتگرال‌های سمت راست صفر است، پس:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} f(x) dx \quad (7)$$

چون طول بازه $[-\frac{T}{\gamma}, \frac{T}{\gamma}]$ برابر T است، اگر این محاسبه توجیه‌پذیر باشد، نتیجه گرفته‌ایم که جمله ثابت یعنی $\frac{a_0}{\gamma}$ ، برابر میانگین تابع f در یک دوره تماوب است. این نتیجه را با مقدار جمله ثابت سری تیلور مقایسه می‌کیم. در مورد سری تیلور $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ ، جمله ثابت، یعنی a_0 برابر است. تمايز بین سری تیلور و سری فوريه در همین گام آشکار می‌شود. در مورد سری تیلور، a_0 به عوان تقریب درجه ۰ تابع، فقط به مقدار تابع در نقطه a توجه دارد؛ در حالی که در مورد سری فوريه، جمله ثابت میانگین همه مقادیر تابع در یک بازه به طول T (دوره تماوب f) می‌باشد.

با همین روش به مقادیری آزمایشی برای سایر ضرایب دست می‌باشیم. اگر برای $n > 0$ ثابت، دو طرف (۲) را در $\cos n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{\gamma}, \frac{T}{\gamma}]$ از دو طرف انتگرال بگیریم، مجدداً با جابجایی انتگرال و $\sum_{m=1}^{\infty}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} f(x) \cos n\omega x dx &= \frac{a_0}{\gamma} \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} \cos n\omega x dx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (b_m \int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx) \end{aligned}$$

با توجه به فرمول‌های (۳)، (۴) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} f(x) \cos n\omega x dx = a_n \frac{T}{\gamma}$$

یا معادلاً

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx \quad (8)$$

توجه کنید که (7) حالت خاص (8) به ازای $n = 0$ است. به این دلیل بود که جمله ثابت را به $\frac{a_0}{2}$ نمایش دادیم. همین طور اگر دو طرف (2) را در $\sin n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ انتگرال گیری کنیم، با جابجایی مشابه و با استفاده از فرمول‌های (3)، (5) و (6)، نتیجه می‌گیریم که

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx \quad (9)$$

قضیه‌ای در زیر خواهیم آورد، که اثبات آن از بحث ما خارج است، ولی تحت شرایط ممکن صحت فرمول‌های (8) و (9) را توجیه می‌کند.تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قطعه قطعه C^1 می‌نامیم در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: افزایی $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ وجود دارد که تحدید f به هر $[a_{i-1}, a_i]$ مشتق پذیر با مشتق پیوسته است و به علاوه در هر a_i ، تابع f و مشتق آن، تابع f' ، دارای حد چپ و راست هستند (در نقطه $a = a_0$ فقط حد راست، و در نقطه $b = a_k$ فقط حد چپ مطرح است).

(۱-۳۶) قضیه. فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با دوره تناوب T و در بازه تناوب خود قطعه قطعه

C^1 است و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ در این صورت سری:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

که در آن a_n و b_n طبق فرمول‌های (8) و (9) تعریف شده‌اند دارای ویژگی زیر است.

الف) در هر نقطه x که تابع f پیوسته باشد، مجموع سری بالا برابر $f(x)$ است.

ب) در هر نقطه ناپیوستگی x برای تابع f ، مجموع سری بالا برابر میانگین حد چپ و راست تابع f است. \square

سری بالا را سری فوريه تابع f می‌نامند. مجموع متماھی

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (10)$$

تقریب فوريه مرتبه N تابع f خوانده می‌شود.

چند مثال (۲-۳۶)

(۱-۲-۳۶) تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & (2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در هر $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ، مقدار $f(x)$ را برابر مقدار ثابت دلخواهی c قرار می‌دهیم. این مقدار اثری بر بحث نخواهد داشت. این تابع تاویسی با دوره 2π است و در شکل ۱ نمایش داده شده است:

?

در این مثال داریم $T = 2\pi$ و $\omega = 1$. نقاط ناپیوستگی f و f' مضارب π هستند (f' در این نقاط تعریف نشده است). ضرایب a_n و b_n را از (۸) و (۹) محاسبه می‌کیم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases} \\ b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

با این سری فوریه تابع f بدین صورت است:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

توجه کنید که هر یک از تابع‌های تشکیل‌دهنده سری بالا پیوسته (در واقع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است ولی مجموع سری در بعضی نقاط پیوسته نیست! طبق قضیه در هر نقطه $x \neq n\pi$ ، مجموع سری بالا برابر ۱ یا ۰ است (بسته به این که انتهای چپ بازه مضرب زوج یا فرد π باشد) و در $x = n\pi$ میانگین حد راست و چپ، یعنی $\frac{1}{2}$ می‌باشد. مطلب اخیر را می‌توان با توجه به اینکه $\sin n\pi = 0$ مستقیماً مشاهده کرد. اینکه چگونه مجموع بالا به یک تابع ناپیوسته پله‌ای میل می‌کند می‌توان با رسم

تقریب‌های فوریهٔ متوالی f مشاهده کرد (شکل ۲).

?

۳۶-۲-۲) تابع $\phi(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و آن را به طور تاوی با دورهٔ تاوی ۲ به تابع f ادامه می‌دهیم (شکل ۳).

?

درایم $T = \pi$ و $f(x) \sin n\pi x$ فرد است و انتگرال آن روی بازهٔ $[-1, 1]$ برابر صفر می‌شود، پس $a_n = b_n = 0$ برای هر n . برای محاسبهٔ a_n داریم:

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx$$

برای $n = 0$ داریم $a_0 = \int_0^1 x \cos 0 dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos n\pi x dx &= \left[\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \\ &= \left. \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{زوج } n > 0 \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases} \end{aligned}$$

با برای سری فوریه به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$$

چون این تابع پیوسته است، مجموع سری بالا همهٔ جا برابر $f(x)$ است. بالاخص در $x = 0$ داریم:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right)$$

یا

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (11)$$

۷

تمرین. از (۱۱) نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ همان طور که در مثال بالا مشاهده کردیم اگر تابع f زوج باشد همه ضرایب b_n صفر هستند. به همین ترتیب برای تابع فرد، همه ضرایب a_n صفر می‌شوند. مقصود از یک سری فوریه کسی وسی سری فوریه‌ای است که همه b_n ‌های آن صفر باشد؛ و یک سری فوریه سی‌وسی، سری فوریه‌ای است که در آن $a_n = 0$ برای هر n .

بحث ما تا این لحظه ممکن است این تصور را القاء کرده باشد که کاربرد سری فوریه فقط در مورد تابع‌های تماوی است. در واقع اگر $\mathbb{R} \rightarrow [a, b]$: ϕ تابعی قطعه قطعه^۱ باشد، می‌توان سری فوریه را در مورد آن به کار برد. شیوه عمل این است که ϕ را بیرون $[a, b]$ به طور تماوی ادامه می‌دهیم تا تابعی تماوی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f به دست آید و f را به صورت مجموع یک سری فوریه می‌نویسیم. اگر دامنه این سری به $[a, b]$ محدود شود مجموع آن به صورت حکم قضیه (۳۶-۳۷) نمایش ϕ است. در واقع ϕ را می‌توان به شیوه‌های گوناگون به طور تماوی ادامه داد. به عوان مثال:

(۳-۳۶) سری‌های فوریه سی‌وسی و کسی‌وسی
فرض کید ϕ روی $[-A, A]$ قطعه قطعه^۱ باشد. اگر برای $x \in [-A, 0]$ تعریف کیم

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad (12)$$

تابعی زوج روی $[-A, A]$ به دست می‌آید. این تابع را با دوره تماوب $T = 2A$ روی \mathbb{R} ادامه می‌دهیم و تابع حاصل را f می‌نامیم. f تابعی زوج است و دارای ضرایب فوریه زیر می‌باشد:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{A} \int_0^A \phi(x) \cos \frac{\pi}{A} nx dx \quad (13)$$

سری فوریه حاصل شده در $[A, 0]$ نمایش ϕ است (با مظور کردن میانگین حد های راست و چپ در نقاط ناپوستگی).

به همین ترتیب، اگر به جای (۱۲)، تداوم ϕ به $[-A, 0]$ را به صورت زیر تعریف کیم:

$$\phi(x) = -\phi(-x) \quad (14)$$

و مقدار ϕ را در \circ نادیده بگیریم (که به هر حال اثری بر مقادیر انتگرال ندارد) ما ادامه ϕ با دوره تماوب $T = 2A$ به سرتاسر \mathbb{R} یکتابع فرد به دست می‌آید. برای ضرایب فوریه داریم:

$$a_n = \circ, \quad b_n = \frac{2}{A} \int_0^A \phi(x) \sin \frac{\pi}{A} nx dx \quad (15)$$

سری فوریه با این ضرایب در $[A, 0]$ نمایش ϕ است (البته در مضارب A ، مجموع سری فوریه برابر صفر می‌شود. چرا؟). تمرین. برای $\sin x$ یک سری فوریه کسی وسی روی $[\pi, 0]$ بویسید و برای

$\cos x$ ، یک سری فوریه سی وسی روی $[\pi, 0]$.

در آغاز اشاره کردیم به این که چندجمله‌ای‌های فوریه نوعی تقریب سرتاسری برای تابع ارائه می‌کند. در این زمینه قضایای متعددی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آنها را ذکرمی‌کیم. مجموع مთاهی (۱۰) را به N نمایش دهید. تحت شرایط قابل شده در قضیه (۱-۳۶) برای تابع f ، می‌توان ثابت کرد که:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{T}{\gamma}}^{\frac{T}{\gamma}} |f(x) - \phi_N(x)|^\gamma dx \right) = \circ \quad (16)$$

این مطلب گویای این واقعیت است که در یک دوره تماوب، مساحت بین نمودار f و نمودار تقریب‌های فوریه آن به تدریج کوچکتر شده و به صفر میل می‌کند.