



ریاضیات



سال اول دبیرستان



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب: ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان - ۲۱۱/۱

اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی به ترتیب حروف الفباء: بهمن اصلاح بذری، علی ابرانمش، ناصر بروجردیان، شهرناز بخشعلیزاده، محسن جمالی، زین العابدین دهقانی ایانه، اسدالله رضوی، حمیدرضا ربیعی، مینو رحیمی، حسین روتسی،

محمدهاشم رستمی، ابراهیم رسحانی، وحید سیاری، احمد شاهورانی، وحید عالمیان، مازیار عطاری، سعید قریشی، حمید مسگرانی و سید محمد کاظم نائینی

مؤلفان به ترتیب حروف الفباء: شهرناز بخشعلیزاده، ناصر بروجردیان، زین العابدین دهقانی ایانه، فرزاد دیده‌ور، محمد تقی طاهری‌تجانی، وحید عالمیان و حمید مسگرانی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر شر و توزیع مواد آموزشی

تهران: خیابان ابرانشهر شمالی- ساختمان شماره ۴ آموزش و پژوهش (شهید موسوی)

تلفن: ۰۹۱۶۱۳۳۸۸۸ - دورنگار: ۰۹۶۶۸۸۳ - کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت: www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ: سید احمد حسینی

مدیر هنری: فریبرز سیامک تزاد

رسام: محمد امین شهدی، امیرحسین سیامک تزاد، یمان حبیب پور و هدیه بندر

طراح جلد: طاهره حسن زاده

صفحه آرا: مریم نصرتی

حروفچین: کیری اجابتی

مصحح: رعانا فرج زاده درویش، سیف‌الله بیک محمد دلیوند

امور آماده‌سازی خبر: زینت بهشتی شیرازی

امور فنی رایانه‌ای: حمید ثابت کلاچاهی، یمان حبیب پور

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارویخت)

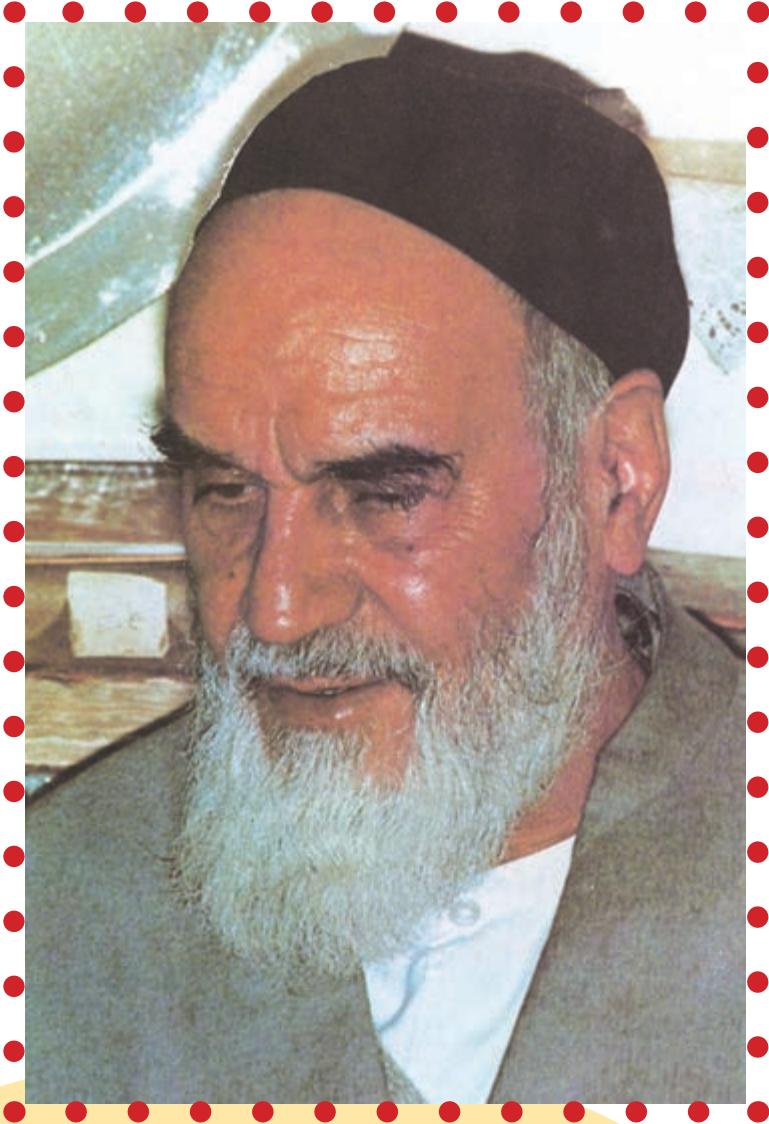
تلفن: ۰۹۱۶۱۸۵۴۹ - ۰۹۱۶۰۵۸۴۹، دورنگار: ۰۹۱۶۰۵۸۴۹، صندوق پستی: ۱۳۹-۱۳۹۵۱۵-۳۷۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهماخی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هفتم - ۱۳۹۳

حق چاپ محفوظ است.

ISBN 964-05-1582-5 ۹۶۴-۰۵-۱۵۸۲-۵ شابک



اول باید اخلاصستان را قوی بکنید، ایمانتان را قوی بکنید، ... و این
اخلاص و ایمان، شما را تقویت می کند و روحیه شما را بالا می برد و نیروی
شما جوری می شود که هیچ قدرتی نمی تواند (با شما) مقابله کند.

امام خمینی (ره)

فهرست مندرجات

اعداد و نمادها



- | | |
|----|------------------------------|
| ۲ | اعداد طبیعی |
| ۵ | اندازه‌گیری با اعداد طبیعی |
| ۶ | اعداد صحیح |
| ۸ | اعداد کوچک |
| ۱۱ | نمایش اعشاری و اعداد اعشاری |
| ۱۵ | اعداد حقیقی |
| ۱۸ | تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی |
| ۲۱ | نمادها و زبان ریاضی |

مجموعه‌ها



- | | |
|----|------------------------------|
| ۳۰ | مسئله‌گروه‌های دانش‌آموزی |
| ۳۲ | مجموعه‌ها |
| ۳۳ | تساوی مجموعه‌ها |
| ۳۵ | زیرمجموعه |
| ۳۸ | اجتماع مجموعه‌ها |
| ۳۹ | اشتراک مجموعه‌ها |
| ۴۱ | تفاضل مجموعه‌ها |
| ۴۵ | مجموعه‌های متناهی و نامتناهی |
| ۴۶ | مشخص کردن مجموعه‌ها |

توان‌رسانی و ریشه‌گیری



- | | |
|----|-----------------------|
| ۵۰ | توان‌رسانی و قواعد آن |
| ۵۶ | توان صفر و توان منفی |
| ۶۰ | نماد علمی |
| ۶۳ | ریشه‌گیری |

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

جمع و تفریق رادیکال‌ها

۶۵

۶۸

۷۲

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

۷۴

تفریق و قرینه اعداد

۷۶

تقسیم و معکوس اعداد

۷۸

عبارت‌های جبری

۷۹

یک جمله‌ای‌ها

۸۰

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

۸۲

ضرب یک جمله‌ای‌ها

۸۴

چندجمله‌ای‌ها

۸۵

جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها

۸۷

اتحادها و تجزیه

معادلات درجه اول و معادله خط

۹۷

۹۸

معادله

۱۰۴

دستگاه مختصات

۱۰۹

رابطه خطی

۱۱۴

حل یک مسئله

۱۱۷

نسب

۱۲۰

نسب خط

۱۲۶

معادله خط

۱۲۰

خط‌های عمود برهم

۱۳۲

دستگاه معادلات خطی دو مجهولی

نسبت‌های مثلثاتی

۱۳۹

طرح یک مسئله

۱۴۰

تائزانت زاویه

۱۴۱

سینوس زاویه

۱۴۵

کسینوس زاویه

۱۴۸

شیب خط و تانژانت

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱۵۱

۱۵۲

عبارت‌های گویا

۱۵۷

حل یک مسئله

عبارت‌های گویا

اعمال جبری روی عبارت‌های گویا

ساده کردن عبارت‌های گویا

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

قاعده تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم

عبارت‌های رادیکالی

۱۵۸

۱۶۱

۱۶۳

۱۶۵

۱۶۷

۱۶۷

۱۷۲

معادلات درجه دوم و حل آن‌ها

۱۷۵

معادلات درجه دوم

روش‌های حل معادلات درجه دوم

روش آزمون و خطأ

روش هندسی

روش تجزیه

روش خوارزمی

روش مریع کامل

فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم

۱۷۶

۱۷۸

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۲

۱۸۳

۱۸۴

۱۸۵

نامعادلات درجه اول

۱۸۹

نامساوی

نامساوی کوچکتر یا مساوی

نامعادلات

روش‌های حل نامعادلات

حل یک مسئله

۱۹۰

۱۹۱

۱۹۲

۱۹۴

۱۹۷

۲۰۸

مراجع

سخنی با دانشآموزان

به اعتقاد ریاضی دانان، ریاضی علمی شیرین است. امیدواریم کتاب حاضر بتواند شیرینی ریاضی را برای شما به وجود آورد. یکی از اهداف این کتاب آن است که شما بتوانید ریاضی را به شکلی معنادار درک نماید و توانایی به کارگیری آن را در حل مسائل روزمره پیدا کنید. برای استفاده بهتر از این کتاب خوب است که به نکات زیر توجه کنید :

۱- شما با دیدن شناگران، نمی توانید شنا باد بگیرید. برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید. برای بادگیری ریاضی نیز صرف‌خواندن و شنیدن مطالب ریاضی کافی نیست. شما باید با مفاهیم ریاضی کار عملی و ذهنی انجام دهید.

کتاب حاضر به گونه‌ای طراحی شده است که شما را درگیر انجام تمریناتی در کلاس می‌کند. سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی باد بگیرید و نهایتاً مسائل بیانی هر بخش را حل کنید.

۲- هر کسی می‌تواند ریاضی را بدان فارسی بیان کنید یا دلیل درستی اعمال ریاضی خودتان را توضیح دهد.

سخن گفتن در مورد مطالب ریاضی و بحث روی مفاهیم و راه حل‌ها یکی از روش‌های خوب برای بادگیری ریاضی است. بسیار مناسب است که در مورد افکار خود درباره ریاضی و کارهایی که به نظرتان می‌رسد با دیگران و معلم خود مباحثه کنید. با این عمل درک عمیق‌تری نسبت به مفاهیم ریاضی پیدا خواهید کرد. در این کتاب قسمت‌هایی تحت عنوان «بیندیشیم» وجود دارد که می‌توانند موضوعات مناسبی برای بحث باشند.

۳- ریاضی صرفاً علمی برای محاسبات روی اعداد نیست. ریاضی زبان علم است و کار اصلی آن بیان پدیده‌های واقعی محیط اطراف خود ما است. شما باید بتوانید مفاهیم ریاضی را در محیط اطراف خود بینند و پدیده‌های ساده را به زبان ریاضی بیان کنید. این عمل مسائل مطرح شده در محیط واقعی را به مسئله‌ای ریاضی تبدیل می‌کند. پس از حل مسئله در ریاضی باید به محیط واقعی برگردید و جواب‌های به دست آمده را به درستی تفسیر کنید. در هر جای کتاب که امکان پذیر بوده است، چنین روندی از حل بک مسئله واقعی انجام شده است و شما با حل این مسائل خواهید دید که چگونه می‌توانند آموخته‌های ریاضی خود را به کار ببرید و مسائل مهمی را حل کنید.

در خانمه لازم است از همه کسانی که در تألیف این کتاب همکاری کرده‌اند، تشکر نماییم. به ویژه از دبیران مجروب منتخب مناطق شهر تهران و نمایندگان گروه‌های آموزشی ریاضی استان‌ها که در اصلاح کتاب کمک‌های شایان توجهی نموده‌اند.

سخنی با دبیران محترم

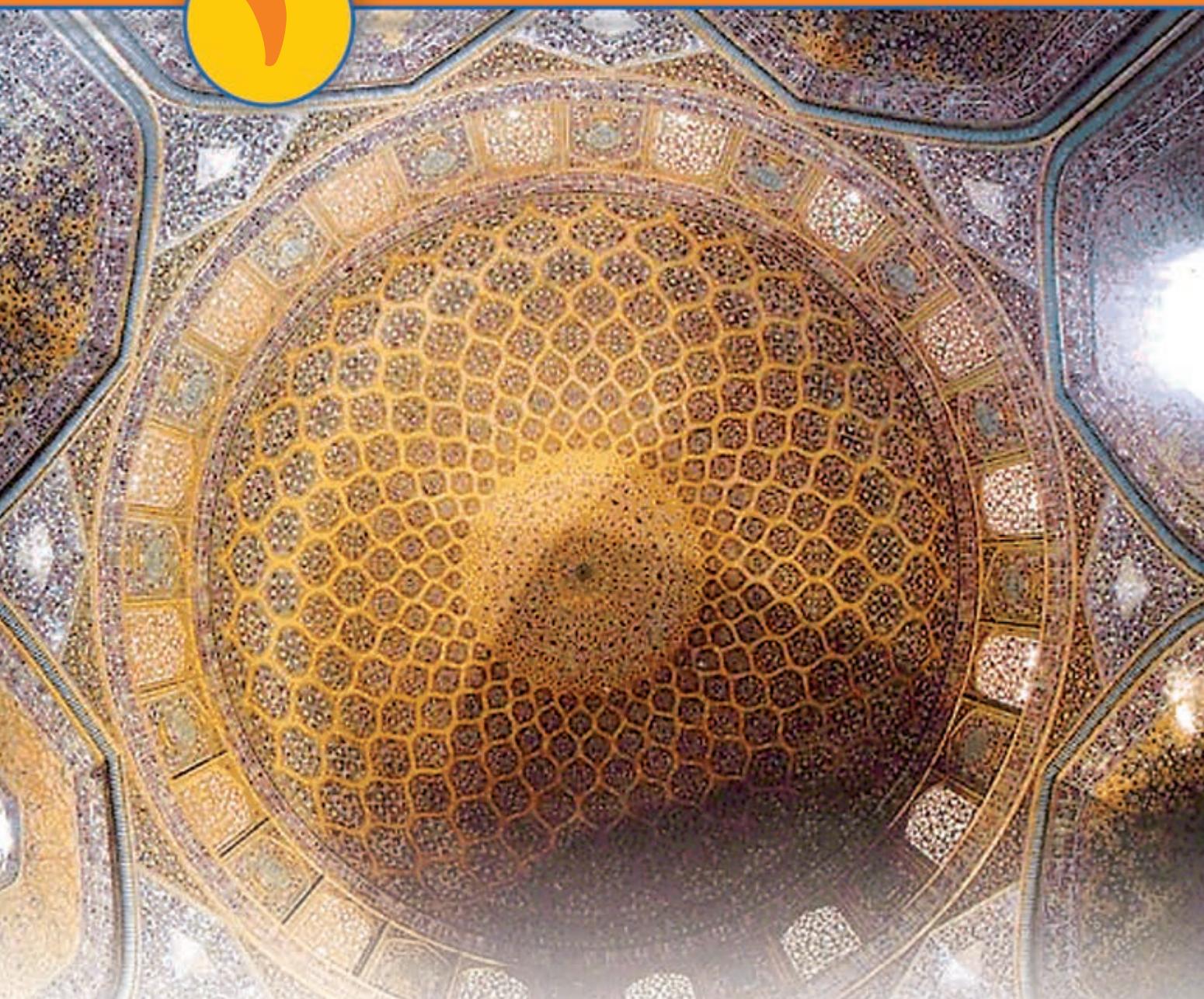
در نظام آموزشی فعلی، سال اول دبیرستان طیف وسیعی از دانشآموزان را در بر می‌گیرد. این دانشآموزان در سال‌های بعد با توجه به توانایی و علاقه خود انتخاب رشته می‌کنند و ادامه تحصیل خواهند داد؛ بنابراین، این پایه به نوعی عمومی محسوب می‌شود و برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های این دوره نیز مناسب با مخاطبان آن می‌باشد.

کتاب ریاضیات ۱ با توجه به مشکلات آموزشی دانشآموزان این پایه و با توجه به نظرهای رسیده از دبیران محترم و استانداردهای آموزشی (فرایندی و موضوعی) تأثیر شده است. موضوعات و مطالب درسی، ضمن توجه به رشد شناختی دانشآموزان براساس محتواهای برنامه درسی و ریاضیات مورد نیاز برای دروس دیگر در باههای بالاتر تعیین می‌شوند. سازماندهی محتوای این کتاب به گونه‌ای است که دانشآموزان با انجام فعالیت‌ها در ساخت مفهوم در ذهن خود نقش فعالی خواهند داشت و با انجام تمرین در کلاس‌ها مفاهیم تثبیت، تعمیق و توسعه خواهند یافت.

راهنمای معلم کتاب ریاضیات ۱ با درنظر گرفتن مخاطبان، اهداف آموزشی، نحوه ارزشیابی و... و با توجه به طیف مخاطبان، سوالات مناسب را برای استفاده دبیران ارائه نموده است، لذا توصیه می‌شود در طراحی سوالات امتحان، سطح دشواری سوالات با توجه به کتاب راهنمای معلم تعیین گردد و از طراحی سوالات خارج از اهداف و سطوح مطرح شده در کتاب راهنمای معلم اکیداً خودداری شود. تحمیل هر نوع جزوی کمکی به دانشآموزان (در قالب تست، مسائل اضافه، توضیحات بیشتر...) خارج از موارد عنوان شده در کتاب راهنمای معلم موجب انحراف از مسیر آموزشی کتاب و ایجاد فاصله از اهداف آن خواهد شد.

در سال تحصیلی ۹۰-۹۱ نقطه نظرات معلمان راجع به کتاب ریاضی ۱ از طرف گروه‌های آموزشی استان‌ها و دبیرخانه راهبری کشوری ریاضی به دفتر تأثیف کتاب‌های درسی ارسال شده است. ضمن تشکر از همه این عزیزان، شورای برنامه‌ریزی ریاضی و مؤلفان کتاب درسی ریاضی ۱ کرده‌اند؛ به گونه‌ای که ساختار افقی و عمودی برنامه درسی ریاضی آسیب نبیند، لذا قسمت‌هایی که با تراجم آبی مشخص شده است، جزء برنامه اجرایی نمی‌باشد اما بدلیل ویژگی‌های خاص این قسمت‌ها (تفویت مهارت محاسبه، معنی بخشی به نمادها و...) و جایگاه آن‌ها در ساختار مفهومی کتاب مطالعه آن توسط دانشآموزان توصیه می‌شود. به علاوه در صورت داشتن وقت کافی، تدریس آن توسط معلیمین نیز توصیه می‌شود. برخی از تمرین‌ها و مسائل به انتهای کتاب منتقل شده‌اند. با توجه به اینکه مشابه این تمرین‌ها در هر قسمت داخل کتاب عنوان شده است، درصورتی که زمان کافی در اختیار نیست، می‌توان از طرح آنها در کلاس صرف نظر کرد اما دانشآموزان جهت ایجاد مهارت کافی سعی در حل آن داشته باشند.

اعداد و نمادها



عدد، هندسه، تقارن و تعالی

ریاضیات و کاربردهای آن بر دو پایه اساسی اعداد و هندسه و ارتباط بین این دو استوار است. علاوه بر استفاده‌های بی‌شمار اعداد و هندسه در علوم تجربی و علوم نظری، این مفاهیم در معماری و هنر نیز به کار می‌آیند. جایی که عظمت و ظرافت در هم می‌آمیزند و ما را به تعالی می‌رسانند.

اعداد طبیعی

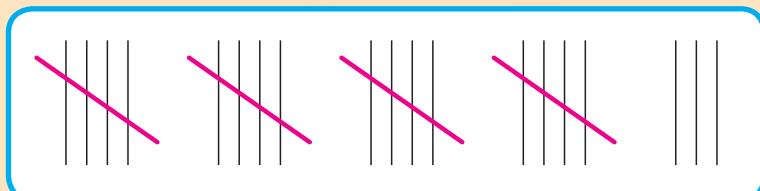
عدد یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است. تعداد افراد، میزان سود و زیان، حجم اشیاء، وزن اجسام، مساحت زمین، طول قد، درجه حرارت و بسیاری چیزهای دیگر همگی با اعداد نشان داده می‌شوند. شناخت بشر از اعداد و نمایش آن‌ها، از ابتدا به گونه‌ای که امروز می‌بینیم نبوده است.

خواندنی‌ها

شمارش یکی از اولین نیازهای بشر بوده است. برخی از انسان‌های قبایل بدوي فقط اعداد ۱ و ۲ و ۳ را می‌شناختند و اعداد بزرگ‌تر از ۳ را «خیلی» می‌گفتند.

با گذشت زمان، شناخت بشر از اعداد بیشتر شد و او راه‌هایی برای نمایش اعداد بزرگ‌تر کشف کرد. به نظر شما، اگر فردی تعداد زیادی گوسفند می‌داشت، چگونه می‌توانست تعداد آن‌ها را به دست آورد و آن را در جایی ثبت کند؟ یک فرد چگونه می‌توانست تعداد روزهایی که در محلی حضور داشته است را ثبت کند؟

می‌توان گفت، احتمالاً او تعداد گوسفندان خود را با تعداد سنگ‌ریزه‌هایی که در تناظر با گوسفندان بودند نگهداری می‌کرد، به این شکل که با هر بار ورود یک گوسفند به آغل یا خروج یک گوسفند از آغل، یک سنگ‌ریزه را از یک کيسه به کيسه دیگر وارد می‌کرد. در مورد تعداد روزها هم از روش شیارکشیدن روی یک سنگ یا چوب استفاده می‌کرد. این روش امروزه نیز برای نمایش تعداد اشیاء به کار می‌رود.



شیارهای بالا عدد ۲۳ را نشان می‌دهند.

در حساب کردن، مسئله فقط ثبت و نمایش اعداد نبود، بلکه مسائل پیچیده‌تری مانند جمع و ضرب اعداد، در محاسبه محیط و مساحت زمین‌ها مطرح شد. جدول صفحه بعد نمونه‌هایی از شیوه‌های نمایش اعداد، توسط اقوام و تمدن‌های مختلف را نشان می‌دهد.

عدد	بابلی	مصری	میخی	رومی	مايا
۲۱	●●●	□□□	◀◀۲	XXI	• •
۸	■■■		▼▼▼▼	VIII	...
۳۶	●●■■	□□□	◀◀◀▼▼▼	XXXVI	▪▪ ▪▪▪
۹۷	▷●●■■■	□□□□□	▼◀◀◀▼▼▼	XCVII
۱۷۴	▷▷●●■■	○□□□□	۲۲◀◀◀۲۲	CLXXIV▪

آیا می‌توانید قواعدی که برای نمایش اعداد طبیعی با این روش‌ها به کار رفته است را کشف کنید؟ اگر قواعد عددنويسي رومي را کشف کردید، از یک تا پیست را با اين روش بنويسید.

باید دانست که در تمام شیوه‌های عددنويسي اولیه، اعداد ۵ و ۱۰ و ۲۰ نقش اساسی داشتند. این سه عدد، به ترتیب تعداد انجستان یک دست، دو دست و دو پا هستند.

همان‌گونه که در جدول بالا می‌بینید تعدادی از این شیوه‌های نمایش اعداد، شبیه شیوه نمایش دهدھی مرسوم خودمان است، با این تفاوت که در این شیوه‌ها، نمایشی برای صفر وجود ندارد. همین موضوع باعث شده است که برای نمایش اعداد تعداد زیادی نماد وارد شود و کار در این شیوه‌ها را مشکل سازد. وارد شدن صفر در اعداد یک انقلاب بود که ریاضیات را وارد مرحله جدیدی کرد. اولین بار هندیان بودند که صفر و نمایشی برای صفر را وارد نظام اعداد کردند و پس از آن مسلمانان آن را به جهانیان معرفی کردند. پیشگام این کار ریاضیدان بزرگ ایرانی محمدبن موسی خوارزمی بود.

با ورود صفر به نظام اعداد و قبول آن به عنوان یک عدد، نمایش دهدھی اعداد امکان پذیر شد. نمایش دهدھی اعداد، انجام چهار عمل اصلی را به شکل بسیار ساده‌ای درآورد. شما این اعمال را در دبستان فرا گرفته‌اید و خوب است توجه داشته باشید که صدها سال طول کشید تا نمایش اعداد و انجام چهار عمل اصلی روی آن‌ها به صورت کنونی آن درآید.

شیوه‌ای که امروزه برای نمایش اعداد به کار می‌رود، نمایش دهدۀ اعداد نام دارد. در این شیوه نمایش، برای اعداد از صفر تا ∞ ، نمادهایی به عنوان نشانه این اعداد انتخاب می‌شود. در زبان فارسی این نمادها عبارت‌اند از:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

در زبان‌های دیگر نمادهای دیگری انتخاب شده است. به کمک این نمادها، با استفاده از قاعده دسته‌بندی‌های ده‌تایی، بقیه اعداد نیز نمایش داده می‌شوند. مثلاً، «۱۳۵» نشان‌دهنده تعداد یک دسته صد تایی و سه دسته ده‌تایی و پنج یکی است.

خوب است بدانید که بسیار طول کشید تا صفر کشف و به عنوان عدد شناخته شود، به همین خاطر، صفر را جزء اعداد طبیعی به حساب نمی‌آورند، اگرچه در نمایش دهدۀ اعداد طبیعی، صفر نقش مهمی دارد.

ملامحمد باقر یزدی

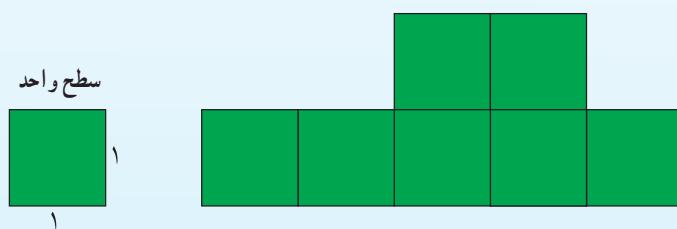
دانشمند، ریاضی‌دان، منجم و عالم دینی دوره صفویه بوده است. او در علوم متداول روزگار خود از جمله جبر، هندسه و نجوم مهارت داشت به خصوص در علم ریاضی قواعد جدیدی ابداع کرد. از جمله آثار او می‌توان به کتاب عيون الحساب اشاره نمود که در فصلی از این کتاب به محاسبه اعداد متحابه پرداخت (دو عدد را متحابه هم گویند هرگاه مجموع مقسوم‌علیه‌های هریک با دیگری برابر باشد. برای مثال $22 \times 284 = 284 \times 22$ دو عدد متحابه‌اند). یزدی قبل از دکارت به این نتیجه رسید که دو عدد 9363584 و 9437056 متحابه‌اند. از آثار دیگر او می‌توان به حاشیه بر تحریر مخروطات آپولونیوس و شرح کتاب الاشکال الکنزیه و شرح المقالة العاشر من (تحریر) اصول اقليدس اشاره نمود. او در سال ۱۰۵۶ق در اصفهان درگذشت.

اندازه‌گیری با اعداد طبیعی

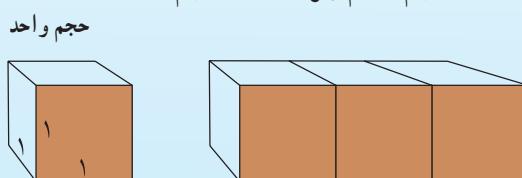
شمارش، یک نوع اندازه‌گیری است که تعداد اشیاء یا چیزها را معلوم می‌کند. هر نوع شمارشی با داشتن یک واحد آغاز می‌شود. به عنوان مثال، با انتخاب یک پاره خط به عنوان پاره خط واحد، طول آن را طول واحد در نظر می‌گیریم. با به دنبال هم قرار دادن چند پاره خط واحد، پاره خطی ساخته می‌شود، که اندازه آن با یک عدد طبیعی بیان می‌شود. مثلاً، اندازه پاره خط زیر، با توجه به پاره خط واحد انتخاب شده، ۵ واحد طول می‌باشد.



با انتخاب یک طول واحد، مساحت مربعی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، سطح واحد در نظر گرفته می‌شود و آن را مربع واحد می‌نامند. شکل‌هایی که با کنار هم گذاردن مربع واحد ساخته می‌شوند، دارای مساحتی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، مساحت شکل زیر ۷ واحد سطح است.



با انتخاب طول واحد، حجم مکعبی که طول هر ضلع آن برابر طول واحد است، حجم واحد در نظر گرفته می‌شود. اجسامی که با کنار هم گذاردن مکعب واحد ساخته می‌شوند دارای حجمی هستند که با اعداد طبیعی قابل اندازه‌گیری هستند. مثلاً، حجم جسم زیر ۳ واحد حجم است.



تمرین در کلاس

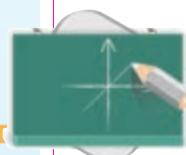
- ۱- کلیه مستطیل‌هایی که اندازه محیط آن‌ها 20 سانتی‌متر است و طول و عرض آن‌ها بر حسب سانتی‌متر، اعداد طبیعی هستند را رسم کنید.
- ۲- چند مستطیل رسم کردید؟ مساحت هر کدام چقدر است؟
- ۳- کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

اعداد صحیح

یک خط افقی به شکل زیر رسم و نقطه‌ای به عنوان مبدأ روی آن انتخاب می‌کنیم. یک جهت روی این خط انتخاب می‌کنیم و آن را جهت مثبت^۱ می‌نامیم. روی این خط، نیم خط به ابتدای مبدأ در جهت مثبت را نیم خط مثبت و نیم خط مقابل آن را نیم خط منفی می‌نامیم. یک پاره خط واحد انتخاب می‌کنیم و آن را روی نیم خط مثبت، از مبدأ رسم می‌کنیم. با پشت سر هم قرار دادن پاره خط‌های واحد، نقاطی به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد طبیعی می‌نامند.



خطی که روی آن، یک مبدأ، یک جهت و یک پاره خط واحد انتخاب شده است را یک محور اعداد می‌نامند.



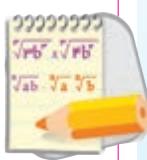
A و B دو نقطه روی نیم خط مثبت هستند. A نظیر عدد ۴ و طول پاره خط AB برابر ۶ است. B نظیر کدام عدد طبیعی است؟

اگر پاره خط واحد را روی نیم خط منفی، از مبدأ رسم کنیم و این رسم را به دنبال هم تکرار کنیم، نقاطی به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظیر اعداد صحیح منفی می‌نامند. پس، به ازای هر عدد طبیعی، یک عدد صحیح منفی نیز وجود دارد که فاصله نقاط نظیر آن‌ها تا مبدأ با هم مساوی است. این اعداد را قرینه هم می‌نامند و قرینه هر عدد طبیعی به صورت همان عدد که علامت منفی «-»، پشت آن قرار گرفته است، نمایش داده می‌شود. مثلاً، قرینه ۲ عدد «-۲» است و نقاط نظیر آن‌ها، تا مبدأ فاصله مساوی دارند.



۱- در خط‌هایی که به صورت افقی رسم می‌شوند معمولاً جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌کنند.

اعداد طبیعی، صفر و قرینه اعداد طبیعی با هم را اعداد صحیح می‌نامند. اعداد صحیح مثبت، همان اعداد طبیعی هستند و اعداد صحیح نامنفی همان اعداد طبیعی به همراه صفر هستند. اعداد صحیح نامنفی را اعداد حسابی نیز می‌نامند.



مساند

۱- عملیات ریاضی زیر را انجام دهید.

$$5 - 6 = \text{(الف)}$$

$$2 \times (-7+5) = \text{(ب)}$$

$$(-3) - 5 = \text{(ج)}$$

$$(-3) \times (-6-3) = \text{(د)}$$

$$(-3 \times 2) \div (4-6) = \text{(ه)}$$

۲- در آمد ماهیانه خانواده‌ای ۳۵۰,۰۰۰ تومان است، اگر مخارج سالانه این خانواده ۴,۰۰۰ تومان باشد، آیا این خانواده می‌تواند پولی را پس انداز کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

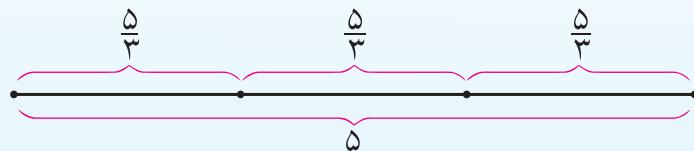
ابوجعفر محمد بن ایوب طبری

ریاضیدان ایرانی (متوفی پس از ۴۸۵ ه.ق) از مردم طبرستان (مازندران کنوی) بود. طبری در علم حساب بهویژه در تألیفات خود معتقد به معرفی جامع نگر فصل‌های گوناگون علم حساب و هندسه بوده است و از این کار هدف تعلیماتی داشته است. از آثار وی می‌توان به شمارنامه و مفتاح المعاملات اشاره کرد. یک نسخه خطی از کتاب مفتاح المعاملات در کتابخانه ایاصوفیای استانبول موجود است.

اعداد گویا

در بسیاری از اندازه‌گیری‌ها، اعداد صحیح کافی نیستند. به عنوان مثال، در اندازه‌گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی‌توان با یک عدد طبیعی نشان داد.

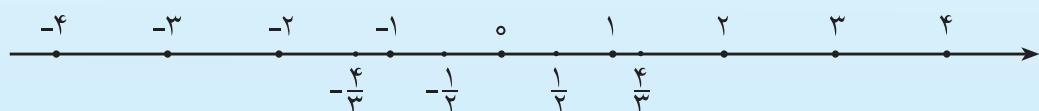
اگر پاره خط واحد را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، طول هر یک از دو پاره خط به دست آمده چقدر است؟ روشی است که طول این پاره خط‌ها برابر یک عدد طبیعی نیست و شما قبلاً آن را با $\frac{1}{2}$ نشان داده‌اید که نشان‌دهنده تقسیم ۱ بر ۲ است. همین‌طور اگر پاره خطی به طول ۵ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، سه پاره خط به دست می‌آید که طول هر یک $\frac{5}{3}$ است.



اگر روی محور اعداد، پاره خط‌هایی به ابتدای مبدأ و انتهای یک عدد صحیح را در نظر بگیریم و آن‌ها را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقاط تازه‌ای به دست می‌آیند که آن‌ها را نقاط نظریِ اعداد گویا می‌نامند.

اعداد گویا را می‌توان به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نمایش داد.

تقسیم دو عدد بر هم را به صورت کسری نشان می‌دهند.



اگر به مکان دو عدد گویا روی محور اعداد توجه کنید، می‌بینید عددی که بزرگ‌تر است، سمت راست عدد کوچک‌تر قرار می‌گیرد. برای آن که تشخیص دهیم، از دو عدد گویایی مثبت، کدام یک بزرگ‌تر است، کافی است آن‌ها را به شکلی بنویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. سپس، صورت هر کدام که بزرگ‌تر بود، آن عدد بزرگ‌تر است.

مثال: از دو عدد $\frac{4}{7}$ و $\frac{3}{5}$ کدام بزرگ‌تر است؟

این اعداد گویا را به شکلی می‌نویسیم که مخرج مساوی داشته باشند. برای انجام این کار، کافی است صورت

و مخرج هر کدام را در مخرج دیگری ضرب کنیم.

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$$

با مقایسه بین صورت کسرها نتیجه می‌شود که $\frac{20}{35} < \frac{21}{35}$ ، پس



تمرین در کلاس

- الف) دو عدد $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{4}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. کدام یک بزرگ‌ترند؟
- ب) این دو عدد را به گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی داشته باشند و سپس تعیین کنید، کدام یک بزرگ‌ترند.
- ج) از طریق نمایش روی محور اعداد و هم مخرج کردن، تعیین کنید که کدام یک از دو عدد $\frac{5}{3}$ و $\frac{7}{5}$ بزرگ‌ترند.

در فعالیت زیر می‌خواهیم نشان دهیم که بین هر دو عدد گویا می‌توان یک عدد گویای دیگر معرفی کرد.



فعالیت

- ۱- یک عدد گویا بین $\frac{2}{7}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید.
 - ۲- آیا می‌توانید یک عدد گویا بین $\frac{4}{7}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید؟ آیا با ضرب صورت و مخرج هر دو کسر در ۲ می‌توان یک عدد گویا بین آن‌ها معرفی کرد؟ بررسی کنید.
 - ۳- یک عدد گویا بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ نام ببرید.
- (راهنمایی: ابتدا این دو عدد را به گونه‌ای بنویسید که مخرج مساوی پیدا کنند.)

از این فعالیت نتیجه می‌شود که :

بین هر دو عدد گویای متمایز حداقل یک عدد گویای دیگر وجود دارد.



بیندیشیم

بین دو عدد گویای
متماز چند عدد گویا
می توان پیدا کرد؟

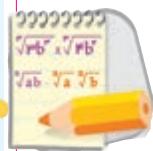
مثال : دو عدد گویا بین عدهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ بیابید.
صورت و مخرج این کسرها را در ۳ ضرب می کنیم. پس، باید بین $\frac{9}{15}$ و $\frac{6}{15}$ دو عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ می باشند.

$$\frac{7}{15}, \frac{8}{15}$$

مثال : سه عدد گویا بین عدهای $\frac{4}{11}$ و $\frac{5}{11}$ بیابید.
صورت و مخرج این کسرها را در ۴ ضرب می کنیم. پس، باید بین $\frac{16}{44}$ و $\frac{20}{44}$ سه عدد گویا بیابیم. اعداد زیر بین $\frac{4}{11}$ و $\frac{5}{11}$ می باشند.

$$\frac{17}{44}, \frac{18}{44}, \frac{19}{44}$$

مسائل



۱- عملیات زیر را انجام دهید.

$$\text{(الف)} \quad \frac{2}{5} - \frac{3}{5} =$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{4}{3} + \frac{2}{5} =$$

$$\text{(ج)} \quad \frac{5}{6} - \frac{5}{4} =$$

$$\text{(د)} \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$$

$$\text{(ه)} \quad \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$\text{(و)} \quad \left(\frac{-7}{4} + \frac{3}{5}\right) \div \frac{2}{37} =$$

۲- $\frac{2}{5}$ از نصف یک میله یک متری چند سانتی متر است؟

۳- حمید دانش آموز منظمی است و برای خود برنامه روزانه دارد. او $\frac{1}{3}$ از شبانه روز را استراحت می کند، ۶ ساعت در مدرسه است، $\frac{1}{4}$ شبانه روز را به مطالعه درس های خود اختصاص می دهد و $\frac{1}{8}$ شبانه روز را به کارهای پیش آمده اختصاص داده است و بقیه زمان را هم به فعالیت های ورزشی می پردازد. حمید در یک شبانه روز چند ساعت فعالیت های ورزشی انجام می دهد؟

۴- بین هر دو عدد از عدهای گویای زیر، چهار عدد گویای دیگر به دست آورید.

$$\text{(ج)} \quad -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

$$\text{(الف)} \quad \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$$

۵- اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{3}{7}$$

نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

با اعداد طبیعی، صحیح و گویا و نمایش آن‌ها روی محور اعداد آشنا شده‌اید.

امروزه برای نوشتن اعداد طبیعی از دستگاه دهدۀ استفاده می‌شود. این شیوه از نمایش اعداد طبیعی را نمایش اعشاری اعداد طبیعی نیز می‌نامند. در این شیوه نمایش، هر رقم دارای ارزش مکانی است. مثلاً در عدد ۲۳۷، رقم ۷ در مرتبه یکان و رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۲ در مرتبه صدگان است. این به معنای آن است که :

$$237 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 1$$

در این شیوه نمایش، همه اعداد طبیعی را می‌توان نمایش داد. برای نوشتن (به نمایش درآوردن) اعداد کمتر از ۱ می‌توانیم ارزش‌های مکانی به اندازه $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ و ... را نیز در نظر بگیریم. برای مشخص کردن

رقم‌هایی که در مرتبه $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ... دارند از علامت ممیز «/» استفاده می‌شود. مثلاً در عدد $\frac{3}{4}$ ، رقم ۳ در

مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{1}{10}$ است، یعنی :

$$\frac{3}{4} = 3 + 4 \times \frac{1}{10}$$

به عنوان مثالی دیگر در عدد $\frac{35}{42}$ ، رقم ۳ در مرتبه دهگان و رقم ۵ در مرتبه یکان و رقم ۴ در مرتبه $\frac{1}{10}$ و

رقم ۲ در مرتبه $\frac{1}{10^2}$ است، یعنی :

$$\frac{35}{42} = 3 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100}$$

اعدادی را که بتوانیم با این شیوه نمایش بنویسیم اعداد اعشاری مثبت می‌نامیم. این اعداد و قرینه آن‌ها را اعداد اعشاری می‌نامند.

اعداد اعشاری بخشی مهم از اعداد گویا هستند. یک عدد اعشاری مثل $\frac{2573}{63}$ را می‌توان به عنوان عدد گویا به صورت زیر نوشت :

$$\frac{2573}{63} = 2573 + 6 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} = \frac{257363}{100}$$

در عدد اعشاری $\frac{2573}{63}$ ، $\frac{2573}{63}$ را قسمت صحیح و $\frac{1}{63}$ را قسمت اعشاری این عدد می‌نامند. به طور کلی، در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را قسمت صحیح آن عدد اعشاری می‌نامند و با قرار دادن صفر به جای قسمت صحیح، عدد اعشاری ساخته شده را قسمت اعشاری آن عدد می‌نامند.

به عنوان مثال، در عدد اعشاری $21/564$ ، قسمت صحیح آن 21 و قسمت اعشاری آن $564/1000$ است. توجه داشته باشید که اعداد طبیعی هم، از یک نظر، عدد اعشاری محسوب می‌شوند. به عنوان مثال، عدد طبیعی $35/100$ را می‌توانید به صورت $35/100$ در نظر بگیرید. قسمت اعشاری اعداد طبیعی صفر است. در تمرین زیر با چند خاصیت مهم اعداد اعشاری آشنا می‌شوید.



۱- قسمت صحیح و قسمت اعشاری اعداد زیر را بیابید و هر کدام را به صورت یک عدد گویا بنویسید.

$$12/1 \quad (d) \quad 86/000 \quad (e) \quad 452/500 \quad (f) \quad 23/000$$

۲- چه ویژگی مشترکی بین مخرج‌های اعداد گویای بدست آمده در بالا که یک عدد اعشاری هستند می‌باشد؟

۳- در زیر جاهای خالی را با یک عمل ضرب یا تقسیم، مانند نمونه، پر کنید.

$$56294 \boxed{1} = 5629 / 4$$

$$0/0327 \boxed{1} = 0/327$$

$$56294 \boxed{ } = 56/294$$

$$0/0327 \boxed{ } = 32/7$$

$$56294 \boxed{ } = 562/94$$

$$0/0327 \boxed{ } = 3/27$$

$$56294 \boxed{ } = 5/6294$$

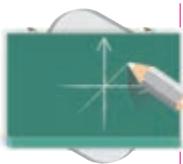
$$0/0327 \boxed{ } = 327$$

۴- اعداد $24/37$ ، $24/370$ ، $24/3700$ و $24/37000$ را با هم مقایسه کنید. آیا تفاوتی با هم دارند؟ به طور کلی در یک عدد اعشاری، در مورد رقم‌های صفر بعد از ممیز که بعد از آن‌ها رقم غیرصفر دیگری قرار ندارد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

می‌دانید که برای جمع دو عدد اعشاری، آن دو عدد را به گونه‌ای زیر هم می‌نویسیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند؛ سپس، طبق قواعد جمع اعداد طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود، عمل جمع را انجام می‌دهیم. مثلاً، برای جمع دو عدد اعشاری $23/672$ و $5/080$ داریم:

$$\begin{array}{r} 23/672 \\ + 5/080 \\ \hline 28/752 \end{array}$$

با نوشتن این دو عدد اعشاری به صورت اعدادی گویا با مخرج‌های مساوی که توانی از 10^0 باشند، درستی روش بالا را می‌توان نشان داد.



می خواهیم حاصل ضرب دو عدد اعشاری $2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{3}$ را به دست آوریم.

۱- دو عدد بالا را به صورت اعداد گویایی که مخرج آنها توانی از 10 است بنویسید و به صورت دو عدد گویا در یکدیگر ضرب کنید.

۲- حاصل ضرب به دست آمده در بالا را به صورت یک عدد اعشاری بنویسید.

۳- یک روش برای ضرب اعداد اعشاری پیشنهاد کنید.

در ضرب دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آنها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس، به اندازه مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آنها، در عدد به دست آمده، رقم‌های سمت راست را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال : حاصل ضرب $14\frac{1}{4} \times 32\frac{1}{5}$ را به دست آورید.

ممیزها را در این اعداد نادیده می‌گیریم و حاصل ضرب زیر را حساب می‌کنیم.

$$32\frac{1}{5} \times 14\frac{1}{4} = 451\frac{5}{5} \times 25$$

با توجه به آن که اولین عدد، سه رقم و دومین عدد، یک رقم اعشار (بعد از ممیز) دارد برای حاصل ضرب به دست آمده چهار رقم اعشار درنظر می‌گیریم. پس،

$$32\frac{1}{5} \times 14\frac{1}{4} = 451\frac{5}{5} \times 25$$

در کتاب مفتاح المعاملات، مراحل ضرب دو عدد مخلوط، $2\frac{1}{4}$ و $3\frac{1}{3}$ به شکل زیر بیان شده است :

$$2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{3}$$

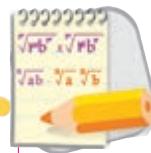
$$2\frac{1}{4} \times 3 = 6\frac{3}{4}$$

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$6\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = 7\frac{1}{2}$$

آیا می‌توانید دلیل درستی این روش را بیان کنید؟



۱- اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$9/89 \times 10^4, \quad 99000, \quad 1 \times 10^5, \quad 98 \times 10^3$$

۲- اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$0/46, \quad -26/50, \quad 0/47, \quad -1/2, \quad 0/488, \quad 50/1000$$

۳- محاسبات زیر را بدون استفاده از ماشین حساب انجام دهید. درستی محاسبات خود را با ماشین حساب کنترل کنید. (در صورت داشتن ماشین حساب)

$$1) 0/55 - 0/19 =$$

$$2) 0/84 - 0/003 =$$

$$3) -2 + 0/4 =$$

$$4) 0/04 \times 12 =$$

$$5) 2/55 \times 1/2 =$$

$$6) 220 \div 0/05 =$$

$$7) 3/6 \times 10^3 - 2/5 \times 10^3 =$$

$$8) 8/65 \times 10^3 + 2/92 \times 10^3 =$$

اعداد حقیقی

تاریخی به ۲۵۰۰ سال پیش، فیثاغورس، دانشمند یونانی، مکتبی را بنیان نهاد که برای اعداد صحیح اهمیت بسیاری قائل می‌شد. بنا به اعتقاد فیثاغورسیان طول هر پاره خطی باید یک عدد گویا باشد. روزی یکی از آن‌ها متوجه شد که طول وتر مثلث قائم الزاویه‌ای که طول دو ضلع دیگر آن ۱ است، طبق قضیه فیثاغورس $\sqrt{2}$ است که عددی گویا نیست. این برای فیثاغورسیان ابدًا خوشایند نبود، با این حال $\sqrt{2}$ طول یک پاره خط بود.

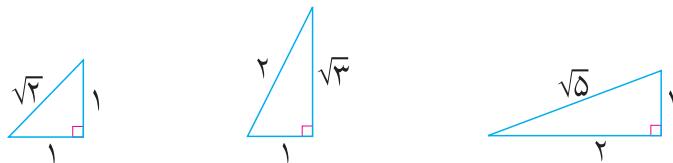
نظیر هر عدد گویا نقطه‌ای روی محور اعداد می‌توان یافت. آیا هر نقطه روی محور اعداد نظیر یک عدد گویا است؟ بر روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که نظیر هیچ عدد گویایی نیستند. این چگونه نقاط، اعدادی را نشان می‌دهند که آن‌ها را اعداد گنگ می‌نامند. اعداد گنگ و اعداد گویا را با هم، «اعداد حقیقی» می‌نامند.

با استفاده از نماد $\sqrt{}$ (رادیکال) که به معنای جذرگیری است، اعداد گنگ بسیاری را می‌توان معرفی کرد. برای مثال، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ اعدادی گنگ هستند. π نیز عددی گنگ است.



توضیح درایران

۱- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلث‌های قائم الزاویه زیر را رسم کرد و پاره خط‌هایی با طول‌های $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ ساخت.



۲- با استفاده از رسم‌های بالا، روی محور اعداد، نقاط نظیر اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ را بیابید.

اگر دو نقطه، یکی روی نیم خط مثبت و یکی روی نیم خط منفی انتخاب کنیم به‌طوری که فاصله آن‌ها تا مبدأ مساوی باشند، اعداد نظیر این نقاط را دو عدد قرینه هم می‌نامند. هر نقطه روی نیم خط منفی نشان‌دهنده یک عدد حقیقی منفی است و قرینه یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. قرینه هر عدد حقیقی را مانند اعداد گویا با

گذاشتن علامت منفی «-»، در سمت چپ آن نشان می‌دهند. اعداد حقیقی مثبت را به همراه صفر، اعداد حقیقی نامنفی می‌نامند.



در تمرین زیر می‌خواهیم با محور اعداد حقیقی بیشتر آشنا شویم.

تمرین در کلاس



- ۱- یک محور اعداد حقیقی رسم کنید و روی آن، نقاط متناظر اعداد $1, 2, 3, \frac{1}{2}, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}-1$ را بیابید.
- ۲- اگر عددی از عدد دیگری بزرگ‌تر باشد، مکان هر یک از آن دو روی محور اعداد نسبت به دیگری چگونه است؟ اگر عددی را با عدد مشبی جمع کنیم، مکان آن روی محور اعداد چه تغییری می‌کند؟ حاصل از عدد قبلی بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟
- ۳- اعداد بند اول همین تمرین را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

برای بیان این که یک عدد از عدد دیگر کوچک‌تر است از علامت «<» یا «>» استفاده می‌کنیم. برای مثال برای بیان این که ۲ از ۳ کوچک‌تر است، می‌نویسیم $2 < 3$. این مطلب را به صورت $3 > 2$ نیز می‌توانیم بنویسیم.

گاهی اوقات برای سادگی در نوشتن دو نامساوی مانند $5 < 4$ و $4 < 1$ ، هر دوی آن‌ها را همزمان به صورت $1 < 4 < 5$ نیز می‌نویسیم.



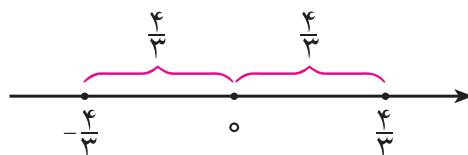
- ۱- نقاط نظیر اعداد ۳ و ۵ و ۱۲ را روی محور اعداد در نظر بگیرید. فاصله این نقاط تا مبدأ چقدر است؟
- ۲- چه رابطه‌ای بین فاصله این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟
- ۳- نقاط نظیر اعداد (-3) و (-5) و (-12) را روی محور اعداد در نظر بگیرید. فاصله این نقاط تا مبدأ چقدر است؟

- ۴- چه رابطه‌ای بین فاصله این اعداد تا مبدأ و خود این اعداد مشاهده می‌کنید؟
- ۵- نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید را برای یک عدد دلخواه مثبت و یک عدد منفی دلخواه جداگانه بیان کنید.



فاصله نقطه نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را قدر مطلق آن عدد می‌نامند.

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{4}{3}$ و $(-\frac{4}{3})$ تا مبدأ برابر $\frac{4}{3}$ است، پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{4}{3}$ و $(-\frac{4}{3})$ برابر $\frac{4}{3}$ است.



قدر مطلق را با استفاده از نماد ۱۱ نشان می‌دهند.

به عنوان مثال، قدر مطلق $(-\frac{4}{3})$ را با $|\frac{4}{3}|$ و قدر مطلق $\frac{4}{3}$ را با $|\frac{4}{3}|$ نشان می‌دهند که هر دو، برابر $\frac{4}{3}$ هستند.

مثال: قدر مطلق اعداد $\frac{4}{3}$ ، $-\sqrt{7}$ ، -4 ، $-\pi$ و قرینه آن‌ها به شکل زیر است.

$$\left| -\frac{4}{3} \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}, \quad |-4| = |4| = 4, \quad |-\pi| = |\pi| = \pi, \quad |-\sqrt{7}| = |\sqrt{7}| = \sqrt{7}$$

قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن اعداد است زیرا فاصله یک عدد مثبت تا مبدأ برابر همان عدد است و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. در حالت کلی، قدر مطلق هر عددی، عددی نامنفی است.

مثال: $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی است، پس $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ ، همچنین $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ عددی منفی است، پس

$$|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است، ولی می‌توانیم اعدادی اعشاری را که نزدیک به آن باشد، بیابیم. برای مثال، $1/\sqrt{2}$ نزدیک است و $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$ نزدیک‌تر است و $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$ بیشتر نزدیک است. این اعداد اعشاری را تقریب‌های اعشاری $\sqrt{2}$ می‌نامند. برای هر عدد حقیقی می‌توان از این تقریب‌های اعشاری یافت و هرچه عد اعشاری به عدد حقیقی نزدیک‌تر باشد، دقت تقریب بالاتر است.

مثال: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر هیچ عدد اعشاری نیست، ولی می‌توانیم تقریب‌های اعشاری آن را به دست آوریم. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با $0.333\ldots$ و با دقت دو رقم اعشار برابر است با $0.3333\ldots$ و با دقت سه رقم اعشار برابر است با $0.33333\ldots$. دقت این تقریب‌ها هر چقدر که لازم باشد می‌توانیم بالا بیریم.

مثال ۱: تقریب اعشاری $\frac{1}{\sqrt{7}}$ تا سه رقم اعشار چیست؟

۲ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را تا سه رقم اعشار محاسبه می‌کنیم. $\frac{2}{7}$ با دقت یک رقم اعشار برابر است با $0.285\ldots$ ، با دقت دو رقم اعشار برابر است با $0.2857\ldots$ ، و با دقت سه رقم اعشار برابر است با $0.28571\ldots$.

مثال ۲: $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ دو عدد گنگ هستند و $\sqrt{2}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با $1.4142\ldots$ و $\sqrt{3}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر است با $1.7322\ldots$.

مثال ۳: π یک عدد گنگ است و با دقت دو رقم اعشار برابر است با $3.14\ldots$. دقت این تقریب را تا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم بالا بیریم. مثلًا، π با دقت ده رقم اعشار برابر است با $3.1415926535\ldots$.

توجه کنید که تقریب‌هایی که در اینجا از آن صحبت کردہ‌ایم، تقریب زدن با روش قطع کردن بوده است که در دوره راهنمایی با آن آشنا شده‌اید. در این روش تقریب زدن، مقدار تقریبی از مقدار واقعی کمتر است. می‌توان دید اگر به آخرین رقم آن یک واحد اضافه کنیم از مقدار واقعی بیشتر می‌شود. برای مثال، وقتی می‌گوییم $\sqrt{2}$ با دقت چهار رقم اعشار برابر $1.4142\ldots$ است، یعنی $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143\ldots$



۱- با توجه به تقریب‌های اعشاری $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ که در بالا داده شده است، مجموع $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با یک رقم اعشار حساب کنید و حاصل را با π که با دقت یک رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

۲- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با دو رقم اعشار حساب کنید و آنرا با عدد π که با دقت دو رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.

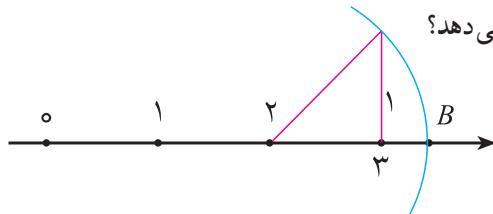
۳- آیا عدد π با مجموع $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ مساوی است؟

۴- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ را با سه رقم اعشار حساب کنید و آنرا با عدد π که با دقت سه رقم اعشار نوشته شده است مقایسه کنید.



مسانده

۱- روی محور اعداد زیر، نقطه B چه عددی را نشان می‌دهد؟



۲- بر روی محور اعداد زیر، مکان هریک از اعداد $\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$ و $2\frac{1}{4}$ را مشخص کنید.



۳- اعداد $\sqrt{8}$ و $1 - \sqrt{3}$ را روی محور بیاید.

۴- جدول زیر را کامل کنید و علامت اعداد مخالف صفر را تعیین کنید.

عدد	منفی	مثبت	صفر
$-2\frac{1}{7}$			
$-1\frac{2}{3}$			
$\frac{1}{2}$			
$1 - \sqrt{2}$			
$(2\frac{1}{2} - \frac{5}{2})$			
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$			
$-(2 - \sqrt{3})$			

۵- مقدار عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید و بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$|-2 \times (3 - 4)|, |\sqrt{3} - \sqrt{5}|, |1 - \sqrt{2}|, |2 - 3 \times (1 - 2)|$$

۶- جدول رو به رو را کامل کنید.

عدد اعشاری	كسر	درصد
۰.۵۵	$\frac{55}{100}$	۵۵
۱/۲۵		
	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{4}{5}$	
		۸۰
		۴۸

۷- در بین عدهای گویای زیر، عددهایی که اعشاری هستند را مشخص کنید و قسمت صحیح و قسمت اعشاری آنها را بنویسید.

$$\frac{3}{7}, \frac{15}{6}, \frac{8}{5}, \frac{2}{3}$$

۸- حاصل هریک از عملیات زیر را به طور تقریبی به دست آورید. قبل از انجام عملیات، در صورت نیاز به تزدیکترین عدد مناسب، اعداد را گرد کنید.

$$3\frac{1}{9} \div 4\frac{1}{9}$$

$$6\frac{2}{9} \div 1\frac{1}{9}$$

$$(9\frac{1}{4} + 2\frac{1}{35}) \times 8\frac{1}{7}\frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{145} \times 7\frac{1}{96}}{\sqrt{24}}$$

۹- یک لکه روغن روی آب افتاده و به صورت دایره‌ای بزرگ می‌شود. لحظه‌ای می‌رسد که شعاع دایره برابر با ۴ سانتی‌متر شده و در لحظه‌ای بعد شعاع $\frac{1}{2}$ سانتی‌متر افزایش می‌یابد. مساحت لکه چقدر افزایش می‌یابد؟ (مقدار π را برابر $\frac{22}{7}$ بگیرید.)

۱۰- دانش‌آموزی گفت: در جایی خوانده‌ام که برای حفظ تقریب اعشاری π تا ده رقم، می‌توان جمله زیر را حفظ کرد.

«خرد و بیتش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزل مقصود بما آموزد»

به نظر شما چه ارتباطی بین این جمله و عدد π وجود دارد؟

ابوالحسن علی بن احمد نسوی

حکیم و ریاضی‌دان ایرانی است که در سال ۳۹۳ق. در ری متولد شد. از خصوصیات او نقل می‌کنند که سیرتی نیکو داشت و به علم و هنر عشق می‌ورزید و مردی کریم، مهمان‌نواز، خوان‌گشاده، علم دوست و دانش‌گستر بود و در میان شاگردان و بزرگان زمان خود به استاد مختص معروف بود. از او ۱۱ اثر ریاضی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به اثر المقنع فی الحساب الهندی اشاره کرد که در آن به روش محاسبه با دستگاه شمارش اعشاری می‌بردازد که در آن هریک از ارقام بسته به مکانی که در آن قرار گرفته‌اند دارای ارزش‌اند و ارزش مکانی هر رقم نسبت به رقم سمت راست خود ده برابر است. مثلاً در دستگاه اعشاری $52\frac{1}{4}$ ، ۵ دارای ارزش مکانی دهم، ۲ دارای ارزش مکانی یکان و ۵ دهگان است که ارزش هر کدام ده برابر دیگری است. ایشان در زمینه هندسه و مثلثات نیز کارهای بسیار زیادی انجام داده‌اند. وی در سال ۴۷۲ق. درگذشت.

نمادها و زبان ریاضی

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود. مثلاً، تمام اعداد طبیعی را با کنار هم گذاردن نمادهایی که برای اعداد صفر تا نه انتخاب کرده‌ایم نمایش داده‌ایم. تمام اعداد صحیح را با استفاده از نمایش دهدۀ اعداد طبیعی و علامت منفی «-»، نمایش داده‌ایم. تمام اعداد گویا را با استفاده از نمایش اعداد طبیعی و علامت منفی و خط کسری نمایش داده‌ایم. اعمال جمع و ضرب را هم با نمادهای «+» و «×» و رابطه کوچک‌تری و بزرگ‌تری را با «<» و «>» نشان داده‌ایم.

سخن گفتن با استفاده از این نمادها را زبان ریاضی می‌نامیم. جملات در زبان ریاضی را به زبان فارسی نیز می‌توان بیان کرد. برای مثال، جمله فارسی زیر، خبری را در ریاضی بیان می‌کند:

«اگر به عدد پانزده، عدد دو را اضافه کنیم، حاصل آن هفده می‌شود.»

همین جمله را با استفاده از نمادها، به زبان ریاضی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$15 + 2 = 17$$

عبارت بالا یک جملۀ ریاضی است که خبری را در مورد سه عدد ۱۵، ۲ و ۱۷ بیان می‌کند.



تمرين درگاه

۱- جمله‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حاصل جمع منفی دوازده و هجده، برابر شش است.

ب) حاصل ضرب یک سوم در خودش برابر یک نهم است.

ج) حاصل ضرب منفی یک در منفی سه به اضافه پنجاه، از پنجاه بزرگ‌تر است.

۲- جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $(-12 - 3) \times 2 = -30$

ب) $\frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$

ج) $-\frac{3}{2} \times \frac{2}{15} + 1 < \frac{13}{15}$

برای سخن گفتن در مورد اعداد مشخص، از نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، برای گفتن این که جمع یک دوم با خودش برابر یک است می‌نویسیم :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اما اگر بخواهیم در مورد دسته‌ای از اعداد سخن بگوییم، آن را چگونه بنویسیم؟ فرض کنید می‌خواهیم بگوییم : «دو برابر هر عدد برابر است با جمع آن عدد با خودش.»

این جمله به معنای آن است که :

$$1 + 1 = 2 \times 1$$

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

$$3 + 3 = 2 \times 3$$

$$4 + 4 = 2 \times 4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

همان طور که می‌بینید، این خاصیت مربوط به عدد خاصی نیست و برای همه اعداد برقرار است. اگر \square نشانه یک عدد دلخواه باشد، خاصیت بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\square + \square = 2 \times \square$$

اگر به جای \square ، هر عدد دلخواهی بگذاریم تساوی بالا برقرار می‌شود. در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت \square از نمادهای حروف انگلیسی مانند a, b, c, \dots استفاده می‌شود. به عنوان مثال، برای گفتن جمله «جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است.» می‌گوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را a بنامید، در این صورت :

$$a + a = 2 \times a$$

در جمله بالا، به جای حرف a از هر حرف دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. برای مثال بالا می‌توانیم بگوییم : عدد دلخواهی انتخاب کنید و آن را x بنامید، در این صورت :

$$x + x = 2 \times x$$

هر دو این جملات یک چیز می‌گویند : جمع هر عدد با خودش، مساوی با دو برابر همان عدد است. بنا به قرارداد، ضرب یک عدد خاص مانند 2 در یک عدد دلخواه را که با یک نماد مانند a نشان داده شده است، به جای a با $2a$ نشان می‌دهیم. این کار موجب سادگی نوشتمن خواهد شد. به عنوان مثال :

$$3 \times a = 3a \quad (-12) \times x = -12x \quad 1/7 \times z = 1/7z$$

به کمک نمادهایی که نشان‌دهنده یک عدد دلخواه هستند می‌توانیم خواصی از اعداد را که برای همه اعداد برقرارند راحت‌تر بیان کنیم.

مثال : برای بیان این که «حاصل جمع هر عدد با صفر برابر همان عدد می‌شود.»، می‌گوییم : عدد دلخواهی را

انتخاب کنید و آن را z بنامید، در این صورت

$$z + 0 = z$$

مثال : برای بیان این که «هر عددی که با یک جمع شود از آن عدد بزرگ‌تر می‌شود.» می‌گوییم : عدد دلخواهی را انتخاب کنید و آن را w بنامید، در این صورت :

$$w + 1 > w$$



تمرین در قالب

۱- جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به کار برده می‌شوند، بنویسید.

الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با خودش.

ب) ضرب هر عددی در صفر، صفر می‌شود.

ج) تفاضل هر عدد از خودش برابر صفر می‌شود.

۲- جمله‌های ریاضی زیر را به زبان فارسی بنویسید.

الف) $a \times a = 0$ یا $a \times a > 0$

ب) $x \times 1 = x$

ج) $4 \times (1 + w) = 4 + 4w$

د) $x \times x + 1 > x$

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم. در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان‌دهنده عدد دلخواهی باشند.

مثال : برای بیان این که : «در جمع دو عدد، جمع اولی با دومی برابر است با جمع دومی با اولی»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$x + y = y + x$$

بنا به قرارداد برای نشان دادن ضرب دو عدد که با نمادهایی مانند a و b نشان داده شده‌اند، به جای $a \times b$ از ab استفاده می‌کیم که ساده‌تر است.

ضرب یک عدد در خودش را مربع یا مجذور آن عدد می‌نامند.

مربع عدد a را با a^2 نشان می‌دهند. یعنی :

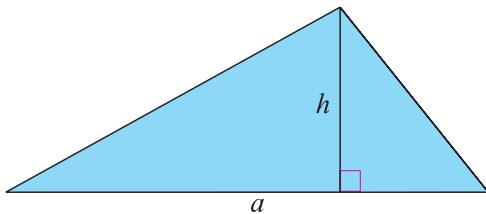
$$a \times a = aa = a^2$$

مثال : برای بیان این که : «در ضرب دو عدد، حاصل ضرب اولی در دومی برابر است با حاصل ضرب دومی در اولی.» می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$xy = yx$$

مثال : برای بیان این که : «مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول یک قاعده آن در ارتفاع نظیر آن قاعده.»، می‌گوییم : یک مثلث دلخواه در نظر بگیرید و طول یک قاعده آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این صورت :

$$\frac{1}{2}ah = \text{مساحت مثلث}$$



مثال : برای بیان این که : «حاصل ضرب دو عدد مثبت، عددی مثبت است.»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه مثبت انتخاب کنید و آن‌ها را x و y بنامید، در این صورت :

$$xy > 0$$

مثال : برای بیان این که : «حاصل جمع یک عدد مثبت با یک عدد دیگر، عددی بزرگ‌تر از عدد دوم می‌سازد.»، می‌گوییم : دو عدد دلخواه انتخاب کنید و آن‌ها را z و w بنامید، فرض کنید $z > w$ ، در این صورت :

$$z + w > w$$

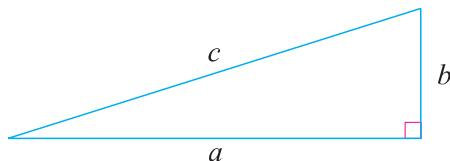
در موارد بسیاری لازم می‌شود که مطلبی را درباره سه عدد دلخواه بیان کنیم. در این حالت باید از سه نماد برای نشان دادن سه عدد دلخواه استفاده کنیم.

مثال : برای بیان این که «در جمع سه عدد، ترتیب جمع کردن به صورت جمع عدد اول با عدد دوم و سپس جمع با عدد سوم، یا جمع عدد دوم با عدد سوم و سپس جمع با عدد اول تغییری در نتیجه ایجاد نمی‌کند.» می‌گوییم : برای سه عدد x ، y و z ، داریم :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

مثال : طبق قضیه فیثاغورس «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول دو ضلع دیگر.»، برای بیان این قضیه به زبان ریاضی، می‌گوییم : اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را با a و b و c نشان دهیم و c طول وتر باشد، داریم :

$$a^2 + b^2 = c^2$$



به تساوی زیر توجه کنید :

$$12 \times (5 + 23) = (12 \times 5) + (12 \times 23)$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای محاسبه حاصل ضرب ۱۲ در مجموع دو عدد ۵ و ۲۳ می‌توانستیم ابتدا ضرب ۱۲ در ۵ و سپس ضرب ۱۲ در ۲۳ را انجام دهیم و حاصل‌ها را با هم جمع کنیم. این ویژگی خاص اعداد ۱۲، ۵ و ۲۳ نیست و برای اعداد دیگر هم می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. این ویژگی را «خاصیت پخشی» عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نامند. در فعالیت زیر درستی این ویژگی را به طور هندسی بررسی می‌کنیم.



- ۱- مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را با x و y نشان دهید.
- ۲- مستطیل دیگری رسم کنید که طول آن همان x ولی عرض آن عدد دیگری مانند z باشد.
- ۳- دو مستطیل بالا را به گونه‌ای کنار هم قرار دهید که یک مستطیل بزرگ‌تر ساخته شود.
- ۴- مساحت هریک از این دو مستطیل و مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده را برحسب نمادهای انتخاب شده بنویسید.
- ۵- مساحت مستطیل بزرگ‌تر ساخته شده برابر مجموع مساحت‌های دو مستطیل اول است. این مطلب را با استفاده از نمادهای انتخاب شده بنویسید.
- ۶- رابطه به دست آمده بین اعداد مثبت x ، y و z را به زبان فارسی بیان کنید.



$x(y + z) = xy + xz$: برای سه عدد x ، y و z داریم

اگر هر طرف تساوی بالا را داشته باشیم، می‌توانیم طرف دیگر را به دست آوریم. اگر ابتدا سمت چپ تساوی را داشته باشیم و سپس سمت راست تساوی را به دست آوریم، آن را «پخش کردن عمل ضرب روی عمل جمع» می‌نامند. اگر برعکس، ابتدا سمت راست تساوی را داشته باشیم، سپس سمت چپ تساوی را به دست آوریم، آن را «فاکتورگیری» می‌نامند و در این حالت در تساوی بالا می‌گوییم از x فاکتور گرفته‌ایم.



مستطیلی رسم کنید و روی طول آن یک نقطه انتخاب کنید. این نقطه، طول مستطیل را به دو پاره خط تقسیم می‌کند. طول این پاره خط‌ها را x و y و عرض این مستطیل را z بنامید.

$$1 - \text{تساوی } z(x+y) = zx + zy \text{ را روی شکل نشان دهید.}$$

۲ - روی عرض این مستطیل نیز نقطه‌ای انتخاب کنید. این نقطه هم، عرض مستطیل را به دو قسمت تقسیم می‌کند. طول این دو قسمت را با a و b نشان دهید و رابطه بین a ، b و z را بنویسید.

$$3 - \text{تساوی } z(x+y) = zx + zy \text{ را بر حسب } a \text{ و } b \text{ بنویسید.}$$

۴ - درستی تساوی‌های زیر را در مستطیل رسم شده نشان دهید.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)x + (a+b)y = ax + ay + bx + by$$

با به قرارداد، در عبارت‌هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می‌شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به ترتیب از چپ به راست انجام می‌شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال : در عبارت $2 \times 41 \times 3 - 23 + 41 \times 4 - 22$ ابتدا ضرب 4 در 3 و سپس ضرب 41 در 2 انجام می‌شود و در بی آن عبارت $22 + 82 - 12 - 12$ ساخته می‌شود. سپس تفریق $12 - 22$ انجام می‌شود و حاصل آن با 82 جمع می‌شود.
مثال : در عبارت $-1 - 4 \times 5 \div 2 - 12$ ، ابتدا ضرب 4 در 5 محاسبه و حاصل آن بر 2 تقسیم می‌شود که برابر 10 است. سپس تفریق 10 از (-12) انجام می‌شود که حاصل (-22) است و آخر، تفریق 1 از (-22) انجام می‌شود که حاصل (-23) است.



ترتیب عملیات را در عبارت‌های زیر تعیین کنید.

۱) $2 - 3 + 5$

۲) $1 - 4 \times 6 + 3 - 5 \times 12$

۳) $-5 + 4 \div 2 + 14 \div 2 \times 7$

۴) $x - yz$

۵) $a - bx + c(x + a)$

۶) $ab - cd + 2(x + 1)$



مساله

۱- در جمله‌های زیر، حروف a ، x و w ، نشان‌دهنده اعداد دلخواهی هستند. این جمله‌ها را به کوتاه‌ترین شکل به فارسی بنویسید.

(الف) $(a+x)(a-x) = a^2 - x^2$

(ب) $(aw)^2 = a^2 w^2$

(ج) فرض کنید $a < 1$ ، در این صورت $a^2 < 1$.

(د) فرض کنید $a > 0$ و $x > 0$ و $a^2 = x$ ، در این صورت $x = a^2$.

(ه) فرض کنید $w = aw$ ، در این صورت $w = 0$ یا $a = 0$.

۲- برای مقادیر زیر که برحسب اعداد دلخواه a و b نوشته شده‌اند، مثال هندسی بیاورید.

(الف) a^2

(ب) $2a + 2b$

(ج) $a^2 + b^2 + 2ab$

(د) $\frac{1}{2}(a+b)$

۳- چهار عدد مثبت دلخواه را با z ، a ، b و c نشان داده‌ایم، با رسم یک شکل نشان دهید

$z(a+b+c) = za + zb + zc$. بدون استفاده از شکل نیز درستی همین تساوی را نشان دهید.

۴- عبارت‌های زیر را با فاکتورگیری به شکل حاصل ضرب درآورید.

$$xa + xb \quad , \quad x^2a + x^2b \quad , \quad zy + xy \quad , \quad ab^2 + cb^2 \quad , \quad a^2x^2 + ax^2 \quad , \quad x^2 + x$$

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$-6 \div 2 \times 3 =$$

$$6 - 6(3 - 3 \times 2) =$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} - \frac{2}{2} \\ \hline 2 + \frac{-2}{3} - 2 \frac{1}{3} \end{array}$$

مجموعه‌ها



سال‌ها تصور می‌شد پلوتون جزء سیارات منظومه شمسی است. اخیراً انجمن جهانی نجوم اعلام نموده است که پلوتون عضوی از مجموعه سیارات منظومه شمسی نیست. با دقت در شکل بالا چه دلیلی برای توجیه این نقطه نظر می‌توان ارائه کرد؟

مسئله گروه‌های دانش آموزی

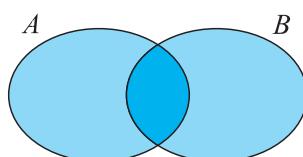
بسیاری از مفاهیم ریاضی از طریق حل مسائلی که بشر با آن روبه‌رو شده است به وجود آمده‌اند. شما نیز با حل مسائلی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شوید می‌توانید مفاهیم جدید ریاضی را کشف کنید. محمد، دانش‌آموزی است که با حل مسئله‌ای که با آن روبه‌رو شده بود توانست نخست مفهوم مجموعه‌ها و سپس مطالب دیگر وابسته به مجموعه‌ها را به دست آورد.

محمد مدرسه خود را عوض کرده بود و وقتی وارد کلاس جدید شد، متوجه شد که در این کلاس دو گروه ورزشی یکی فوتبال و دیگری والیبال، تشکیل شده است. او فهمید، شرکت در این گروه‌ها داوطلبانه بوده و هر کس با میل خود می‌توانست عضو هر کدام از این دو گروه بشود یا نشود.

این گروه‌ها A و B نام‌گذاری شده بودند و هر گروهی با اعضا‌یاش مشخص می‌شد. محمد علاقه داشت بداند که هر کدام از این گروه‌ها چند عضو دارند. او با شمارش تعداد دانش‌آموزان کلاس فهمید که کلاس آن‌ها بدون خودش، ۳۶ دانش‌آموز دارد. ابتدا فکر کرد که تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم، همان ۳۶ نفر است، ولی زود متوجه شد که ممکن است برخی دانش‌آموزان در هیچ گروهی شرکت نکرده باشند.

او در زمان تمرین این گروه‌ها متوجه شد که ۴ نفر در هیچ کدام از این گروه‌ها شرکت نمی‌کنند و نتیجه گرفت تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم برابر $= 32 - 4 = 28$ است. محمد با شرکت در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید تعداد اعضای گروه A، ۲۱ نفر است. او فکر کرد چون تعداد اعضای این دو گروه روی هم ۳۲ نفر است، پس گروه B، $32 - 21 = 11$ عضو دارد.

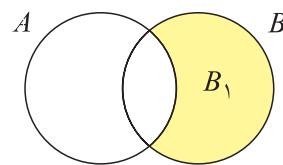
اما، یکی از افراد گروه B به محمد گفت که نتیجه گیری او اشتباه است و تعداد اعضای گروه B بیشتر از ۱۱ نفر است. محمد با کمی تأمل دریافت که نتیجه گیری او بر مبنای این فرض بوده است که دو گروه A و B عضو مشترکی ندارند در حالی که ممکن است برخی دانش‌آموزان خواسته باشند در هر دو گروه عضویت داشته باشند. محمد برای تشخیص وضعیت این دو گروه شکل زیر را رسم کرد.



محمد از روی این شکل نتیجه گرفت، اطلاعات او برای یافتن تعداد اعضای گروه B کافی نیست و او باید تعداد اعضای مشترک بین این دو گروه را بداند.

محمد با شرکت مجدد در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید ۶ نفر از آن‌ها عضو گروه B هم هستند. برای

حل این مسئله، محمد فکر کرد که می‌توانیم مسئله را به حالتی برگردانیم که دو گروه عضو مشترکی نداشته باشند و از راه حل قبلی استفاده کنیم. اعضای مشترک بین دو گروه را موقتاً از گروه B خارج می‌کنیم و گروه B₁ را می‌سازیم.



گروه B₁ و گروه A عضو مشترکی ندارند و اعضای گروه‌های B₁ و A روی هم، اعضای گروه A و B روی هم هستند. پس گروه B₁ به اندازه $21 - 11 = 10$ عضو دارد. بنابراین، گروه B به اندازه $17 + 6 = 23$ عضو دارد.

راه دیگری هم برای حل این مسئله به نظر محمد رسید. او تعداد اعضای گروه B را x نامید و گفت در شمارش تعداد اعضای دو گروه، اگر اعضای مشترک را یک بار به عنوان عضو A و یک بار به عنوان عضو B بشماریم، حاصل $x + 21$ است. اما، چون در این شمارش 6 نفر دوبار شمرده شده‌اند، تعداد واقعی $21 + x - 6$ است. ولی تعداد واقعی اعضای دو گروه روی هم برابر 23 بود، پس $21 + x - 6 = 23$. از این تساوی نتیجه می‌شود $x = 17$.



احمد و اکبر دانشآموزان یک مدرسه‌اند و هر کدام دوستانی در مدرسه دارند.
۱- تعداد دانشآموزان مدرسه ۱۴۲ نفر است که ۹۴ نفر از آنان نه دوست احمد هستند و نه دوست اکبر.

دوستان احمد و دوستان اکبر روی هم چند نفرند؟

۲- اگر بدانید احمد ۲۳ دوست دارد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

۳- اگر تعداد دوستان مشترک احمد و اکبر ۴ نفر باشد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

مجموعه ها

در حل مسئله گروه های دانش آموزی با دسته هایی از دانش آموزان روبه رو شدیم. در مسائل دیگر نیز دسته های دیگری از اشیا دیده می شوند. این دسته های مشخص شده از اشیاء را مجموعه می نامند.

هر دسته مشخص شده از اشیا را یک مجموعه و آن اشیا را اعضای آن مجموعه می نامند.

مثال : در مسئله گروه های دانش آموزی، گروه های A و B هر کدام یک مجموعه بوده اند.

مثال : اعداد طبیعی یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می دهند که آن را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مثال : دوستان حمید با هم یک مجموعه را می سازند که به آن مجموعه دوستان حمید می گوییم.

در زیر نمونه های دیگری از مجموعه ها را می بینید.

{علی، رضا، احمد، جواد، کریم، اصغر} = تیم فوتبال مدرسه

{۶، ۸، ۴، ۲} = مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج

{ا، ای، م، ک، گ، ل، س، ص، ع، ه، ح، ط، ر، د، و} = مجموعه حروف الفبای فارسی بی نقطه

{عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس، نپتون} = مجموعه سیارات منظومه شمسی

لازم نیست که اعضای یک مجموعه ارتباط خاصی با هم داشته باشند. برای مثال به مجموعه زیر توجه کنید :

{سعید، حافظ، ۴، ۲، ۳۵، a، x، تهران}

مثال : عبارت «انسان های قد بلند» مجموعه ای را مشخص نمی کند، زیرا چنین انسان هایی به طور دقیق مشخص نشده اند و برای برخی انسان ها نمی توانیم بگوییم قد بلند هستند یا نه.

معمولًاً، برای هر مجموعه ای نامی انتخاب می شود تا بهتر بتوان در مورد آن صحبت کرد.

مثال : در مسئله گروه های دانش آموزی نام های انتخاب شده برای دو گروه ورزشی، A و B بود.

مثال : اگر مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را D بنامیم، می نویسیم : $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

برای برخی از مجموعه های اعداد نیز نام های خاصی انتخاب شده است. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نشان می دهند؛ یعنی :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

توجه داشته باشید که در بالا منظور از «...» ادامه اعداد طبیعی هستند که انتهای ندارند. برای مجموعه اعداد صحیح نیز نام \mathbb{Z} انتخاب شده است؛ یعنی :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد گویا را با \mathbb{Q} و مجموعه اعداد حقیقی را با \mathbb{R} نشان می دهند.
عضویت یک شیء در یک مجموعه را با استفاده از نماد « \in » بیان می کنند. مثلاً برای بیان این که ۲ یکی از اعضای \mathbb{N} است می نویسیم : $2 \in \mathbb{N}$ و این جمله را به صورت «۲ عضو \mathbb{N} است» می خوانیم. مثلاً :

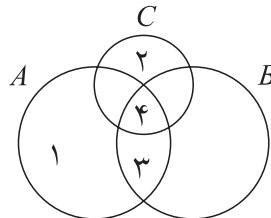
$$12 \in \mathbb{N}, -5 \in \mathbb{Z}, -\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \sqrt{11} \in \mathbb{R}$$

برای بیان این که شیئی عضو مجموعه ای نیست، از نماد \notin استفاده می شود. مثلاً، برای بیان این که «-۳» یک عدد طبیعی نیست، می نویسیم $1 \notin \mathbb{N}$ و آن را به صورت «۱ نیست عضو \mathbb{N} » می خوانیم. مثلاً :

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, -8 \notin \mathbb{N}, \pi \notin \mathbb{Q}$$



تمرین دریافتی



در شکل رو به رو وضعیت عضو بودن یا نبودن عدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت به مجموعه های C ، B ، A مشخص کنید.

آیا مجموعه ای وجود دارد که هیچ عضوی نداشته باشد؟ بلی، ریاضیدانان وجود چنین مجموعه ای را پذیرفته اند و آن را مجموعه تهی نامیده اند و آن را با نماد \emptyset نشان می دهند.
مثال : مجموعه اعداد طبیعی بین ${}^{\circ}3$ و ${}^{\circ}4$ که بر 21 بخش پذیرند، مجموعه تهی است.

تساوی مجموعه ها

برای مشخص کردن مجموعه ها راه های مختلف وجود دارد. ممکن است دو مجموعه با دو روش مختلف مشخص شده باشند ولی اعضای یکسانی داشته باشند، در این حالت گوییم دو مجموعه مساوی اند.
مثال : فرض کنید علی و حسن با یکدیگر دوست هستند. هر یک از آن ها نامروز انواعی از غذاها را خورده اند.
مجموعه غذاهایی را که علی خورده است A و مجموعه غذاهایی را که حسن خورده است B می نامیم. اگر بررسی کنیم و متوجه شویم که هر غذایی که علی خورده است، حسن هم خورده است و هر غذایی که حسن خورده است، علی هم خورده است، دو مجموعه A و B اعضای یکسانی خواهند داشت و این دو مجموعه مساوی اند و می نویسیم $A = B$.

در این مثال، اگر چه شیوه مشخص کردن اعضای دو مجموعه A و B با هم فرق داشت، ولی چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با هم مساوی‌اند.

اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B و هر عضو مجموعه B عضوی از مجموعه A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $A=B$.

مثال : دو مجموعه A و B را به شکل زیر در نظر بگیرید :

$$\{1,2,6\} = \{1,2,2,6,6,6\}$$

در مجموعه سمت راست بالا، برای مشخص کردن اعضای مجموعه، برخی اعضا چند بار نوشته شده‌اند. این عمل عضو جدیدی به مجموعه اضافه نمی‌کند و مجموعه سمت راست با مجموعه سمت چپ مساوی است.

مثال :

$$A = \{1,2,6,8,12,19\}$$

$$B = \{19,6,1,2,8,12\}$$

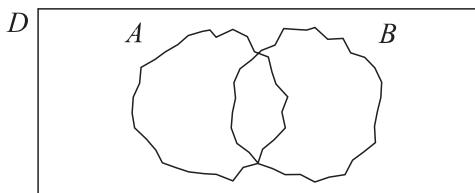
اعضای مجموعه‌های بالا با ترتیب‌های مختلفی نوشته شده‌اند. با این حال چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با یکدیگر مساوی‌اند؛ یعنی $A=B$.



- ۱- جواد و حسین هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا مجموعه معلمین جواد با مجموعه معلمین حسین مساوی است؟
- ۲- آیا مجموعه اعداد اول یک رقمی با مجموعه اعداد فرد یک رقمی مساوی است؟
- ۳- مجموعه انسان‌هایی که در کره ماه زندگی می‌کنند، مساوی کدام مجموعه است؟

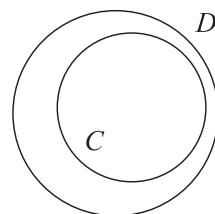
زیر مجموعه

در مسئله گروه‌های دانشآموزی، اگر مجموعه کلیه افراد کلاس را با D نشان دهیم، وضعیت گروه‌های A و B نسبت به D چگونه است؟



هر عضو گروه یا مجموعه A یک دانشآموز کلاس است، پس عضوی از D است. در چنین حالتی گوییم A زیرمجموعه D است. به همین ترتیب هر عضو B نیز عضوی از D است، پس B نیز زیرمجموعه‌ای از D است.

اگر C و D دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو C ، عضو D نیز باشد، در این صورت گوییم C یک زیرمجموعه D است.



برای بیان این که مجموعه C زیرمجموعه D است، می‌نویسیم « $C \subset D$ » و آن را چنین می‌خوانیم: « C زیرمجموعه D است».

مثال: مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقی زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 10 است.

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

مثال: مجموعه دانشآموزان کلاس شما، زیرمجموعه‌ای از مجموعه دانشآموزان مدرسه شما است.

مثال: مجموعه افرادی که در روستاهای ایران زندگی می‌کنند، زیرمجموعه‌ای است از مجموعه همه افرادی که در ایران زندگی می‌کنند.



- ۱- یک مجموعه ۳ عضوی بسازید و آن را A بنامید.
- ۲- از A یک عضو را حذف کنید و مجموعه جدید را B بنامید. وضعیت A و B نسبت به هم چگونه است؟
- ۳- عضو دیگری را به B اضافه کنید و مجموعه به دست آمده را C بنامید. وضعیت B و C نسبت به هم چگونه است؟ وضعیت A و C نسبت به هم چگونه است؟
- ۴- آیا ممکن است دو مجموعه، هر کدام زیرمجموعه دیگری باشد؟ چه وقت این اتفاق می‌افتد؟
- ۵- آیا ممکن است از دو مجموعه، هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نباشد؟ مثال بزنید.
- ۶- آیا هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است؟ وضعیت \mathbb{N} و \mathbb{Z} نسبت به هم چگونه است؟
- ۷- آیا هر عدد صحیح یک عدد گویا است؟ وضعیت \mathbb{Z} و \mathbb{Q} نسبت به هم چگونه است؟
- ۸- آیا هر عدد گویا یک عدد حقیقی است؟ وضعیت \mathbb{Q} و \mathbb{R} نسبت به هم چگونه است؟

مثال : کلیه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را تعیین کنید.

برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف یک عضوی آن، در کلیه حالاتی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را به دست آوریم. برای مثال، تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ عبارت اند از :

$$\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset$$

مسئانل

- ۱- در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌های ورزشی و ۲۳ نفر در فوق برنامه‌های علمی شرکت کرده‌اند. اگر دو نفر در هیچ یک از دو فوق برنامه ورزشی و علمی شرکت نکنند، تعیین کنید چند نفر :
- (الف) در هر دو برنامه شرکت می‌کنند.
- (ب) فقط در یک فوق برنامه شرکت می‌کنند.
- ۲- با توجه به شکل زیر درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

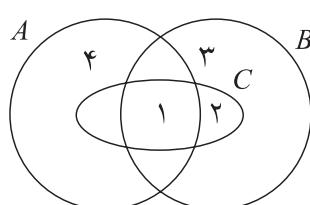
(الف) $2 \in B$

(ب) $4 \notin C$

(ج) $\{3\} \subset B$

(د) $\{3, 4\} \subset A$

(ه) $C \subset B$



۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (\mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا، \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح و \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی)

$$-\sqrt{2} \in \mathbb{N}, \frac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{Z}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

۴- دو مجموعه $A = \{7, -2, 5\}$ و $B = \{7, x, -y\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به دست آورید.

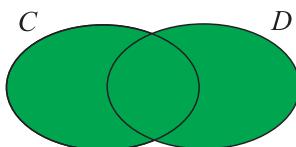
۵- معلم پرسید: آیا عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را نشان می‌دهد؟ دانشآموزی گفت بله، مثلاً $\{2, 4, 6, 8\}$. به نظر شما آیا پاسخ او صحیح بوده است؟ در صورت اشتباه بودن، علت اشتباه را توضیح دهید.



اجتماع مجموعه‌ها

در مسئله‌گروه‌های دانش‌آموزی، اگر دو گروه A و B جلسه مشترکی تشکیل دهند، مجموعه‌ای از دانش‌آموزان تشکیل می‌شود که آن را اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامند.

اگر C و D دو مجموعه باشند، مجموعه جدیدی را که اعضای آن متشکل از اعضای این دو مجموعه با هم است، اجتماع C و D می‌نامند و با $C \cup D$ نشان می‌دهند.



$C \cup D$ ، مجموعه اشیایی است که عضو C یا عضو D هستند.

مثال: معلم جغرافی از رضا و احمد خواست درباره شهرهایی که به آن سفر کرده‌اند گزارشی بنویسند. اگر رضا به شهرهای اصفهان، زنجان، اردبیل، اهواز و تهران سفر کرده باشد و احمد شهرهای اصفهان، خرمآباد، تبریز، سمندج و اهواز را دیده باشد، معلم جغرافی در مورد کدام شهرها از این دو نفر گزارش دریافت کرده است؟ جواب این سؤال، اجتماع مجموعه شهرهایی است که رضا و احمد به آن‌ها سفر کرده‌اند. اگر مجموعه شهرهایی که رضا دیده است را با A و مجموعه شهرهایی که احمد دیده است را با B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\{اهواز, سمندج, تبریز, خرمآباد, اصفهان\} \cup \{تهران, اهواز, اردبیل, زنجان, اصفهان\} = A \cup B$$
$$\{سمندج, تبریز, خرمآباد, تهران, اهواز, اردبیل, زنجان, اصفهان\}$$

مثال: اجتماع مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج و مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را که بر ۳ بخش پذیرند به دست آورید.

$$\{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} = \{2, 4, 6, 8, 3, 9, 12, 15, 18\}$$

تمرین دریافت



۱- اگر $\{1, 5, 9\} = A$ و $\{5, 7, 9\} = B$ ، درستی جملات زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } A \cup A = A$$

$$\text{ب) } A \cup B = B \cup A$$

$$\text{ج) } B \subset (A \cup B) \text{ و } A \subset (A \cup B)$$

۲- یک مجموعه C معرفی کنید به طوری که $A \subset C$ و $B \subset C$ و $(A \cup B) \subset C$. نشان دهید.

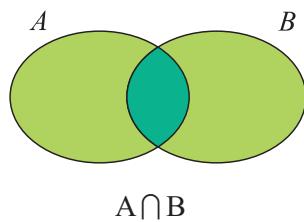
۳- اگر به جای مجموعه‌های بالا، مجموعه‌های دیگری قرار می‌دادیم، آیا باز هم روابط بالا درست بودند؟

درستی پاسخ خود را با رسم شکل نشان دهید.

اشتراک مجموعه ها

در مسئله گروه های دانش آموزی دیدیم که افراد مشترک بین دو گروه A و B نقش مهمی در حل مسئله داشتند. مجموعه این افراد مشترک را اشتراک آن دو مجموعه می نامند.

برای دو مجموعه A و B، مجموعه اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B هستند، اشتراک A و B می نامند و با $A \cap B$ نشان می دهند.



مثال : اشتراک مجموعه اعداد اول یک رقمی و اعداد طبیعی زوج یک رقمی، {۲} است.
 $\{2,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \{2\}$

مثال : اگر A مجموعه همه ایرانی ها و B مجموعه همه ریاضی دانان جهان باشد، $A \cap B$ مجموعه همه ایرانی های ریاضی دان است.

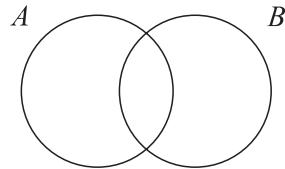
مثال : اگر A مجموعه همه انسان ها و B مجموعه همه موجودات آبزی باشد، $A \cap B$ هیچ عضوی ندارد و برابر مجموعه تهی است، یعنی $A \cap B = \emptyset$.

دو مجموعه ناتهی را که اشتراک آن ها مجموعه تهی است، دو مجموعه مجزا یا جدا از هم می نامند.

مثال : مجموعه دانش آموزان کلاس اول ابتدایی و مجموعه دانش آموزان دبیرستانی، دو مجموعه مجزا هستند.



۱- با توجه به شکل زیر، درستی یا نادرستی هر یک از جملات ریاضی زیر را تعیین کنید.



- $(A \cap B) \subset A$ $(A \cap B) = (B \cap A)$ $A \subset (A \cap B)$
 $A \subset (A \cup B)$ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ $(A \cap B) = A$

۲- برای هر یک از جملات ریاضی زیر یک شکل رسم کنید.

الف) $A \cap B = \emptyset$

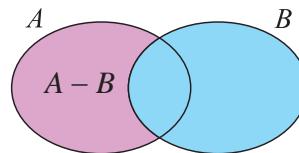
ب) $A \subset B \subset C$

ج) $A \cap C = \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$

تفاصل مجموعه‌ها

مجموعه‌دانشآموزان سال اول یک دبیرستان را با A و مجموعه‌دانشآموزان آن دبیرستان که قد آن‌ها بلندتر از 170 سانتی‌متر است، را با B نشان داده‌اند. یک روز برای انتخاب اعضای تیم بسکتبال، مریم ورزش همه دانشآموزان با قد بیش از 170 سانتی‌متر را در حیاط نگه داشت. بنابراین، دانشآموزانی که آن روز در کلاس اول دبیرستان حاضر بودند، آن‌هایی بودند که عضو مجموعه A بودند ولی عضو مجموعه B نبودند. مجموعه‌ای را که به این شکل ساخته می‌شود تفاصل B از A می‌نامند.

برای دو مجموعه A و B ، مجموعه اشیایی را که در A هستند، ولی در B نیستند، تفاصل B از A می‌نامند و با $A - B$ نشان می‌دهند.



مثال : به یاد دارید که در مسئله گروه‌های دانشآموزی، برای محاسبه تعداد اعضای گروه B ، آن دسته از اعضای A را که در B بودند، از گروه B حذف کردیم و گروه B را ساختیم. این عمل همان تفاصل مجموعه از مجموعه B بود و $B - A = B - A$ می‌باشد.

$$\{a,b\} - \{b\} = \{a\} \quad , \quad \{x,y,z\} - \{a,b\} = \{x,y,z\} \quad , \quad \{b\} - \{b\} = \emptyset$$

مثال : سه مجموعه A ، B و C را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$A = \{a,c,d,f,q\} \quad , \quad B = \{a,f,t,w,z\} \quad , \quad C = \{1,4,7\}$$

چند نمونه از تفاصل این مجموعه‌ها به شکل زیر است :

$$A - B = \{c,d,q\}$$

$$B - A = \{t,w,z\}$$

$$A - C = \{a,c,d,f,q\} = A$$

مثال : اگر A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 20 باشد که بر 2 بخش پذیرند و B مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 10 باشد که بر 4 بخش پذیرند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 20 است که زوج هستند ولی بر 4 بخش پذیر نیستند.

$$A - B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$$

مثال : اگر A مجموعه دانش آموزان دبیرستان شما و B مجموعه دانش آموزان دبیرستانی در ایران باشد، $A-B$ مجموعه تهی است و $B-A$ مجموعه همه دانش آموزان دبیرستانی خارج از مدرسه شما است.

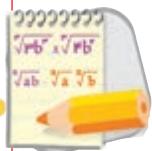
مثال : اگر A مجموعه ایرانی های باشد که تحصیلات آن ها بالای دیپلم است و B مجموعه کارگران ایرانی باشد، $A-B$ مجموعه ایرانی های با تحصیلات بالای دیپلم است که کارگر نیستند و $B-A$ مجموعه کارگران ایرانی با تحصیلات دیپلم یا زیر دیپلم است.

مثال : $\mathbb{R}-Q$ مجموعه اعداد گنگ است. $\{\cdot\} \cap \mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی مخالف صفر است.

$\{\cdot\} \cap \mathbb{R}$ را به صورت \circ نویسید.

توجه کنید

مسائل



۱- مجموعه های زیر را درنظر بگیرید.

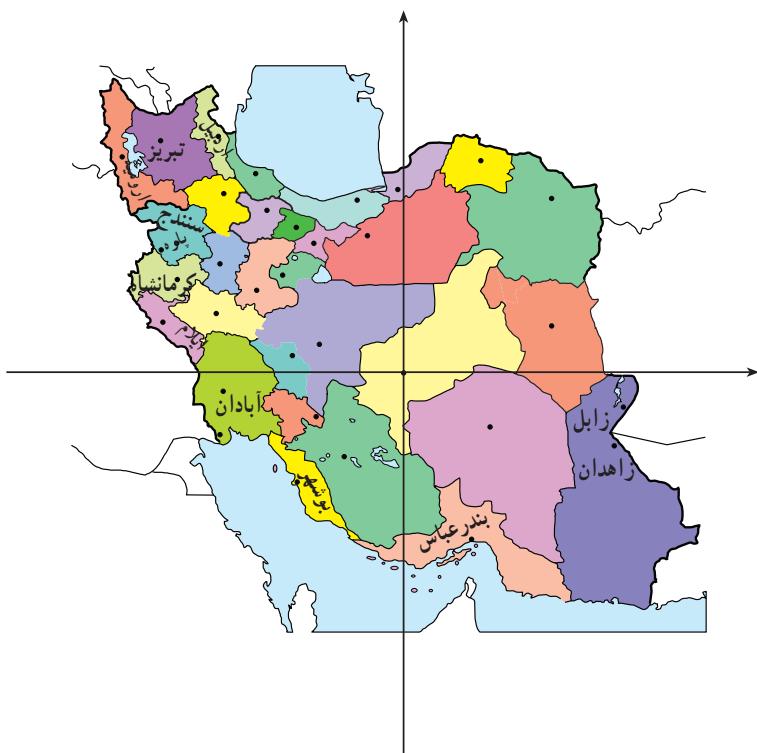
{ایلام، پاوه، اردبیل، سنتندج، کرمانشاه، آبادان، زابل، زاهدان، تبریز، ارومیه، بوشهر، بندرعباس} = X

مجموعه شهرهای شمال غربی ایران = A

مجموعه شهرهای جنوب غربی ایران = C

مجموعه شهرهای جنوبی ایران = E

مجموعه های X، $D \cap X$ ، $C \cap X$ ، $B \cap X$ ، $A \cap X$ و $E \cap X$ را با اعضای آنها مشخص کید.



۲- اگر $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ حاصل هریک از عبارات زیر را به دست آورید.

$$B - A$$

$$A - B$$

$$A \cap B$$

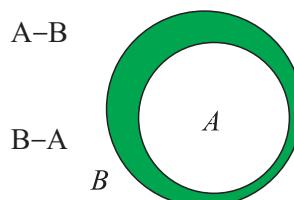
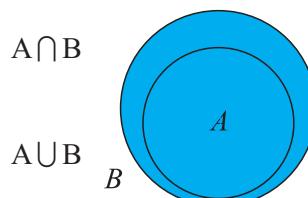
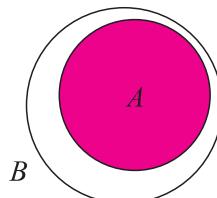
$$A \cup B$$

$$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$$

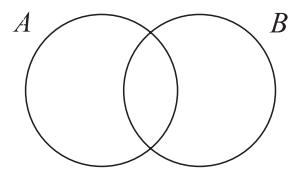
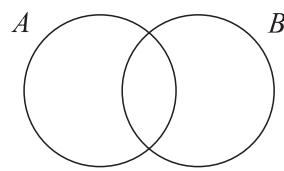
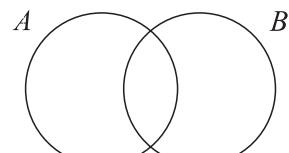
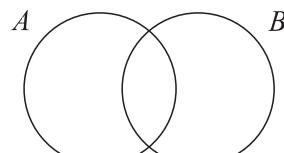
$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

۳- هریک از مجموعه‌های داده شده در سمت چپ را در صورت وجود نمودار نظیر برای آن، به نمودار

نظیرش وصل کنید.



۴- مجموعه‌های داده شده را با هاشور زدن مشخص کنید.



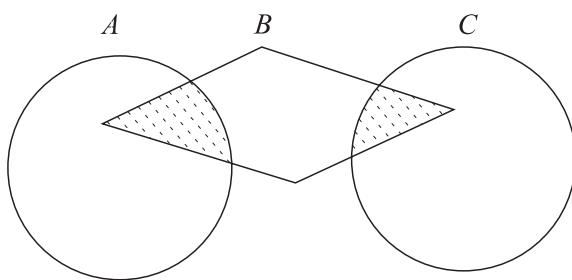
۵- کدام یک از مجموعه های زیر، قسمت های هاشور خورده شکل را نشان می دهد؟

$A \cap B \cap C$

$(A-B) \cup (C-B)$

$(A \cup C)-B$

$B \cap (A \cup C)$

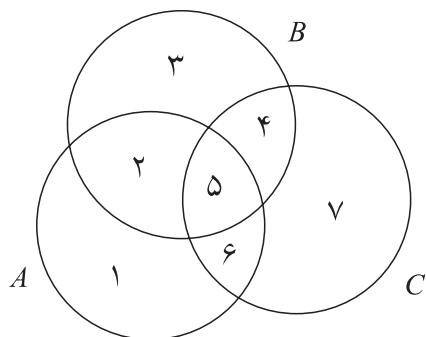


۶- با توجه به شکل بگویید کدام یک از مجموعه های زیر نشان دهنده $(A-B) \cup (B \cap C)$ است.

$\{1,6\}$

$\{1,2,3,4,6\}$

$\{1,6,5,4\}$



۷- اگر داشته باشیم $\{3,6,11,13,17\}$ و $A=\{2,7,11,13,17\}$ ، $B=\{3,6,11,13,17\}$ ، مجموعه $A-B$ را بنویسید.
دانشآموزی این مسئله را چنین حل کرده است :

$$A-B = \{2,7,11,13,17\} - \{3,6,11,13,17\} = \{2,3,6,7\}$$

در حل این مسئله چه اشتباهی رخ داده است؟ پاسخ درست چیست؟



مجموعه های متناهی و نامتناهی

{a} یک عضو و {1,5} دو عضو دارد. مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی ۹ عضو دارد. مجموعه حروف الفای فارسی ۳۲ عضو دارد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آنها سرانجام به انتهای برسد، گوییم آن مجموعه متناهی است؛ در غیر این صورت گوییم آن مجموعه نامتناهی است.

مثال : مجموعه سیارات منظمه شمسی متناهی است و تعداد اعضای آن ۸ است.

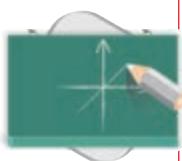
مثال : مجموعه اعداد طبیعی زوج کمتر از ۹ متناهی است و تعداد اعضای آن ۴ است.

مثال : مجموعه اعداد طبیعی زوج متناهی نیست.

مجموعه تهی نیز متناهی محسوب می شود و تعداد اعضای آن صفر است. برخی مجموعه ها، اگرچه متناهی هستند، ولی تعداد اعضای آنها نمی دانیم. به عنوان مثال، مجموعه مورچگان کرده زمین، یا مجموعه اتم های موجود در جو متناهی هستند، اما مجموعه های بزرگی هستند و تعداد اعضای آنها را نمی دانیم.

توجه داشته باشید که ملاک متناهی بودن یک مجموعه توانایی عملی ما برای شمارش تعداد اعضای آنها نیست.

برای تشخیص متناهی بودن یک مجموعه کافی است بدانیم که اگر امکان شمارش اعضای آن مجموعه را داشته باشیم و به اندازه کافی وقت صرف کنیم، می توانیم کل اعضای آن مجموعه را شمارش کنیم. مثلاً اگر امکان شمارش مورچه های کرده زمین را داشته باشیم، پس از صرف قرن ها، حتماً تمام مورچه ها را می توانیم بشماریم. مجموعه های نامتناهی مجموعه هایی هستند که اگر یکی یکی اعضای آنها را از مجموعه خارج کنیم، این عمل هیچ گاه به آخر نمی رسد. به عنوان مثال، \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} و \mathbb{R} نامتناهی هستند. مثلاً، اگر از مجموعه \mathbb{N} یکی یکی اعضای آن را خارج کنیم، هر چه قدر هم که وقت صرف کنیم، نهایتاً تعداد محدودی از اعضای \mathbb{N} را خارج کرده ایم و هنوز تعداد بسیار دیگری از اعضای \mathbb{N} باقی میمانند.



تمرین در کلاس

۱- اگر n یک عدد طبیعی و A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از n باشد، A متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲- اگر A مجموعه ای متناهی و $B \subset A$ ، آیا B متناهی است یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

۳- مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ متناهی است و یا نامتناهی؟ دلیل خود را بیان کنید.

مشخص کردن مجموعه ها

برای مشخص کردن یک مجموعه باید عضوهای آن مجموعه را معرفی کنیم. در صورتی که تعداد عضوهای یک مجموعه کم باشد، می‌توان اعضای آن مجموعه را یکی یکی معرفی کرد. این عمل با نوشتן اعضای آن مجموعه بین {} انجام می‌شود. مثلاً، مجموعه‌های زیر با همین روش معرفی شده‌اند:

$$A = \{a, b, c\} \quad C = \{-4, -8, \sqrt{23}\} \quad B = \{0\}$$

اما اگر یک مجموعه نامتناهی باشد، یا تعداد اعضای مجموعه‌ای بسیار زیاد باشد، نمی‌توان از روش بالا استفاده کرد. در این صورت یک روش دیگر برای مشخص کردن اعضای یک مجموعه، پیدا کردن یک ویژگی مشترک بین اعضای آن مجموعه است تا از طریق آن، اعضای آن مجموعه مشخص شوند.

برای مثال، برای مشخص کردن مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی، می‌توانیم آن‌ها را مجموعه‌ای از اعداد طبیعی در نظر بگیریم که از 10^0 کوچک‌تر و از 10^1 بزرگ‌ترند. اگر این مجموعه را E بنامیم این مطلب را به دو صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10^1 \text{ و } x > 10^0\} = \{x \mid 9 < x < 10\}$$

جملهٔ بالا به این صورت خوانده می‌شود: « E مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که از 10^1 بزرگ‌تر و از 10^0 کوچک‌ترند.»

مثال: مجموعه اعداد حقیقی مثبت را می‌توانیم به صورت $\{x \mid x > 0\}$ بنویسیم.

مثال: اگر مجموعه اعداد گویایی را که قدر مطلق آن‌ها از ۵ کمتر است با D نشان دهیم، داریم:

$$D = \{r \in \mathbb{Q} \mid |r| < 5\}$$

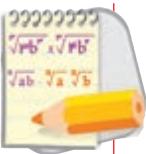
یک روش دیگر برای مشخص کردن مجموعه‌ها، معرفی شکل کلی عضوهای آن مجموعه است. برای مثال، هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است، که k یک عدد طبیعی است. با این روش مجموعه اعداد طبیعی زوج را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

عبارت بالا به صورت «مجموعه اعداد به شکل $2k$ که k در \mathbb{N} قرار دارد» خوانده می‌شود.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی فرد عبارت است از $\{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = 2k-1, k \in \mathbb{N}\}$.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی محدود کامل عبارت است از $\{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.



مساند

۱- متناهی بودن یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) $A = \{4n | n \in \mathbb{N}\}$.

ب) مجموعه اعداد طبیعی ${}^{\circ}00$ رقمی.

ج) مجموعه اعداد اول.

د) مجموعه اعداد اعشاری بین ${}^{\circ}1$ و ${}^{\circ}3$.

ه) مجموعه اعداد صحیح بین ${}^{\circ}1000$ و ${}^{\circ}1000$.

۲- هریک از مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

الف) $A = \left\{ \frac{1}{x} | x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\}$

ب) $B = \{4x | x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$

ج) $C = \left\{ \frac{x}{1+x} | x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 3 \right\}$

۳- هریک از مجموعه های زیر را با نماد (علام) ریاضی بنویسید.

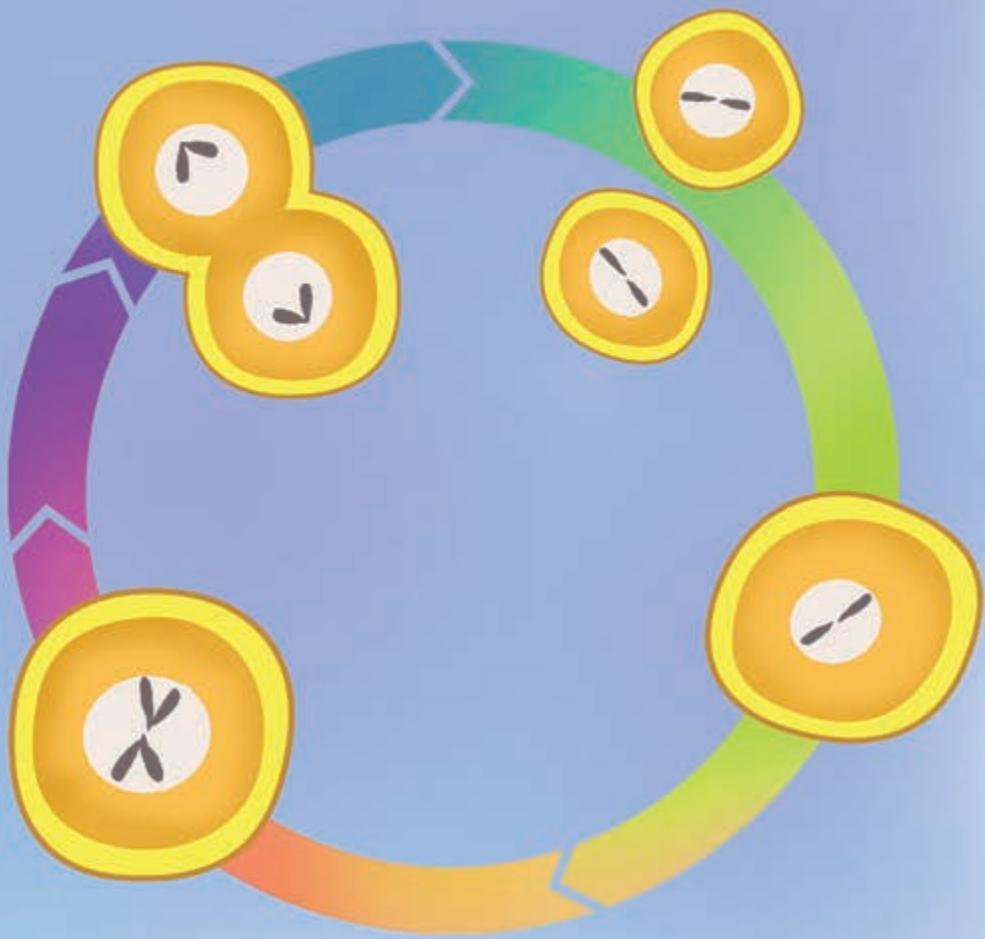
الف) $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ ب) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

۴- هر یک از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و با نوشتن اعضای آن، آنها را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیحی که دو برابر آنها بزرگتر از -4 و کوچک تر از 5 است.

ب) مجموعه اعداد صحیحی که قدر مطلق آنها برابر 2 است.

توان رسانی و ریشه‌گیری



سلول‌ها با تقسیمات متوالی خود، جانداران را شکل می‌دهند. یک جاندار کوچک از میلیارد‌ها سلول تشکیل شده است.

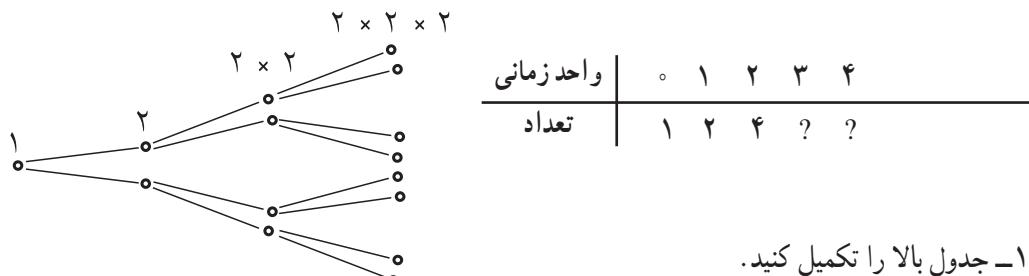
فکر می‌کنید چه قدر طول می‌کشد تا از یک سلول یک جاندار کوچک به وجود آید؟

توان رسانی و قواعد آن

شما با توان و به توان رساندن اعداد در دوره راهنمایی آشنا شده‌اید. در این بخش، علاوه بر یادآوری مطالب قبلی با نکات جدیدی در توان، آشنا خواهید شد.

فعالیت

در علوم و زیست‌شناسی خوانده‌اید که رشد موجودات تک سلولی به گونه‌ای است که در یک واحد زمانی هر موجود تک سلولی به دو سلول تقسیم می‌شود و این تقسیم شدن ادامه پیدا می‌کند. شکل و جدول زیر با شروع از یک تک سلول، تعداد این سلول‌ها را پس از چند واحد زمانی نشان می‌دهد.



- ۱- جدول بالا را تکمیل کنید.
- ۲- پس از ۷ واحد زمانی چند موجود تک سلولی تولید می‌شود؟ این تعداد را به صورت عدد توان دار نشان دهید.
- ۳- پس از چند واحد زمانی تعداد موجودات تک سلولی به ۳۲ عدد می‌رسد؟ روش یافتن جواب خود را توضیح دهید.

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل ضرب، از نماد توان استفاده می‌کنیم. برای مثال:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = (1/2)^5$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^3$$

اگر a یک عدد حقیقی و $n > 1$ یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$a^n = \overbrace{a \times \dots \times a}^n$$

با به تعریف $a^1 = a$

قسمت (۳) فعالیت صفحه قبل نشان می‌دهد که نمایش اعداد به صورت توانی علاوه بر ساده‌نویسی مزایای دیگری هم در حل مسائل دارد. در نمایش توانی اعداد، عددی که در خودش ضرب می‌شود را پایه و تعداد دفعاتی که آن عدد در عمل ضرب نوشته می‌شود را توان می‌نامند.



فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \times 5 = 5^4 \times 5^1$$

$$5^5 = (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5) = 5^4 \times 5^2$$

۱- با توجه به تساوی‌های بالا به جای نقطه چین عدد مناسب بنویسید.

$$5^5 = 5^5 \times \dots = 5^4 \times \dots = 5^3 \times \dots = 5^2 \times \dots = 5^1 \times \dots$$

۲- تساوی‌های بالا را برای عدد ۷^۴ بنویسید.

۳- در زیر، به جای نقطه چین مقدار مناسب قرار دهید.

$$8^5 = 8^3 \times 8^2 = 8^3 \times \dots = \dots \times 8^2 = \dots \times 8^1$$

$$\dots = 3^4 \times \dots = 3^5 \times 3^3 = 3^4 \times \dots = \dots \times 3^1$$

$$\dots = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \dots = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \dots$$

$$a^y = a^x \times \dots = \dots \times a^z = a^y \times \dots = \dots \times a^t$$

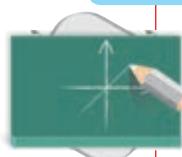
$$\dots = b^x \times b^y = b^x \times \dots = \dots \times b^z = \dots \times b^t$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که اگر n و m دو عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی باشد داریم :

توجه کنید

در حالت کلی

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$



تمرين در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ج) 9×3^4

ب) $2^6 \times 2^7$

الف) $\overbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}^{5}$

ه) $3^1 \times 3^4 \times 3^5 = (3^1 \times 3^4) \times 3^5$

د) $(\frac{1}{4})^3 \times (\frac{1}{5})^4$

ز) $a^m \times a^n \times a^k$

و) $a^1 \times a^3 \times a^5$

اگر یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسیم، گوییم آن عدد را تجزیه کرده‌ایم. برای مثال، برای ۲۴ را می‌توانیم به شکل‌های زیر تجزیه کنیم:

$$24 = 3 \times 8 = 6 \times 4 = 12 \times 2 = 3 \times 2^3$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$4^5 \div 4^2 = \frac{4^5}{4^2} = \frac{4^3 \times 4^2}{4^2} = 4^3 = 4^{5-2}$$

$$9^{12} \div 9^7 = \frac{9^{12}}{9^7} = \frac{9^5 \times 9^7}{9^7} = 9^5 = 9^{12-7}$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای یک عدد مخالف صفر a و دو عدد طبیعی m و n که $n > m$ ،

در تقسیم a^m بر a^n داریم:

$$\boxed{a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$3^0 \cdot 3 = (6 \times 5)^3 = (6 \times 5) \times (6 \times 5) \times (6 \times 5) = (6 \times 6 \times 6) \times (5 \times 5 \times 5) = 6^3 \times 5^3$$

$$3^0 \cdot 3 = (10 \times 3)^3 = (10 \times 3) \times (10 \times 3) \times (10 \times 3) = (10 \times 10 \times 10) \times (3 \times 3 \times 3) \\ = 10^3 \times 3^3$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}$$

به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{12 \times 12 \times 12}{4 \times 4 \times 4} = \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} = \left(\frac{12}{4}\right)^3$$

$$25^4 \div 16^4 = \frac{25^4}{16^4} = \frac{25 \times 25 \times 25 \times 25}{16 \times 16 \times 16 \times 16} = \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} = \left(\frac{25}{16}\right)^4$$

تساوی‌های بالا در حالت کلی هم برقرارند. برای دو عدد a و b (مخالف صفر است) و عدد طبیعی n ، در تقسیم a^n بر b^n داریم:

$$\boxed{a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$



تمرین در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$1) 6^{15} \div 6^8$$

توجه کنید

در حالت کلی
 $a^r + b^r \neq (a+b)^r$

و

$a^r = b^r \neq (a-b)^r$

$$2) \left(\frac{1}{4}\right)^7 \div (-25)^3$$

$$3) a^5 \div a^3$$

$$4) 4^3 \times 5^3$$

$$5) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 5^4$$

$$6) 8a^3$$

$$7) 27 \times 5^3$$

$$8) 6^3 \div 2^3$$

$$9) 2^7 \div \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$10) \frac{4^5 \times 2^5}{8^2}$$

$$11) \frac{16a^4}{3^4}$$

$$12) a^3 \times \frac{8b^3}{27}$$

۲- در هر یک از دو عبارت $3^2 + 4^2$ و $(3+4)^2$ مشخص کنید، آیا ابتدا عمل جمع انجام می‌شود یا عمل به توان رسانند.

۳- با به دست آوردن مقادرهای $3^2 + 4^2$ و $(3+4)^2$ مشخص کنید که این دو مقدار مساوی‌اند یا نه.

۴- دو سؤال بالا را برای دو عبارت $3^2 - 4^2$ و $(3-4)^2$ نیز جواب دهید.



به تساوی‌های زیر توجه کنید :

$$(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3} = 5^{2 \times 3}$$

$$(14^9)^4 = 14^9 \times 14^9 \times 14^9 \times 14^9 = 14^{9+9+9+9} = 14^{4 \times 9}$$

۱- با توجه به تساوی‌های بالا، در زیر، به جای نقطه چین‌ها مقدار مناسب قرار دهید.

$$(2^3)^4 = 2^3 \times \dots \times \dots \times \dots = 2^{3+\dots+\dots+\dots} = 2^{3 \times \dots}$$

$$(a^r)^s = a^r \times \dots \times \dots = a^{r+\dots+\dots} = a^{\dots \times s}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times \dots \times \dots} = a^{n+\dots+\dots+\dots} = a^{\dots \times \dots}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود برای عدد a و دو عدد طبیعی n و m ، اگر a^n را به توان m برسانیم داریم :

$$(a^n)^m = a^{nm}$$



تقویت در کلاس

- ۱- عدد 27^5 را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۳ بنویسید.
 - ۲- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.
- (الف) $(2^3)^4$ (ب) 27^3 (ج) $(b^3)^5$
- ۳- حاصل عبارت های 2^3 و 2^5 را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.

توجه کنید
در حالت کلی
 $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$



- ۱- اعداد 2^3 ، 2^4 و 2^5 را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
- ۲- هرچه توان های بالاتری از ۲ را حساب کنیم، عدد حاصل بزرگ تر می شود یا کوچک تر؟ دلیل خود را بیان کنید.
- ۳- اعداد 2^2 ، 2^3 و 2^4 را حساب کنید و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
- ۴- برای هر عدد طبیعی n ، حدس می زنید کدام یک از دو عدد 2^n و 3^n بزرگ ترند؟ حدس خود را بازی $n=4$ و $n=5$ پیاز مایید.

به طور کلی اگر a عددی بزرگ تر از ۱ باشد، هرچه توان های بالاتری از آن را حساب کنیم، حاصل بزرگ تر می شود. برای مثال :

$$a < a^2 < a^3 < a^4, \quad a^n < a^{n+1}$$

همچنین، اگر a و b دو عدد مثبت باشند که $b > a$ ، با محاسبه توان های یکسان از a و b داریم :

$$a^2 < b^2, \quad a^3 < b^3, \quad a^4 < b^4, \quad a^n < b^n$$

مثال : اعداد 8^4 و 2^{11} و 16^3 را با هم مقایسه کنید.

تمام این اعداد را می توانیم به صورت توانی از ۲ بنویسیم :

$$16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}, \quad 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

بنابراین :

$$16^3 = 8^4 = 2^{12} > 2^{11}$$

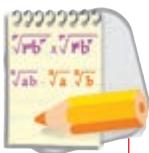
مثال : از دو عدد 8^4 و 81^3 کدام یک بزرگ تر است؟

این دو عدد را می توان به صورت دو عدد توان دار با توان های یکسان نوشت :

$$81^3 = (3^4)^3 = 3^{12}, \quad 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$8^4 = 2^{12} < 3^{12} = 81^3$$

بنابراین :



مسائل

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$\text{(الف)} (-4) \times (-4) \times (-4) =$$

$$\text{(ب)} (-\frac{1}{3}) \times (-\frac{1}{3}) \times (-\frac{1}{3}) =$$

$$\text{(ج)} \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} =$$

$$\text{(د)} \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} =$$

$$\text{(ه)} \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} =$$

$$\text{(و)} (a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$\text{(ز)} (a^2+1)(a^2+1)(a^2+1)(a^2+1) =$$



بیندیشیم

اگر عددی مثبت
و $a < 1$ با مقایسه
توان‌های a با یکدیگر
چه نتیجه‌ای می‌توان
گرفت؟

۲- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$\text{(الف)} (\frac{1}{2})^7 \times (\frac{1}{3})^7 \times (\frac{1}{4})^7 = \text{(ب)} 5^0 =$$

$$\text{(د)} x^4 y^3 z^2 = \text{(ه)} 2/5^7 \div 5^7 =$$

$$\text{(ز)} a^6 \div 2^6 = \text{(ح)} 2^3 \times (2^3)^5 \times (2^3)^5 =$$

$$\text{(ج)} x^2 x^3 x^5 =$$

$$\text{(و)} 3^3 \times 3^2 \times 3^5 \times 12^3 =$$

$$\text{(ط)} \frac{3^2 \times 4^2 \times 12^5}{2^4 \times 6^4} =$$

۳- عدد 8^6 را به صورت حاصل‌ضرب‌های زیر بنویسید.

الف) دو عدد توان دار مساوی

ب) دو عدد توان دار با توان ۸

ج) دو عدد توان دار که یکی برابر دیگری باشد.

د) سه عدد توان دار مساوی با پایه ۸

ه) سه عدد توان دار مساوی با توان ۲

۴- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$$3 \times 3^2 + 3^2 + 3^3 = \text{(الف)}$$

$$\text{(ب)} \frac{3^5 \times (4^6 + 4^6 + 4^6)}{6^6} =$$

$$\text{(ج)} 8^3 \times 9^2 \times 25^5 \times (3^6 + 3^6) =$$

$$\text{(د)} a^4 \times b^3 \times (ab)^5 =$$

$$\text{(ه)} \frac{x^5 y^4}{x^3 y z^3} = \quad (x, y, z \neq 0)$$

۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(الف) 2 + 3 \times 4^2 =$$

$$(ب) 2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$(ج) \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \times 3 \times 4^2}{2 - \left(\frac{1}{3}\right) \times 6^2} =$$

۶- اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

۲۵^3 , ۲۱^2 , ۳۶^2

در باب چهل و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات مسئله زیر مطرح شده است :

سؤال : به شخصی گفتند که وارد این بوستان شو که در آن هفت دهلیز متوالی است و از درختان آن به تعدادی میوه بچین که هنگام بیرون آمدن در کنار هر دهلیز نصف میوه‌ها را بگذاری و هنگامی که از آخرین دهلیز خارج شدی تنها یک میوه برایت بماند. حال چند میوه باید بچیند؟

توان صفر و توان منفی



۱- جدول زیر را تکمیل کنید.

حاصل	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	عدد توان دار
	۸۱				

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌باید؟

۳- سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را 3^0 قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای 3^0 پیشنهاد می‌کنید؟

۴- جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای 2^0 و 6^0 پیشنهاد می‌کنید؟

۵- برای عدد مخالف صفر a ، جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه عددی را برای a^0 پیشنهاد می‌کنید؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد مخالف صفر a ، تعریف کنیم :

$$a^0 = 1$$



فعالیت

۱- جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان دار	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰
حاصل	۲۷			

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر دوم جدول می‌باید؟

۳- سطر اول را ادامه دهید و عدد توان دار بعدی را 3^{-1} قرار دهید. اکنون با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه عددی را برای 3^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۴- جدول بالا را برای پایه‌های ۲ و ۶ با همان توان‌ها نیز تشکیل دهید. چه عددی را برای 2^{-1} و 6^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۵- برای عدد مخالف صفر a ، جدول بالا را برای توان‌های a^n بنویسید. چه عددی را برای a^{-1} پیشنهاد می‌کنید؟

۶- سطر اول را ادامه دهید و اعداد بعدی را a^{-2} و a^{-3} قرار دهید. با توجه به رابطه‌ای که بین اعداد سطر دوم پیدا کرده‌اید، چه اعدادی را برای a^{-2} و a^{-3} پیشنهاد می‌کنید؟

از این فعالیت نتیجه می‌شود که مناسب است برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند a ، تعریف کنیم:

مثال: در حالت کلی برای یک عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال:

$$4^{-1} = \frac{1}{4}, (0/1)^{-7} = \frac{1}{(0/1)^7}, (1/2)^3 = \frac{1}{(1/2)^{-3}}, (-5)^{-21} = \frac{1}{(-5)^{21}}$$



امثلهای درست

۱- عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان منفی بنویسید.

ه) $\frac{1}{b^3}$

د) $\frac{1}{b}$

ج) 25^0

ب) $\frac{1}{4^5}$

الف) 100^0

۲- عبارت‌های زیر را با توان مثبت بنویسید.

د) $2\pi^{-3}$

ج) $(\frac{1}{2})^{-3}$

ب) $(\sqrt{7})^{-5}$

الف) 5^{-2}

۳- عبارت‌های زیر را به صورتی بنویسید که کسری نباشند.

د) $\frac{\pi^2}{\pi^{-3}}$

ج) $\frac{-1}{b^2}$

ب) $\frac{1}{b^{-2}}$

الف) $\frac{1}{a^3}$

۴- حاصل اعداد 4^{-2} , 4^{-1} , و 4^0 را بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵- اعداد $(0/125)^3$, $(0/25)^0$, و $(0/5)^3$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

با چنین تعریفی از توان‌های مثبت و منفی اعداد حقیقی مخالف صفر، می‌توان نشان داد که اگر a و b دو عدد مخالف صفر و p و q دو عدد صحیح باشند، خواص مهم توان رسانی به شکل زیر برقرارند:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^{p+q} = a^p \times a^q & \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ (ab)^p = a^p \times b^p & \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \\ (a^p)^q = a^{pq} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} \end{array}}$$

$$(5 \times 7)^{-4} = 5^{-4} \times 7^{-4}$$

مثال :

$$(6^3)^{-2} = 6^{-2 \times 3}$$

$$\frac{4^{-2}}{4^{-7}} = 4^{-2-(-7)} = 4^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-7} = \frac{2^{-7}}{3^{-7}}$$

$$V^{-3} = \frac{1}{V^3}$$



مسانده

۱- هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عبارت با توان منفی بنویسید.

د) $\frac{1}{x^3}$

ج) 0.0008

ب) $\frac{1}{bc}$

الف) 0.00001

۲- هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت با توان مثبت بنویسید.

ج) $(\frac{2}{3})^{-3} \times (\frac{2}{3})^{-4}$

ب) $(\frac{1}{5})^{-4}$

الف) 3^{-5}

ه) $a^{-3} \times b^{-3} \times (c^{-3})^{-3}$

د) $a^{-3} \times b^{-3}$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ج) $5^{-1} - 2 \times 5^{-1} - 2 + 3 \times 4^{-1}$

ب) $(4^2)^{-1} + (2^{-3})^2$

الف) $2^{-3} + 3^{-2}$

۴- با استفاده از تعریف توان‌های منفی، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی مخالف صفر a و هر عدد طبیعی n داریم :

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

نماد علمی

آیا می‌دانید دور کره زمین در استوا چند متر است؟ اندازه‌گیری‌های نشان می‌دهد که این طول تقریباً $40,000,000$ متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی‌متر باشد، چند مورچه لازم است تا با هم دور کره زمین در استوا را پوشانند؟ چون هر متر 1000 میلی‌متر است، پس $40,000,000$ مورچه برای این کار لازم است. آیا می‌توانید این عدد را بخوانید؟ این عدد چند صفر دارد؟ در عمل به عده‌های بزرگ تراز این هم برخورد می‌کنیم. مثلاً قطر کره‌کشان راه شیری چند متر است؟ آیا می‌توان چنین اعدادی را روی کاغذ نوشت؟ روشی است که این شیوه نوشتمن برای اعداد بزرگ مناسب نیست. با این شیوه، نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت و اگر هم بنویسیم نمی‌توانیم متوجه میزان بزرگی آن‌ها شویم و محاسبه‌ای روی آن‌ها انجام دهیم.

یکی از کاربردهای توان اعداد، نوشتمن اعداد بسیار بزرگ و اعداد بسیار کوچک به صورت توانی است.^۱ مثلاً توان‌های مثبت 1^0 را به صورت $1^0, 1^{-1}, 1^{-2}, \dots$ حساب کنید. این اعداد رفته رفته بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که حتی نمی‌توان آن‌ها را روی کاغذ نوشت. آیا می‌توانید عدد 1^{5000} را در نمایش دهد؟ آن روی کاغذ بنویسید؟ توان‌های منفی 1^0 را به صورت $1^{-1}, 1^{-2}, 1^{-3}, \dots$ حساب کنید. این اعداد رفته رفته کوچک می‌شوند و میزان کوچکی آن‌ها به قدری است که نمی‌توان نمایش اعشاری آن‌ها را روی کاغذ نوشت. استفاده از توان به ما کمک می‌کند که اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچکی را که با آن‌ها برخورد می‌کیم به راحتی بنویسیم و روی آن‌ها محاسبه انجام دهیم.

یکی از شیوه‌های نوشتمن اعداد بزرگ، استفاده از توان‌های مثبت 1^0 است. مثلاً 1^2 عدد بسیار بزرگی است و اگر بخواهیم با شیوه‌های معمولی آن را بنویسیم، می‌بایست چهل صفر جلوی 1 بگذاریم. هیچ کس با یک نگاه نمی‌تواند تعداد این صفرها را بشمارد و مقدار واقعی این عدد را تشخیص دهد. اما، نمایش آن به صورت 1^2 ، به خوبی اندازه این عدد را نشان می‌دهد و کار محاسباتی با آن را عملی می‌کند. هر عدد مثبت اعشاری را می‌توان به شکل‌های گوناگونی به صورت ضرب یک عدد اعشاری در توان مثبتی از 1^0 نوشت.

۱- این مبحث بیشتر در فیزیک، شیمی و نجوم کاربرد دارد و مربوط به نمایش اعداد است.

مثال :

$$24^\circ.8764 \times 10^{-1} = 24^\circ.8764 \times 10^{-2} = 24^\circ.8764 \times 10^{-3} = 24^\circ.8764 \times 10^{-4}$$

$$0.432 \times 10^{12} = 0.432 \times 10^{10}$$

$$1.23456 \dots = 1/23456 \times 10^{11}$$

$$0.0672 \times 1.0^{14} = 6.72 \times 1.0^{12}$$

اعداد سمت راست تساوی‌ها، همان نماد علمی اعداد سمت چیز تساوی‌ها هستند.

از طریق نماد علمی، به خوبی، می‌توان میزان پزرگی آن عدد را فهمید و آن را با دیگر اعداد مقایسه کرد.

مثال : جرم زمین تقریباً 1×10^{24} کیلوگرم و جرم ماه تقریباً 1×10^3 و جرم خورشید تقریباً 1×10^{30}

است. جرم زمین چند برابر جرم ماه است؟ جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

$$\frac{\text{جرم زمین}}{\text{جرم ماه}} = \frac{6/_{\circ} \times 1_{\circ}^{22}}{7/_{\circ} 34 \times 1_{\circ}^{22}} \approx 1/_{\circ} 17 \times 1_{\circ}$$

$$\frac{\text{حجم خورشید}}{\text{حجم زمین}} = \frac{2/_{\circ} \times 10^{30}}{6/_{\circ} \times 10^{24}} \approx 3/_{\circ} 33 \times 10^5$$

مشکل نمایش معمولی اعداد بسیار بزرگ، برای اعداد بسیار کوچک هم وجود دارد. برای نمایش اعداد بسیار کوچک، می‌توان از توان‌های منفی 10^n استفاده کرد. به عنوان مثال، جرم یک ذره غبار تقریباً 6.7×10^{-16} کیلوگرم است. آیا میزان کوچکی این عدد را می‌توانید درک کنید؟ اعداد اعشاری بسیار کوچک را می‌توان به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر در یک توان منفی از 10^n نمایش

$$\therefore \dots \cdot \mathfrak{F}V = \mathfrak{F}/V \times \frac{1}{1^q} = \mathfrak{F}/V \times 1.$$

داد. برای مثال:

اگر یک عدد اعشاری مثبت را به صورت ضرب یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر، در توان صحیحی از ۱۰ⁿ بنویسیم، این نهایش را نماد علمی آن عدد می‌نامند.

هر عدد اعشاری کوچکی را نیز می‌توان با این روش نوشت، مثلاً:

$$V = V_0 \times 10^{-5}$$

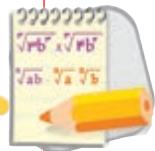
$$^{\circ}/^{\circ} \cdot ^{\circ} \cdot ^{\circ} 1^{\circ} 23 \times 1^{\circ}^{-7} = 1/^{\circ} 23 \times 1^{\circ}^{-11}$$

$$672 \times 1^{\circ}{}^{-17} = 672 \times 1^{\circ}{}^{-10}$$

مثال : جرم یک الکترون تقریباً 1×10^{-28} کیلوگرم و جرم اتم هیدروژن تقریباً 1×10^{-24} کیلوگرم است. آیا می توانند میزان کوچکی این اعداد را تصور کنید؟ کدام یک جرم بیشتری دارد و جرم آن چند برابر دیگری است؟ در نماد علمی جرم اتم هیدروژن، توان 10^{-24} عدد (۲۴) و در نماد علمی جرم الکترون، توان 10^{-28} عدد (۲۸) است که نشان می دهد جرم این ذرات بسیار کوچک است. هر قدر توان منفی از لحاظ قدر مطلق بزرگ تر باشد، عدد کوچک تر است، پس جرم اتم هیدروژن بیشتر از جرم الکترون است. با تقسیم جرم اتم هیدروژن بر جرم الکترون، عددی به دست می آید که نشان می دهد جرم اتم هیدروژن چند برابر بیشتر است.

$$\frac{\text{حجم اتم هیدروژن}}{\text{حجم الکترون}} = \frac{1/7 \times 10^{-24}}{9/1 \times 10^{-28}} = \frac{1/7}{9/1} \times 10^{-24} \times \frac{1}{10^{-28}} = \frac{1/7}{9/1} \times \frac{1}{10^{24}} \times 10^{28}$$

$$= \frac{1/7}{9/1} \times 10^4 \approx 0.1868 \times 10^4 = 1.868 \times 10^3$$



مسائل

۱- نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

$$200 \times 423 + 2$$

$$12 \times 150000$$

$$0/0004892$$

$$26478914$$

(الف)

(ج)

(ب)

(د)

$$\frac{1}{20000}$$

$$\frac{32 \times 11 \times 10^{12}}{44 \times 8}$$

$$12/8 \times 10^4$$

۲- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$2/543 \times 10^{-3}$$

$$1/43 \times 10^5$$

$$0/00421 \times 10^{-4}$$

$$1/23 \times 10^9$$

۳- جرم یک الکترون تقریباً 1×10^{-25} گرم است. جرم یک جسم ۲۵۴۹ تنی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (هر تن برابر 1000 کیلوگرم است).

کشاورزی، یک قطعه زمین به شکل مربع دارد. او برای کاشت و کار در زمین خود در هر متر مربع 5° گرم بذر مصرف کرده است. اگر این کشاورز برای کاشتن در همه زمین خود ۵ کیلوگرم بذر مصرف کرده باشد، محیط زمین او چقدر است؟

برای حل این مسئله ابتدا مساحت زمین را به دست می آوریم. مساحت زمین بر حسب متر مربع برابر است با $\frac{5^{000}}{5} = 100$. طول زمین عددی است که مربع آن 100 می شود.

اگر طول ضلع مربعی x باشد، می دانید که مساحت آن x^2 است. اگر مساحت مربعی 100 متر مربع باشد، طول یک ضلع آن چند متر است؟ باید دنبال عدد مثبتی بگردیم که مربع آن 100 باشد. این عدد 10 است، زیرا $10^2 = 100$. پس محیط آن : متر $= 4 \times 10 = 40$ خواهد بود.

برای مثال می دانید $9 = 3^2 = (-3)^2$. هر دو عدد 3 و (-3) - ریشه دوم 9 نامیده می شوند. اما، بنا به تعریف $\sqrt{9}$ آن ریشه دوم 9 است که مثبت هم باشد، بنابراین $\sqrt{9} = 3$.

فرض کنید a عددی مثبت باشد و $b = a^2$ ، در این صورت $b = (-a)^2$ و a و $-a$ را ریشه های دوم b می نامند.

برای یک عدد حقیقی مثبت b ، بنا به تعریف \sqrt{b} آن ریشه دوم b است که مثبت هم باشد.

$$\sqrt{64} = 8 \quad , \quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \quad , \quad \sqrt{0/01} = 0/1$$

مثال :

ریشه دوم صفر، همان صفر است و $\sqrt{0} = 0$.

توجه کنید

$$\sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} \neq -3 \quad , \quad -\sqrt{9} = -3$$



بیندیشیم

آیا همه اعداد ریشه دوم دارند؟ کدام اعداد ریشه دوم دارند؟

فعالیت

۱- درستی تساوی های زیر را با محاسبه طرفین تساوی توضیح دهید.

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| , \quad \sqrt{5^2} = |5| , \quad \sqrt{4^2} = \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$$

۲- درستی تساوی $\sqrt{a^2} = |a|$ را به ازای چند مقدار مثبت یا منفی که برای a انتخاب می کنید، بررسی کنید.

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

از فعالیت بالا نتیجه می شود که برای هر عدد a داریم :

مثال :

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 , \quad \sqrt{6^2} = |6| = 6 , \quad \sqrt{(-\pi)^2} = |-\pi| = \pi$$

مثال : $\sqrt{c^4} = c^2$ ، زیرا c^4 نامنفی است و $|c^2| = c^2$ و $c^4 = (c^2)^2$.

توجه داشته باشید که

هر وقت عبارت \sqrt{b} را به کار می بریم، فرض بر آن است که b عددی نامنفی است، زیرا فقط اعداد نامنفی ریشه دوم دارند.

تمرین در گذاشت

۱- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-6)^2} , \quad \sqrt{b^4 c^4} , \quad \sqrt{a^8}$$

۲- با استفاده از تعریف \sqrt{b} درستی تساوی $b^2 = (\sqrt{b})^2$ را توضیح دهید.

اگر اندازه حجم مکعبی را بدانید، اندازه طول ضلع آن را چگونه به دست می آورید؟
اگر طول ضلع مکعبی x باشد، می دانید که حجم آن x^3 است. برای مثال، اگر حجم مکعبی 64 باشد، برای یافتن طول ضلع آن، باید دنبال عددی بگردیم که توان سوم آن 64 باشد. این عدد 4 است، زیرا $4^3 = 64$.
بنابراین ریشه سوم 64 می نامند و با $\sqrt[3]{64}$ نشان می دهند، یعنی $\sqrt[3]{64} = 4$.

به طور کلی، اگر a و b دو عدد باشند به طوری که $b = a^3$ ، a را ریشه سوم b می نامند و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نشان می دهند.

توجه داشته باشید که هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

مثال :

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{(-0/1) \times (-0/1) \times (-0/1)} = -0/1$$

بینندگی‌شیم

- آیا همه اعداد ریشه سوم دارند؟ علامت ریشه سوم اعداد مثبت چیست؟ علامت ریشه سوم اعداد منفی چیست؟



تمرین در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{-125}, \sqrt[3]{a^3}, \sqrt[3]{b^6}, \sqrt[3]{x^4 x^5}$$

۲- با استفاده از تعریف $\sqrt[3]{b} = b$ درستی تساوی $\sqrt[3]{(b+c)} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ را توضیح دهید.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها



فعالیت

۱- جدول زیر را کامل کنید.

a	۹	۲۵	$\frac{1}{4}$
b	۴	۴	۱۰۰
$\sqrt{a} \sqrt{b}$			
\sqrt{ab}			

۲- چه رابطه‌ای بین اعداد سطر سوم و چهارم می‌بینید؟

۳- با انتخاب چند عدد دیگر برای a و b که مریع یک عدد گویا هستند، درستی نتیجه‌ای را که گرفته‌اید بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای هر دو عدد نامنفی مانند a و b داریم :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

توجه کنید که در تساوی بالا هر دو عدد a و b باید مثبت باشند. اگر a و b هر دو منفی باشند، سمت چپ تساوی معنا دارد، ولی سمت راست تساوی معنا ندارد.
به طور مشابه برای ریشه سوم گیری نیز برای هر دو عدد a و b، داریم :

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b}$$

مثال :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-9 \times 3} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt[3]{ba^r} \times \sqrt[3]{ab^r} = \sqrt[3]{ba^r ab^r} = \sqrt[3]{a^r b^r} = \sqrt[3]{(ab)^r} = ab$$

$$(\sqrt[3]{a})^r = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a \times a} = \sqrt[3]{a^r}$$

تمرین دریافتی



حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$1) \sqrt{28} \times \sqrt{7} =$$

$$2) \sqrt[3]{\circ / \circ} \times \sqrt[3]{\circ / 8} =$$

$$3) \sqrt[3]{2b^2} \times \sqrt[3]{4b^2} =$$

$$4) \sqrt[3]{abc} \times \sqrt[3]{a^2 b^5 c^8} =$$

در محاسبات با رادیکال‌ها، برای نشان دادن ضرب یک عدد در یک رادیکال و ضرب چند رادیکال در یکدیگر از علامت « \times » استفاده نمی‌کنیم. برای مثال ضرب $2 \times \sqrt{3}$ را به صورت $2\sqrt{3}$ و ضرب $5 \times \sqrt[3]{14}$ را به صورت $5\sqrt[3]{14}$ می‌نویسیم.

با انجام عملیات روی رادیکال‌ها سعی می‌کنیم عبارت‌های ساده‌تری به دست آوریم. این عمل را ساده کردن می‌نامند.

مثال : $\sqrt{75}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

مثال : عبارت $\sqrt{162b^5c^4}$ را ساده کنید.

$$\sqrt{162b^5c^4} = \sqrt{81b^4c^4 \times (2b)} = \sqrt{(9b^2c^2)^2} \sqrt{2b} = 9b^2c^2\sqrt{2b}$$

مثال : عبارت $\sqrt[3]{54b^4c^6}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[3]{54b^4c^6} = \sqrt[3]{27b^3c^6 \times (2b)} = \sqrt[3]{(3bc^2)^3} \sqrt[3]{2b} = 3bc^2\sqrt[3]{2b}$$



۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt[2]{15^{\circ}}, \sqrt{128a^5}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{100^3}, \sqrt[3]{25^{\circ}a^7b^3}$$

مشابه قانون ضرب رادیکال‌ها، در تقسیم رادیکال‌ها نیز برای هر دو عدد a و b ، که $a \neq b$ ، روابط زیر

برقرارند :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

مثال :

$$\sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$$

مثال :

$$\sqrt[3]{\frac{81a^5}{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{81a^5}}{\sqrt[3]{125c^6}} = \frac{\sqrt[3]{3^3 a^3 \times 3a^2}}{\sqrt[3]{5^3 (c^3)^2}} = \frac{3a \sqrt[3]{3a^2}}{5c^2} = \frac{3a}{5c^2} \sqrt[3]{3a^2}$$

گویا کردن مخرج کسرها

عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ را در نظر بگیرید. برای درک بهتر این گونه اعداد و میزان بزرگی آن‌ها می‌توانیم، آن‌ها را به گونه‌ای بنویسیم که در مخرج کسر، اعداد رادیکالی نداشته باشیم. برای مثال عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

این عمل را گویا کردن مخرج کسر می‌نامند.

مثال : مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt{5}}$ را گویا کنید و آن را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2 \times (\sqrt[3]{5})^2}{\sqrt[3]{5} \times (\sqrt[3]{5})^2} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2(\sqrt[3]{25})}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

فعالیت



به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$6\sqrt{3} = (2+4)\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{4} = (2+5)\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4}$$

۱- در تساوی‌های بالا از کدام خاصیت ضرب استفاده شده است؟

۲- در عبارت‌های $5\sqrt{11}$ و $5\sqrt[3]{6}$ ، به جای ۵ قرار دهید و مشابه محاسبه بالا را انجام دهید.



در جمع و تفریق عبارت‌های رادیکالی، در صورت وجود رادیکال‌های یکسان، می‌توان با فاکتورگیری از آن، ضرایب آن‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق کرد.
مثال:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{3} = (5+3-9+\frac{5}{3})\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

مثال: عبارت $3\sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ را ساده کنید.

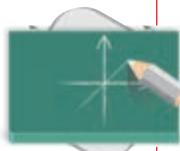
$$3\sqrt{32} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{16 \times 2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{16}\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3 \times 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

مثال: عبارت $\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63} &= \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9 \times 7} \\ &= 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -3\sqrt{5} + \sqrt{7} \end{aligned}$$

مثال: عبارت $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - \sqrt[3]{1000}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - \sqrt[3]{1000} &= \sqrt[3]{27 \times 3} + \sqrt[3]{(-8) \times 3} - \sqrt[3]{1000} \\&= \sqrt[3]{3^3} - 2\sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{1000}} = (3 - 2 - \frac{1}{10})\sqrt[3]{3} \\&= \frac{9}{10}\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$



تمرين در کلاس

توجه کنید

در حالت کلی

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

و

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$



مسئلات

۱- ریشه‌های دوم اعداد زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt[4]{16}$

۲۶

د) $\sqrt[9]{a^2}$

ج) $\frac{1}{a^8}$

۲- ریشه سوم اعداد زیر را محاسبه کنید.

ج) $\sqrt[64]{b^3}$

ب) $-\frac{1}{8}$

۲۷

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad \sqrt{4x^2}$$

$$\text{ب) } \sqrt{25}$$

$$\text{ج) } \sqrt{0/04}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{a^3 b^6}$$

$$\text{و) } \sqrt[3]{27}$$

$$\text{ه) } \sqrt[3]{-8}$$

۴- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{300}$$

$$\text{ب) } \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{-16}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{54}$$

۵- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را ساده کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{27} \times \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } -3\sqrt{5} \times (-2\sqrt{20})$$

$$\text{ج) } \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{27}}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{6}$$

$$\text{ه) } 2\sqrt{a^3 b} \times 3\sqrt{a^3 b^3}$$

۶- مخرج اعداد و عبارت‌های زیر را گویا کنید و آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ب) } \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\text{ج) } \frac{4}{\sqrt[3]{16}}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ه) } \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\text{و) } \sqrt[3]{\frac{3}{4a}}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$1) 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

$$2) \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$4) \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

$$5) \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$$

$$6) 4\sqrt{2^2 + 3^2} + \sqrt{52}$$

$$7) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$8) \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4}$$

$$9) 4\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$$

$$10) 3\sqrt[3]{y} - 2\sqrt[3]{y}$$

۸- به جای \square عدد مناسب قرار دهید.

$$1) \square - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$2) -2\sqrt{7} - \square = -3\sqrt{7}$$

$$3) \sqrt[3]{2} - \square = 2\sqrt[3]{2}$$



چند جمله‌ای‌ها و اتحادهای



تفریق و قرینه اعداد

تفریق عمل متقابل عمل جمع است. در یک عمل جمع، مانند $11+4=15$ ، گوییم، اگر 4 را به 11 اضافه کنیم حاصل 15 می شود، پس اگر 4 را از 15 کم کنیم، حاصل 11 می شود: $15-4=11$. این قاعده به طور کلی برای دو عدد a و b نیز صادق است. اگر $a+b=c$ ، گوییم حاصل تفریق b از c برابر a است و می نویسیم $c-b=a$.

تمرین در کلاس

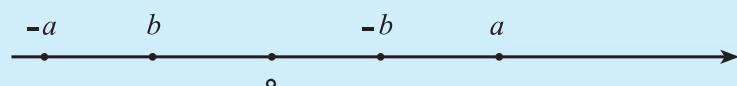
- ۱- اگر داشته باشیم $z = x + y$ ، دو تفریق از روی آن بنویسید.
- ۲- پاره خطی را به طول z رسم کنید و یک نقطه روی آن در نظر بگیرید. طول یکی از پاره خط ها را y بنامید و نشان دهید که طول پاره خط باقی مانده برابر $z-y$ است.

هر عدد قرینه ای دارد که شما در فصل اول با آن آشنا شدید. قرینه یک عدد دلخواه مانند a را با $-a$ نشان می دهند.



- نیز قرینه ای دارد که آن را با $(-a)$ نشان می دهند.

تمرین در کلاس



- ۱- با توجه به شکل بالا علامت (مثبت یا منفی بودن) a و b را تعیین کنید.
- ۲- درستی تساوی $a=(-a)$ را از روی شکل نشان دهید.
- ۳- قرینه یک عدد مثبت چه علامتی دارد؟
- ۴- اگر $b=-(-b)$ ، $(-b)$ چه مقداری دارد؟ علامت $(-b)$ چیست؟ قرینه یک عدد منفی چه علامتی دارد؟

جمع هر عدد با قرینه خود صفر است، یعنی برای هر عدد a داریم $a + (-a) = 0$. برای دو عدد a و b می‌توان نشان داد $a - b = a + (-b)$



تعریف در ریاضی

الف) درستی تساوی‌های زیر را با ذکر چند مثال بررسی کنید.

$$-(a-4) = -a+4 \quad (1)$$

$$-(a-b) = -a+b \quad (2)$$

$$x-(2+z) = (x-2) - z \quad (3)$$

$$x - (y+z) = (x-y) - z \quad (4)$$

$$x(y-z) = xy - xz \quad (5)$$

$$(x-y)^* = (y-x)^* \quad (6)$$

ب) تساوی‌های زیر را با زبان فارسی توضیح دهید.

$$-(a+b) = -a-b \quad (1)$$

$$(-x)y = x(-y) = -xy \quad (2)$$

$$(-x)(-y) = xy \quad (3)$$

$$(-a)^* = a^* \quad (4)$$

ج) تفاوت دو عبارت $-a^*$ و $(-a)^*$ را توضیح دهید.

تقسیم و معکوس اعداد

تقسیم، یکی دیگر از اعمال بین اعداد حقیقی است که متقابل عمل ضرب است. در یک عمل ضرب مانند $4 \times 12 = 48$ ، گوییم اگر 4 را در 12 ضرب کنیم 48 می‌شود، پس اگر 48 را بر 4 تقسیم کنیم حاصل 12 می‌شود

$$\text{و می‌نویسیم: } \frac{48}{4} = 12$$

در تقسیم عدد a بر عدد b ، به دنبال عددی می‌گردیم که اگر آن را در b ضرب کنیم حاصل برابر a شود. اگر

b مخالف صفر باشد چنانی عددی وجود دارد و آن را با استفاده از خط کسری به صورت $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهیم.

$$\text{بنابراین، اگر } c = \frac{a}{b}, \text{ این به معنای آن است که } bc = a$$

تقسیم a بر b را به صورت $a \div b = \frac{a}{b}$ نیز نشان می‌دهیم، پس هر وقت از تقسیم برععدی سخن می‌گوییم فرض بر آن است که آن عدد مخالف صفر است.

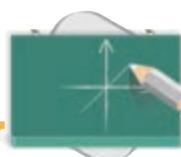
معکوس یک عدد، عددی است که اگر در آن ضرب شود، حاصل 1 شود. برای مثال، معکوس عدد 4 ، عدد $\frac{1}{4}$

$$\text{است، زیرا } 1 = \frac{1}{4} \times 4. \text{ معکوس عدد } (-3), \text{ عدد } \left(\frac{1}{-3}\right) \text{ است، زیرا } 1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3).$$

صفر معکوس ندارد و معکوس یک عدد مخالف صفر a ، عدد $\frac{1}{a}$ است.

$$\boxed{a \times \frac{1}{a} = 1}$$

تمرین در کلاس



(الف) تساوی‌های زیر را به زبان فارسی توضیح دهید. در عبارت‌های زیر فرض بر آن است که مخرج‌ها مخالف صفر هستند.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (1)$$

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{b} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} \quad (3)$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (4)$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (5)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (6)$$

ب) عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر بنویسید.

$$1) 2 + \frac{1}{a}$$

$$2) \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$3) \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$4) 2 - \frac{1}{x-1}$$

یکی از روش‌های بررسی تساوی دو عدد گویا، مانند $\frac{6}{9}$ و $\frac{10}{15}$ ، این است که مخرج هر کسر را در صورت کسر دیگر ضرب کنیم. با این عمل دو عدد بدست می‌آید که اگر مساوی بودند می‌توان نتیجه گرفت که این کسرها مساویند، در غیر این صورت این کسرها مساوی نیستند. در این مثال، چون $6 \times 10 = 15 \times 10$ این دو کسر مساویند.

به طور کلی این مطلب برای دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برقرار است، یعنی اگر $ad = bc$ ، این دو کسر مساوی‌اند و در غیر این صورت مساوی نیستند.

مثال: دو کسر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابرند زیرا حاصل ضرب صورت هر کسر در مخرج کسر دیگر، مقدارهای مساویند.



۱- اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند و c مخالف صفر باشد، ثابت کنید $c(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}) = a + b$. از این

تساوی نتیجه بگیرید که: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

۲- اگر a و b دو عدد مخالف صفر باشند، نشان دهید معکوس $\frac{a}{b}$ عدد $\frac{b}{a}$ است.

۳- اگر a و b و c و d چهار عدد باشند و b و c و d مخالف صفر باشند، با استفاده از مسئله (۲) نشان دهید که:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

۴- اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند که b و d مخالف صفر باشند، نشان دهید که:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

عبارت‌های جبری

فعالیت



مستطیلی رسم کنید و طول و عرض آن را x و y بنامید.

۱- مساحت و محیط این مستطیل را بحسب x و y بنویسید.

۲- طول قطر این مستطیل را بحسب x و y بنویسید.

۳- قطر مستطیل، مستطیل را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند. محیط و مساحت این مثلث‌ها را بنویسید.

در عبارت‌هایی که در بالا به دست آورده‌اید، نمادهای x و y به کار رفته‌اند که هر یک نشان‌دهنده عدد دلخواهی هستند.

نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می‌دهند، متغیر می‌نامند، زیرا به جای آن‌ها هر عددی می‌توان قرار داد.

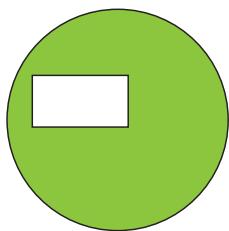
هر کدام از عبارت‌هایی که در فعالیت بالا به دست آورده‌اید، به صورت محاسباتی روی متغیرهای x و y ، از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان رسانی و ریشه‌گیری بوده است. این اعمال را اعمال جبری و عبارت‌های به دست آمده را عبارت‌های جبری می‌نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می‌پذیریم.

مثال: هر یک از عبارت‌های زیر، یک عبارت جبری هستند.

$$x+y, \quad 2x+5a, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}x-4x^2 \\ \pi r^2 - xy, \quad \sqrt{3}, \quad -3y+\sqrt{3}x^2, \quad a+b+\sqrt{a^2+b^2}$$

هر عبارت جبری نشان‌دهنده عددی است که با جایگذاری مقدار متغیرهاش معین خواهد شد.

مثال: عبارت جبری $2(a+b)$ دارای دو متغیر a و b است. اگر به جای a و b اعداد مثبتی قرار دهیم، مقدار این عبارت جبری نشان‌دهنده محیط مستطیلی است به طول a و عرض b . مقدار این عبارت جبری به ازای $a=3$ و $b=5$ برابر است با $=16$ $2 \times (3+5)=36$ و مقدار این عبارت جبری به ازای $a=6$ و $b=12$ برابر است با $=36$ $2 \times (6+12)=36$.



مثال: در شکل روی رو از سطح دایره‌ای به شعاع r ، سطح مستطیلی به طول x و عرض y برداشته شده است. مساحت قسمت رنگی یک عبارت

جبری با متغیرهای x و y و r به صورت $\pi r^2 - xy$ است. توجه داشته باشید که π یک عدد مشخص است و متغیر نیست.

مقدار این عبارت جبری به ازای $x=2$ و $y=5$ و $r=1$ برابر است با $100\pi - 2 \times 5 = 100\pi - 10$.
 مثال: $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ یک عبارت جبری با متغیرهای a و b است. به ازای مقادیر مثبت برای a و b ، این عبارت جبری، محیط مثلث قائم الزاویه‌ای را نشان می‌دهد که طول ضلع‌های زاویه قائم آن a و b است.
 مقدار این عبارت جبری به ازای $a=4$ و $b=3$ برابر است با $7 + \sqrt{25} = 12$.
 مثال: $-2x^2 - y^3 + z^3$ یک عبارت جبری است و به ازای $x=1$ و $y=\sqrt{2}$ و $z=-3$ مقدار آن برابر است با $-6 - 3 - 2 = (\sqrt{2})^3 - 2$.

یک جمله‌ای‌ها

ساده‌ترین نوع عبارت‌های جبری، آن‌هایی هستند که به صورت ضرب یک عدد در توان‌های صحیح نامنفی (عدد حسابی) از یک یا چند متغیر هستند. این گونه عبارت‌های یک جمله‌ای می‌نامند. برای مثال، عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند.

$$xy, 2ab^2, -5y^2z^3, \frac{2}{5}a^3x^2y, -\sqrt{5}aby^2, 6$$

توجه داشته باشید که یک عدد نیز به تنها یک جمله‌ای محسوب می‌شود.
 برای مثال، عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند.

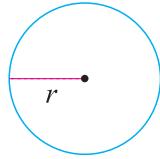
$$2x^2+y, x\sqrt{y}, 2+x\sqrt{x^2+1}, \frac{x^4y^2}{z}$$

در یک جمله‌ای‌ها، عددی که در متغیرها ضرب شده است را ضریب عددی آن یک جمله‌ای می‌نامند. در یک جمله‌ای $2x^3y^2$ عدد 3 توان متغیر x است، به همین خاطر گوییم درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر x عدد 3 است. همچنین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر y عدد 2 است.

به طور کلی، توان متغیری را که در یک جمله‌ای وجود دارد درجه یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌نامند.
 مثال: اگر شعاع دایره‌ای را r بنامیم، مساحت این دایره πr^2 است که یک، یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی π است. درجه این یک جمله‌ای نسبت به r عدد 2 است.

در یک جمله‌ای‌هایی که فقط یک متغیر وجود دارد، توان آن متغیر را درجه آن یک جمله‌ای می‌گویند و نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

محیط این دایره نیز برابر $2\pi r$ است که آن هم یک جمله‌ای با متغیر r و ضریب عددی 2π است. درجه این



یک جمله‌ای برابر ۱ است.

توجه کنید

اعداد مخالف صفر یک جمله‌ای‌های درجه صفر هستند.

تئوری درس‌ها



- ۱- کدام یک از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند. ضریب عددی و درجه هر یک جمله‌ای را برحسب متغیر x تعیین کنید. نمادهای حرفی، همگی متغیر هستند.

$$4x^3y, 5y^{-1}x, 2\sqrt{2}xy, a\sqrt{b}, \frac{ab}{2}, \frac{ab}{x}$$

۲- جدول زیر را کامل کنید.

عبارت جبری	آیا یک جمله‌ای است؟	متغیرها	درجه نسبت به x	ضریب عددی
$\sqrt{3}x^2yz^3$	بله	x, y, z	۲	$\sqrt{3}$
$4xy^r$				
$-a^rx$				
$\frac{xy}{a}$				
$\frac{xa^rb}{\sqrt{v}}$				
$5y\sqrt{x}$				

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

در فعالیت زیر می‌خواهیم چگونگی جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.



به تساوی زیر توجه کنید :

$$5ax = (3+2)ax = 3ax + 2ax$$

- ۱- در تساوی بالا کدام خاصیت عمل ضرب مورد استفاده قرار گرفته است؟
- ۲- در طرف راست تساوی بالا، دو یک جمله‌ای وجود دارد. اختلاف این دو یک جمله‌ای در چیست؟

۳- طرف راست تساوی‌های زیر را مانند تساوی بالا بنویسید.

$$9ma^rx = (7+2)ma^rx = \dots$$

$$4axy^r = (9-5)axy^r = \dots$$

$$12ab^rx = (8+3+1)ab^rx = \dots$$

۴- شباهت‌ها و تفاوت‌های یک جمله‌ای‌هایی را که در طرف راست تساوی‌ها به وجود می‌آیند مشخص کنید.

یک جمله‌ای‌هایی که قسمت نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان است، یک جمله‌ای‌هایی متشابه می‌نمند.

مثال : یک جمله‌ای‌های زیر متشابه‌اند.

$$9yzx^r, -x^ryz, \sqrt{3}zx^ry, -\frac{5}{9}x^2zy$$

مثال : یک جمله‌ای‌های زیر متشابه نیستند.

$$2xy, 5xz, -xya, 5ab$$



فعالیت

به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$4a + 6a = (4+6)a = 10a$$

$$7xy^r - 3xy^r = (7-3)xy^r = 4xy^r$$

$$-\frac{3}{5}x^2 + x^2 = (-\frac{3}{5} + 1)x^2 = \frac{2}{5}x^2$$

۱- از کدام خاصیت جمع و ضرب در محاسبات بالا استفاده شده است؟

۲- آیا در هر تساوی، یک جمله‌ای‌های آن متشابه‌اند؟

۳- چه رابطه‌ای بین ضراایب یک جمله‌ای‌هایی که در طرفین تساوی‌ها می‌بینید وجود دارد؟

۴- با توجه به عملیات بالا، محاسبات مشابهی را برای عبارت‌های زیر انجام دهید.

$$5x + 2x = \dots$$

$$9ab - 3ba = \dots$$

$$3xy^r - 4xy^r = \dots$$

$$\frac{1}{5}y^r - \frac{2}{7}y^r = \dots$$

$$4xyz + 2yxz - yzx = \dots$$

۵- آیا عبارت $3ab + 2a$ را می‌توان به شکل یک جمله‌ای نوشت؟ چرا؟

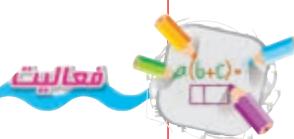
از فعالیت‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت:

- دو یا چند یک جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.
- برای جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه، کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.
- بین یک جمله‌ای‌هایی که متشابه نیستند نمی‌توان جمع و تفریق انجام داد.

توجه کنید

$$3x + 5x \neq 8x^2, 3x + 5y \neq 8xy$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها



به تساوی زیر توجه کنید:

$$4xy^3z \times 5x^2ya^3 = (4 \times 5)xx^2y^3zya^3 = 20x^{1+2}y^{3+1}za^3$$

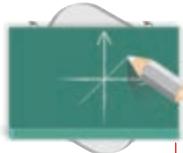
- ۱- در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عمل ضرب و قاعدة توان‌رسانی استفاده شده است؟
- ۲- ضرایب عددی یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی و ضریب عددی یک جمله‌ای طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟
- ۳- توان‌های هریک از متغیرهای یک جمله‌ای‌های طرف چپ تساوی با توان همان متغیر در طرف راست تساوی چه رابطه‌ای با هم دارند؟
- ۴- محاسبات بالا را برای عبارت‌های زیر نیز انجام دهید.

$$4x^3y^3z^3 \times 2xy^3w = \dots$$

$$-3x^2a \times \frac{1}{5}ya^3 = \dots$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که:

در ضرب یک جمله‌ای‌ها، باید ضرایب عددی آن‌ها را در هم ضرب کنیم و توان‌های متغیرهای یکسان آن‌ها را با هم جمع کنیم و متغیرهای غیریکسان را در هم ضرب کنیم.



تمرین در کارگاه

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت خلاصه کنید.

$$1) -3x^2 \times 5y^2 =$$

$$2) 4x^2y \times \frac{1}{2}xy^2 =$$

$$3) 6xy \times 2y^2 \times \frac{1}{3}x^2y =$$



مسائل

۱- در عبارت‌های زیر تعیین کنید کدام عبارت یک جمله‌ای است و ضریب عددی آن و درجه آن را نسبت به هر کدام از متغیرها بیش تعیین کنید.

$$\text{الف } 4ab^3, \text{ ب } \frac{2x}{yz}, \text{ ج } 4x^2a\sqrt{y}, \text{ د } -\frac{4}{5}xyz, \text{ ه } \frac{x^2yz^3}{2}$$

۲- در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$4a^3 = 4a^2 + \boxed{}$$

$$2ax = 16ax + \boxed{}$$

$$2ax + \boxed{} = ax$$

$$\frac{ab}{2} + \boxed{} = \frac{3ab}{2}$$

۳- عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

$$4x^2 - 2x^2$$

$$-3/5t - 2/5t$$

$$2xy^2 - xy^2 + 5y^2x$$

$$\frac{ab}{2} - \frac{ba}{3}$$

$$-a^2b + 3b^2a$$

$$2xyz - 1/4yxz - 1/6zyx$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4xy \times 5x^2y^2$$

$$2xy \times \frac{1}{3}x^2yz^2$$

$$(-\frac{1}{2}xy^2)(-\frac{1}{3}x^2y)$$

$$4x(2y-3)$$

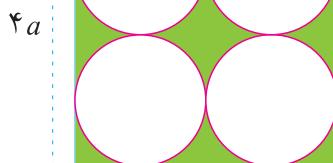
$$-h(2x+4y)x$$

$$\frac{x}{4}(a+b)$$

۵- اگر a و b اعدادی باشند به طوری که $5a + 2b = 5$ و $c = 3a + 2b$ ، مقدار $2(b+c)$ چقدر خواهد بود؟

۶- از سطح مربع رو برو چهار دایره مساوی خارج شده است،

نشان دهید که مساحت قسمت رنگی، به صورت یک جمله‌ای با متغیر a است. درجه و ضریب عددی این یک جمله‌ای را تعیین کنید.



چندجمله‌ای‌ها

آن دسته از عبارت‌های جبری که به صورت جمع چند یک جمله‌ای غیرمتشابه هستند را چندجمله‌ای می‌نامند.
یک جمله‌ای‌ها تیز چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.
مثال : عبارت‌های زیر چندجمله‌ای هستند.

$$3x^2y + 8xyz - \sqrt{6}y^3 + 1, \quad -x + yz + 5x^2z^2 + 3, \quad 12z^2 - xy^5 + \frac{\sqrt{3}}{5}yz^3 - 1$$

اگر متغیری مانند x در یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد، بزرگ‌ترین توانی از x را که در آن چندجمله‌ای وجود دارد درجه آن چندجمله‌ای نسبت به x می‌نامند.

مثال : چندجمله‌ای‌های $x+2, \frac{x}{4}y^2 - y^2 + z - 9, \sqrt{5}z^3$ نسبت به x از درجه ۱ هستند.
چندجمله‌ای‌های $6zx^3 + yx^2 - x^2 + 2, xy - x^2 + y^2 + z^2 + 5$ نسبت به x از درجه ۲ هستند.
چندجمله‌ای‌های $-3x^2z^2 - x - y^2, -3x^2y + xyz + yx^2 + 5$ نسبت به x از درجه ۳ هستند.
برای نوشتن چندجمله‌ای‌های یک متغیره، روش استاندارد آن است که یک جمله‌ای‌هایی که در چندجمله‌ای وجود دارند به ترتیب از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان نوشته شوند. این شیوه نوشتن چندجمله‌ای‌های یک متغیره را نمایش استاندارد چندجمله‌ای‌ها می‌نماید. برای مثال، نمایش استاندارد برخی چندجمله‌ای‌ها در زیر آمده است.

چندجمله‌ای	نمایش استاندارد
$-5x + 10 + 3x^2$	$3x^2 - 5x + 10$
$4y^3 - 2 - y^2 + y$	$-y^2 + 4y^3 + y - 2$
$15 - a^2 + 2a^3 + 8a^5$	$8a^5 + 2a^3 - a^2 + 15$

جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها

از آن جا که چندجمله‌ای‌ها به صورت جمع چند یک جمله‌ای هستند، برای جمع چندجمله‌ای‌ها، کافی است جمله‌های متشابه آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال : جمع دو چندجمله‌ای $-8xy^2 + z + 6yz + 5$ و $4xy^2 + 4yz - 5$ را بنویسید.

$$(xy^2 + 4yz - 5) + (-8xy^2 + z + 6yz + 5) = xy^2 - 8xy^2 + 4yz + 6yz + z - 5 + 5 = -4xy^2 + 10yz + z - 3$$

مثال : جمع دو چندجمله‌ای $-15 + 4a^2b^2 + 4b - 7$ و $4a^2b^2 - 4b + 3$ را بنویسید.

$$(4a^2b^2 + 4b - 7) + (-4a^2b^2 + 4b - 3) = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4b - 3b - 7 + 7 = b - 8$$

برای ضرب چندجمله‌ای‌ها، ابتدا ضرب یک جمله‌ای‌ها در چندجمله‌ای‌ها را بررسی می‌کنیم.

مثال : حاصل ضرب یک جمله‌ای $2xy$ در چندجمله‌ای $x^2y + 3xy^3$ را حساب کنید.

$$2xy(x^2y + 3xy^3) = 2xy \times x^2y + 2xy \times 3xy^3 = 2x^3y^2 + 6x^2y^4$$

در محاسبه بالا، ابتدا با استفاده از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع، عبارت به صورت ضرب بین یک جمله‌ای‌ها در آمده است، سپس از قاعده ضرب یک جمله‌ای‌ها استفاده شده است.

مثال : حاصل ضرب یک جمله‌ای x^5a^2 - در چندجمله‌ای a^2-x^3 را حساب کنید.

$$-5ax^5(x^3-a^2)=(-5ax^5) \times x^3 + (-5ax^5) \times (-a^2) = -5ax^8 + 5a^5x^5$$

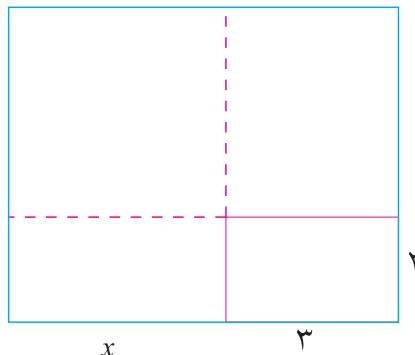
برای ضرب دو چندجمله‌ای در یکدیگر، تک تک جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب می‌کنیم.

مثال : حاصل ضرب چندجمله‌ای $x+2$ در چندجمله‌ای $x-1$ را به دست آورید.

$$(x+2)(x-1)=x(x-1)+2(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$$

علت درستی محاسبه بالا، خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع است. $(-x)$ مانند یک عدد در نظر گرفته شده است و در $x+2$ ضرب شده است.

مثال : مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ را در نظر بگیرید. اگر طول و عرض این مستطیل را x واحد افزایش دهیم، مساحت آن چقدر می‌شود؟



طول و عرض مستطیل جدید عبارت است از $x+3$ و $x+2$ پس مساحت مستطیل جدید برابر است با $(x+3)(x+2)$ که ضرب دو چندجمله‌ای است.

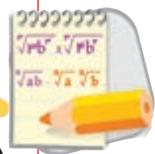
$$(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$$

مثال : حاصل ضرب چندجمله‌ای $xy-yz-2$ در چندجمله‌ای $x-y^3$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (xy-yz-2)(x-y^3-1) &= xy(x-y^3-1)+yz(x-y^3-1)-2(x-y^3-1) \\ &= x^2y+xy^4-xy+xy^4yz+y^5z-yz-2x^2+2y^3+2 \end{aligned}$$

ابوبکر محمدبن حسین کرجی

رباضیدان مسلمان (نیمه دوم قرن چهارم قمری)، از نخستین کسانی بود که عملیات حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه‌یابی را برای ساختن و ساده کردن عبارات جبری به کار برد. او عبارات جبری همچون «مال و چهارمکعب و شش کمتر» (x^3+4x^6-6) را ساخت. کرجی توان های مختلف مجھولات در عبارات جبری را «مراتاب» می‌نامید که مانیز امروزه همین کار را می‌کنیم. کرجی دریافت که حاصل ضرب x^n در $\frac{1}{x^n}$ یک می‌شود. با این که او می‌دانست $b-a = a+b = -(a-b)$ ولی از قانون $(a-b) = -(b-a)$ بی خبر بود.



- ۱- طول ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع را a نماید. این مثلث را بر حسب a حساب کنید. آیا این عبارت یک جمله‌ای است؟ در این صورت ضریب عددی و درجه آن را مشخص کنید.
۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

- (الف) $(x+y)+(2x+3y)$
 (ب) $(2x^2+5y)-(x^2+y^2)$
 (ج) $2x^2+xy+3x^2+yx$
 (د) $(10k^2-3kt+4k^2)-(3k^2+5kt)$

۳- اگر داشته باشیم $A=1-2x^2$ و $B=3x^2-4x+1$ و $C=x^2-x$ ، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

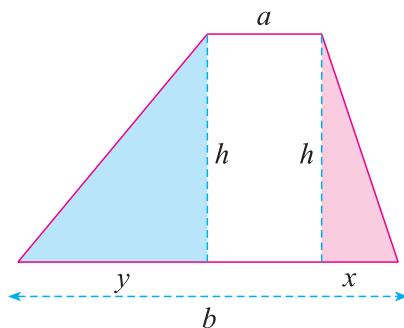
- | | | |
|------------------|-----------|-----------|
| (الف) $(A+B)-3C$ | (ب) $A+B$ | (ج) $A-B$ |
| (د) C^2-A^2 | (ه) A^2 | |

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

- (الف) $4(x+y)$
 (ب) $2x(x+3)+9x(x-4)$
 (ج) $(x+1)(x^2-x+1)$

۵- با استفاده از شکل زیر و استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل، فرمول مساحت ذوزنقه را که به صورت

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$



اتحادها و تجزیه



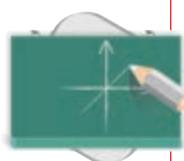
x	x^3	$6x$	$x^3 + 6x + 9$	$(x+3)^3$
-3				
-2				
...				
$\frac{1}{2}$				

- ۱- به ازای مقادیر داده شده برای x جدول را کامل کنید.

- ۲- با مقایسه دو ستون آخر جدول چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر جدول را به ازای چند مقدار دیگر برای x ادامه دهیم، چه حدسی برای رابطه بین دو ستون آخر می‌زنید؟
- ۳- به دلخواه خود چند مقدار دیگر برای x درنظر بگیرید و حدس خود را آزمایش کنید.
- ۴- $(x+3)^3$ همان حاصل ضرب $(x+3)(x+3)(x+3)$ است. این عمل ضرب را انجام دهید و حاصل را با چندجمله‌ای $x^3 + 6x^2 + 9x + 9$ مقایسه کنید. آیا این بررسی، حدس شما را تأیید می‌کند؟

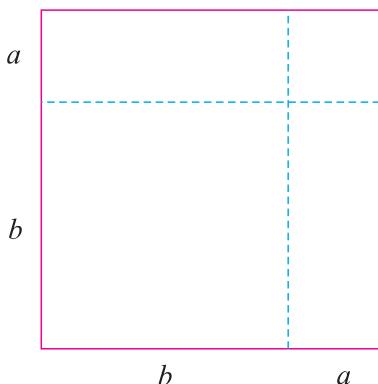
تساوی $x^3 + 6x^2 + 9x + 9 = (x+3)^3$ به ازای هر مقداری از x برقرار است. این گونه تساوی‌ها را اتحاد می‌نامند.

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدارهای یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.



تمرین در کلاس

- ۱- توان رسانی را در عبارت $(x+5)^3$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.
- ۲- توان رسانی را در عبارت $(2x-6)^3$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.
- ۳- توان رسانی را در عبارت $(a+b)^3$ انجام دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.



یک مربع رسم کنید و ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول این پاره خط‌ها را a و b بنامید.

مساحت این مربع را یک‌بار مستقیماً از طریق طول ضلع آن، و بار دیگر به صورت مجموع مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌های کوچک‌تر محاسبه کنید و آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهید. چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟

برای هر دو عدد a و b ، با محاسبه $(a+b)(a+b)$ نتیجه می‌شود تساوی زیر به ازای هر مقداری برای a و b برقرار است.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

تساوی بالا یک اتحاد است و آن را اتحاد «مربع دو جمله‌ای» می‌نامند. از آن جا که در یک اتحاد، تساوی به ازای هر مقداری از متغیرها برقرار است، اگر به جای متغیرها، عبارت‌های جبری نیز قرار دهیم باز هم تساوی برقرار خواهد بود. این عمل را جایگذاری می‌نامند.

مثال: در اتحاد $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ ، به جای a ، b و به جای x ، y قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$(xy+3)^2 = (xy)^2 + 2(xy) \times 3 + 3^2$$

پس از ساده کردن، تساوی بالا به شکل $(xy+3)^2 = x^2y^2 + 6xy + 9$ درمی‌آید. این تساوی نیز یک اتحاد است.

- ۱— در طرفین تساوی، به جای a عبارت $2x$ و به جای b عبارت $3y$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.
- ۲— در طرفین تساوی، به جای a مقدار (-1) و به جای b عبارت y قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.
- ۳— در طرفین تساوی، به جای a عبارت xz و به جای b عبارت $(-y)$ قرار دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید.

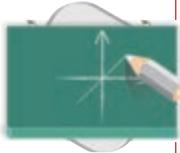
اگر در اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ به جای b ، $(-b)$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

این تساوی نیز یک اتحاد است و آن را نیز اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نامند.

با جایگذاری عبارت‌های دلخواه روی متغیرهای یک اتحاد، اتحادهای دیگری ساخته می‌شوند که آن‌ها را نمونه‌ای از اتحاد اولیه می‌نامند. برای مثال، اتحادهای زیر همگی نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای هستند.

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, (xy+4z)^2 = x^2y^2 + 8xyz + 16z^2, (\sqrt{5} - 2t)^2 = 5 - 4\sqrt{5}t + 4t^2$$



تمرین دریافتی

الف) با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای محل‌های نقطه‌چین را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a+1)^2 = a^2 + \dots + 1$$

$$(1+b)^2 = \dots + 2b + \dots$$

$$(x-6y)^2 = \dots$$

$$(ax-3)^2 = \dots - 6ax + \dots$$

$$(x^2-yz)^2 = \dots$$

ب) محاسبه زیر را در نظر بگیرید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

$$(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = ax + ay + bx + by$$

ج) محاسبه بالا را از آخرین تساوی به اولین تساوی مجددًا بنویسید و درستی هر مرحله را توضیح دهید.

اگر اتحاد مربع دو جمله‌ای را به صورت $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ بنویسیم، مانند آن است که یک چندجمله‌ای را که به صورت مجموعی از یک جمله‌ای هاست به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درآورده‌ایم.

اگر بتوان یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای نوشت به طوری که درجه آن‌ها کمتر باشد، گوییم آن چندجمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

تجزیه چندجمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چندجمله‌ای‌ها است. در عمل ضرب، عبارت‌هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند، با انجام عمل ضرب، به صورت جمع چند یک جمله‌ای درمی‌آوریم. ولی در تجزیه، یک چندجمله‌ای را که به صورت جمع چند یک جمله‌ای است، به صورت حاصل ضرب دو یا چند، چند جمله‌ای دیگر درمی‌آوریم.

اگرچه عمل ضرب ساده است ولی عمل تجزیه آسان نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را انجام داد.
مثال: عبارت $x^2 - 8x + 16$ را تجزیه کنید.

این عبارت نمونه‌ای از اتحاد مربع دو جمله‌ای است و داریم $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

اتحادها نقش مهمی در تجزیه چندجمله‌ای‌ها دارند. هر اتحادی در واقع نشان‌دهنده یک عمل تجزیه است و با استفاده از نمونه‌های این اتحادها می‌توان برخی از تجزیه‌ها را انجام داد.

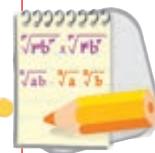
تمرين در کلاس



با استفاده از اتحاد مرربع دو جمله‌ای چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 10x + 25, \quad 4a^2 + 4ax + x^2, \quad x^2y^2 - 8xy + 16, \quad x^2 - 2x^2yz + y^2z^2$$

مسازل



۱- با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x+1)^2 =$$

$$(x-1)^2 =$$

$$(2a+b)^2 =$$

$$(a-3b)^2 =$$

$$(2a-3b)^2 =$$

$$(4a-2)^2 =$$

$$(2x + \frac{1}{2})^2 =$$

$$(x+2)^2 - (x-1)^2 =$$

۲- عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسید.

$$a^2 + 4a + 4 =$$

$$y^2 - 6y + 9 =$$

$$9x^2 - 6x + 1 =$$

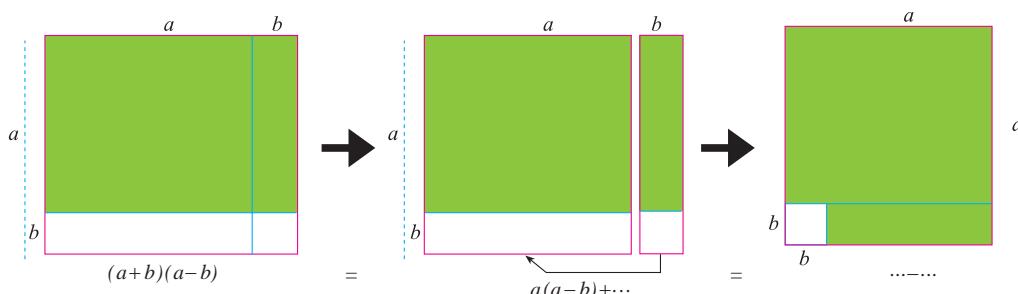
$$x^2 + 2xy + y^2 =$$

فعالیت



دو عدد مثبت a و b را با شرط a < b در نظر بگیرید.

۱- از روی شکل زیر در محل‌های نقطه‌چین مساحت قسمت‌های رنگی را بنویسید.



۲- اتحادی را که به دست آورده‌اید، بنویسید.

۳- عمل ضرب $(a-b)(a+b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. اتحادهای به دست آمده را با هم مقایسه کنید.

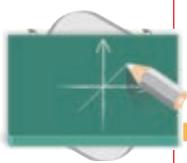
با محاسبه مستقیم نتیجه می‌شود:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

این یک اتحاد است و آن را «اتحاد مزدوج» می‌نامند. از این اتحاد نیز در تجزیه عبارت‌های جبری استفاده می‌شود.
مثال:

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) \\-2a^2 + 4b^2 &= (3b)^2 - (\sqrt{2}a)^2 = (3b - \sqrt{2}a)(3b + \sqrt{2}a)\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، رادیکالی شدن ضرایب عددی اشکالی ندارد و در تجزیه فقط باید چندجمله‌ای‌های با درجه کوچک‌تر به دست آوریم.



تمرین دریافت

۱- با استفاده از اتحاد مزدوج در محل‌های نقطه‌چین عبارت‌های مناسب بگذارید.

$$\begin{aligned}(x+4)(x-4) &= x^2 - \dots \\(2x+3)(2x-3) &= \dots - 9 \\(ab+x)(ab-x) &= \dots \\(x+\dots)(x-\dots) &= x^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

۲- با استفاده از اتحاد مزدوج چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - 9, \quad 4x^2 - y^2, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}, \quad x^2y^2 - 9z^2$$

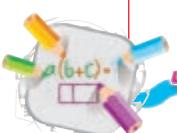
استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده‌تر می‌کند.

مثال: مقدار 999^2 را حساب کنید.

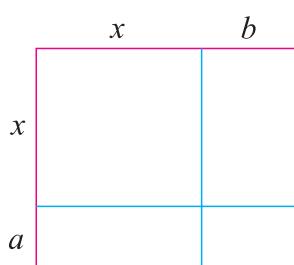
$$999^2 = (1000-1)^2 = (1000)^2 + 1 - 2 \times 1000 = 1000000 - 2000 = 998001$$

مثال: مقدار $2 \times 998 \times 1000$ را حساب کنید.

$$998 \times 1002 = (1000-2)(1000+2) = (1000)^2 - 2^2 = 1000000 - 4 = 999996$$



فعالیت



برای سه عدد مثبت x و a و b ، مستطیلی به طول $x+a$ و عرض $x+b$ و عرض $x+a+b$ را رسم شده است.

۱- مساحت این مستطیل را یک بار از طریق طول و عرض آن و یک بار از طریق مساحت مربع و مستطیل‌های داخل آن حساب کنید و مساحت‌های به دست آمده را مساوی قرار دهید. اتحاد به دست آمده

را بنویسید.

۲- عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ را انجام دهید و اتحاد به دست آمده را بنویسید. این اتحاد را با اتحاد به دست آمده در بالا مقایسه کنید.

با انجام عمل ضرب $(x+a)(x+b)$ نتیجه می‌شود :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

این یک اتحاد است و آن را اتحاد «یک جمله مشترک» می‌نامند.

مثال : چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^3 + 5x^2 + 4 = x^3 + (4+1)x^2 + 4 \times 1$$

$$= (x+4)(x+1)$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = x^3 + (-2 + (-3))x^2 + (-2) \times (-3)$$

$$= (x-2)(x-3)$$

مثال : چندجمله‌ای $-5x^3 - 2x^2$ را تجزیه کنید.

با بررسی این چندجمله‌ای می‌توان فهمید که دو برابر این چندجمله‌ای را راحت‌تر می‌توان تجزیه کرد. اگر این چندجمله‌ای را A بنامیم، داریم :

$$2A = 4x^3 - 1 \cdot x^2 - 6 = (2x)^3 - 5(2x)^2 - 6 = (2x+1)(2x-3)$$

$$A = \frac{(2x+1)(2x-3)}{2} = (2x+1)(x-3)$$



۱- با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$1) (x+1)(x+2) =$$

$$2) (2x-1)(2x+4) =$$

$$3) (ax+5)(ax+b) =$$

$$4) (x-a)(x-b) =$$

۲- با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^3 + 4x^2 + 3, \quad x^3 + x^2 - 2, \quad x^3 - 6x^2 + 8$$

۳- چندجمله‌ای زیر را تجزیه کنید.

$$3x^3 + 5x^2 - 2$$



فعالیت

۱- محاسبه زیر را انجام دهید و از طریق آن یک اتحاد بنویسید.

$$(a-b)(a^3+ab+b^3)=$$

۲- در اتحاد به دست آمده در بند (۱) به جای a , b , $(a-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

۳- محاسبه زیر را تکمیل کنید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=$$

۴- در اتحاد به دست آمده در بند (۳) به جای a , b , $(a-b)$ قرار دهید و یک اتحاد از طریق آن بنویسید.

تساوی‌های زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحادهای تفاضل و مجموع مکعب دو جمله می‌نامند.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

تساوی‌های زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرارند و آن‌ها را اتحاد مکعب دو جمله‌ای می‌نامند.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

مثال ۱ :

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x)^3-1^3=8x^3-1$$

مثال ۲ :

$$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=a^3+(2b)^3=a^3+8b^3$$

مثال ۳ :

$$(2a-3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2+(-3b)^3$$

$$=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$$

مثال ۴ :

$$\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)^3=\left(\frac{a}{3}\right)^3-3\left(\frac{a}{3}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)+3\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^3$$

$$=\frac{a^3}{27}-\frac{a^2b}{6}+\frac{ab^2}{4}-\frac{b^3}{8}$$

مثال ۵ : عبارت x^4-1 را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^4-1 &= (x^2)^2-1 \\ &= (x^2-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \end{aligned}$$



۱- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$1) (x+2)(x^2 - 2x + 4) =$$

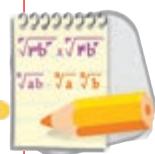
$$2) (2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) =$$

$$3) (x+5)^3 =$$

۲- با استفاده از اتحادها چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 8 \quad , \quad 27x^3 - \frac{1}{8} \quad , \quad a^6 - 64b^6$$

مسائل



۱- کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد هستند؟

$$1) x+x=2x$$

$$2) x \times x = x^2$$

$$3) x^2 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$$

۲- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x+1)(x+4) =$$

$$(x-1)(x+5) =$$

$$(2x-4)(2x+3) =$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) =$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) =$$

۳- به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - a^2 =$$

$$2-a^2 =$$

$$4x^2 - 9 =$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{25} =$$

$$16x^2 - 36y^2 =$$

$$a^2x^2 - b^2y^2 =$$

$$x^2 - (a+b)x + ab =$$

$$x^2 - 7x + 12 =$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 =$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) =$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9) =$$

$$(2x+1)(4x^2 - 2x + 1) =$$

$$(x+1)^3 =$$

$$(2a+1)^3 =$$

$$(a-2)^3 =$$

۵- به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

$$x^3 - 27 =$$

$$a^3 + 8b^3 =$$

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 =$$

$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$$

۶- چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^4 - 2x^2 + 1 =$$

$$x^4 - 1 =$$

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 =$$

$$x^4 + x^2 - 2 =$$

۷- برای اعداد مثبت a , b و c با رسم یک شکل ثابت کنید:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab + 3ac + 3bc$$

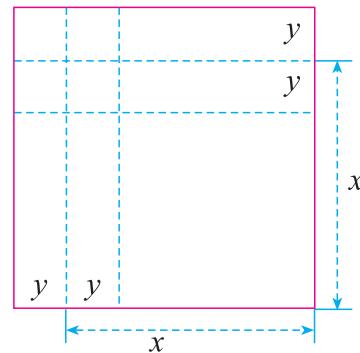
این تساوی را با استفاده از اتحاد مرربع دو جمله‌ای ثابت کنید. اگر به جای b , $-b$) قرار دهیم نتیجه بگیرید:

$$(a-b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3ab + 3ac - 3bc$$

۸- با استفاده از اتحاد مزدوج، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(x+y)^3 - (x-y)^3 = 4xy$$

تساوی بالا را با استفاده از اتحاد مرربع دو جمله‌ای ثابت کنید. در حالتی که x و y اعداد مثبتی باشند و $y < x$ ، تساوی بالا را به کمک شکل زیر ثابت کنید.



ابوبکر محمدبن حسین کرجی فرمول زیر را اثبات کرده است:

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}$$

آیا می‌توانید به کمک اتحادها این فرمول را ثابت کنید؟ (A و B اعدادی مثبت هستند و $B < A$)

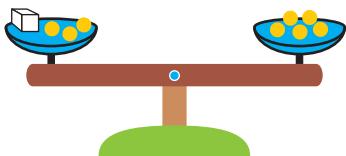
معادلات درجه اول و معادله خط



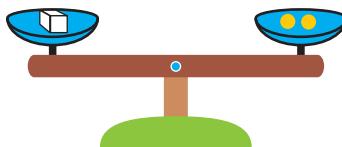
به نظر شما بالا رفتن از پله‌ای که می‌ینید آسان‌تر است یا بالا رفتن از سطح شیبداری که در کنار آن است؟
نسبت بالا رفتن از آن‌ها به مسافت افقی طی شده در آن‌ها چه قدر است؟

معادله

شکل زیر یک ترازوی دوکفه‌ای را نشان می‌دهد که در دو طرف آن چند وزنه‌یک کیلوگرمی و یک جسم با وزن نامعلوم قرار داده شده تا ترازو به حالت تعادل درآید.

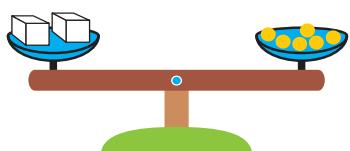


به تعادل درآمدن ترازو به معنای آن است که وزن اجسام قرار گرفته در دو کفه ترازو مساوی است. پس، اگر وزن نامعلوم جسم را x بنامیم، عبارت ریاضی بیان کننده این وضعیت $x+3=5$ است. مقدار x چقدر است که این تساوی برقرار شده است؟ برای پاسخ به این سؤال، می‌توانیم از هر دو کفه ترازو سه وزنه‌یک کیلوگرمی را برداریم؛ که در این صورت باز هم ترازو در حالت تعادل باقی می‌ماند.

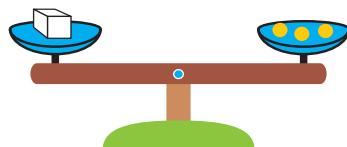


این عمل به معنای آن است که اگر از طرفین تساوی $x+3=5$ عدد ۳ را کم کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. یعنی $x+3-3=5-3$ ، پس $x=2$. ترازو نیز نشان می‌دهد که جسم ۲ کیلوگرم وزن دارد. از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که اگر از طرفین یک تساوی، عدد یکسانی را کم کنیم یا به آن اضافه کنیم باز هم تساوی برقرار می‌ماند. به عبارت دیگر :

$$\begin{aligned} \text{اگر } a+c=b+c, \text{ آن گاه } a &= b \\ \text{اگر } a-c=b-c, \text{ آن گاه } a &= b \end{aligned}$$



شکل رویه‌رو ترازوی را نشان می‌دهد که در یک طرف آن دو جسم یکسان با وزن نامعلوم و در طرف دیگر آن ۶ وزنه‌یک کیلوگرمی قرار دارد و ترازو به حالت تعادل درآمده است.

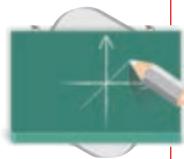


اگر وزن نامعلوم جسم را با x نشان دهیم، عبارت ریاضی بیان کننده این وضعیت $2x = 6$ است. اگر وزن های هر طرف ترازو را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر کفه ترازو، نیمی از وزن آن را برداریم باز هم تعادل برقرار می ماند زیرا نصف دو وزن مساوی باز هم مساوی اند.

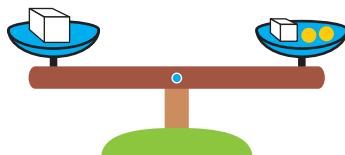
این عمل به معنای آن است که در تساوی $2x = 6$ ، طرفین را بر ۲ تقسیم کرده ایم و باز هم تساوی برقرار مانده است. یعنی $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ ، پس $x = 3$. ترازو نیز نشان می دهد وزن جسم ۳ کیلوگرم است. اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عدد مخالف صفری تقسیم کنیم، باز هم تساوی برقرار می ماند. به عبارت دیگر :

اگر $ac = bc$ ، آن گاه $a = b$

اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ و c مخالف صفر باشد، آن گاه $a = b$



محسن آقا مغازه دار است. روزی یک مشتری از او نمک خواست. محسن آقا در مغازه دو بسته نمک، یکی کوچک و یکی بزرگ داشت اما وزن آنها را نمی دانست؛ فقط می دانست که وزن بسته کوچک تر نصف وزن بسته بزرگ تر است. بنابراین بسته بزرگ ترا در یک کفه، و بسته کوچک ترا در کفه دیگر ترازو قرار داد و در کفه دوم آن قدر وزنه گذاشت تا ترازو به حال تعادل درآمد. وزنه های



موردنیاز برای به تعادل درآمدن ترازو دو وزنه یک کیلوگرمی بود.
۱- آیا می توانید با توجه به شکل توضیح دهید که وزن هر یک از بسته های نمک چقدر است؟

۲- رابطه ریاضی بین وزن هایی را که در دو کفه ترازو قرار دارند، بنویسید و وزن هر بسته را به دست آورید.

۳- رابطه ریاضی دیگری برای حل همین مسئله بنویسید و مسئله را حل کنید.

در عملیات بالا، برای یافتن وزن نامعلوم یک جسم، مقدار وزن نامعلوم را با یک نماد مانند x نشان دادیم و یک تساوی بر حسب x به دست آوردیم. این گونه تساوی ها را معادله، و مقدار نامعلوم را مجھول معادله و یافتن مجھول را حل معادله می نامند. حل یک معادله، با عملیات ریاضی و ساختن یک معادله ساده تر انجام می شود. معادلاتی نظیر معادلاتی که در این فصل روی آنها کار خواهیم کرد، با عملیات زیر که آنها را

عملیات جبری ساده می‌نامند، می‌توان حل کرد.

۱- جمع طرفین معادله با مقدارهای مساوی،

۲- کم کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله،

۳- ضرب طرفین معادله در مقدارهای مخالف صفر مساوی،

۴- تقسیم طرفین معادله بر مقدارهای مساوی مخالف صفر.

با انجام عملیات جبری ساده و محاسبات معمولی می‌توان به معادله‌ای رسید که مجھول معادله در یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار گیرند و با این اعمال، معادله حل خواهد شد.

مثال : معادله $1 - 3x = -1 - 2(3x + 4)$ را حل کنید.

$$1 - 3x = -1$$

$$1 - 3x + 4 = -1 + 4$$

$$1 - 3x = 3$$

$$\frac{1 - 3x}{1} = \frac{3}{1}$$

$$x = \frac{3}{-3} = -1$$

مثال : معادله $1 - 3x = -1 - 2(3x + 4)$ را حل کنید.

$$1 - 3x = -1 - 2(3x + 4)$$

$$1 - 3x = -1 - 6x - 8$$

$$1 - 3x + 6x + 8 = -1 - 6x + 6x$$

$$1 + 8 = -1$$

$$9 = -1$$

$$x = -9$$

$$x = \frac{-9}{9} = -1$$

مثال : معادله $\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$ را حل کنید. برای حل یک مسئله معمولاً راه‌های متفاوتی را می‌توان در پیش گرفت. برای مثال این معادله را با دو روش حل می‌کنیم.

روش اول

$$\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}(x - 4) = \frac{5}{2} \times (2x + 1)$$

$$x - 4 = 5x + \frac{5}{2}$$

روش دوم

$$\frac{2}{5}(x - 4) = 2x + 1$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{8}{5} = 2x + 1$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{8}{5} - 2x = 1$$

$$x - 4 - 5x = 5x + \frac{2}{5} - 5x$$

$$-4x - 4 = \frac{2}{5}$$

$$-4x - 4 + 4 = 4 + \frac{2}{5}$$

$$-4x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{\frac{6}{5}}{-4} = -\frac{1}{20}$$

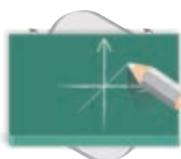
$$\frac{2}{5}x - 2x = \frac{1}{5} + 1$$

$$-\frac{8}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$-\frac{8}{5}x \times 5 = \frac{13}{5} \times 5$$

$$-8x = 13$$

$$x = \frac{13}{-8} = -1.625$$



توضیح در ریاضی

۱- معادله $81 = 3(2x - 7)$ را حل کنید و در هر مرحله از حل، درستی عملیات خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

۲- این معادله را از راه دیگری حل کنید. در هر مرحله، علت درستی عملیات خود را توضیح دهید.



فعالیت

۱- چهار معادله زیر را حل کنید.

$$(الف) 2x - 6 = 12 \quad (ب) 3x - 6 = 12 + x$$

$$(ج) 4x - 12 = 24 \quad (د) x - 3 = 6$$

۲- جواب این معادلات با هم چه رابطه‌ای دارند؟

۳- هر کدام از این معادلات را با اعمال جبری ساده، به ترتیب زیر از یک دیگر به دست آورید.

$$(الف) \rightarrow (د) \rightarrow (ج) \rightarrow (ب) \rightarrow (الف)$$

معادلاتی را که با عملیات جبری ساده، از روی هم به دست می‌آیند

معادلات هم ارز می‌نامند.

معادلات هم ارز جواب‌های یکسانی دارند. برای حل یک معادله، سعی می‌کنیم که یک معادله هم ارز با آن به دست آوریم که شکل ساده‌ای داشته باشد.

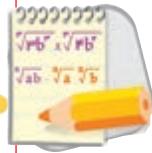
اگر مجھول معادله‌ای را با x نشان داده باشیم و پس از ساده کردن به صورت $ax + b = 0$ درآید، به طوری که $a \neq 0$ ، آن را یک معادله درجه اول می‌نامند.

در معادله $a \cdot x + b = 0$ اعداد مشخصی هستند و برای حل آن، طرفین این معادله را با $-b$ - جمع می‌کنیم و به معادله $a \cdot x = -b$ می‌رسیم. سپس با تقسیم طرفین بر a ، نتیجه می‌شود $x = -\frac{b}{a}$.

توجه کنید

$$x = \frac{-b}{a} \text{ برابر است با } 2x = -2$$

$$x = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \text{ برابر است با } -2x = 1$$



مسئلہ

۱- با یک خط، هر معادله در جدول (۱) را به عبارت فارسی بیان کننده همان معادله، در جدول (۲) (در صورت وجود) وصل کنید.

جدول (۱)

$2 - \frac{x}{3} = -2$
$\frac{y}{2} = 3y$
$\frac{x}{2} + 5 = x - 2$
$\frac{a}{2} = 3a$
$\frac{x}{3} - 2 = -2$

جدول (۲)

نصف عددی با عدد پنج جمع شده است و برابر تفیق ۲ از آن عدد شده است.

حاصل تقسیم عددی بر ۳ را از ۲ کم کرده ایم، حاصل برابر (-2) شده است.

نصف عددی برابر سه برابر همان عدد است.

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 16 - 4y = 0$$

$$2) 100 = 50 - 4d$$

$$3) \frac{a-3}{4} = 2$$

$$4) 7 - 2e = 19 - 4e$$

$$5) 2/5 + 1/3x = -1/1$$

$$6) 4(5 - 2y) = 5/6y$$

$$7) \frac{12 - 5c}{5} = -\frac{1}{10}$$

- ۳- مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ می باشد. این اعداد را به دست آورید.
- ۴- از تعداد ییسکویتی که مریم داشت نیم را به مادرش و نیم بقیه را به برادرش داد. برای خودش ۵ ییسکویت باقی ماند. تعداد ییسکویتهای اولیه او چند تا بوده است؟
- ۵- به ازای چه مقداری از t ، تساوی $\frac{2t+1}{t-1} = 0$ برقرار می شود.



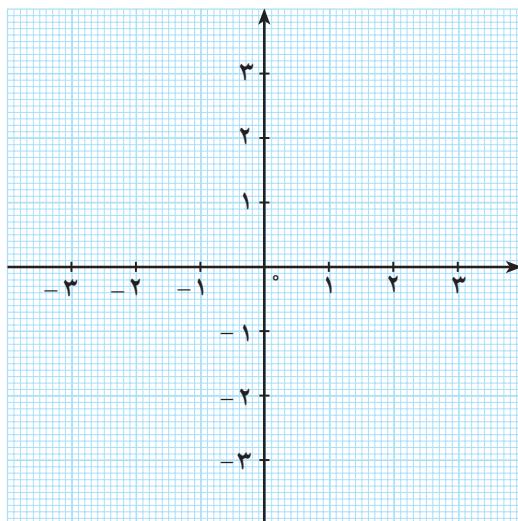
مسئله زیر در کتاب **مفتاح المعاملات باب چهلام** آمده است:

بازرگانی یک درهم به غلامش داد و گفت که به بازار برو و به اندازه یک درهم خریزه بخر و به باربر بده تا بیاورد. هزینه بیست خریزه یک درهم است و باربر شصت خریزه را با یک درهم به مقصد می رساند. غلام رفت و خریزه خرید و به همراه باربر آورد. غلام چند خریزه آورده است؟

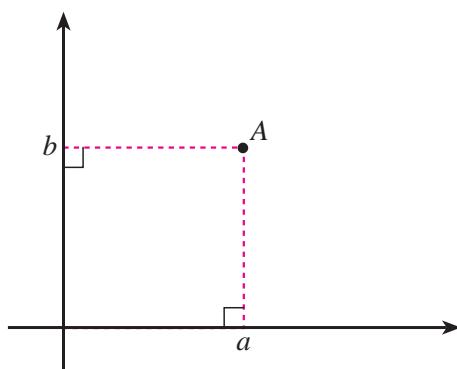


دستگاه مختصات

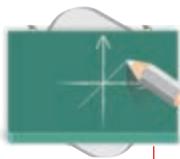
دو محور عمود بر هم در صفحه رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو محور را مبدأ این مختصات در نظر می‌گیریم. پاره خط واحد هر دو محور را یکسان در نظر می‌گیریم. این مختصات را یک دستگاه مختصات برای صفحه می‌نامیم.



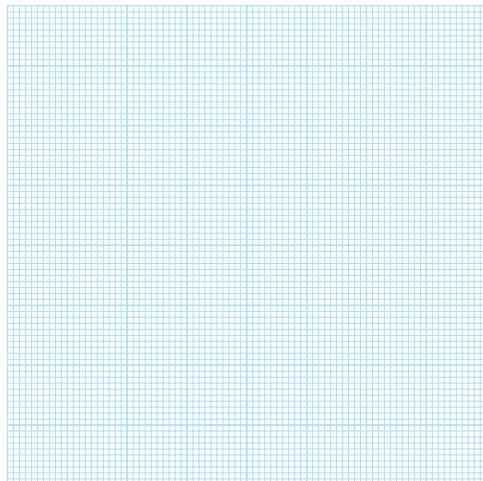
از یک نقطه دلخواه مانند A در صفحه، خط‌هایی را عمود بر این دو محور رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها با محورها اعدادی را نشان می‌دهند که مختصات نقطه A نامیده می‌شوند.



در شکل بالا زوج $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات نقطه A است، a را طول نقطه A و b را عرض نقطه A می‌نامند. در این شکل، محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌نامند.



تئوری درستگاه



- ۱- یک دستگاه مختصات در صفحه رسم کنید.
- ۲- نقاطی در صفحه بیابید که مختصات آنها $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند و به ترتیب آنها را، A، $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ و D، $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ بنامید.
- ۳- خط گذرنده از دو نقطه A و D را رسم کنید و بررسی کنید که کدام یک از نقاط به مختصات $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد.
- ۴- در مورد طول و عرض نقاطی که روی این خط قرار دارند چه حدسی می‌زنید؟
- ۵- نقاطی که طول آنها مثبت و عرض آنها صفر است را روی شکل مشخص کنید.
- ۶- مختصات نقاطی که روی محور طول‌ها و سمت چپ محور عرض‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟
- ۷- نقاطی که عرض‌های آنها منفی و طول آنها صفر است را روی شکل مشخص کنید.
- ۸- مختصات نقاطی که روی محور عرض‌ها و بالای محور طول‌ها هستند، چه ویژگی دارند؟
- ۹- نقاطی از صفحه را که طول و عرض آنها مثبت است روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع اول می‌نامند).
- ۱۰- نقاطی از صفحه را که طول آنها منفی و عرض آنها مثبت است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع دوم می‌نامند).
- ۱۱- نقاطی از صفحه را که طول آنها منفی و عرض آنها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع سوم می‌نامند).
- ۱۲- نقاطی از صفحه را که طول آنها مثبت و عرض آنها منفی است، روی شکل مشخص کنید. (این ناحیه را ربع چهارم می‌نامند).



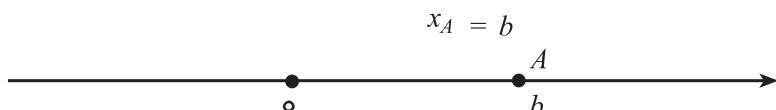
فاصله بین دو نقطه

روی محور اعداد، مبدأ O و نقطه نظیر ۴ را A و نقطه نظیر ۶ را B بنامید.



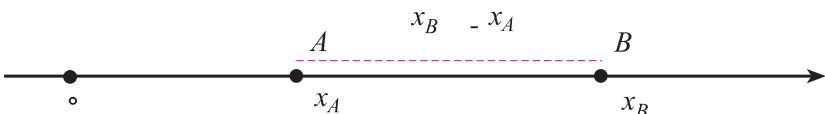
- ۱- طول پاره خط های OA و OB چقدر است؟
- ۲- طول پاره خط AB چقدر است؟ فاصله دو نقطه نظری 4 و 6 از یکدیگر چقدر است؟
- ۳- دو عدد مثبت دلخواه x و y به صورت $y < x$ در نظر بگیرید. نقاط نظری این دو عدد را روی محور اعداد به ترتیب C و D بنامید. طول پاره خط های OC و OD چقدر است؟
- ۴- طول پاره خط CD چقدر است؟ فاصله نقاط نظری x و y از یکدیگر چقدر است؟

اگر A یک نقطه روی محور اعداد باشد که نظری عدد b است، b را طول نقطه A می‌نامند و آن را با x_A نشان می‌دهند.



اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند که A سمت چپ B قرار دارد، داریم :

$$\text{فاصله } B \text{ و } A = x_B - x_A$$

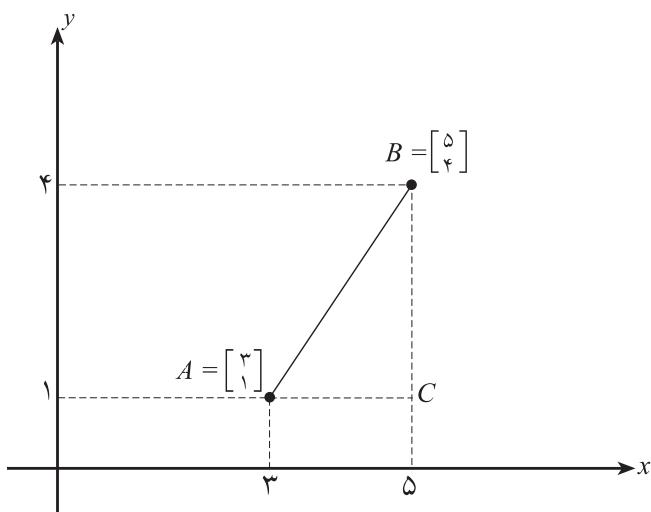


به طور کلی، برای دو نقطه A و B روی محور اعداد، بدون توجه به آن که کدام نقطه سمت چپ دیگری است، فاصله بین این دو نقطه برابر است با $|x_A - x_B|$.

اگر دو نقطه A و B روی محور y ها قرار داشته باشند، فاصله A تا B چقدر است؟

اگر بخواهیم فاصله دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در صفحه بیابیم، ابتدا این نقاط را در صفحه مشخص

می‌کنیم. طبق شکل زیر یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می‌دهیم.

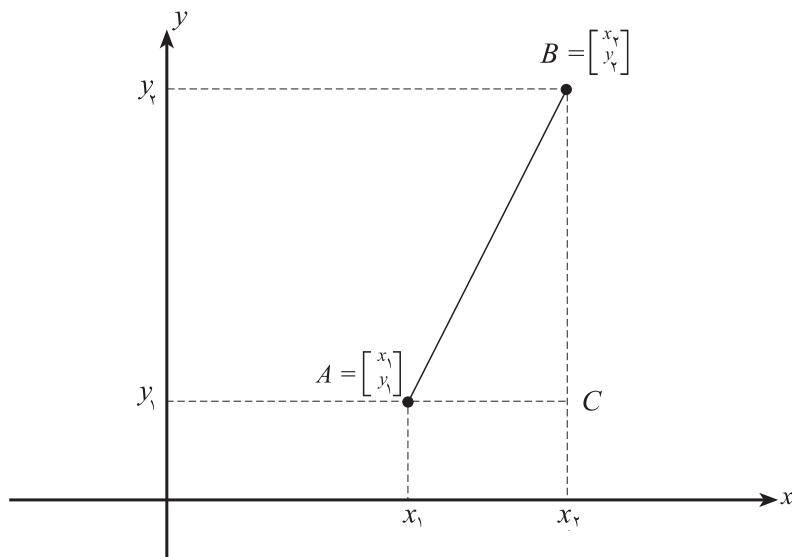


فاصله بین دو نقطه A و B، طول پاره خط AB، یعنی وتر مثلث قائم الزاویه ACB است. طول AC برابر ۵ و طول BC برابر ۳ است، پس با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم :

$$\text{طول AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

به طور کلی، برای یافتن فاصله دو نقطه دلخواه $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ می‌توانیم مانند بالا عمل کنیم.

فرض کنید که این دو نقطه در صفحه به شکل زیر باشند و طبق شکل زیر یک مثلث قائم الزاویه تشکیل می‌دهیم.



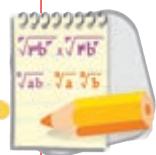
پاره خط AB وتر مثلث قائم الزاویه ACB است. طول AC برابر $x_2 - x_1$ و طول BC برابر $y_2 - y_1$ است، پس داریم :

$$\text{طول AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

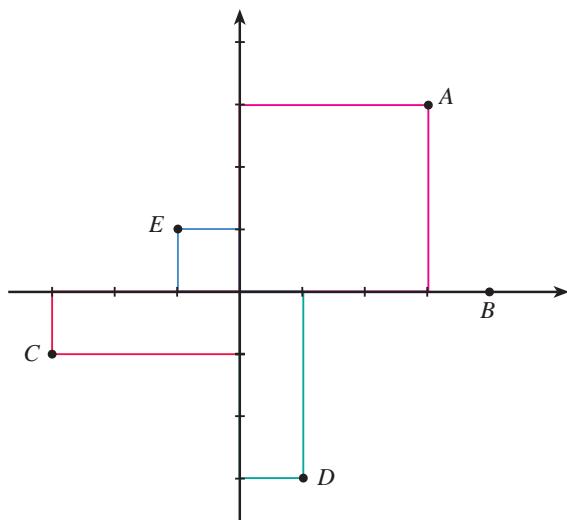
مثال : فاصله دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ را یابید.

با جایگذاری در فرمول فاصله دو نقطه داریم :

$$\text{B و A} = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$



۱- در شکل زیر مختصات نقاط داده شده را به دست آورید و فاصله نقطه A تا هر یک از نقاط دیگر را محاسبه کنید.



۲- سه نقطه $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

- الف) مثلث را رسم کنید.
- ب) طول اضلاع و محیط این مثلث را به دست آورید.
- ج) نوع این مثلث را از لحاظ متساوی الساقین بودن یا قائم‌الزاویه بودن مشخص کنید.

رابطهٔ خطی

برخی پدیده‌ها با هم رابطه دارند. برای مثال، میزان آب رودخانه‌ها با میزان باران آمده رابطه دارد. میزان توانایی جسمانی شما با میزان ورزشی که می‌کنید رابطه دارد. نمره امتحانی شما با میزان تلاش شما در یادگیری دروس رابطه دارد. پایه تحصیلی که در آن مشغول تحصیل هستید با سن شما رابطه دارد. به همین ترتیب موارد بسیاری را می‌توانید بیابید که با هم رابطه داشته باشند.



۱- در تساوی زیر به جای مرع، علامت یکی از چهار عمل اصلی را قرار دهید.

$$\dots \square \dots = 10$$

۲- در نقطهٔ چین سمت چپ، یک عدد دلخواه قرار دهید، سپس در نقطهٔ چین دیگر عددی قرار دهید که تساوی برقرار باشد.

۳- آیا برای انتخاب عدد اول محدودیتی وجود دارد؟

۴- آیا برای عدد دوم اجباری وجود دارد؟

در فعالیت بالا، هر نقطهٔ چین جای یک عدد را نشان می‌داد و می‌توانستیم آن‌ها را با دو نماد مانند \times و \wedge نشان دهیم. تساوی بالا نیز یک معادله را نشان می‌دهد، با این تفاوت که در آن دو مجهول وجود دارد که یکی را به انتخاب خود می‌توانستیم تعیین کنیم ولی دیگری از طریق حل معادله مشخص می‌شد. تشخیص رابطهٔ بین چیزهایی که با آن‌ها سروکار داریم، نقشی اساسی در زندگی ما دارند. در فعالیت‌های زیر یک نوع ساده از روابط‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.



سارا و اکرم دو خواهر هستند. وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود.

۱- وقتی سارا ۷ ساله شود، اکرم چند سال خواهد داشت؟

۲- وقتی اکرم ۲۰ ساله شود، سارا چند ساله خواهد شد؟

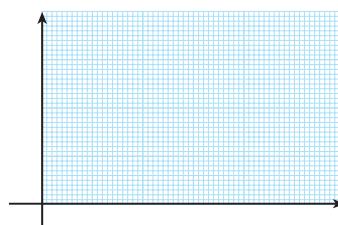
۳- اگر سن اکرم را با y و سن سارا را با x نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین این دو مقدار وجود دارد؟

۴- اگر اکرم ۵ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟ اگر اکرم ۸ سال بزرگ‌تر شود، سارا چند سال بزرگ‌تر می‌شود؟

۵- جدول زیر را کامل کنید.

سن سارا	۴	۷	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱۴	<input type="text"/>	<input type="text"/>
سن اکرم	۰	<input type="text"/>	۵	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۱۳	<input type="text"/>

سن اکرم



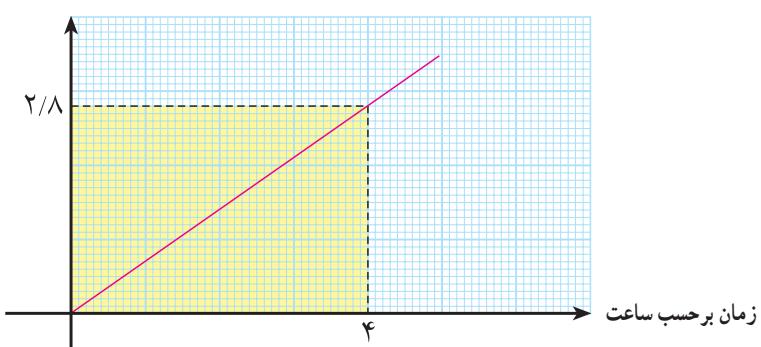
۶- نقاط این جدول را در شکل مقابل مشخص و به هم وصل کنید. چه شکلی به دست می آید؟

نمودار بالا، رابطه بین سن سارا و سن اکرم را نشان می دهد. از آن جا که این رابطه به صورت $y = x + 4$ یا $y = x - 4$ باشد، نمودار بالا را نمودار معادله $y = x$ نیز می نامند. در فعالیت زیر فرض بر این است که نمودار رابطه داده است و از طریق آن می خواهیم با بیان ریاضی آن رابطه و تشکیل جدول آن رابطه، به سوالات مطرح شده پاسخ دهیم.



یک خودرو از زاهدان به طرف کرمان حرکت کرده است. نمودار رابطه بین زمان و مسافتی که خودرو طی می کند به شکل زیر است. محور افقی، نشان دهنده زمان و محور عمودی نشان دهنده مسافت طی شده توسط خودرو است. هر یک واحد روی محور افقی معادل یک ساعت و هر یک واحد روی محور عمودی معادل ۱۰۰ کیلومتر است.

مسافت بر حسب ۱۰۰ کیلومتر



از روی نمودار صفحهٔ قبل به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- این خودرو ۴ ساعت پس از حرکت چند کیلومتر با زاهدان فاصله دارد؟

۲- جدول زیر را کامل کنید.

ساعت	۰	۲	۴	۶
فاصله تازاهدان	۰			

۳- اگر x نشان‌دهنده مقدار زمان گذشته (برحسب ساعت) از شروع حرکت و y نشان‌دهنده مسافت طی شده توسط خودرو (برحسب کیلومتر) باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟ معادله آن را بنویسید.

۴- اگر فاصله بین زاهدان و کرمان 540 کیلومتر باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا این خودرو به کرمان برسد؟ درستی جواب خود را از طریق نمودار و معادله‌ای که به دست آورده‌اید، نشان دهید. آیا بین این دو جواب تفاوتی وجود دارد؟

۵- این خودرو هر ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ هر دو ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ نسبت مسافتی که خودرو طی می‌کند به زمان گذرانده شده چقدر است؟ آیا این نسبت ثابت است؟

در تمامی این فعالیت‌ها با مقدارهایی روبه‌رو بوده‌ایم که با یکدیگر رابطه داشته‌اند. اگر بین مقادیر دو متغیر رابطه برقرار باشد و یکی از آن‌ها را x و دیگری را با y نشان دهیم، بیان ریاضی رابطه بین x و y به صورت معادله‌ای برحسب x و y است. در مثال سن سارا و اکرم این رابطه به شکل $y = x + 4$ بود. در مثال زمان و مسافت طی شده، این رابطه به صورت $y = 7x$ بود.

نمودار همه رابطه‌ها در مثال‌های بالا به صورت خط بودند. در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم رابطه خطی دارند.

مثال: کارگری ساعتی 1500 تومان دستمزد می‌گیرد. رابطه بین ساعت‌های کار این کارگر و دستمزدی که می‌گیرد یک رابطه خطی است. اگر x میزان ساعت کاری و y دستمزد او باشد، این رابطه به صورت $y = 1500x$ است. ویرگی مشترک رابطه‌های خطی آن است که نسبت افزایش یک متغیر به افزایش (یا کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است. موارد بسیاری هم وجود دارد که رابطه بین دو متغیر، خطی نیست.



رابطه بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با y نشان دهید.

۱- رابطه بین x و y را با یک معادله بنویسید.

۲- جدول زیر را کامل کنید.

x	1	2	3	4	5
y		9			

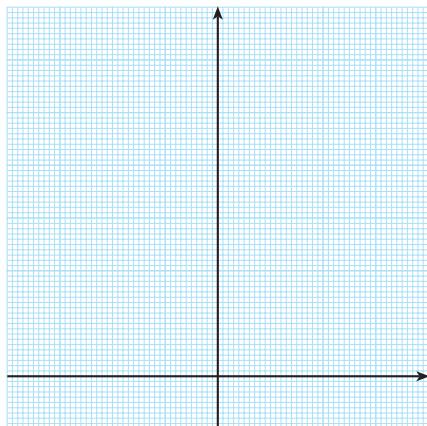
۳- در محورهای مختصات، هر واحد روی محور افقی را نمایش طول ضلع مریع برحسب سانتی متر و هر واحد روی محور عمودی را نمایش مساحت مریع برحسب سانتی متر مریع در نظر بگیرید و نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه معین کنید.

۴- میزان افزایش مساحت مریع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲ افزایش می‌باید حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مریع از ۲ به ۳ افزایش می‌باید حساب کنید. این میزان را وقتی طول ضلع مریع از ۴ به ۵ افزایش می‌باید حساب کنید. آیا نسبت افزایش مساحت مریع به افزایش طول ضلع مریع مقدار ثابتی است؟

۵- اگر بخواهیم این نقاط را به هم وصل کنیم، آیا می‌توان با یک خط همه این نقاط را به هم وصل کرد؟

۶- با کامل کردن جدول زیر، نمودار معادله $y = x^2$ را برای مقادیر مثبت x با دقت مناسب رسم کنید.

x	۰	$\frac{۰}{۲}$	$\frac{۰}{۵}$	$\frac{۰}{۸}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۸}$	۲	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۲}{۸}$	۳
x^2					$\frac{۱}{۴۴}$		$\frac{۲}{۵۶}$	$\frac{۳}{۲۴}$		$\frac{۵}{۷۶}$		$\frac{۷}{۸۴}$			



۷- از جدول بالا کمک بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۳	-۲/۸	-۲/۶	-۲/۴	-۲/۲	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	...
x^2												

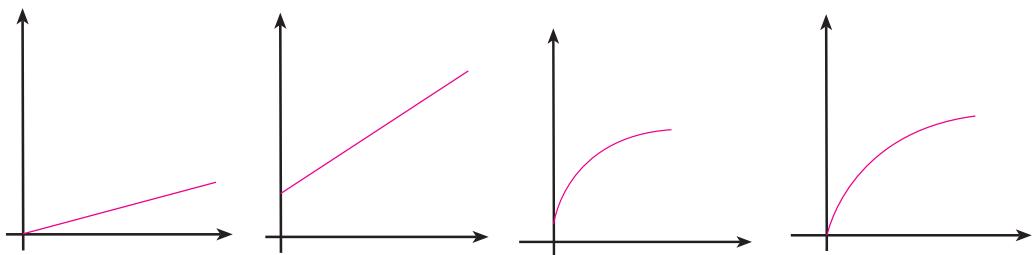
۸- با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله $y = x^2$ را برای مقادیر مثبت و منفی x رسم کنید.

به عنوان مثالی دیگر، به رابطه بین سن و قد یک فرد، از نوزادی تا مرحله بلوغ و پس از آن، توجه کنید. میزان افزایش قد نوزاد در سال های اولیه زندگی با میزان افزایش قد در سن های بالاتر یکسان نیست.



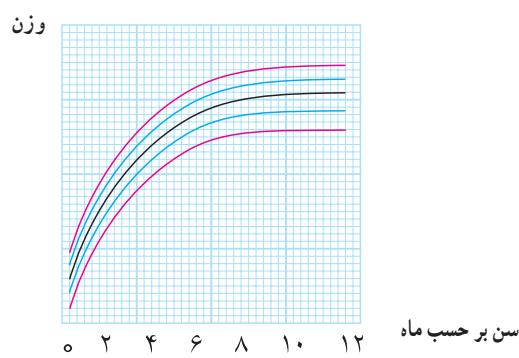
تمرین در کلاس

- ۱- در شکل های زیر محور افقی نشان دهنده زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان دهنده طول قد یک انسان بر حسب متر می باشد. کدام یک از نمودارهای زیر می تواند نمودار رشد قد یک انسان در طول زمان باشد؟



- ۲- محل برخورد نمودار با محور y ، نشان دهنده چیست؟

محققان با بررسی فرایند و مراحل رشد کودکان نمودارهایی تنظیم کرده اند. پژوهشگران اطفال از این نمودارها برای بررسی وضعیت رشد کودکان استفاده می کنند.



حل یک مسئله

دانشآموزان مدرسه‌ای تصمیم گرفتند تا در روز نیکوکاری یک بازار خیریه به نفع نیازمندان برگزار کنند. قرار سد در این بازار یک روزه، شربت بفروشند و سود آن را برای نیازمندان مصرف کنند. آنها یک بسته صد تایی لیوان یک بار مصرف به مبلغ هزار تومان و مقداری پودر شربت خریدند. هزینه خود شربت، بدون در نظر گیری قیمت لیوان‌ها، هر لیوان 90° تومان می‌شود و پودر شربت‌های استفاده نشده به فروشگاه پس داده می‌شود.

یکی از دانشآموزان پیشنهاد کرد که هر لیوان شربت را 125° تومان بفروشیم تا سود کافی بیریم. دانشآموز دیگری گفت: اگر به اندازه کافی شربت نفوذشیم ممکن است ضرر کنیم. دانشآموزان تصمیم گرفتند برای تشخیص وضعیت سود و ضرر این کار از معلم ریاضی خود کمک بگیرند.

معلم گفت که ابتدا جدولی تشكیل دهید که در آن به ازای هر تعداد لیوان فروخته شده، میزان هزینه مصرف شده و درآمد حاصل از فروش و سود (یا ضرر) معلوم شده باشد. جدول زیر را جدول هزینه – درآمد می‌نامیم.

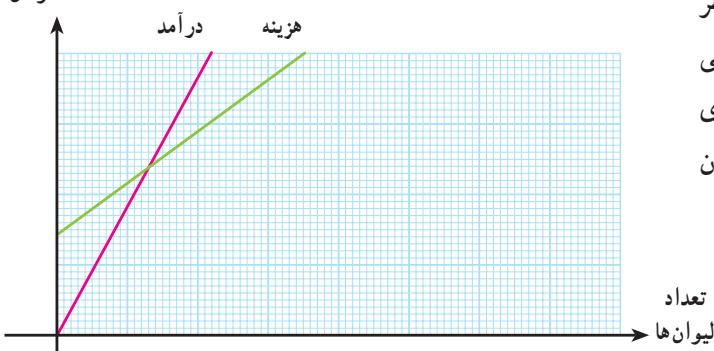
جدول

تعداد لیوان‌های فروخته شده	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
هزینه صرف شده						
درآمد حاصل از فروش						
سود یا ضرر						

معلم سپس گفت: شما با این جدول می‌توانید تشخیص دهید چه وقت ضرر کرده‌اید و چه وقت سود برده‌اید.
آیا می‌توانید از روی این جدول تشخیص دهید با چه میزان فروش نه سود کرده‌اید و نه ضرر؟

معلم گفت: برای تشخیص بهتر وضعیت هزینه و درآمد حاصل از این کار، نمودار مربوط به هزینه و درآمد را مانند نمودار رویه‌رو در یک صفحه رسم کنید. محور افقی را تعداد لیوان‌های فروخته شده و محور عمودی را یک بار هزینه و یک بار درآمد در نظر

بگیرید. هریک واحد روی محور افقی را معادل 1° لیوان^۱ و هریک واحد روی محور عمودی را معادل 100° تومان در نظر بگیرید.



۱- اگرچه تعداد لیوان‌ها عدد حسابی است و نمودار واقعی گسسته است، ولی برای درک بهتر روابط، مناسب است نمودار را یک خط پیوسته فرض کنیم.

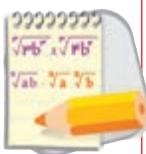
معلم پرسید نقطه تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 دانش‌آموزان گفتند در این نقطه میزان هزینه و درآمد مساوی خواهد شد.
 معلم پرسید : آیا می‌توانید حساب کنید این نقطه، با چه تعداد لیوان فروخته شده، رخ می‌دهد؟



نمودارهای مربوط

حل مسئله بالا را با پاسخ‌گویی به سؤالات زیر کامل کنید.

- ۱- جدول هزینه - درآمد را کامل کنید.
- ۲- نمودارهای مربوط به این جدول را رسم کنید.
- ۳- حداقل چند لیوان شربت باید فروخته شود تا سود برد شود؟
- ۴- اگر تمام ۱۰۰ لیوان شربت فروخته شود، چه مقدار سود برد می‌شود؟
- ۵- اگر هر لیوان ۱۵۰ تومان فروخته شود با رسم نمودار درآمد جدید، به سؤالات بالا در این حالت جدید پاسخ دهید.



مسائل

۱- قیمت هر بلیط تئاتر ۲۰۰۰ تومان است. اگر x تعداد میهمانان و y مجموع هزینه‌ها باشد :

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

الف) جدول مقابل را تکمیل کنید.

ب) چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟

ج) چرا هیچ مقدار کسری در جدول وجود ندارد؟

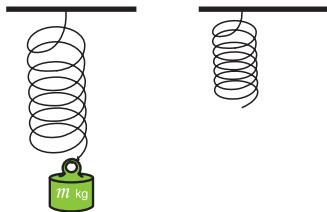
د) نمودار متناظر جدول فوق را رسم کنید.

- ۲- در یک مستطیل به طول ۳ و عرض ۲ سانتی‌متر، اگر طول آن را x سانتی‌متر افزایش دهیم مساحت آن از معادله زیر به دست می‌آید.

$$= 6 + 2x \text{ مساحت (سانتی‌مترمربع)}$$

الف) توضیح دهید، اعدادی که در معادله هستند، چه چیزی را نشان می‌دهند.

ب) اگر طول مستطیل را $\frac{3}{2}$ سانتی‌متر افزایش داده باشیم مساحت مستطیل چه قدر می‌شود؟



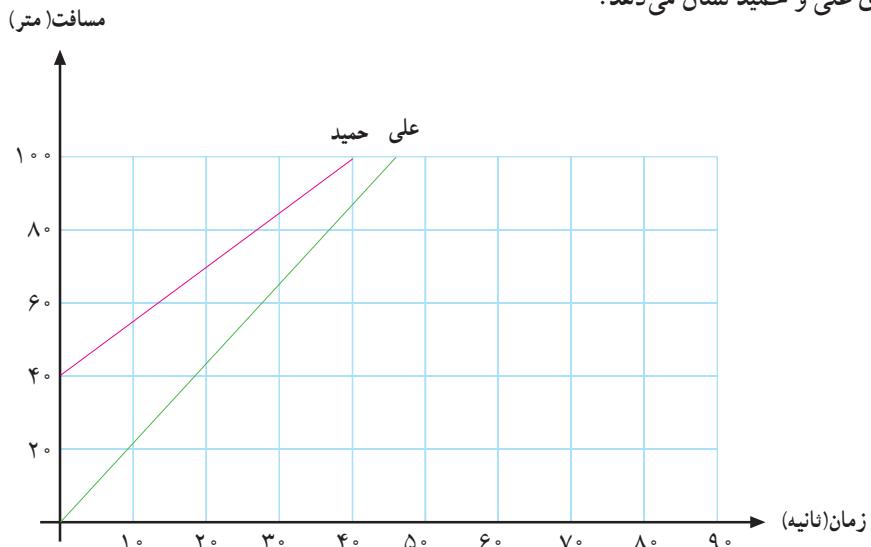
۳- طول یک فنر در حالتی که وزنه‌ای به آن آویزان نشده است، ۸ سانتی متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم m کیلوگرم به آن آویزان می‌کنیم، طول آن بر حسب سانتی متر از رابطه $L=8+0.5m$ به دست می‌آید.

الف) اگر جسمی به جرم $\frac{3}{72}$ کیلوگرم به آن آویزان کنیم، طول فنر چند میلی متر افزایش می‌یابد؟

ب) چه وزنه‌ای به فنر آویزان کنیم تا طول آن به 123 میلی متر برسد؟

۴- یک سوسмар در فصل بهار بین 30° تا 70° تخم می‌گذارد و حدود 90 روز طول می‌کشد تا نوزادان سوسمار سر از تخم بیرون آورند. طول هر نوزاد تقریباً 30 سانتی متر است. در سال‌های اولیه زندگی، به طور متوسط هر سال $\frac{22}{5}$ سانتی متر به طول هر بچه سوسмар اضافه می‌شود. پس از چه مدت طول نوزاد سوسмар به 80 سانتی متر می‌رسد؟

۵- علی و برادر کوچک‌ترش حمید، با هم یک مسابقه دو 100 متر دادند. چون حمید کوچک‌تر بود، علی به او اجازه داد جلوتر بایستد. نمودار زیر چگونگی مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع مسابقه را برای علی و حمید نشان می‌دهد.



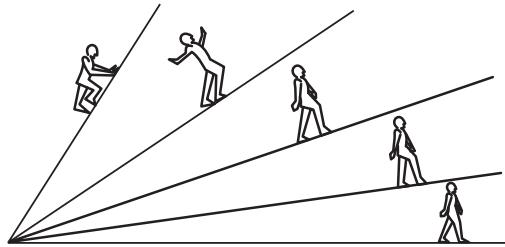
با توجه به نمودار بالا که پس از پایان مسابقه رسم شده است، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شروع مسابقه، حمید چند متر جلوتر از علی ایستاده بوده است؟

ب) چند ثانیه طول کشیده است تا علی و حمید به انتهای خط مسابقه برسند؟

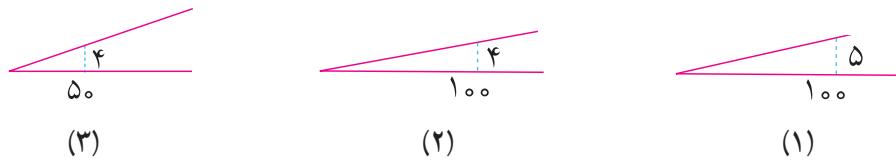
ج) چه کسی برنده شده است؟

د) اگر حمید و علی دویدن را از یک نقطه شروع می‌کردند، چه کسی برنده می‌شد و چند ثانیه زودتر به خط پایان می‌رسید؟

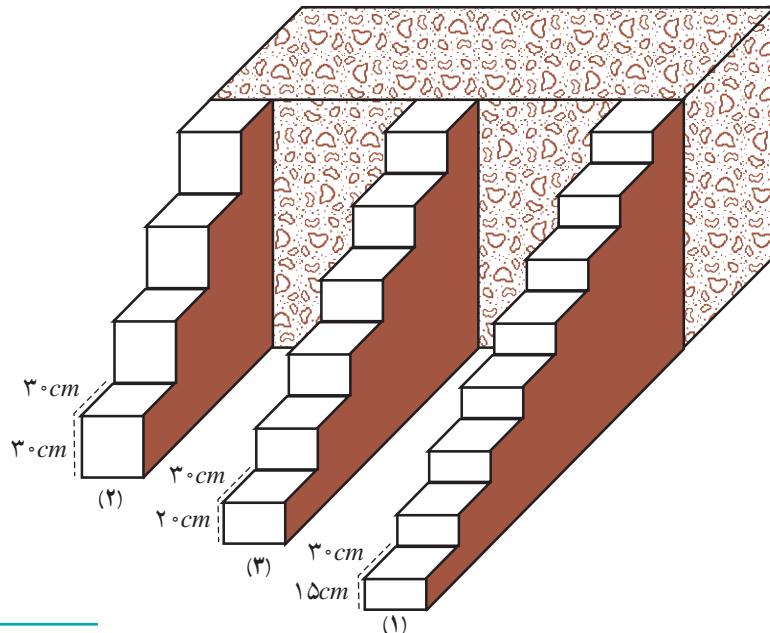


وقتی به کوه می‌روید، از سرپالایی‌های متفاوتی بالا می‌روید. بالارفتن از برخی سرپالایی‌ها آسان و از برخی دیگر مشکل است. راه رفتن روی زمینی که نه سرپالایی باشد و نه سرپالایی‌نی، از همه آسان‌تر است. این وضعیت را در بالارفتن از پله‌ها نیز مشاهده می‌کنید، چون همه پله‌ها مثل هم نیستند. آیا احساس کرده‌اید که بالارفتن از برخی پله‌ها آسان‌تر از بالارفتن از پله‌های دیگر است؟

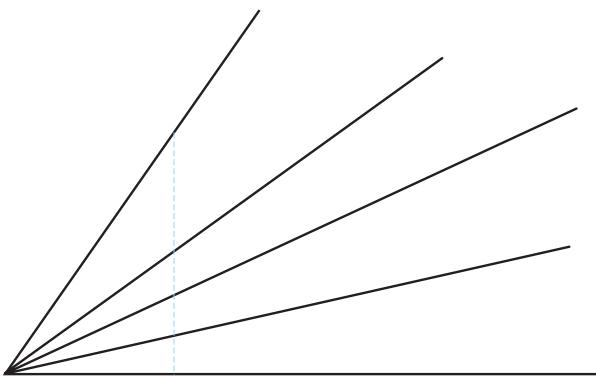
فرض کنید سه خیابان سرپالایی داریم که به هنگام بالارفتن از آنها، در اولی به‌ازای هر 100 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 5 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در دومی به‌ازای هر 100 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 4 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود، و در سومی به‌ازای هر 50 متر که در راستای افقی جلو می‌رویم، 4 متر ارتفاع ما زیاد می‌شود. بالارفتن از کدام خیابان آسان‌تر است؟



در زیر سه نمونه پله آورده شده است. بالارفتن از کدام یک آسان‌تر است؟



میزان سربالایی بودن یک خیابان را می‌توانیم با نسبت «مقدار افزایش ارتفاع» به «مقدار مسافت افقی طی شده» اندازه‌گیری کنیم. این نسبت را شیب می‌نامند.



$$\text{شیب} = \frac{\text{مقدار افزایش ارتفاع}}{\text{مقدار مسافت افقی طی شده}}$$

در مورد مثال خیابان‌ها در صفحهٔ قبل، شیب آن‌ها را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\text{شیب خیابان } (1) = \frac{5}{100} = 0/05$$

$$\text{شیب خیابان } (2) = \frac{4}{100} = 0/04$$

$$\text{شیب خیابان } (3) = \frac{4}{50} = 0/08$$

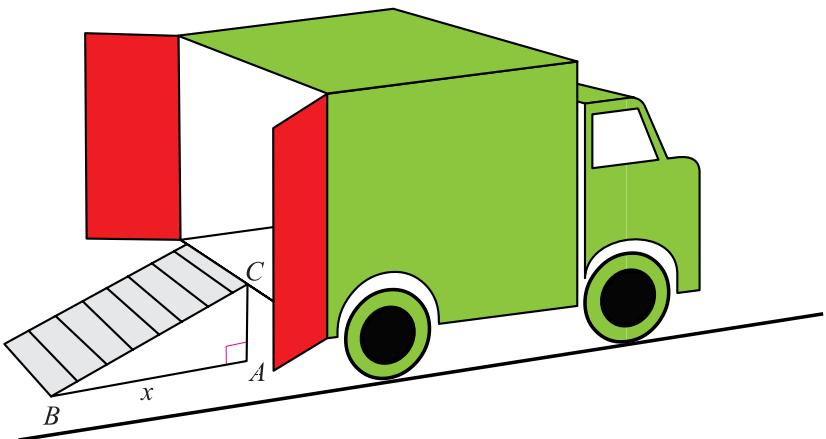
با مقایسهٔ این شیب‌ها به سادگی می‌توان تشخیص داد که در کدام خیابان، آسان‌تر می‌توان رو به بالا حرکت کرد. هرچه شیب خیابانی بیشتر باشد بالارفتن از آن مشکل‌تر خواهد بود. پله‌ها نیز مانند خیابان‌های سربالایی هستند و هر پله نشان می‌دهد که به‌ازای مسافت افقی طی شده، چه مقدار ارتفاع افزایش پیدا می‌کند. شیب پله‌های مثال بالا عبارت است از:

$$\text{شیب پلکان } (1) = \frac{15}{30} = 0/5$$

$$\text{شیب پلکان } (2) = \frac{3}{30} = 1$$

$$\text{شیب پلکان } (3) = \frac{2}{30} \approx 0/66$$

پس، بالارفتن از پله اول آسان‌تر از دو پله دیگر و بالارفتن از پله دوم سخت‌تر از دو پله دیگر است. مثال: در یک اسباب‌کشی، برای حمل بارها به داخل کامیون، به کمک یک تخته‌الوار سطح شیبداری ساخته شده است.



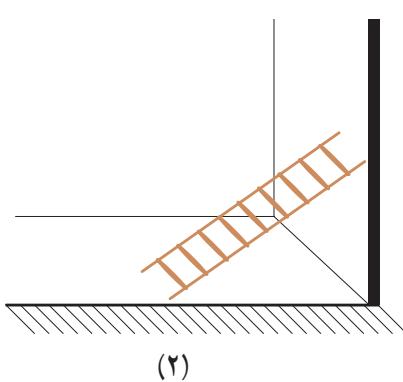
اگر طول الوار ۵ متر و فاصله لبه درب کامیون تا سطح زمین ۱ متر باشد، شیب این سطح چقدر است؟
برای یافتن پاسخ، باید فاصله نقطه پای الوار تا کامیون را حساب کنیم. اگر این فاصله را x بنامیم، با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه‌ای که می‌بینید، می‌توانیم بنویسیم: $5^2 = 1^2 + x^2$ ، پس $x = \sqrt{24}$. بنابراین

$$\text{شیب} = \frac{1}{\sqrt{24}} \approx \frac{1}{5} = 2^\circ$$

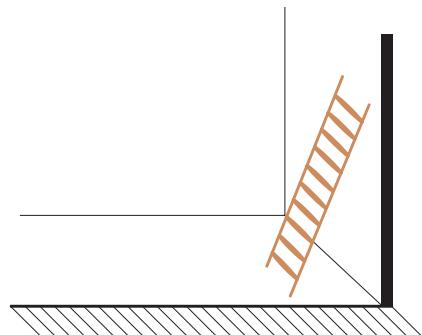


تمرین در کامپیوتر

دو نردهبان ۴ متری را به شکل‌های (۱) و (۲) به دیوار تکیه داده‌ایم. در شکل (۱) فاصله پای نردهبان تا دیوار $1/2$ متر و در شکل (۲) این فاصله $2/7$ متر است.



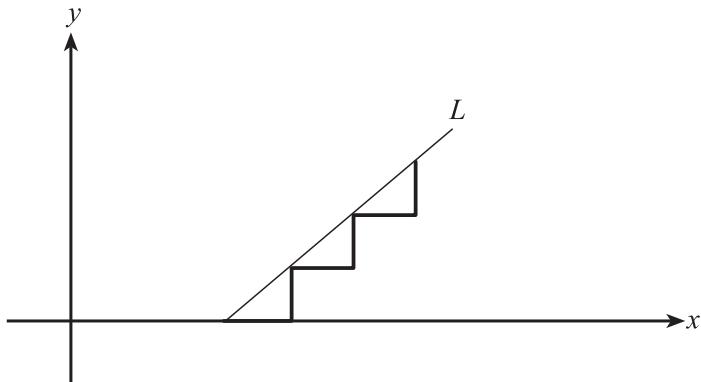
(۲)



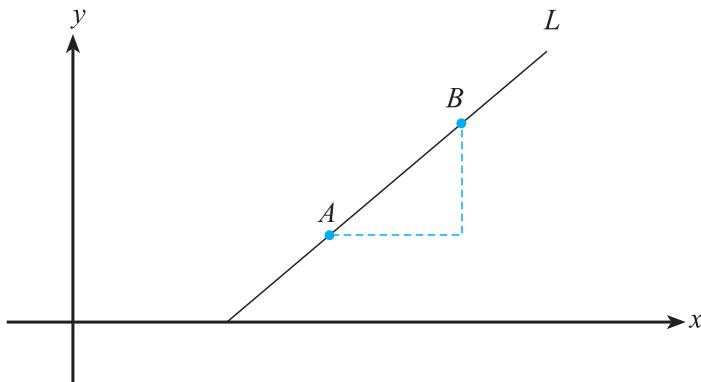
(۱)

- ۱- شیب نردهبان را در این دو حالت به‌طور تقریبی با استفاده از ماشین حساب، حساب کنید. کدام یک شیب بیشتری دارد؟
- ۲- اگر نردهبان را به گونه‌ای قرار دهیم که بتوانیم تا ارتفاع ۳ متری بالا رویم، شیب نردهبان چقدر خواهد شد؟

شیب خط

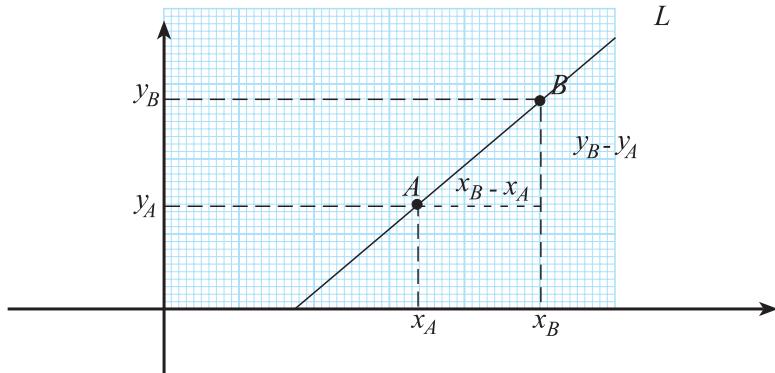


شکل بالا برش عرضی یک پلکان را نشان می‌دهد. خط L لبه‌های پله‌ها را به هم وصل می‌کند. شیب خط L را به صورت شیب این پلکان تعریف می‌کنند. شیب پلکان به صورت نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده است.



اگر فقط به خط L توجه کنیم و از یک نقطه آن مانند A به نقطه دیگری مانند B حرکت کنیم، نسبت تغییر ارتفاع به مسافت افقی طی شده را می‌توانیم به صورت نسبت تغییر عرض به تغییر طول در نظر بگیریم. این نسبت را شیب خط L می‌نامند.

نقاط $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ را روی خط L در نظر بگیرید. اگر روی این خط از نقطه A به نقطه B حرکت کنیم، میزان تغییر ارتفاع برابر است با $y_B - y_A$ و میزان مسافت افقی طی شده برابر است با $x_B - x_A$.



پس، اگر شیب خط L را با m نشان دهیم داریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال: اگر $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه A به نقطه B ، ۲ واحد به طول نقطه A و ۳ واحد به عرض آن اضافه می‌شود، پس شیب

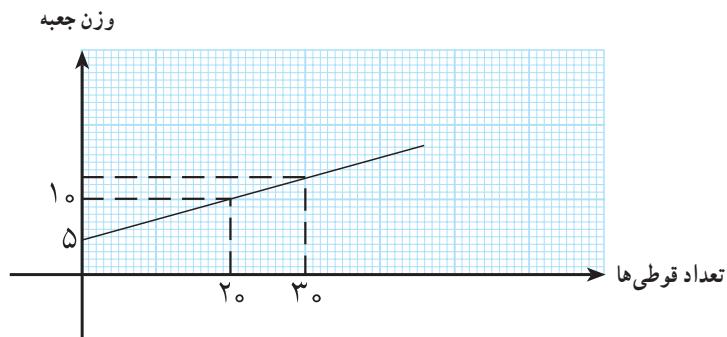
این خط برابر است با $\frac{3}{2}$.

اکنون شما شیب این خط را با جایگذاری در فرمول بالا به دست آورید و با مقداری که به دست آورده‌ایم مقایسه کنید.

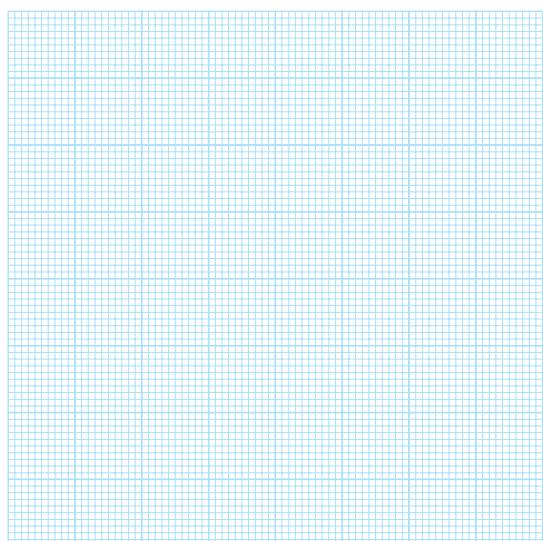


تمرین در کلاس

در یک جعبه تعدادی قوطی با وزن‌های یکسان قرار می‌دهیم. وزن جعبه با قوطی‌هایی که در آن قرار داده‌ایم بستگی به تعداد قوطی‌ها دارد. نمودار زیر رابطه وزن جعبه را با تعداد قوطی‌هایی که در آن است نشان می‌دهد. محور افقی تعداد قوطی‌ها و محور عمودی وزن جعبه را بر حسب کیلوگرم نشان می‌دهد.



- ۱- از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که 2° قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟
- ۲- از روی نمودار تعیین کنید وزن جعبه در حالتی که 3° قوطی در آن قرار دارد، چقدر است؟
- ۳- وزن جعبهٔ خالی چقدر است؟
- ۴- شیب این خط چقدر است؟
- ۵- اگر تعداد قوطی‌ها را x و وزن جعبهٔ حاوی y قوطی را y بنامیم، رابطهٔ بین وزن جعبه و تعداد قوطی‌هایی را که در آن است به صورت ریاضی بنویسید.
- ۶- شیب این خط چه ویژگی از قوطی‌ها را نشان می‌دهد؟



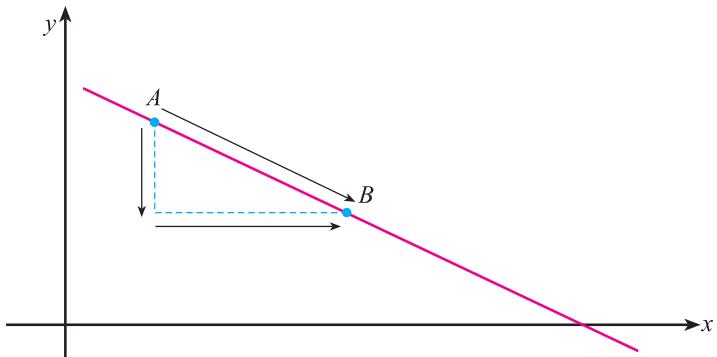
- ۱- با رسم محورهای مختصات، دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در صفحه نشان دهید و خط گذرنده از این دو نقطه را رسم کنید.
- ۲- طول کدام نقطه بیشتر است؟ عرض کدام نقطه بیشتر است؟
- ۳- با حرکت روی این خط وقتی از نقطه A به نقطه B برسیم، طول‌ها و عرض‌های نقاط، از لحاظ افزایش یا کاهش، چگونه تغییر می‌کنند؟
- ۴- شیب این خط را طبق فرمول حساب کنید. منفی شدن شیب چه چیزی را نشان می‌دهد؟



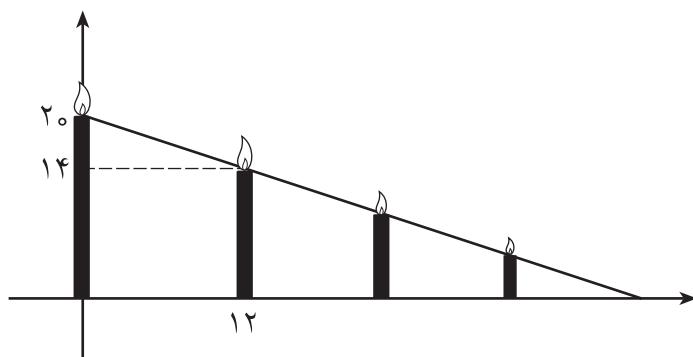
خط‌هایی که با افزایش طول نقاط روی آنها، عرض این نقاط کاهش می‌باید، شیب منفی دارند.

مثال: اگر $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، شیب آن خط چقدر است؟

حل: با حرکت از نقطه A به نقطه B ، ۴ واحد به طول نقطه A اضافه می‌شود ولی ۲ واحد از عرض آن کم می‌شود، پس شیب این خط برابر است با $\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.



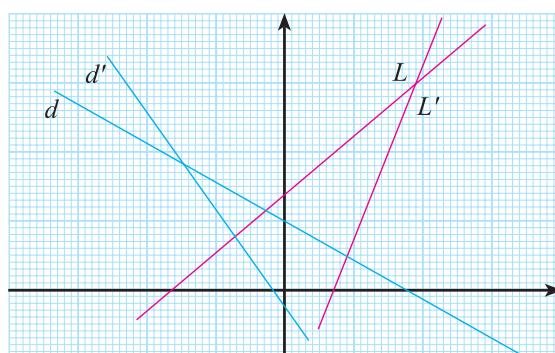
مثال: شمعی به طول 2° سانتی متر به طور یکنواخت می‌سوزد. طول شمع با گذشت زمان کاهش می‌یابد. با رسم محورهای مختصات، محور افقی را نشان دهنده زمان، بر حسب دقیقه، و محور عمودی نشان دهنده طول شمع، بر حسب سانتی متر، در نظر بگیرید. با وصل کردن نوک شمع در زمان‌های مختلف یک خط به شکل زیر رسم می‌شود.



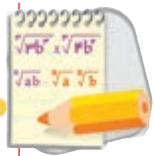
شیب این خط برابر است با $\frac{14-20}{12-0} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$. منفی بودن شیب نشان می‌دهد که با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد.



در شکل زیر خطهای L و L' شیب مثبت و خطهای d و d' شیب منفی دارند. درستی این مطلب را با درنظر گرفتن دو نقطه روی هر یک از این خطها و اندازه گیری طول و عرض این نقاط و محاسبه شیب این خطها نشان دهید و جدول زیر را تکمیل کنید.



خط	L	L'	d'	d
شیب خط				



Witmo

۱- آقای تبریزی تصمیم گرفت به اتفاق دو تن از دوستانش کارگاه تولید و سایل آموزشی راه اندازی کند. آن ها تصمیم گرفتند کارگاه را در محلی دورافتاده تأسیس کنند تا هزینه اجاره کمتری پرداخت کنند. هزینه یک ماه آن ها (شامل اجاره محل، آبونمان آب، گاز، برق) ۱۵۰۰۰۰۰ تومان شد (این مبلغ را هزینه ثابت می نامند). هزینه تولید هر ۱۰۰ قطعه نیز ۵۰۰۰۰۰ تومان برآورد شد. (این هزینه را هزینه متغیر می نامند زیرا بستگی به میزان تولید دارد).

الف) اگر x تعداد بسته‌های صدتایی از قطعات تولید شده و y هزینه کارگاه بر حسب میلیون تومان برای تولید x بسته باشد، رابطه بین x و y را بنویسید.

ب) نمودار رابطه بين x و y را در محورهای مختصات که هر واحد روی محور x ها يک بستهٔ 10 تایی از قطعات و هر واحد روی محور y ها $1,000,000\text{ تومان}$ را نشان دهد، رسم کييد.

ج) x و y با هم رابطه خطی دارند، محل برخورد نمودار رابطه بین x و y با محور y ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 د) شیب خط نشان‌دهنده رابطه بین x و y را به دست آورید. شیب، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ آیا شیب این خط، در معادله رابطه بین x و y مشاهده می‌شود؟

ه) اگر هزینه ثابت کارگاه کم یا زیاد شود، چه تغییری در معادله رابطه بین x و y و چه تغییری در نمودار این رابطه ایجاد می‌شود؟

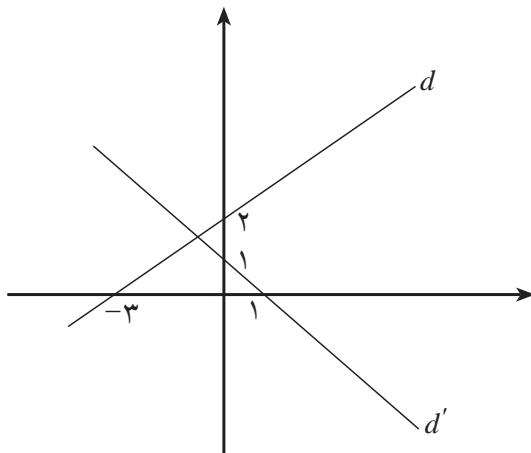
۲ - برای خرید یک کالای ۴۸۰,۰۰۰ تومانی قرار شده است بدون پیش پرداخت، ماهیانه ۶۰,۰۰۰ تومان قسط پرداخت کنیم.

الف) اگر x تعداد ماههایی باشد که قسط پرداخته ایم و y میزان بدھی ما به فروشنده (برحسب ۱۰۰,۰۰۰ تومان) باشد، رابطه سی x و y را بنویسید.

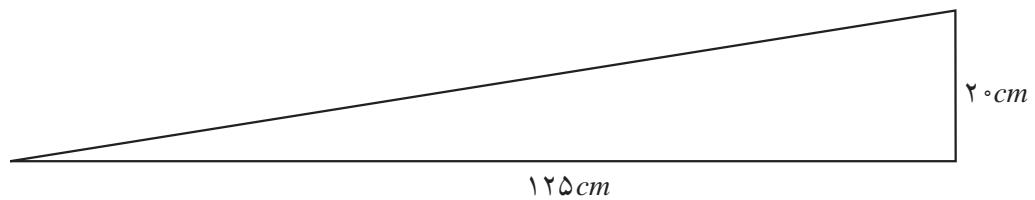
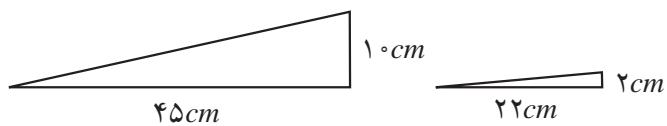
ب) شب خط به دست آمده حه حیزی، ا نشان م دهد؟

ج) نمودار خط به دست آمده را رسم کنید و مشخص کنید که کدام قسمت از این خط به این رابطه مربوط می‌شود.

^۳ شیب هر پک از خط‌های زیر را به دست آورید.



۴- طبق قوانین شهرسازی، شیب جوی هایی که آب باران را هدایت می کنند، باید عددی بین 1° و 2° باشد.
شیب کدام یک از مثلث ها می تواند به عنوان شیب جوی شهر در نظر گرفته شود؟



۵- نرده بانی به دیواری تکیه داده شده است. فاصله سر نرده بان از سطح زمین 1° متر است. فاصله پای نرده بان تا دیوار چند متر باشد تا شیب نرده بان $\frac{4}{3}$ باشد؟



معادله خط

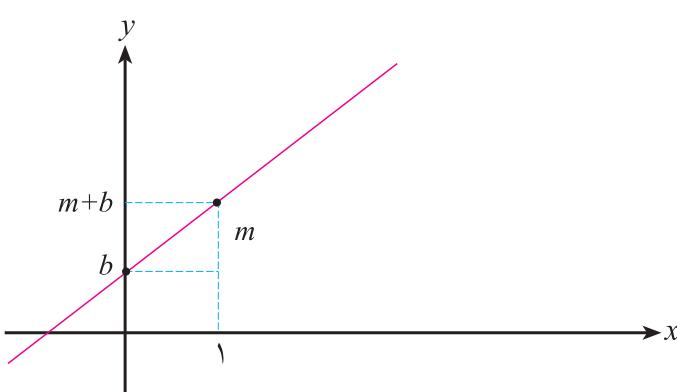
اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه خطی داشته باشند و آن‌ها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به صورت $y=mx+b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.



- ۱- خط به معادله $y=3x+4$ را رسم کنید.
- ۲- هریک از نقاط زیر را در صفحه مشخص کنید و از روی شکل بگویید کدام یک از این نقاط روی خط به معادله بالا قرار دارند؟
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- ۳- با جایگذاری مختصات هر نقطه در معادله خط، پاسخ خود را بررسی کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با جایگذاری مختصات آن در معادله خط، تساوی برقرار می‌شود.

برای به دست آوردن شیب یک خط کافی است دو نقطه روی آن خط پیدا کنیم. خط به معادله $y=mx+b$ را در نظر بگیرید. جایی که این خط محور y را قطع می‌کند، نقطه‌ای است که طول آن صفر است. با جایگذاری $x=0$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y=b$ ، b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. پس، $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ یک نقطه از این خط است. با جایگذاری $y=0$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $x=\frac{-b}{m}$. پس، $\begin{bmatrix} \frac{-b}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$ یک نقطه دیگر از این خط است.



بنابراین شیب این خط برابر است با $m = \frac{m+b-b}{1-0} = m$. توجه کنید که شکل صفحه قبل برای حالتی رسم شده که $m > b$ و $b > 0$. برای سایر حالات m و b ، خودتان شکل مناسب را رسم کنید.

اگر معادله خطی به صورت $y = mx + b$ باشد، شیب آن برابر m است.

مثال: معادله خطی را باید که شیب آن ۳ است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

اگر شیب خطی برابر m باشد، معادله آن به صورت $y = mx + b$ است. پس، معادله این خط به صورت $y = 3x + b$ است. با جایگذاری مختصات نقطه A در معادله، می‌توان مقدار b را پیدا کرد.

$$2 = 3 \times 1 + b$$

$$b = 2 - 3 = -1$$

با جایگذاری مقدار b در معادله خواهیم داشت: $y = 3x - 1$.



۱- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۲- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۳- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

۴- معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $D = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را باید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود:

معادله خطی به شیب m که از نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن (-2) است.

$$y - 2 = -2(x - 3)$$

$$y = -2x + 8$$

توجه کنید

در خط به معادله $2y = x + 2$

شیب برابر ۱ نیست. چرا؟

مثال: معادله خط را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.
ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم. چون A و B دو نقطه از این خط هستند، شیب آن برابر است با

$$m = \frac{3 - 2}{5 - (-1)} = \frac{1}{6}$$

پس، معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{1}{6}(x - (-1)) = \frac{1}{6}(x + 1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + 2\frac{1}{6}$$



بیندیشیم

در مثال روبرو، آیا برای نوشتن معادله خط، می‌توانستیم از نقطه B استفاده کنیم؟



تمرین در کلاس

الف) خط‌های به معادله‌های $y = 2x + 1$, $y = 2x - 2$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب) وضعیت این خط‌ها نسبت به هم چگونه است؟

ج) شیب این خط‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

د) در حالت کلی در ارتباط با توازنی چند خط با یکدیگر و رابطه بین شیب آن‌ها چه حدسی می‌زنید؟

خط‌هایی که شیب یکسان دارند با هم موازی‌اند.



۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.

$$y = 3x + 2$$

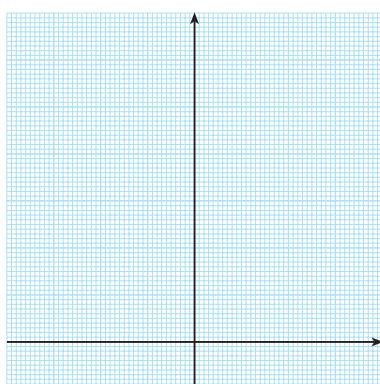
$$y = 2x + 2$$

$$y = x + 2$$

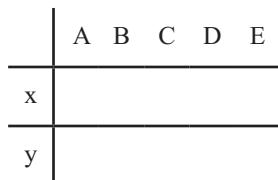
$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

۲- با بررسی و مقایسه وضعیت خط‌های بالا، در مورد وضعیت خط

به معادله $y = 2x + 2$ چه حدسی می‌زنید؟



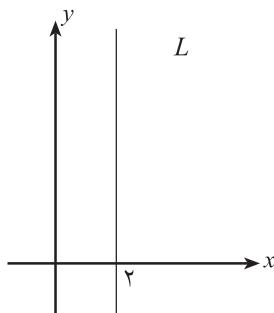
۳- پنج نقطه دلخواه روی خط $y=2$ در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.



۴- ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

۵- با توجه به آن چه که انجام داده اید، توضیح دهید وضعیت خط $y=b$ (b می تواند هر عدد ثابتی باشد) چگونه است و در مورد طول و عرض نقاط روی این خط چه می توان گفت؟

۶- خط L موازی محور y ها به شکل زیر رسم شده است. پنج نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید و جدول زیر را تکمیل کنید.



	A	B	C	D	E
x	2	2	2	2	2
y	0	1	2	3	4

۷- ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

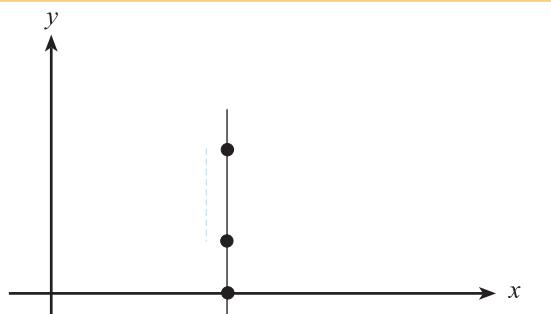
دیدیم که تمام نقاطی که عرض آنها ۲ بود خطی را می ساختند که معادله آن $y=2$ بود. در این جایی تمام نقاطی که طول آنها ۲ است خطی را می سازند که معادله آن را $x=2$ در نظر می گیریم.

در حالت کلی ، معادله خطی است موازی محور y ها که طول همه نقاط آن برابر b است.



بینندیشیم

آیا می توان برای خطوطی که بر محور X ها عمود هستند، تعريف و فرمول شیب خط را به کار برد؟



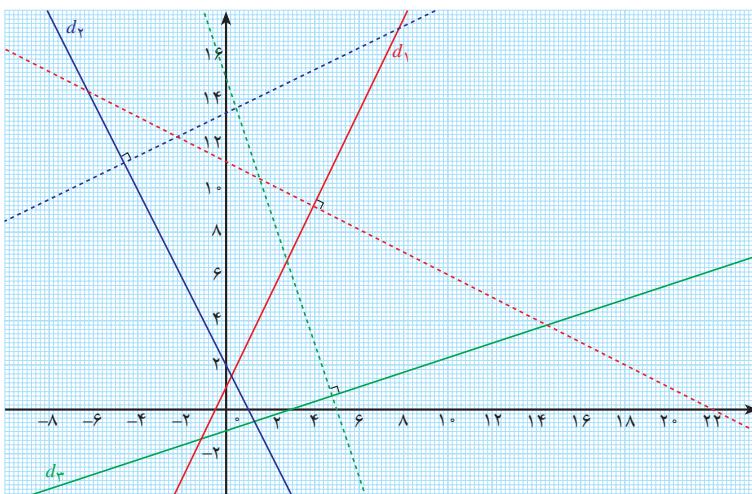
معادله کلی یک خط دلخواه در صفحه را می توان به صورت $ax+by+c=0$ در نظر گرفت. در حالتی که $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، این معادله را به شکل استاندارد $y=mx+d$ می توان نوشت که در آن m شیب این خط است. در حالت $b=0$ این معادله به صورت $x=d$ در می آید که خطی عمود بر محور x ها است.

خطهای عمود بر هم

دیدیم که موازی بودن خطها را می‌توانیم از طریق شیب آن‌ها تشخیص دهیم. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عمود بودن دو خط را هم می‌توانیم از طریق شیب آن دو خط تشخیص دهیم.



در شکل زیر سه خط d_1 و d_2 و d_3 و خطوط عمود بر آن‌ها رسم شده‌اند.



- دو نقطه روی هر خط عمود در نظر بگیرید و به کمک خط کش، با اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط، شیب هریک از این خط‌ها را به دست آورید.
جدول زیر را کامل کنید.

معادله خط	$d_1: y=2x+1$	$d_2: y=2x+2$	$d_3: y=\frac{1}{3}x-1$
شیب خط			
شیب خط عمود			

- آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای بین شیب‌های دو خط عمود بر هم وجود دارد؟

شرط عمود بودن دو خط با شیب‌های m و m' ، آن است که $m \cdot m' = -1$.



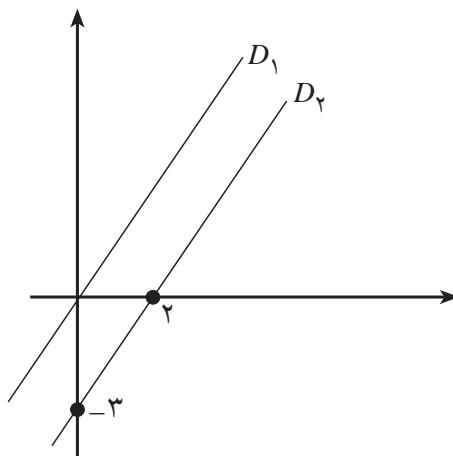
۱- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است.

۲- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

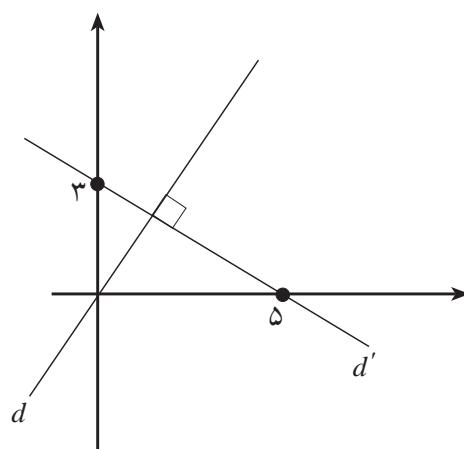
۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با نیمساز ربع اول ($y=x$) موازی است.

۴- وضعیت دو خط به معادله‌های $x+y=5$ و $2x+2y=5$ نسبت به هم چگونه است؟

۵- معادله دو خط موازی D_1 و D_2 را در شکل زیر بنویسید.



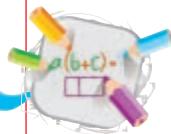
۶- خط d بر d' عمود است. با توجه به شکل زیر معادله خطوط d و d' را بنویسید.



دستگاه معادلات خطی دومجهولی

معادلاتی که در ابتدای این فصل بررسی کردیم دارای یک مجهول بودند. اما در حل بسیاری از مسائل، بیش از یک مجهول وجود دارد؛ برای یافتن این مجهولات، بیش از یک معادله مورد نیاز است و به همین دلیل معادلات داده شده را دستگاه معادلات می‌نامند. در این بخش یک حالت ساده از دستگاه معادلات را که دستگاه معادلات خطی دومجهولی نام دارد توضیح داده خواهد شد.

فعالیت



آقای کریمی می‌خواهد در یک باشگاه ورزشی ثبت نام کند. در اطراف خانه او دو باشگاه وجود دارد که هر کدام یک حق عضویت اولیه دارد و بابت هر جلسه استفاده نیز مبلغی دریافت می‌کند. باشگاه اول ۵۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد و برای هر جلسه استفاده ۵۰۰ تومان دریافت می‌کند. باشگاه دوم ۲۰۰۰ تومان حق عضویت می‌گیرد ولی برای هر جلسه استفاده ۷۰۰ تومان دریافت می‌کند.

۱- جدول زیر را که در آن، هزینه استفاده از هر باشگاه به ازای تعداد جلسات، آمده است کامل کنید.

تعداد جلسات	۰	۱	۳	۸	۱۲	۱۸
هزینه کل در باشگاه اول						
هزینه کل در باشگاه دوم						

۲- هزینه استفاده از یک باشگاه را با y و تعداد جلسات استفاده شده از آن را با x نشان دهید و رابطهٔ بین تعداد جلسات و هزینه کل را، به صورت دو معادله برای این دو باشگاه بنویسید و نمودار هر معادله را رسم کنید.

۳- یکی از دوستان آقای کریمی که در یکی از این دو باشگاه ثبت نام کرده می‌گوید : من تاکنون ۱۲ جلسه به باشگاه رفته‌ام و ۱۱۰۰۰ تومان پرداخته‌ام. با استفاده از نمودار تعیین کنید که این شخص در کدام باشگاه ثبت نام کرده است.

۴- با استفاده از معادله‌هایی که به دست آورده‌اید، معلوم کنید دوست آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کرده است و درستی پاسخ خود به سؤال قبل را بررسی کنید.

۵- اگر آقای کریمی بخواهد فقط ۱۰ جلسه از باشگاه استفاده کند، با استفاده از نمودار و معادله‌های به دست آمده نشان دهید ثبت نام در کدام باشگاه برای او باصره‌تر است؟

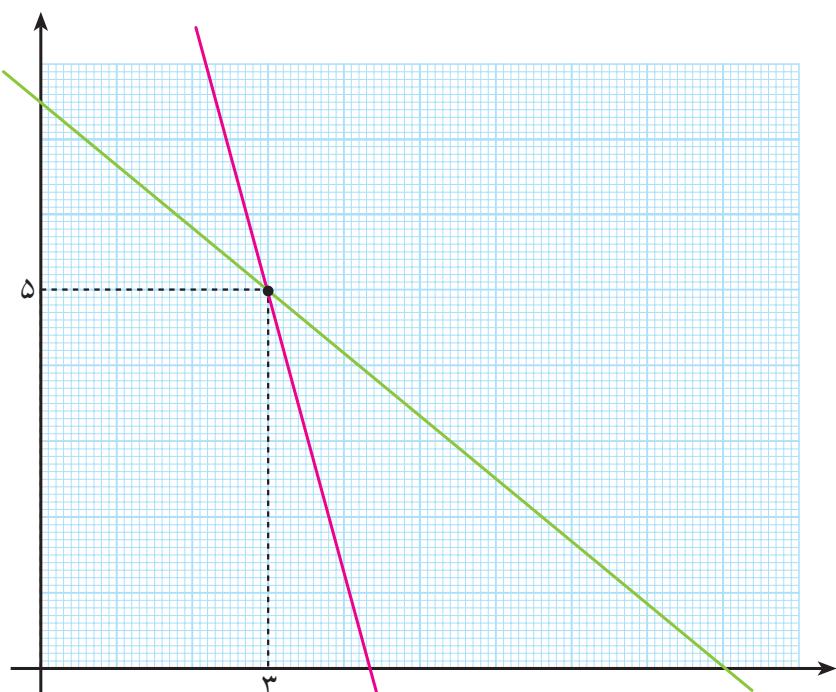
۶- برای ۱۵ جلسه استفاده، کدام باشگاه باصره‌تر است؟ آیا فرقی می‌کند که آقای کریمی در کدام باشگاه ثبت نام کند؟ روی نمودار دو خط، نقطه مربوط به ۱۵ جلسه استفاده از دو باشگاه، چه نقطه‌ای است؟

در این فعالیت، دو مجهول و دو معادله وجود دارد و این گونه مسائل را یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی می‌نامند. جواب این دستگاه اعدادی هستند که اگر به جای x و y قرار دهیم، هر دو معادله هم‌زمان برقرار شوند.

مثال : یک بسته که در آن دو تا از کالای اول و سه تا از کالای دوم قرار دارد را وزن می‌کنیم و حاصل ۲۱ کیلوگرم است. یک بار دیگر بسته دیگری را که در آن سه تا از کالای اول و یکی از کالای دوم در آن است را وزن می‌کنیم و حاصل ۱۴ کیلوگرم است. آیا می‌توانید بگویید وزن هر کدام از کالاها چقدر است؟

اگر وزن کالای اول را با x و وزن کالای دوم را با y نشان دهیم، وزن اولین بسته نشان می‌دهد که $2x + 3y = 21$ و وزن دومین بسته نشان می‌دهد که $3x + y = 14$.

یکی از روش‌های حل این دستگاه، روش هندسی است. اگر معادلات $2x + 3y = 21$ و $3x + y = 14$ را به عنوان معادلات دو خط در صفحه در نظر بگیریم، محل برخورد این دو خط نقطه‌ای است که مختصات آن هم‌زمان هر دو معادله را برقرار می‌کند.



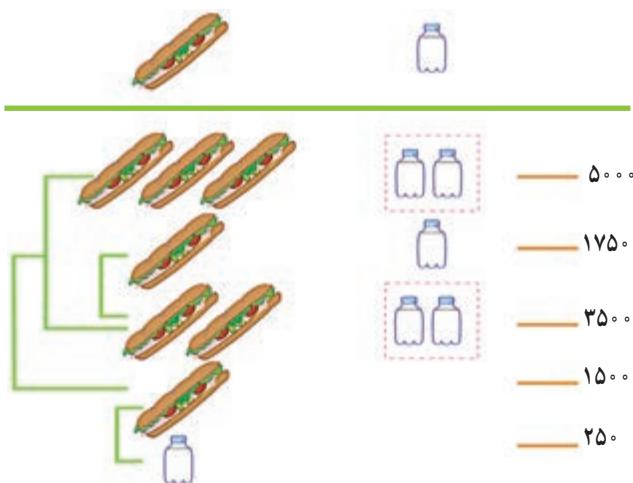
محل برخورد این دو خط در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ است. پس جواب این دستگاه $x = 3$ و $y = 5$ است.

اگر معادلات یک دستگاه خطی دومجهولی را به عنوان معادله‌های دو خط در نظر بگیریم، مختصات محل برخورد این دو خط، جواب آن دستگاه معادلات است.

بارسم نمودار معادلات، می‌توان تقریب خوبی از جواب دستگاه معادلات به دست آورد. برای حل دستگاه معادلات، اغلب بارسم نمودار آنها و یافتن محل برخورد این نمودارها و اندازه‌گیری مختصات نقطه برخورد، می‌توان تخمینی از جواب دستگاه را به دست آورد و سپس با حل جبری دستگاه می‌توان پاسخ دقیق را محاسبه کرد. در ادامه دو روش جبری برای حل دستگاه معادلات خطی دومجهولی معرفی می‌شوند.

روش حذفی

فعالیت



حمید و بهروز برای خرید ساندویچ و نوشابه برای خود و دوستانشان به بوفه رفتند. حمید برای ۳ ساندویچ و ۲ شیشه نوشابه ۵۰۰۰ تومان پرداخت و بهروز برای یک ساندویچ و یک شیشه نوشابه ۱۷۵۰ تومان پرداخت. حمید با نمایش تصویری روی روکش کرد که قیمت یک ساندویچ و قیمت یک شیشه نوشابه چقدر است.

هر یک از مراحل حل مسئله توسط حمید را توضیح دهد.

روشی را که در فعالیت بالا مورد استفاده قرار گرفته است را روش حذفی برای حل دستگاه معادلات می‌نامند. برای بیان ریاضی این عملیات می‌توانیم قیمت یک ساندویچ را با x و قیمت یک شیشه نوشابه را با y نشان دهیم. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5000 \\ x + y = 1750 \end{cases}$$

دستگاهی را که از چند معادله و چند مجهول تشکیل می‌شوند را دستگاه معادلات می‌نامند. مقادیری از متغیرهای این معادلات را که هم‌زمان تساوی‌های این معادلات را برقرار می‌کنند، جواب‌های این دستگاه می‌نامند. یافتن جواب‌های یک دستگاه را حل آن دستگاه می‌نامند.

برای حل دستگاه معادلات بالا، برای ایجاد ضریب‌های یکسان از یکی از متغیرها، معادله دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 500 \\ 2x + 2y = 350 \end{cases}$$

با کم کردن این دو معادله از هم خواهیم داشت:

$$(3x + 2y) - (2x + 2y) = 500 - 350$$

$$3x - 2x + 2y - 2y = 150$$

$$x = 150$$

با جایگذاری $x = 150$ در هر کدام از معادلات بالا می‌توان y را پیدا کرد.

$$150 + y = 175$$

$$y = 25$$

با جایگذاری این مقادیر از x و y در معادله اول می‌توانید درستی حل خود را امتحان کنید.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

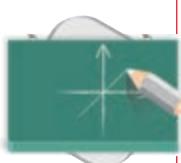
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه، معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به شکل $3x - 3y = 9$ درآید. با جمع دو معادله می‌توان مجهول y را حذف کرد: $3x - 3y + 4x + 3y = 5 + 9$.

پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت $7x = 14$ و نتیجه می‌شود $x = 2$. با جایگذاری در یکی از معادلات نتیجه می‌شود $y = -1$.

برای حل این دستگاه معادلات، همچنین می‌توانیم ابتدا متغیر x را حذف کنیم و y را بیابیم. بنابراین، معادله اول را در (-4) ضرب می‌کنیم: $-4x + 4y = -12$.

با جمع این معادله با معادله دوم خواهیم داشت $5 - 4x + 4y + 4x + 3y = -12 + 5$. پس از ساده سازی داریم $7y = -7$. که نتیجه می‌دهد $y = -1$. اکنون با جایگذاری در معادله اول داریم $x = 3 - (-1) = 2$.

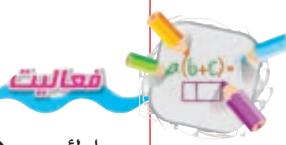


تمرین در کارگاه

دستگاه معادله زیر را یک بار با حذف x و یک بار با حذف y حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 23 \\ -2x + 7y = -24 \end{cases}$$

روش جایگذاری



فعالیت

معادله $3x + 2y = 5000$ را در نظر بگیرید:

- ۱- به ازای $y = 1000$ مقدار x را بباید؛
- ۲- به ازای $y = 1750$ مقدار x را بباید؛
- ۳- به ازای $x = 1750$ مقدار y را بباید.



یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات روش جایگذاری است. در این روش ابتدا به کمک یکی از معادله‌ها یکی از متغیرها بر حسب متغیر دیگر حساب می‌شود. سپس همانند بند ۳ فعالیت بالا با جایگذاری آن متغیر در معادله دیگر، به یک معادله بر حسب یک متغیر می‌رسیم، آن‌گاه آنرا با روش‌هایی که می‌شناسیم حل می‌کنیم.
مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

از معادله اول نتیجه می‌شود که $x = y + 3$. اگر در معادله دوم به جای x ، مقدار $y + 3$ را قرار دهیم به یک معادله بر حسب y می‌رسیم و می‌توان آن را حل کرد؛ پس $4(y + 3) + 2y = 6$. پس از ساده کردن، این معادله به صورت $6y + 12 = 6$ در می‌آید و نتیجه می‌شود $y = -1$. با استفاده از تساوی $x = y + 3$ و این که $y = -1$ ، نتیجه می‌گیریم $x = 2$.

در این روش با استفاده از یکی از معادله‌ها، یکی از دو مجهول را بر حسب مجهول دیگر به دست می‌آوریم. سپس مجهول محاسبه شده را در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم. در مثال بالا با استفاده از معادله اول، x را بر حسب y حساب کردیم، سپس در معادله دوم روی x جایگذاری کردیم. با این عمل به یک معادله بر حسب یک متغیر می‌رسیم و می‌توانیم آن را حل کنیم. این روش را، روش جایگذاری می‌نامند.
مثال: دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2m + 3n = 15 \\ 3m + 2n = 15 \end{cases}$$



بیندیشیم

در روش جایگذاری، آیا
فرقی می‌کند که کدام متغیر
را بر حسب متغیر دیگر
به دست آوریم؟

این دستگاه را یک بار با روش حذفی و یک بار با روش جایگذاری حل می‌کنیم.
روش حذفی: معادله اول را در (-3) و معادله دوم را در 2 ضرب می‌کنیم و یک دستگاه جدید به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} -6m - 9n = -45 \\ 6m + 4n = 30 \end{cases}$$

جمع دو معادله صفحه قبل معادله زیر را می‌سازد.

$$-6m - 9n + 6m + 4n = -45 + 30$$

$$-5n = -15$$

$$n = 3$$

در معادله اول به جای n مقدار ۳ را قرار می‌دهیم و به معادله $2m + 3 \times 3 = 15$ می‌رسیم، درنتیجه $m = 3$. روش جایگذاری: از معادله اول n را برحسب m حساب می‌کنیم.

$$2m + 3n = 15$$

$$3n = 15 - 2m$$

$$n = 5 - \frac{2}{3}m$$

در معادله دوم جای n قرار می‌دهیم $m = 5 - \frac{2}{3}m$ ، و معادله به دست آمده برحسب m را حل می‌کنیم:

$$3m + 2 \times (5 - \frac{2}{3}m) = 15$$

$$3m + 10 - \frac{4}{3}m = 15$$

$$\frac{5}{3}m = 5$$

$$m = 3$$

با جایگذاری $m = 3$ در معادله اول نتیجه می‌شود $2 \times 3 + 3n = 15$ و پس از ساده کردن خواهیم داشت: $3n = 9$. $n = 3$ که نتیجه می‌دهد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

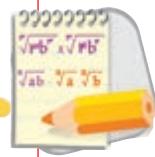
قبل با استفاده از روش یافتن شیب خط، این گونه مسائل را حل می‌کردیم. اما، در این بخش با استفاده از حل دستگاه‌ها نیز می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

معادله کلی یک خط به صورت $y = mx + b$ است. اگر این خط بخواهد از نقطه A بگذرد باید با جایگذاری طول و عرض آن در معادله این خط تساوی برقرار گردد، یعنی $b + (-1)m = 2$ و درنتیجه $b - m = 2$. اگر این خط بخواهد از نقطه B بگذرد باید داشته باشیم $b + 3m = 2$. با این دو معادله یک دستگاه معادله خطی دوجهولی تشکیل می‌شود که جواب آن، خط مورد نظر را مشخص می‌کند.

مسئله: باب پنجاه و چهارم از کتاب مفتاح المعاملات

دو نفر در راهی هم سفر بودند. به جایی رسیدند و خواستند که با هم نان بخورند، همراه یکی از آنها ۳ نان بود و همراه دیگری ۲ نان. با هم مشغول خوردن شدند. نفر سومی از راه رسید، تعارف کردند، او هم با آنها هم سفره شد و هر سه به یک سهم نان خوردند. نفر سوم ۵ درهم به آن دو نفر داد و گفت هر کدام به تعداد نان خود سهمش را از این پول بردارد.

حال چگونه این پول را میان دو نفر تقسیم کنیم و سهم هر یک چند درهم است؟



۱- دستگاه معادلات (الف) را به روش جایگزینی و (ب) را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2y - 3x = 17 \end{cases} \text{ (الف)} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \text{ (ب)}$$

۲- نوعی کود از مخلوط شدن دو نوع که یکی سرعت دهنده رشد و دیگری غنی کننده مواد غذایی گیاه است، درست می شود. مخلوط های متفاوت اثرات متفاوتی دارد.

مخلوط (A) ۴ پیمانه از نوع اول و ۳ پیمانه از نوع دوم است که ۲۰۰ تومان قیمت دارد. مخلوط (B) ۳ پیمانه از نوع اول و ۵ پیمانه از نوع دوم است که ۱۷۰ تومان قیمت دارد. اگر یک پیمانه از نوع اول x تومان و یک پیمانه از نوع دوم y تومان قیمت داشته باشد،
 الف) برای قیمت مخلوط A و B روابطی برحسب x و y بنویسید.
 ب) مقدار x و y را پیدا کنید.

ج) مخلوطی که دارای ۵ پیمانه از نوع اول و ۲ پیمانه از نوع دوم باشد، چه قیمتی دارد؟

۳- آیا می توان مقدار a را به گونه ای تعیین کرد که نقطه $\begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط $2x+y=5$ و $x-2y=5$ باشد.

۴- با رسم نمودارهای دو خط $\frac{3}{4}x - 5y = -5$ و $-3x - 5y = -5$ تحقیق کنید این دو خط در چه رباعی همدیگر را قطع می کنند. سپس با حل جبری دستگاه تشکیل شده از این معادله ها، مختصات نقطه محل تقاطع آن را به دست آورید و جواب خود را بررسی کنید.

نسبت‌های مثلثاتی



در شکل بالا هواپیما، ماهواره بر ایرانی امید و چند ماهواره دیده می‌شود
به نظر شما در یک لحظه شب هر یک با محورافقی چقدر است؟

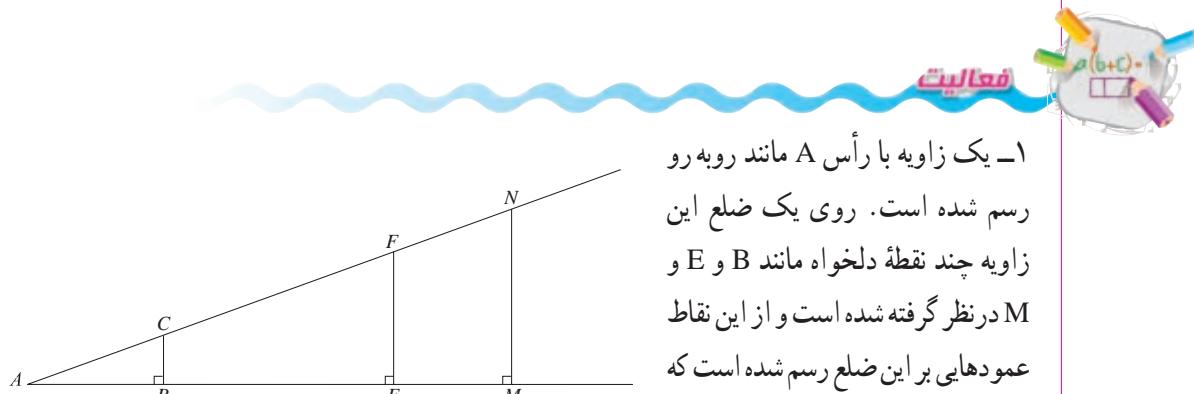
طرح یک مسئله

امروز در کلاس درس ریاضی، معلم گفت:

شما که ریاضی را خوب یاد گرفته اید توانایی های بسیاری در زندگی به دست آورده اید. شما کارهایی می توانید انجام دهید که دیگران نمی توانند. مدیر مدرسه گفته است که طناب تیرک پرچم مدرسه مدتی است که پوسیده شده است و لازم است طناب جدیدی برای آن بخریم ولی نمی دانیم طول تیرک پرچم چقدر است؟ من گفتم که دانش آموزان کلاس ریاضی من، ریاضی را خوب یاد گرفته اند و می توانند برای شما طول این تیرک را به دست آورند.

آیا شما می توانید طول تیرک پرچم یا بلندی ساختمان مدرسه خود را حساب کنید؟ برای این کار چه اطلاعاتی را نیاز دارید؟

معمولًاً یک مسئله راه حل های متعددی دارد و هریک از شما ممکن است راه خاص خود را بیابد. یکی از راه های حل مسئله بالا، مقایسه طول اشیای بزرگ با طول اشیای کوچک است. فعالیت زیر ابزار مناسبی برای مقایسه طول ها فراهم می کند.



۱- یک زاویه با رأس A مانند روبه رو رسم شده است. روی یک ضلع این زاویه چند نقطه دلخواه مانند B و E و M درنظر گرفته شده است و از این نقاط عمودهایی براین ضلع رسم شده است که ضلع دیگر را در نقاطی که به ترتیب C و F و N نامیده ایم قطع کرده اند.

با اندازه گیری های مستقیم درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

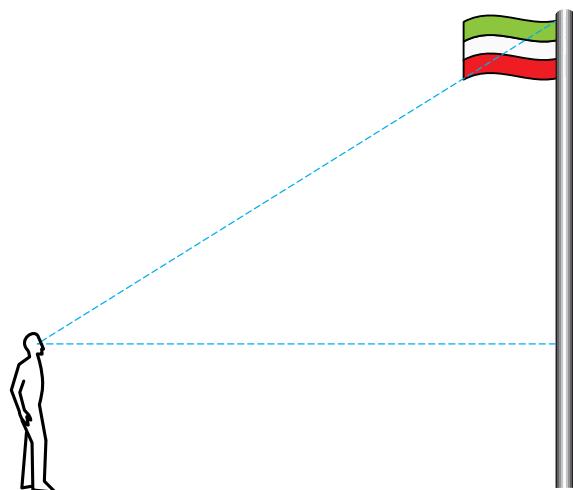
$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{MN}{AN}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AN}$$

۲- با رسم همین شکل با زاویه های دیگر و نقاط دیگر، درستی تساوی های بالا را بررسی کنید.

نسبت های بالا اعدادی هستند که فقط به زاویه انتخاب شده بستگی دارند.

تائزانت زاویه

به مسئله اصلی بازمی گردیم. احمد یکی از شاگردان علاقه مند کلاس بود و می خواست توانایی خود را در حل مسئله اندازه گیری طول تیرک پرچم بیازماید. او به نزدیکی تیرک پرچم رفت و مدتی به آن نگاه کرد و از خود برسید مجھول مسئله چیست و برای یافتن آن، چه اطلاعاتی لازم است؟ او وضعیت مسئله را در یک شکل به صورت زیر در ذهن خود تجسم کرد.

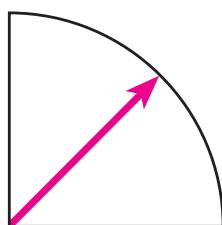


او گفت من طول قد خود را می دانم و فاصله ام را هم با تیرک پرچم می توانم به دست آورم و اگر بدانم با چه زاویه ای نوک تیرک را می بینم، این اطلاعات برای حل مسئله باید کافی باشد. بهتر است همراه احمد فعالیت زیر را انجام دهیم تا معلوم شود او تا چه حد در حل مسئله موفق خواهد بود.



فعالیت

۱- یک ربع دایره مقوا بی شبیه یک نقاله نصف شده بسازید و روی مرکز ربع دایره یک عقره نازک مقوا بی دیگر با پونس بچسبانید.



۲- به حیاط بروید^۱ و در فاصله ای مشخص شده از تیرک پرچم بایستید و در حالتی که یک ضلع ربع دایره به صورت افقی است، عقره آن را در حالتی قرار دهید که نوک تیرک را نشان دهد. محل عقره را روی محیط ربع دایره علامت

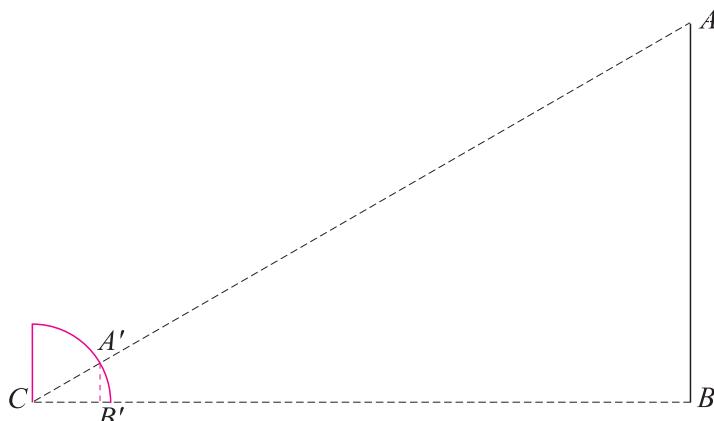
۱- در صورتی که امکان این کار را ندارید، در کلاس بمانند و ارتفاع تخته یا دیوار را اندازه بگیرید.

بزند. فاصلهٔ ضلع افقی ربع دایرهٔ تا سطح زمین تقریباً به اندازهٔ قد شما خواهد بود.

۳- حال به کلاس برگردید و ربع دایرهٔ مقوای را روی یک کاغذ بگذارید. مرکز ربع دایره را C و محل علامت‌گذاری شده روی محیط ربع دایره را A' بنامید. از A' خط عمود بر ضلع افقی ربع دایره را رسم کنید تا این ضلع را در نقطه‌ای قطع کند و این نقطه را B' بنامید. در مثلث قائم‌الزاویه $CA'B'$ ، طول ضلع‌های $A'B'$ و CB' را مستقیماً با خط‌کش اندازه‌گیری کنید.

احمد یک ربع دایرهٔ به شعاع 10 سانتی‌متر ساخته بود و عفریه او با ضلع افقی ربع دایرهٔ زاویه 23° درجه ساخته بود. فاصلهٔ او با تیرک پرچم 17 متر بود و قد احمد 165 متر بود.

۴- با استفاده از شکل زیر و نتایج فعالیت صفحه 14° طول تیرک پرچم را حساب کنید.

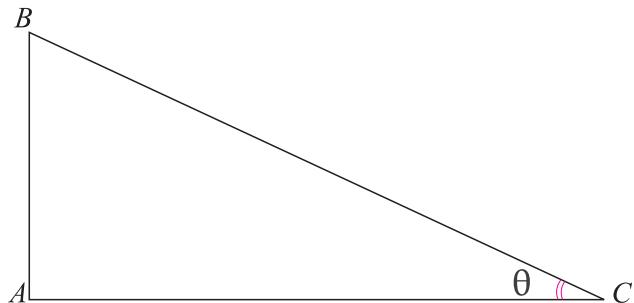


در انجام این فعالیت، هریک از شما ممکن است ربع دایرهٔ مقوای خود را بسازد که احتمالاً هم اندازه نیستند. آیا این مطلب در محاسبه طول تیرک پرچم تأثیری خواهد داشت؟ برای مثال، فرض کنید حسن یکی دیگر از دانشآموزان است و ربع دایره‌ای ساخته است که شعاع آن دو برابر شعاع ربع دایرهٔ احمد است. با این فرض که حسن و احمد هم قد هستند و حسن در همان نقطه‌ای که احمد ایستاده بود، ایستاده است، محاسبات این دو نفر چه تفاوتی با هم خواهد داشت؟ شکل زیر نشان می‌دهد که این دو نفر نسبت‌های متفاوتی را تشکیل می‌دهند، ولی این دو نسبت مساوی‌اند.

$$\frac{A'B'}{CB'} = \frac{A''B''}{CB''} = \frac{AB}{CB}$$

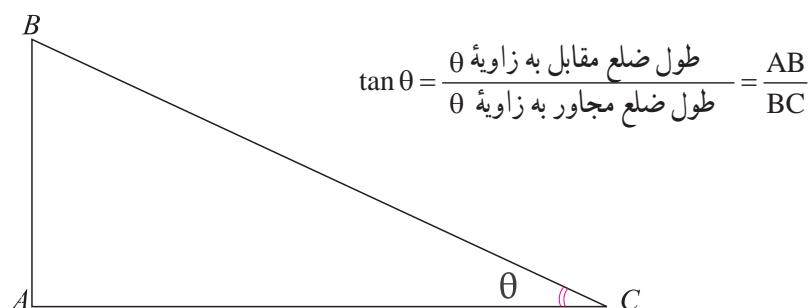


همان طور که مشاهده می شود، احمد از نسبت $\frac{A'B'}{CB'}$ و حسن از نسبت $\frac{A''B''}{CB''}$ برای حل مسئله استفاده می کند و مقدار این دو نسبت مساوی اند. در فعالیت صفحه ۱۴۰ دیدیم که این نسبت، عددی است که فقط بستگی به زاویه تشکیل شده در رأس C دارد. بنا به تعریف، این نسبت را تانژانت آن زاویه می نامند. در یک مثلث قائم الزاویه مانند زیر که یک زاویه آن θ نامیده شده است، ضلع AB را ضلع روبرو به این زاویه و ضلع AC را ضلع مجاور به این زاویه می نامند.



اگر θ یک زاویه حاده (تند) باشد، تانژانت آن را با $\tan\theta$ نشان می دهند^۱. تعریف تانژانت نشان می دهد که :

در یک مثلث قائم الزاویه، اگر θ یک زاویه حاده آن باشد، $\tan\theta$ برابر است با تقسیم طول ضلع مقابل به θ به طول ضلع مجاور به θ .



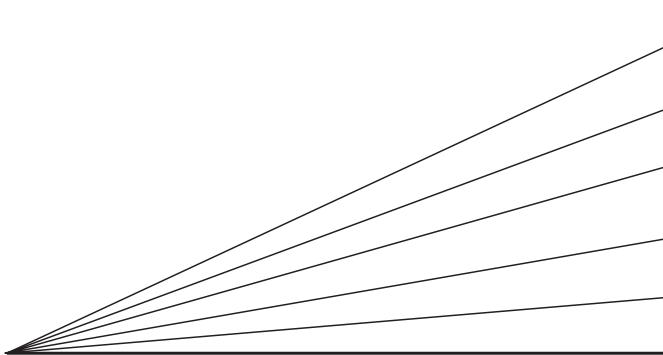
برای مثال، $\tan 26^\circ$ تقریباً برابر $487/487 = 1$ است، یعنی 487° .



- ۱- یک جدول تشکیل دهید که در آن تانژانت زاویه های 23° ، 30° ، 40° ، 45° و 46° درجه به طور تقریبی با رسم مثلث قائم الزاویه و اندازه گیری مستقیم با خط کش و محاسبه نسبت ها، محاسبه شده باشند.
- ۲- با توجه به جدول، اگر زاویه حاده ای بزرگ شود تانژانت آن چه تغییری خواهد کرد؟

^۱- tan مخفف لغت انگلیسی tangent است. در برخی کتاب ها تانژانت را با tg نیز نشان می دهند.

۳- شکل زیر زاویه‌های متفاوتی را نشان می‌دهد که ضلع مجاور به آن‌ها ثابت است ولی ضلع رویه‌روی به آن‌ها متفاوت است. درستی ادعای خود در بند (۲) را از طریق شکل نشان دهید.



۴- اگر زاویه‌ای به صفر تزدیک شود تانژانت آن به چه عددی تزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

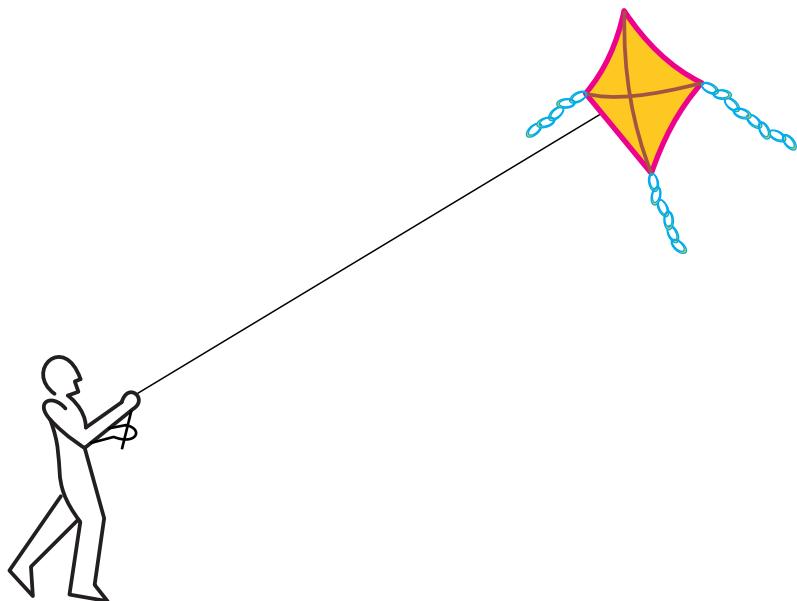
غیاث الدین جمشید کاشانی

جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی ملقب به غیاث الدین در سال 790° ق در کاشان متولد شد. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، منجمان و زیج‌نویسان ایرانی دوره اسلامی است. او ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نقاد و صاحب افکار عمیق و مسلط بر آثار ریاضی‌دانان قبل از خود بود. او در فن محاسبه و به کاربستان روش‌های تقریبی بسیار توانمند بود. او برای اولین بار محاسبه عدد π تا شانزده رقم اعشار و محاسبه $\sin 1^{\circ}$ تا بیست و دو رقم اعشار را انجام داده است. او در محاسبه عدد π که با دقت $10^{-17} \times 6$ است از ابزار مقدماتی در محاسبات که از مرز جذرگرفتن تجاوز نمی‌کند، استفاده نموده است و به قول تاریخ نگاران ریاضیات اروپا این اثر را شاهکار فن محاسبه نامیدند. او در محاسبه $\sin 1^{\circ}$ با استفاده از تشکیل معادله جبری و استفاده از قضایای هندسی و حل معادله به روش تکرار که در ریاضیات حال حاضر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد به محاسبه پرداخته است. او روشی برای محاسبه ریشه n ام یک عدد صحیح بیان می‌کند که ریاضی‌دانان اروپایی در قرن نوزدهم آن را ابداع کرده و به روش «روفینی - هورنر» معروف است. او کسرهای اعشاری را به صورت روش‌مند معرفی و به کار برد. از او آثار بسیار زیادی از جمله در رساله محيطیه، رساله وتر و جیب، مفتاح الحساب و ... را می‌توان نام برد. او در سال 832° ق در رصدخانه سمرقند درگذشته است.

سینوس زاویه

پس از حل مسئله یافتن طول تیرک پرچم، معلم مسئله دیگری را مطرح ساخت که شباهت بسیاری به مسئله اول داشت.

معلم پرسید: اگر شما بادبادک را به هوا بفرستید، آیا می‌توانید بفهمید که چقدر از سطح زمین فاصله گرفته است؟



احمد گفت: هر چقدر نخ بیشتری را رها کرده باشیم بادبادک بالاتر رفته است، اگر بدانیم چقدر نخ فرستاده شده است می‌توانیم بفهمیم بادبادک چقدر بالا رفته است. (آیا این فکر احمد درست بود؟)

حسن گفت: اما اگر شدت باد کم شود، هر چقدر هم که نخ فرستاده باشیم بادبادک پایین می‌آید و زاویه راستای نخ با سطح زمین کم می‌شود، پس فقط با دانستن مقدار نخ فرستاده شده نمی‌توان فهمید بادبادک چقدر بالا رفته است.

معلم گفت: پس چه چیز دیگری را برای حل این مسئله باید بدانیم؟

احمد گفت: به نظر می‌رسد زاویه نخ با سطح زمین هم مهم است و اگر این زاویه را بدانیم شاید بتوانیم فاصله بادبادک تا سطح زمین را محاسبه کنیم.

آیا شما می‌توانید دلیل درستی حدس احمد را بیان کنید؟ فرض کنید ۴۵ متر نخ رها شده است و زاویه نخ با سطح زمین 39° درجه باشد و فاصله دست کسی که بادبادک را هوا کرده است از سطح زمین یک متر و پنج سانتی متر باشد.

در فعالیت زیر شما می‌توانید شیوه یافتن ارتفاع بادبادک را بیابید.

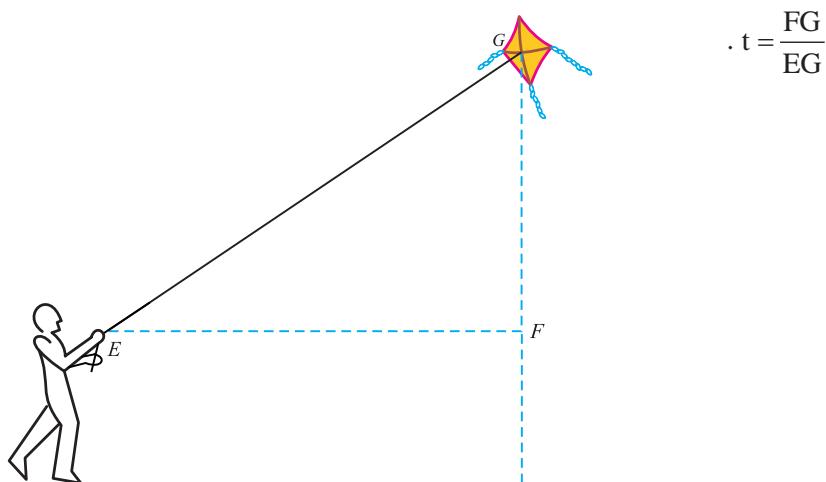
فعالیت



۱- یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که یک زاویه آن 39° درجه باشد. رأس قائمه را A و رأس مربوط به زاویه 39° درجه را B و رأس دیگر را C بنامید.

۲- با اندازه‌گیری مستقیم، نسبت $\frac{AC}{CB}$ را حساب کنید و آن را t بنامید. با مروری بر فعالیت صفحه ۱۴۰ تیجه بگیرید که این نسبت بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث قائم الزاویه‌ای که رسم کرده‌اید ندارد.

۳- مثلث قائم الزاویه‌ای را درنظر بگیرید که وتر آن نخ بادبادک و یک ضلع آن خط موازی زمین و ضلع دیگر آن خط عمود از بادبادک به سطح زمین است. طبق شکل زیر رأس‌های آن نام‌گذاری شده‌اند، تیجه بگیرید:

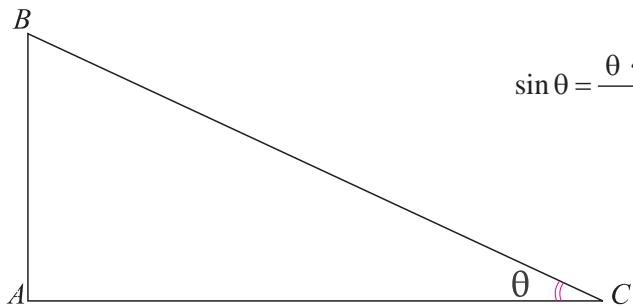


۴- با استفاده از تساوی بالا و دانستن مقدار t و مقدار EG و فاصله دست کسی که بادبادک را هوا کرده تا زمین، ارتفاع بادبادک را حساب کنید.

در حل مسئله بالا عدد t که عددی وابسته به زاویه 39° درجه بود، نقش مهمی را بازی کرد. این عدد را سینوس زاویه 39° درجه می‌نامند.

اگر θ زاویه حاده‌ای باشد، و مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع روبرو به زاویه θ به طول وتر را، سینوس θ می‌نامند و با $\sin\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه θ بستگی دارد.



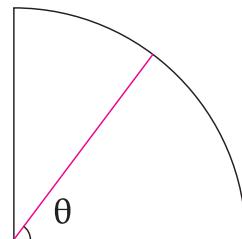
$$\sin \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

برای مثال، $\sin 39^\circ$ تقریباً برابر است با 0.629 ، یعنی $0/629$.



تمرین دریافتی

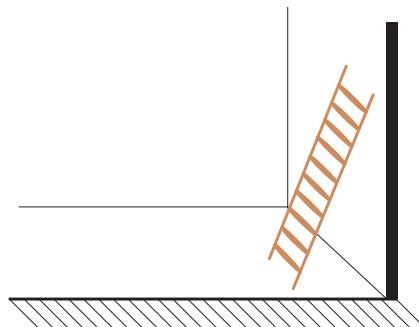
- ۱- یک جدول تشکیل دهید که در آن سینوس زوایه های 23° ، 30° ، 40° ، 45° و 60° درجه به طور تقریبی با رسم مثلث قائم الزاویه و اندازه گیری مستقیم با خط کش و محاسبه نسبت ها، محاسبه شده باشند.
- ۲- با رسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\sin \theta$ را به صورت طول یک پاره خط، در شکل نشان دهید.



- ۳- در شکل بالا، اگر زاویه θ بزرگ شود سینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل و جدول درستی ادعای خود را نشان دهید.
- ۴- اگر زاویه θ به صفر نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.
- ۵- اگر زاویه θ به 90° درجه نزدیک شود سینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

کسینوس زاویه

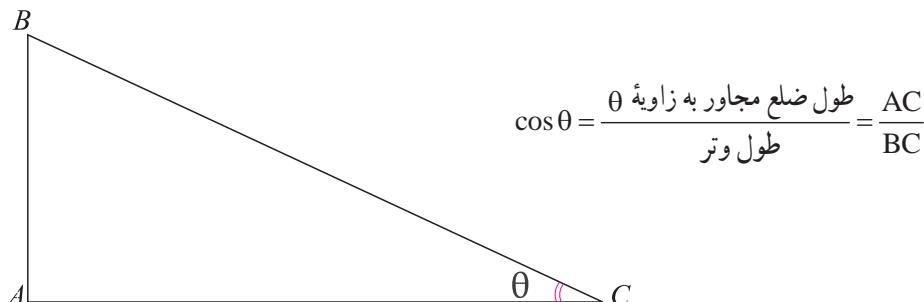
فرض کنید نردهبانی را برای رفتن به پشت بام به دیوار تکیه داده‌ایم. شما می‌توانید فاصله پای نردهبان که بر زمین قرار دارد را تا دیوار حساب کنید. هم‌چنان زاویه‌ای که نردهبان با سطح زمین می‌سازد را هم می‌توانید اندازه بگیرید. آیا با این اطلاعات می‌توانید طول نردهبان را حساب کنید؟



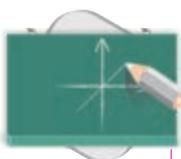
در اکثر مسائل هندسی که زاویه در آن‌ها نقش مهمی را بازی می‌کند تاثرانت و سینوس زاویه‌ها در محاسبات بسیار کارگشا هستند. در حل مسئله بالا، عدد دیگری که آن‌هم از طریق یک زاویه تعیین می‌شود نقش اصلی را بازی می‌کند. این عدد را کسینوس زاویه می‌نامند.

اگر θ زاویه حاده‌ای باشد، و مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که یک زاویه آن θ باشد، حاصل تقسیم طول ضلع مجاور به زاویه θ به طول وتر را، **کسینوس θ** می‌نامند و با $\cos\theta$ نشان می‌دهند.

فعالیت صفحه ۱۴۰ نشان می‌دهد، این مقدار بستگی به کوچکی یا بزرگی مثلث رسم شده ندارد و فقط به زاویه θ بستگی دارد.

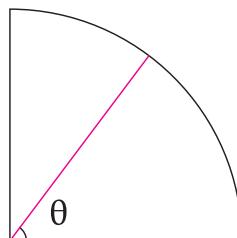


مثلًا، $\cos 27^\circ$ تقریباً برابر است با 0.891 ، یعنی $\cos 27^\circ \approx 0.891$.



تمرین دریافتی

۱- بارسم یک ربع دایره به شعاع ۱، برای یک زاویه حاده θ که در زیر نشان داده شده است، $\cos\theta$ را به صورت طول یک پاره خط، در شکل نشان دهید.

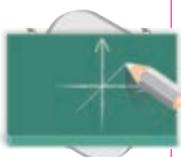


۲- اگر زاویه حاده θ بزرگ شود کسینوس آن چه تغییری خواهد کرد؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

۳- اگر زاویه حاده θ به صفر نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

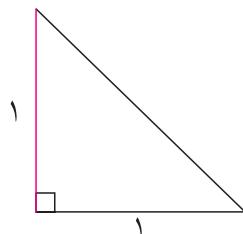
۴- اگر زاویه حاده θ به 90° درجه نزدیک شود کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از روی شکل درستی ادعای خود را نشان دهید.

برای زاویه‌های حاده، از طریق نسبت‌های طول اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه، اعدادی را ساختیم که تانزانت و سینوس و کسینوس این زاویه‌ها نام داشت. این اعداد را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامند و در محاسبات هندسی نقش مهمی دارند.



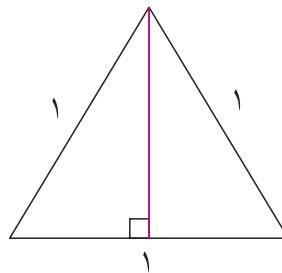
تمرین دریافتی

در زیر یک مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است که طول اضلاع مجاور قائمه آن برابر ۱ است.



- ۱- نشان دهید که زاویه‌های حاده این مثلث 45° درجه است و طول وتر این مثلث را محاسبه کنید.
- ۲- سینوس و کسینوس و تانزانت زاویه 45° درجه را به دست آورید.

در زیر یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ رسم شده است. ارتفاع، میانه و نیمساز مربوط به هر رأس بر هم منطبق اند و یکی از آن ها در یکی از رأس ها رسم شده است و دو مثلث قائم الزاویه متساوی به دست آمده است.



- ۳- طول اضلاع و زاویه های این مثلث های قائم الزاویه را حساب کنید.
- ۴- سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه های 30° و 60° درجه را به دست آورید.

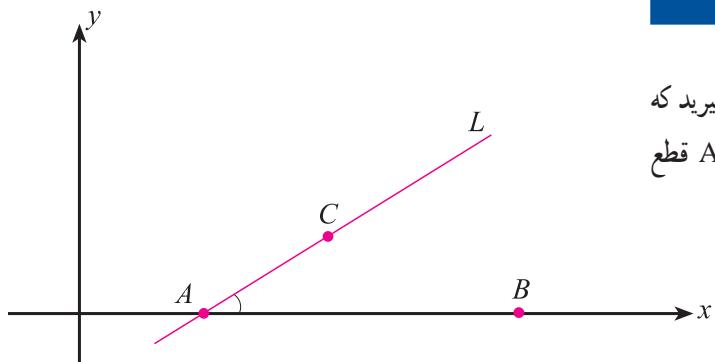
با حل تمرین بالا، می توانید جدول زیر را که نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° ، 45° و 60° درجه را نشان می دهد، به دست آورید.

زاویه	30°	45°	60°
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$

توجه کنید

$$\sin(2\theta) \neq 2\sin\theta, \quad \sin(30^\circ) + \sin(45^\circ) \neq \sin(30^\circ + 45^\circ)$$

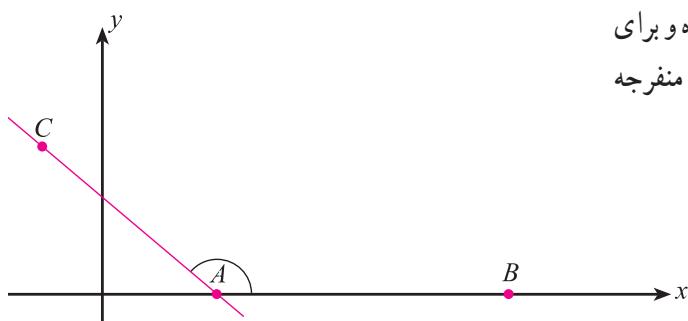
شیب خط و تانزانت



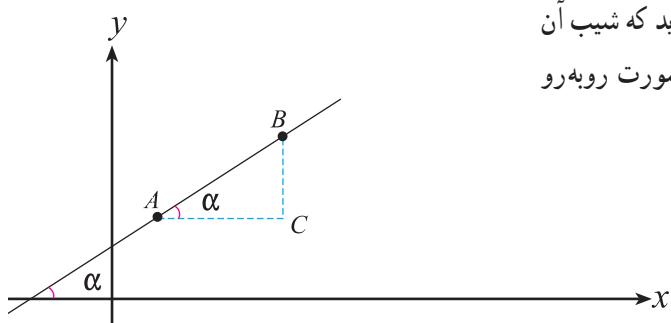
خطی مانند L در صفحه درنظر بگیرید که محور x ها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند.

سمت راست نقطه A روی محور x ها نقطه‌ای مانند B انتخاب می‌کیم و بالای محور x ها روی خط L نقطه‌ای مانند C انتخاب می‌کیم. زاویه بین دو نیم خط AB و AC را زاویه بین خط L و محور x ها می‌نامند. برای

خط‌های با شیب مثبت این زاویه حاده و برای خط‌های با شیب منفی این زاویه منفرجه (باز) است.



خطی به معادله $y=mx+b$ درنظر بگیرید که شیب آن مثبت باشد. شکل کلی این خط به صورت رو به رو است.



یادآوری می‌کیم که شیب این خط برابر است با $\frac{BC}{AC}$ ، از طرف دیگر می‌دانیم که این نسبت همان تانزانت زاویه بین این خط و محور افقی است. بنابراین :

شیب هر خط که با محور افقی زاویه حاده می‌سازد، همان تانزانت زاویه بین خط و محور افقی است، یعنی $\tan\alpha=m$

m را ضریب زاویه خط $y=mx+b$ نیز می‌نامند.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

از آن‌جا که هرکدام از سینوس و کسینوس و تانژانت^۱ زاویه‌ها به صورت یک نسبت در یک مثلث به دست می‌آیند، آن‌ها را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامند. این مقادیر بی ارتباط به هم نیستند و اگر یکی از آن‌ها را بدانیم، دو تایی دیگر را می‌توان به دست آورد.

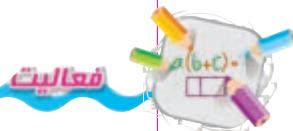


یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و زاویه‌های حاده آن را θ و α بنامید. می‌دانید $\alpha + \theta = 90^\circ$.

$$1 - \text{نشان} \cos\alpha = \sin\theta \quad \cos\theta = \sin\alpha$$

$$2 - \text{برای زاویه حاده } \theta \text{ نشان} \cos(\theta) = \sin(90^\circ - \theta) \quad \sin(\theta) = \cos(90^\circ - \theta)$$

دو زاویه که جمع آن‌ها 90° درجه شود، زاویه‌های متمم می‌نامند. در مثلث‌های قائم‌الزاویه، زاویه‌های حاده آن متمم یکدیگرند. تمرین بالا نشان می‌دهد که سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است، هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است.



یک زاویه حاده رسم کنید و آن را θ بنامید.

۱- یک مثلث قائم‌الزاویه روی اضلاع زاویه θ به گونه‌ای رسم کنید که وتر آن طول ۱ داشته باشد. رأس قائمه را C و رأس زاویه θ را A و رأس دیگر را B بنامید.

۲- از روی تعریف نسبت‌های مثلثاتی نتیجه بگیرید :

$$AC = \cos\theta, \quad CB = \sin\theta, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

۳- نشان دهید برای زاویه حاده θ داریم $\sin\theta < 1 < \cos\theta$.

۱- برای زاویه‌ها یک نسبت مثلثاتی دیگر نیز به نام کتانژانت تعریف می‌شود که در این کتاب نیامده است. کتانژانت یک زاویه θ را با $\cot\theta$ نشان می‌دهند.

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{تعريف می‌کنند.}$$

برای سادگی، در نوشتمن توانهای عبارت‌های مانند $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ به جای $\sin^r\theta$ یا $\cos^r\theta$ می‌نویسیم. توجه داشته باشید که $\sin\theta$ به معنای $(\sin\theta)^r$ است.

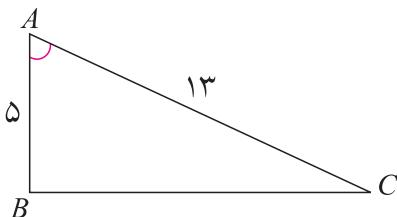


مسانده

توجه کنید

$$\sin^r\theta \neq \sin\theta^r$$

۱- در مثلث قائم‌الزاویه زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه رأس A را حساب کنید.



۲- مقدار عددی هر یک از عبارت‌های سمت چپ را به مساوی آن در سمت راست نظریه کنید.

$\sin^r(7^\circ) + \cos^r(7^\circ)$
$\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)$
$\frac{1}{\sin(3^\circ)}$

$\frac{1}{2}$
2
$\sqrt{2}$
1

۳- مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

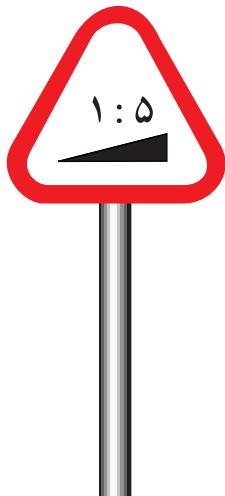
$$A = \frac{2\cos^r(3^\circ) - 2\sin(3^\circ)}{2\tan(45^\circ) + 3\cos^r(6^\circ)}$$

۴- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه 10° سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{3}{5}$ است. محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

۵- یک عدد مثبت کوچک‌تر از ۱ انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویه حاده α بسازید که $\sin\alpha=a$ و یک زاویه حاده β بسازید که $\cos\beta=a$.

۶- اگر نرdbanی را به دیوار تکیه داده باشیم و فاصله پای نرdban تا دیوار ۱ متر و ۲۵ سانتی‌متر شده باشد و زاویه نرdban با سطح زمین 36° درجه باشد، طول نرdban چقدر است؟ آیا ارتفاع دیوار را هم می‌توانید حساب کنید؟ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

۷- هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا 30° متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس، با زاویه 45° درجه از زمین بلند می‌شود، وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، 14° متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟



۸- تابلویی در جاده وجود دارد که شیب جاده را به صورت $(1:5)$ نشان می‌دهد. معنای این تابلو آن است که هر ۵ متر که به طور افقی جلو رفته باشیم، یک متر ارتفاع جاده اضافه می‌شود. زاویه‌ای که جاده با افق می‌سازد چقدر است؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید).

- ۹- خط $y = \sqrt{3}x - 3$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟
- ۱۰- معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها زاویه 60° درجه بسازد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.
- ۱۱- درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $\cos 30^\circ < \cos 40^\circ$

(ب) $\tan 70^\circ < \tan 80^\circ$

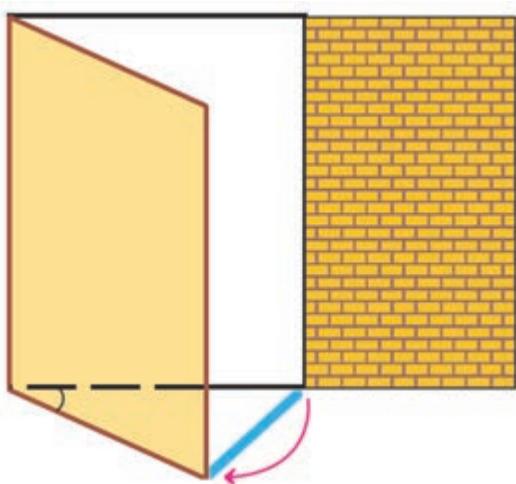
(ج) $\sin 20^\circ < \sin 50^\circ$

(د) $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$

(ه) $\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ = 1$

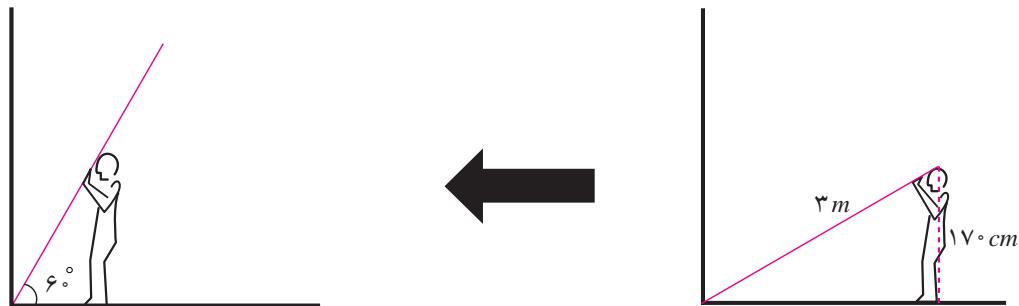
(و) $\cos 60^\circ = 2\cos 30^\circ$

(ز) $\frac{\sin 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \tan 35^\circ$



۱۲- میله‌ای فلزی داریم که می‌خواهیم برای باز نگه داشتن یک در، طبق شکل رویه رو از آن استفاده کنیم. عرض در 70° سانتی‌متر است. طول میله چقدر باشد تا زاویه بین در و دیوار 40° درجه شود؟ اگر طول میله 6 سانتی‌متر باشد، چه زاویه‌ای بین در و دیوار ایجاد می‌شود؟ (از رسم مثلث و نقاله استفاده کنید).

۱۳- فردی با قد یک متر و هفتاد سانتی متر می خواهد میله ای به طول ۳ متر را طبق شکل زیر با زاویه 6° درجه بلند کند. او ابتدا یک سر میله را به دیوار تکیه می دهد و میله را تا قد خود بالا می آورد. او آن قدر به سمت دیوار حرکت می کند تا زاویه میله با سطح زمین 6° درجه شود. او چقدر به سمت دیوار حرکت کرده است؟



۱۴- معنای عبارت های $\sin\theta$ ، $\sin 2\theta$ و $\sin\theta^2$ را توضیح دهید و با یک مثال برای θ تفاوت آن ها را نشان دهید.



عبارت‌های گویا



برای آن که عکس واضحی روی دوربین ایجاد شود، عدسی دوربین به عقب یا جلو حرکت می‌کند. دلیل این امر قوانین فیزیکی مربوط به نور و عدسی‌ها است. محاسبات لازم برای یافتن مکان عدسی، محاسباتی جبری است.

حل یک مسئله

آقای صالحی، پدر یکی از دانشآموزان این مدرسه، می‌خواهد تا عید امسال خانه خود را رنگ بزند. یک نقاش گفته است می‌تواند خانه را در ۱۲ روز نقاشی کند. نقاش دیگری گفته است می‌تواند خانه را در ۹ روز نقاشی کند. آقای صالحی برای سرعت بیشتر، از این دو نقاش خواسته است با هم خانه را رنگ بزند. آقای صالحی از پسر خود خواسته است که حساب کند کار نقاشی خانه چقدر طول خواهد کشید.

احمد این مسئله را در کلاس مطرح کرد و گفت من فکر کردم جواب این مسئله باید $12+9=21$ باشد، ولی پدرم این جواب را درست ندانست.

معلم از سایر دانشآموزان پرسید: چرا این جواب نادرست است؟

اکبر گفت: روش است که این جواب نادرست است، زیرا هر کدام از نقاش‌ها اگر به تنها ی هم کار می‌کردند در ۹ روز یا ۱۲ روز کار را تمام می‌کردنند، پس وقتی با هم کار کنند باید انجام کار، زمان کمتری طول بکشد نه این که بیشتر طول بکشد.

معلم پرسید: پس جواب درست چیست؟

اکبر گفت: تقریباً هر کدام از نقاش‌ها نیمی از کار را انجام می‌دهند، پس جواب، عددی بین $4/5$ تا 6 روز باید باشد.

معلم گفت: این یک جواب تقریبی است و تخمین آن درست است ولی برای توجیه درستی این تخمین استدلال بهتری لازم است. آیا می‌توانید روشی برای به دست آوردن جواب دقیق ارائه کنید؟

حسن گفت: ما باید بتوانیم سرعت کار کردن این دو نقاش را با هم مقایسه کنیم. بهتر است بدانیم هر کدام از این‌ها در یک روز چه مقدار از خانه را رنگ می‌کنند.

با توجه به این که نقاش اول در ۱۲ روز تمام خانه را رنگ می‌کند، او در یک روز $\frac{1}{12}$ خانه را رنگ می‌کند. با همین استدلال نقاش دوم در یک روز $\frac{1}{9}$ خانه را رنگ می‌کند. پس هر دو با هم در یک روز $\frac{7}{36}$ خانه را رنگ می‌کنند.

اگر تعداد روزهای لازم برای رنگ کردن خانه را X در نظر بگیریم تناسب روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم.

کار	روز
$\frac{7}{36}$	۱
۱	X



بیندیشیم

روز ۱۴، ۵

چه معنایی دارد؟



فعالیت

یک حوض در نظر بگیرید که توسط دو شیر آب پر می‌شود. فرض کنید شیر اول به تنها ی در a ساعت حوض را پر می‌کند و شیر دوم به تنها ی در b ساعت حوض را پر می‌کند و اگر این دو شیر را با هم باز کنیم حوض در x ساعت پر خواهد شد. با انجام مراحل زیر می‌خواهیم x را بر حسب a و b حساب کنیم.

۱- شیر اول به تنها ی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۲- شیر دوم به تنها ی در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کند؟

۳- هر دو شیر با هم در یک ساعت چه کسری از حوض را پر می‌کنند؟

۴- وقتی هر دو شیر با هم باز هستند در X ساعت حوض پر می‌شود، در یک ساعت چه کسری از حوض پر می‌شود؟

۵- با توجه به محاسبات بالا، رابطه ریاضی بین X و a و b را بنویسید.

در انجام فعالیت بالا معادله

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

به دست می‌آید که برای حل آن به شکل زیر عمل می‌کیم.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b}{ab}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

بنابراین، اگر دو شیر آب همزمان باز باشند، حوض در $\frac{ab}{a+b}$ ساعت پر خواهد شد.



اگر از ما پرسند حوضی هست که از درون آن سه رود می‌گذرد که از گذر یک رود، حوض در سه روز پر می‌شود، رود دوم در چهار روز و رود سوم در پنج روز پر می‌شود. اگر هر سه رود هم زمان در حوض وارد شوند، در چند روز حوض پر می‌شود؟

پاسخ آن است که جواب آن را بگیریم سه و چهار و پنج، مقدار روزها را به مخرج‌ها می‌آوریم می‌شود ثلث و ربیع و خمس $(\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{5})$. سپس ثلث و ربیع و خمس را به مخرج شصت می‌آوریم.

بیست، پانزده و دوازده، آن را جمع می‌کنیم می‌شود چهل و هفت و مخرج آن را که شصت است بر آن تقسیم می‌کنیم که جواب می‌شود و سیزده از چهل و هفت می‌ماند پس حوض در مدت یک روز و شش ساعت و چهل دقیقه پر می‌شود.

(مسئله از مفتاح المعاملات)

همان‌گونه که در فعالیت بالا دیدید، در حل بسیاری از مسائل لازم است عبارت‌هایی مانند $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{a}$ و $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ را در نظر بگیریم و روی آن‌ها محاسباتی انجام دهیم. این‌گونه عبارت‌ها را عبارت‌های گویا می‌نامند.

عبارت‌های جبری که پس از ساده‌کردن، به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای در می‌آیند را یک عبارت گویا می‌نامند.

برای مثال، عبارت‌های جبری زیر عبارت‌هایی گویا هستند.

$$\frac{x+2}{x-1}, \quad \frac{xy+x^2+1}{x^2+y^2}, \quad \frac{a^2b+b^2a}{a+b}, \quad 4xy^2, \quad 7$$

ولی، عبارت‌های جبری زیر، عبارت گویا نیستند.

$$\sqrt{x}+1, \quad \frac{2-x^2\sqrt{y}}{y^2+x}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+y}$$



تئوری درسی

زمینی مستطیلی شکل در نظر بگیرید که طول و عرض آن به ترتیب X متر و Y متر باشند.

- ۱- اگر در این زمین یک مستطیل را جدا کنیم که عرض آن نصف عرض زمین و طول آن یک سوم طول زمین باشد، مساحت آن چقدر خواهد شد؟ نسبت مساحت این قسمت به مساحت کل زمین چقدر خواهد بود؟
- ۲- اگر در گوشه‌ای از این زمین باغچه‌ای بسازیم که طول آن 20 متر کمتر از طول زمین و عرض آن 30 متر کمتر از عرض زمین باشد، محیط این باغچه بر حسب X و Y چند متر و مساحت آن چند متر مربع است؟
- ۳- مساحت باغچه چه کسری از مساحت کل زمین است؟
- ۴- کدام یک از عبارت‌های زیر عبارت گویا نیستند؟

$$(الف) \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad (ب) \frac{x^2-x+1}{y+\sqrt{3}} \quad (ج) 3x+7$$

یک عبارت گویا، نشان دهنده یک عدد است که با جایگذاری مقدارهایی برای متغیرها ایش محاسبه می شود.

برای مثال، مقدار عبارت $\frac{x}{x+1}$ ، به ازای $x=4$ برابر است با $\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$ و مقدار این عبارت به ازای $x=-5$ برابر است با $\frac{-5}{-5+1}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$. به ازای $x=-1$ مخرج این عبارت گویا صفر می شود، بنابراین، این عبارت گویا به ازای $x=-1$ تعریف نشده است.

در چند جمله‌ای‌ها، چون از عمل تقسیم استفاده نمی شود، به ازای هر مقداری از متغیرها ایش مقدار عددی چند جمله‌ای قابل محاسبه است. اما، در عبارت‌های گویا چون عمل تقسیم نیز وجود دارد، ممکن است به ازای برخی مقدادر برای متغیرها ایش، مخرج عبارت صفر شود و در این حالات مقدار عبارت تعریف نشده است.

مثال: عبارت $\frac{y^2-y+x}{x^2-1}$ به ازای مقدارهای $x=1$ و $x=-1$ تعریف نشده است (چرا؟)، ولی به ازای سایر

مقدادر تعریف شده است. مثلاً، به ازای $x=3$ و $y=2$ مقدار این عبارت برابر است با $=\frac{6}{-1}=-6$.



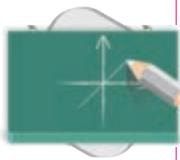
۱- (الف) به ازای چه مقداری برای X مقدار عبارت $\frac{x}{x+1}$ برابر ۸ می شود؟
ب) آیا مقداری برای X می توان قرار داد که مقدار این عبارت برابر ۱ شود؟ چرا؟

ج) اگر $\frac{x}{x+1}$ مساوی a باشد، X را بر حسب a حساب کنید.

۲- به ازای چه مقداری برای m دو عبارت $\frac{2}{m+1}$ و $\frac{4}{m-2}$ مقدار یکسانی خواهند داشت؟

اعمال جبری روی عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای هستند، بنابراین همانند اعدادی هستند که از طریق تقسیم دو عدد بر هم به دست می‌آیند. پس می‌توان آن‌ها را با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد و حاصل این اعمال مجددًا یک عبارت گویا خواهد بود. قواعد محاسبه با عبارت‌های گویا، همان قواعد محاسبه با چندجمله‌ای‌ها و کسرها است.



تئوری درس

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$1) \frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$$

$$2) 2 \times \frac{1}{x}$$

$$3) 1 + \frac{1}{b}$$

$$4) \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$5) \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$6) 1 \div \frac{a}{b}$$

$$7) \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}$$

$$8) \frac{x-1}{y} - \frac{y}{x+1}$$

$$9) 1 - \frac{x-y}{x+y}$$

مثال : مجموع و حاصل ضرب و تقسیم دو عبارت گویایی $\frac{x+1}{y-1}$ و $\frac{x-1}{y+1}$ را به دست آورید.

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{x+1}{y-1} = \frac{(x-1)(y-1) + (x+1)(y+1)}{(y+1)(y-1)} = \frac{xy - x - y + 1 + xy + x + y + 1}{y^2 - 1}$$

$$= \frac{2(xy+1)}{y^2 - 1}$$

$$\frac{x-1}{y+1} \times \frac{x+1}{y-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$$

$$\frac{x-1}{y+1} = \frac{x-1}{y+1} \div \frac{x+1}{y-1} = \frac{x-1}{y+1} \times \frac{y-1}{x+1} = \frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}$$



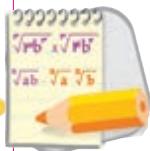
تئوری درس

فرض کنید A و B عبارت‌های گویایی به صورت $B = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ و $A = \frac{x}{x-1}$ باشند. در هر قسمت، عبارت گویای C را چنان تعیین کنید که تساوی برقرار شود.

$$\frac{A}{C} = B \quad (۳)$$

$$A+C=B \quad (۲)$$

$$A \times B = C \quad (۱)$$



۱- اعمال جبری زیر را انجام دهید.

(الف) $\frac{a^2b}{c} \times \frac{c^2b}{a^2}$

(ب) $\frac{a}{2b} \times \frac{3b}{2a^2} \times \frac{4}{a}$

۲- هریک از عبارت‌های گویایی زیر را به صورت مجموع یا تفاضل دو عبارت گویا بنویسید.

$$\frac{x+2}{y}, \quad \frac{x+1}{x^2+1}, \quad , \quad \frac{a-5}{b}, \quad , \quad \frac{2b-3}{b-3}$$

۳- عبارت گویایی بیاید که اگر با $\frac{x+1}{x-1}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

۴- نشان دهید قدر مطلق تفاضل معکوس دو عدد طبیعی متولی برابر است با معکوس حاصل ضرب آن‌ها.

۵- اگر نسبت $y - 2x$ به $x+y$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت X به y چقدر خواهد بود؟

۶- اگر $4 = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x}$ باشد حاصل $9x^2$ چیست؟

۷- اعمال جبری زیر را انجام دهید.

(الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$

(ب) $\frac{c}{c+1} + \frac{2}{2c+2}$

(ج) $\frac{1}{b} + \frac{4}{3b}$

(د) $\frac{4}{3x^2y} - \frac{3}{2xy}$

(ه) $\frac{x+3}{5} \div \frac{x-3}{5x}$

(و) $\frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{b}$

ساده کردن عبارت‌های گویا



فعالیت

دو عبارت $\frac{x^2+x}{x^2-x}$ و $\frac{x+1}{x-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- مقدار این دو عبارت را به ازای مقدارهای $x=3$ و $x=-5$ حساب کنید و با هم مقایسه کنید.

۲- به ازای مقدار دیگری برای x که به دلخواه خود در نظر می‌گیرید دو عبارت را حساب کنید. آیا این دو مقدار مساویند؟

۳- به نظر می‌رسد به ازای هر مقداری برای x که مخرج را صفر نمی‌کند، این دو عبارت مقدارهای یکسانی دارند. چگونه می‌توانید از عبارت اول، عبارت دوم را به دست آورید؟

۴- صورت و مخرج عبارت دوم را تجزیه کنید و با توجه به آن که هر کسر به صورت $\frac{a}{bc}$ با کسر $\frac{ac}{b}$ مساوی است، تساوی این دو عبارت را نتیجه بگیرید.

در کسرها، می‌توان صورت و مخرج آن کسر را در عدد مخالف صفری ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

در عبارت‌های گویا نیز، چون به صورت کسر می‌باشند، در صورت وجود، عبارت مشترکی که به صورت ضرب در صورت و مخرج قرار دارد، را می‌توان از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تر دیگری بدست آورد که با عبارت قبلی مساوی است. این عمل را ساده کردن کسر می‌نامند.

مثال ۱ : عبارت گویای $\frac{ax+a}{x^2-1}$ را ساده کنید.

$$\frac{ax+a}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1}$$

مثال ۲ : عبارت گویای $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}$ را ساده کنید.

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x} = \frac{x(x^2+3x)}{(x^2+3x)} = x$$

مثال ۳ : عبارت گویای $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ را ساده کنید.

صورت و مخرج این عبارت را تجزیه می‌کنیم تا بتوان عامل مشترکی را در صورت و مخرج پیدا کرد.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$



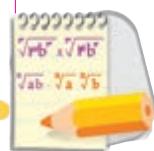
عبارت‌های گویای زیر را تا آن‌جا که ممکن است ساده کنید.

$$\frac{y^2 - 4y + 3}{y^2 + 2y - 3} \quad (ج)$$

$$\frac{ax^3 + x^3 a}{2a^2 x + 2ax^2} \quad (ب)$$

$$\frac{a^2 - 4}{a + 2} \quad (الف)$$

مسئلات



۱- حاصل عبارت $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \times \frac{s}{r+s}$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

$$\frac{1}{r} \quad (ج)$$

$$\frac{1}{s} \quad (ب)$$

$$\frac{s}{r} \quad (الف)$$

$$A' + B' = 1 \quad \text{ثابت کنید} \quad B = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad A = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (۲)$$

۳- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

$$(الف) \frac{2a^2 x^3}{4ax^2}$$

$$(ج) \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 1}$$

$$(ب) \frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 9}$$

$$(د) \frac{y^2 z + y^3}{z^2 y + z^3}$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$(ب) \frac{4x^2 - 25y^2}{2x^2 y + 5xy^2} \div \frac{6x^2 - 15xy}{9x^2 y^2}$$

$$(الف) \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \times \frac{4x^2}{x + 1}$$

۵- عبارت گویایی بیاید که اگر در $\frac{x^2 - y^2}{4x + y}$ ضرب شود، حاصل آن برابر $x+y$ شود.

$$6- \text{ ساده شده عبارت } \frac{x^2 - 4}{1 \cdot x} \times \frac{5x^2}{x^2 - 2x} \text{ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟}$$

$$(الف) \frac{x+2}{2}$$

$$(ب) \frac{x+2}{2x}$$

$$(ج) \frac{x-1}{x}$$

۷- دانش‌آموزی در برگه امتحانی خود به صورت زیر نوشته است. اشتباهات او را توضیح دهید.

$$(الف) \frac{x+3}{2x+5} + \frac{x+2}{2x+5} = \frac{2x+5}{2x+5} = 0$$

$$(ب) \frac{3x+1}{2} - \frac{1-x}{2} = \frac{3x+1-1-x}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(ج) \frac{-4yx^2}{2^2 y} = \frac{-4yx^2}{4y} = -x^2 = x^2$$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

در ساده کردن عبارت‌های گویا، حالت‌های پیش می‌آید که نتیجه ساده شدن یک چند جمله‌ای است. به عنوان مثال، می‌دانیم $(x^3 - x + 1) / (x^3 + 1)$ برابر باشد.

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$$

در این مثال گوییم: $x^3 + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است و حاصل تقسیم $x^3 + 1$ بر $x + 1$ برابر است با $x^2 - x + 1$. یک مسئله مهم در چند جمله‌ای‌ها آن است که اگر بدانیم یک چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگری بخش‌پذیر است، حاصل تقسیم این چند جمله‌ای‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

قاعده تقسیم دو چند جمله‌ای بر هم

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم یک جمله‌ای‌ها بر هم از قاعدة ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب عددی یک جمله‌ای‌ها

را بر هم تقسیم می‌کنیم و سپس بقیه جملات را با استفاده از رابطه $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ساده می‌کنیم.

مثال: یک جمله‌ای $7x^3$ را بر یک جمله‌ای $14x$ تقسیم کنید.

$$\frac{7x^3}{14x} = \frac{7}{14} \times \frac{x^3}{x} = \frac{1}{2}x$$

مثال: یک جمله‌ای $(-20x^4y^3z)$ را بر یک جمله‌ای $5x^3y^2z$ تقسیم کنید.

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z} = \frac{-20}{5} \times \frac{x^4}{x^3} \times \frac{y^3}{y^2} \times \frac{z}{z} = -4xy$$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

در تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای‌ها از درستی تساوی $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ استفاده می‌شود. هر چند جمله‌ای مجموعی از یک جمله‌ای‌ها است و در تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن را به صورت

جمع چند تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم.

مثال: چند جمله‌ای $y^5 - 12x^5y^3 + 6x^3y^3 + 4x^3y^2$ را بر یک جمله‌ای $2xy$ تقسیم کنید.

$$\frac{4x^3y^2 + 6x^3y^3 - 12x^5y}{2xy} = \frac{4x^3y^2}{2xy} + \frac{6x^3y^3}{2xy} + \frac{-12x^5y}{2xy} = 2x^2y + 3x^2y^2 - 6x^4$$



تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$1) \frac{14a^3b}{\sqrt{ab}}$$

$$2) \frac{\sqrt{6}x^4y^3z}{\sqrt{2}x^3z}$$

$$3) \frac{2xy^3 - 4x^3yz}{10xy}$$

$$4) \frac{15a^3b^5 - 30a^2b^4 - 25a^3b^3}{25a^2b^3}$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

در این قسمت فقط چندجمله‌ای‌های یک متغیره را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال تقسیم چندجمله‌ای $2x^3 - x^2 + x + 4$ بر چندجمله‌ای $x+1$ را بررسی می‌کنیم. در تقسیم $2x^3 - x^2 + x + 4$ بر $x+1$ ، اولی را مقسوم و دومی را مقسوم‌علیه و حاصل تقسیم را خارج قسمت می‌نامند. عمل تقسیم را در شکلی مانند زیر که همانند تقسیم اعداد طبیعی است نشان می‌دهند.



در یک عمل تقسیم، درجه مقسوم باید بزرگ‌تر یا مساوی درجه مقسوم‌علیه باشد.

مرحله اول: ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل استاندارد (از بالاترین توان به کمترین توان متغیر) می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \\ \hline x+1 \end{array}$$

مرحله دوم: اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در محل خارج قسمت می‌نویسیم.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

مرحله سوم: خارج قسمت به دست آمده در مرحله قبل را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و قرینه آن را زیر مقسوم می‌نویسیم و با مقسوم جمع می‌کنیم. این عمل، همان تفربیق کردن حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم‌علیه، از مقسوم است.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \\ \hline - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \end{array}$$

مرحله چهارم : چندجمله‌ای به دست آمده جدید را مانند یک مقسوم جدید می‌گیریم و مراحل دوم و سوم را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \\ \hline - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \\ \hline 3x^2 + 3x \\ \hline 4x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \\ \hline - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^2 + x + 4 \\ \hline 3x^2 + 3x \\ \hline 4x + 4 \\ \hline - 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

مرحله پنجم : مرحله چهار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به دست آید.

در این مرحله، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، در محل مقسوم‌های جدید چندجمله‌ای صفر به دست می‌آید. اما، اگر مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نباشد، با این عملیات، در محل مقسوم‌های جدید یک چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه مقسوم‌علیه به دست می‌آید که آن را باقیمانده عمل تقسیم می‌نماید. مثال : با تقسیم $5x^3 + 4x^2 - x + 3$ بر چندجمله‌ای $x^2 + 1$ ، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای

$5x^3 + 4x^2 - x + 3$ بر چندجمله‌ای $x^2 + 1$ بخش‌پذیر است؟

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 4x^2 - x + 3 \\ \hline - 5x^3 - 5x \\ \hline 4x^2 - 6x + 3 \\ \hline - 4x^2 - 4 \\ \hline - 6x - 1 \end{array}$$

با توجه به آن که باقیمانده این تقسیم صفر نیست، مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر نیست.

در هر عمل تقسیم، مقسوم برابر است با حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت و جمع با باقیمانده. از این مطلب می‌توان برای بررسی درستی یک تقسیم استفاده کرد. اگر تساوی صفحه قبل برقرار شود می‌توان اطمینان داشت که تقسیم به درستی انجام شده است.

برای مثال، اگر تقسیم صفحه قبل به درستی انجام شده باشد، باید تساوی زیر برقرار باشد.

$$5x^3 + 4x^2 - x + 3 = (x^2 + 1)(5x + 4) - 6x - 1$$

تساوی بالا به معنای آن است که کسر $\frac{5x^3 + 4x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} \frac{5x^3 + 4x^2 - x + 3}{x^2 + 1} &= \frac{(x^2 + 1)(5x + 4) - 6x - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(5x + 4)}{x^2 + 1} + \frac{-6x - 1}{x^2 + 1} \\ &= 5x + 4 - \frac{6x + 1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

مثال: با تقسیم چندجمله‌ای اولی بر چندجمله‌ای دومی، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید. آیا چندجمله‌ای $x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ بر چندجمله‌ای $x+3$ بخش پذیر است؟

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 9x + 27 \\ \hline -x^3 - 3x^2 \\ \hline 9x + 27 \\ -9x - 27 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} x+3 \\ x^2+9 \end{array} \right.$$

از آن جا که باقیمانده صفر است، مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر بوده است و داریم

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 27}{x+3} = x^2 + 9$$



تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$1) 6x^5 + 3x^2 + 1 \quad \left| \begin{array}{c} x^2 + 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$2) x^3 + x^4 + 3 \quad \left| \begin{array}{c} 1 - 2x^2 \\ \hline \end{array} \right.$$



مسائل

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

(x³-2x²+x) ÷ (x²-x)

ج)

$\frac{6x^3b^2 + 3x^2b}{3x^2b}$

ب)

$\frac{24x^2y^2}{4xy^2}$

الف)

۲- تقسیم $7 - 2x^3 + 4x^2$ بر $-x^2$ را انجام دهید. خارج قسمت و باقیمانده را تعیین و درستی عمل تقسیم را بررسی کنید.

۳- در تقسیم $\frac{x^3 + a}{x + 1}$ مقدار a چقدر باشد تا باقیمانده صفر شود؟

۴- ساده شده عبارت $\frac{y^3 - y^2 - y + 1}{1 - y}$ برابر کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

y³

1-y²

1-y+y²

الف)

۵- اگر در تقسیم $3x^3 + 4x + m$ بر $x+2$ باقیمانده صفر شود m چیست؟

۶- خارج قسمت و باقیمانده هر یک از تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

$5x + 9x^3 - 4 \left| \begin{array}{l} 3x + 2 \\ \hline \end{array} \right.$

$8y^3 - 125 \left| \begin{array}{l} 5 - 2y \\ \hline \end{array} \right.$

۷- مساحت یک مستطیل برحسب a ، به صورت $2a^3 - 4a^2 + 2$ و عرض آن برابر $1-a$ می‌باشد. طول آن برحسب a چیست؟

عبارت‌های رادیکالی

عبارت‌های جبری را که در آن‌ها محاسبات ریشه‌گیری وجود دارد، عبارت‌های رادیکالی می‌نامند. به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، عبارت‌های رادیکالی هستند.

$$\sqrt{1+x^2}, \sqrt{x^2+y^2} - xy^2, \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^3+x+4}}$$



- ۱- محیط و مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن z و طول یک ضلع آن x است را به عنوان دو عبارت رادیکالی به دست آورید.
- ۲- اگر مربعی با مساحت z داشته باشیم و طول اضلاع آن را x واحد افزایش دهیم، مساحت مربع اولیه چقدر افزایش می‌یابد؟

عبارت‌های رادیکالی نیز نشان‌دهنده اعدادی هستند که بر حسب مقدار متغیرهایشان تعیین می‌شوند. به همین خاطر عبارت‌های رادیکالی را می‌توان باهم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم کرد یا به توان رسانید یا ریشه آن‌ها را محاسبه کرد. با استفاده از قواعد محاسباتی مربوط به جمع و تفریق، ضرب، تقسیم، توان‌رسانی و ریشه‌گیری می‌توان این محاسبات را انجام داد و نتیجه را تا آن‌جا که ممکن است ساده نمود.

در یک عبارت رادیکالی که به صورت تقسیم دو عبارت است، اگر در مخرج کسر عمل ریشه‌گیری وجود داشته باشد و با عملیات جبری، نمایشی از آن کسر را به دست آوریم که در مخرج کسر فقط چند جمله‌ای وجود داشته باشد، این عمل را گویا کردن مخرج آن عبارت رادیکالی می‌نامند.

مثال: مخرج عبارت $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ را گویا کنید.

کافی است صورت و مخرج کسر را در \sqrt{x} ضرب کنیم تا مخرج کسر از حالت رادیکالی خارج شود.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

مثال : مخرج عبارت رادیکالی $\frac{2}{\sqrt{a}-1}$ را گویا کنید.

صورت و مخرج این عبارت را در $1 + \sqrt{a}$ ضرب می کنیم. به این عبارت مزدوج $1 - \sqrt{a}$ می گویند.

$$\frac{2}{\sqrt{a}-1} = \frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{a}+1)}{a-1}$$

مثال : مخرج عبارت رادیکالی $\frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$ را گویا کنید.

با استفاده از اتحاد مزدوج اگر مخرج این عبارت را در $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$ ضرب کنیم، مخرج از حالت رادیکالی خارج می شود، زیرا

$$(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \times (\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2 = x - 4y$$

بنابراین صورت و مخرج این عبارت را در $y - \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} = \frac{1 \times (\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \times (\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{x - 4y}$$

مثال : حاصل عبارت $1 + \sqrt{x} + \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$ را حساب کنید و به ساده ترین صورت آن را بنویسید.

$$1 + \sqrt{x} + \frac{x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) + x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1 - (\sqrt{x})^2 + x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1 - x + x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1 \times (1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - x}$$



۱- مخرج عبارت‌های رادیکالی زیر را گویا کنید.

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{الف) } \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$$

$$\text{د) } \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\text{ه) } \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{ب) } \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1}$$

$$\text{ج) } \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

$$\text{ب) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

معادلات درجه دوم و حل آن‌ها



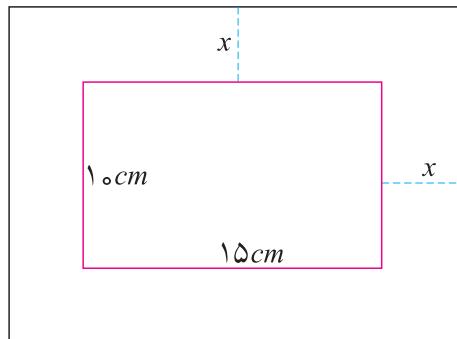
معمولًاً چتربازان پس از کمی سقوط آزاد، چتر خود را باز می‌کنند. فکر می‌کنید چه مدت طول

می‌کشد که یک چتر باز ۲۰ متر سقوط آزاد کند؟

معادلات درجه دوم

مریم می خواهد برای یکی از عکس های خانوادگی خود که ۱۵ سانتی متر طول و 10° سانتی متر عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از کناره های قاب فاصله های مساوی داشته باشد و می خواهیم نسبت مساحت قاب (S_1) به مساحت عکس (S_2) $\frac{5}{4}$ باشد. طول و عرض این قاب چقدر باید باشد؟

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$$



اگر عرض حاشیه ایجاد شده در قاب موردنظر را x بنامیم، طول و عرض قاب $15 + 2x$ و $10 + x$ خواهد بود، پس $S_1 = (15 + 2x)(10 + x)$ و $S_2 = 15 \times 10$ باید داشته باشیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(15 + 2x)(10 + x)}{15 \times 10} = \frac{5}{4}$$

رابطه بالا یک معادله بر حسب x است و باید به دنبال مقداری برای x بگردیم تا تساوی بالا برقرار شود. آن مقادیری از x که تساوی بالا را برقرار می کنند جواب های معادله بالا نامیده می شوند.

معادله هایی را که پس از ساده کردن، بالاترین درجه متغیر آن ۲ باشد معادله درجه دوم می نامند.

معادله مربوط به قاب عکس یک معادله درجه دوم است، زیرا پس از ساده کردن به صورت زیر در می آید.

$$8x^2 + 100x - 75 = 0$$

مثال: یک نخ به طول یک متر در اختیار داریم و می خواهیم با آن یک مستطیل سازیم که مساحت آن 600° سانتی مترمربع باشد. طول و عرض این مستطیل چقدر باید باشد؟

اگر طول و عرض این مستطیل را بر حسب سانتی متر x و y بنامیم باید داشته باشیم $xy = 600^\circ$ و $2(x+y) = 100^\circ$.

از معادله اول نتیجه می‌شود $x - 5 = y$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم $600 = 5(x - 5)$. این نیز یک معادله درجه دوم بر حسب x است، زیرا پس از ساده کردن به شکل $5x^2 - 5x + 600 = 0$ در می‌آید.

مثال: اعدادی باید که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشد. اگر چنین عددی را x بنامیم، باید داشته باشیم $x^2 + 12 = x$. این یک معادله درجه دوم بر حسب x است و جواب‌های این معادله همان اعداد موردنظر هستند.

آیا هر معادله درجه ۲ جواب دارد؟ به عنوان مثال، آیا عددی هست که جمع مربع آن با ۱ صفر شود؟ اگر چنین عددی وجود داشته باشد، جواب معادله $x^2 + 1 = 0$ خواهد بود. اما مربع هر عددی نامنفی است و اگر با ۱ جمع شود صفر نخواهد شد. پس این معادله جواب ندارد.

در مثال قبل اعدادی وجود دارند که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشند. ۴ یکی از این اعداد است زیرا $4^2 = 16$ در این مثال، جواب دیگری هم وجود دارد. (۳) نیز جواب این مسئله است، $12 = -3^2$.

خوارزمی

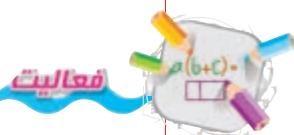
ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی متولد قبل از ۱۶۵ هـ. ق. ریاضی‌دان، منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود، به گونه‌ای که سده نهم میلادی را عصر خوارزمی می‌نامیدند. از جمله معروف‌ترین کتاب‌های او کتاب الجبر والمقابلة بوده است که تا قرن ۱۶ میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بوده است. خوارزمی در این کتاب به جای مجھول درجه اول (عنی x) از کلمه شیء به مفهوم چیز نامعلوم استفاده می‌کند. هنگامی که اروپائیان کتاب‌های مسلمانان را به زبان خود ترجمه می‌کردند، کلمه عربی «شیء» را هم با اندکی تحریف با تلفظ xei به همین شکل برگرداند و پس از آن که نوشتمن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد اروپائیان (x) را که حرف اول آن واژه است به جای مجھول درجه اول اختیار کردند. او نخستین کسی است که علم جبر را به طور مستقل جبر و مقابله نامید. او روش تازه حساب را که به الگوریتم شهرت داشت در کتاب الجمع والتفریق حساب الهند آورده است. او همه انواع معادلات را به چند نوع استاندارد تبدیل و به کمک چند قاعده به حل آن‌ها می‌بردازد. از خوارزمی کتاب‌های دیگری نظیر کتاب الحساب و صورة الارض وجود دارد. او در سال ۲۳۳ هـ. درگذشت.

روش‌های حل معادلات درجه دوم

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد که در این بخش برخی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

روش آزمون و خطأ

ساده‌ترین روش حل معادله‌های درجه دوم، روش آزمون و خطأ است که یک جواب تقریبی به دست می‌دهد و در مورد معادلات پیچیده‌تر نیز می‌توان آن را به کار برد.



می‌خواهیم معادله $x^2 - 12x + 34 = 0$ را حل کیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	۲
$x^2 - 12x + 34$			

۲- آیا با اضافه شدن مقادیر x، مقادیری که برای $x^2 - 12x + 34 = 0$ یافته‌اید در حال نزدیک شدن به صفر است؟

۳- مقادیر x در سطر اول را ادامه دهید تا جایی که مقادیر سطر دوم همچنان به صفر نزدیک شوند و در جایی منفی شوند.

۴- مقدار $x^2 - 12x + 34 = 0$ به ازای $x = 5$ ، مثبت و به ازای $x = 4$ ، منفی است. ثابت می‌شود که در چنین حالتی یک جواب معادله بین ۴ و ۵ است. برای یافتن دقیق‌تر جواب جدول زیر را کامل کنید.

x	۴	$4/3$	$4/5$	$4/8$	۵
$x^2 - 12x + 34$					

۵- با استفاده از جدول، مقادیری برای x بیابید که جواب معادله بین آن‌ها باشد.

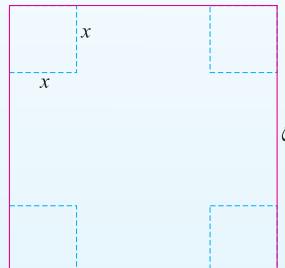
۶- روش بالا را تکرار کنید و در فاصله‌های کوچک‌تر به دنبال جواب بگردید. جواب این معادله را با دقت یک رقم اعشار تعیین کنید.

البته، یک معادله درجه دوم ممکن است دو جواب داشته باشد و با روش بالا فقط یکی از جواب‌ها به طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای بدست آوردن جواب دیگر باید حدسی در مورد مقدار آن جواب داشته باشیم. با تکرار روش بالا و مقداردهی مناسب به متغیر، می‌توانیم به آن جواب برسیم.



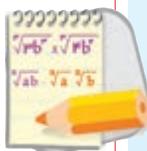
تمرين در کلاس

روش هندسی



در یک معازه شیرینی فروشی، با مقواهای مربعی به طول 5° سانتی‌متر و بريدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن کناره‌های آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مربع بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ساخته شده، 7000 سانتی‌متر مکعب شود.

- ۱- طول ضلع مربع‌هایی که باید بريده شوند را x بنامید و حجم جعبه ساخته شده را برحسب x بنویسید.
- ۲- معادله‌ای تشکیل دهید که با حل آن، جواب مسئله به دست آید.
- ۳- این معادله، یک معادله درجه دوم نیست، ولی با روش آزمون و خطا، یک جواب تقریبی با دقت یک رقم اعشار برای آن پیدا کنید.



- ۱- با دقت دو رقم اعشار و با استفاده از روش آزمون و خطا، یکی از دو جواب معادله $= 1 - 2x^2 - 2x = 0$ را حساب کنید.
- ۲- حل تقریبی معادله $= 0 - 2x^2$ به معنی محاسبه تقریبی $\sqrt{2}$ است. با استفاده از روش آزمون و خطا، $\sqrt{2}$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید.

روش هندسی

معادله $= 0 - 6x + 7 = x^2$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $-7 = x^2 - 6x$ می‌نویسیم. می‌توانیم بگوییم جواب این معادله آن مقداری از x است، که به ازای آن مقدار دو چندجمله‌ای $x^2 - 6x - 7$ با هم برابر شوند. همانند روش آزمون و خطا می‌توان عمل کرد و با حدس مقادیر مختلف برای x ، مقادیر $x^2 - 6x - 7$ را محاسبه می‌کنیم و با انتخاب‌های مناسب برای x ، کاری می‌کنیم که مقدار این دو چندجمله‌ای به هم نزدیک شوند.



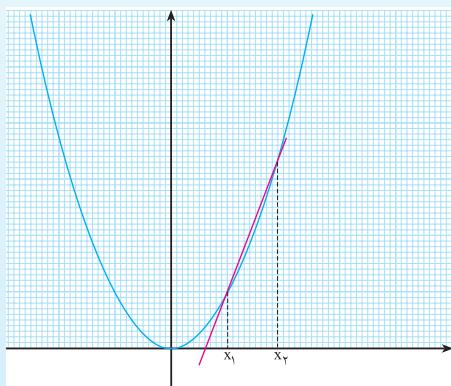
می خواهیم معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را حل کنیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

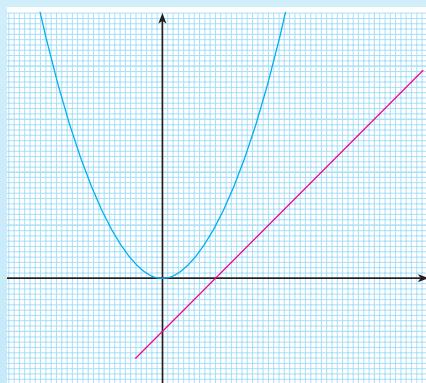
x	-1	0	1	2	3
x^2	1	0	1		
$2x + 1$	-1	1			

۲- اعداد قرار گرفته در این جدول را می توان به صورت نمودار دو معادله $y = x^2$ و $y = 2x + 1$ در صفحه نمایش داد. جاهایی که مقدار این دو چندجمله‌ای مساوی می شوند، چه نقطه‌هایی از این دو نمودار را نشان می دهند؟

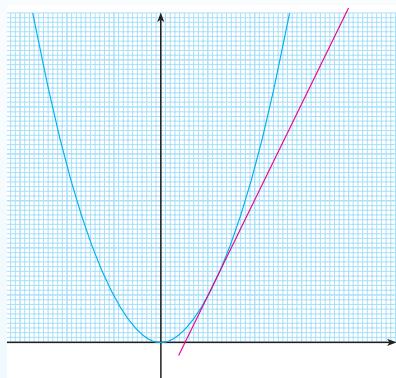
۳- در جدول به ازای هیچ مقداری از x دو چندجمله‌ای $y = x^2$ و $y = 2x + 1$ مساوی نشده‌اند. با رسم نمودارهای معادلات $y = x^2$ و $y = 2x + 1$ و یافتن محل‌های تقاطع این دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع، به‌طور تقریبی جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را به دست آورید.



مثال ۱ : برای حل یک معادله درجه دوم مانند $5x^2 - 14x + 9 = 0$ ، می توانیم آن را به صورت $x^2 = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ بنویسیم. اگر نمودارهای معادله $y = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ و خط $y = x^2$ را رسم کنیم، محل‌های برخورد این دو نمودار جاهایی را نشان می دهد که به ازای مقدارهایی از x مقدارهای x^2 و $\frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ مساوی شده‌اند. این مقدارهای x همان طول نقاط تقاطع نمودارها هستند و جواب معادله می باشند.

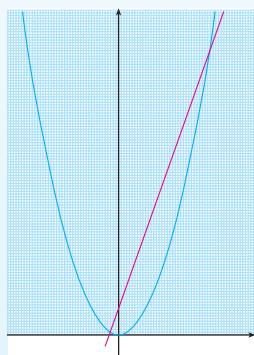


مثال ۲ : وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید. این معادله را به صورت $x^2 = x - 1$ می نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = x - 1$ را رسم کنیم، دیده می شود که این نمودارها همیگر را قطع نمی کنند. پس این معادله جواب ندارد.



مثال ۳ : وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.

این معادله را به صورت $1 - 2x + x^2 = 0$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 1 - 2x$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها حالت مماس بر هم دارند. حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد. با محاسبات جبری باید درستی حدس خود را بیازماییم.

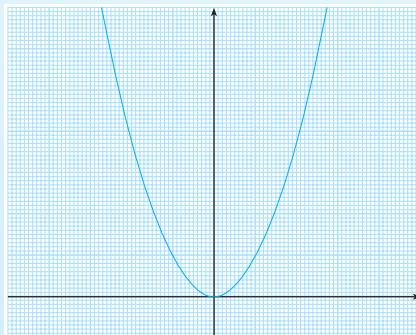


مثال ۴ : وضعیت جواب‌های معادله $1 + 3x - x^2 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.

این معادله را به صورت $x^2 - 3x - 1 = 0$ می‌نویسیم. اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 1 - 3x$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این معادله دو جواب دارد.

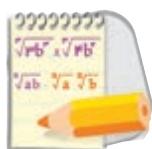


تمرین درگاهی

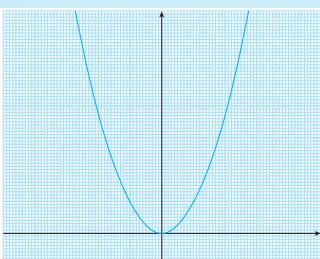


۱- نمودارهای خط‌های $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 1$ را رسم کنید و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار $y = x^2$ تعیین کنید.

۲- از میان معادلات $x^2 - 2x + 2 = 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$ تعیین کنید کدام یک جواب دارد و چند جواب دارد.



مساند



۱- با رسم نمودار نشان دهید معادله $x^2 + 4 = 0$ جواب ندارد.

۲- معادلات زیر را با روش رسم نمودار حل کنید و جواب‌های آن را به طور تقریبی به‌دست آورید.

$$(ب) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$(ج) 4x^2 - 8x = 0$$

روش تجزیه

در مواردی، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درجه ۱ مساوی صفر است. به عنوان مثال معادله $0 = (1 - x)(2x + 3)$ را در نظر بگیرید. حل این گونه معادلات بسیار ساده است، زیرا طبق یکی از خواص اساسی اعداد،

برای آن که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن دو عدد صفر باشد.

بنابراین $(3 + 2x)(1 - x) = 0$ فقط در حالتی صفر است که $1 - x = 0$ یا $3 + 2x = 0$ صفر شوند. پس، جواب‌های دو معادله $0 = 1 - x$ و $0 = 3 + 2x$ همان جواب‌های معادله $0 = (1 - x)(2x + 3)$ است.

یک معادله درجه دوم به صورت تساوی یک چندجمله‌ای درجه دوم با صفر است. اگر بتوانیم این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، می‌توانیم به روش بالا آن را حل کنیم. این روش حل را روش تجزیه می‌نامند.

مثال ۱ : معادله $0 = 5x^2 - 5x$ را حل کنید.

این معادله را به صورت $0 = x(x - 5) = x^2 - 5x$ می‌نویسیم. در نتیجه جواب‌های آن $x = 0$ و $x = 5$ خواهند بود.

مثال ۲ : معادله $0 = 5x^2 - 5x + 6$ را حل کنید.

چندجمله‌ای $6 - 5x + 5x^2 = (x - 2)(x - 3)$ را تجزیه می‌کنیم. در نتیجه جواب‌های این معادله $x = 2$ و $x = 3$ خواهند بود.

مثال ۳ : معادله $0 = 5x^2 - 3x - 2$ را حل کنید.

می‌توان چندجمله‌ای $-2 - 5x + 5x^2 = (x - 2)(x - 3)$ را تجزیه کرد. این چندجمله‌ای را در فصل ۴ با روش‌های معمول تجزیه کرده‌ایم.

$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$

بنابراین، معادله اصلی را می‌توانیم به صورت $0 = (1 + x)(2x - 3)$ بنویسیم. در نتیجه جواب‌های این معادله $x = -1$ و $x = \frac{3}{2}$ خواهند بود.

اگر بتوانیم چندجمله‌ای مربوط به یک معادله درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می‌رسیم که جواب دارند. بنابراین آن دسته از معادلات درجه دوم که جواب ندارند، چند جمله‌ای آن‌ها قابل تجزیه نخواهد بود. آخرین مثال نشان می‌دهد که کاربرد روش تجزیه بسیار محدود است، زیرا عمل تجزیه در بسیاری موارد کار آسانی نیست.



مساندان

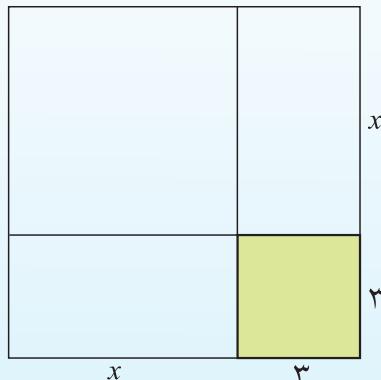
۱- معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

(الف) $0 = x^2 - 7x + 6$ (ب) $(x - 1)(x + 1) = (x - 1)$ (ج) $0 = 4x^2 + 3x - 2$

روش خوارزمی

خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

معادله $x^2 + 6x - 4 = 0$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، این معادله را به صورت $4x + 6x = 4$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در اینجا عدد ۳ است. مساحت مربعی با ضلع $x + 3$ را می‌توان حساب کرد.



در شکل رو به رو مساحت مربع رنگی برابر $3 \times 3 = 9$ است و بقیه مربع، مساحت $x^2 + 6x$ دارد که آن هم برابر ۴ است. پس کل مربع بزرگ، مساحت $= 4 + 9 = 13$ دارد. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{13}$ است، یعنی $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. در نتیجه $x = 4$.



تمرین کرگذاشت

معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ را با روش خوارزمی حل کنید.

همه معادلات درجه دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد، زیرا این روش نیازمند یک تعبیر هندسی از معادله است و برخی معادلات را نمی‌توان با این روش تعبیر هندسی کرد. علاوه بر این، با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادلات درجه دوم بدست می‌آید. خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم در حالت‌های دیگر روش‌های دیگری را ساخته است.



مسئلہ

۱- معادلات زیر را با روش خوارزمی حل کنید.

(الف) $x^2 + 4x - 5 = 0$

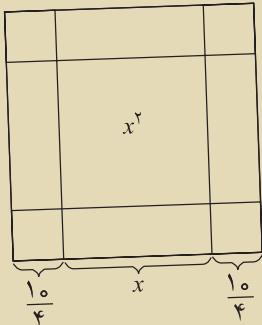
(ب) $4x^2 + 4x - 3 = 0$



ریاضی دانان مسلمان به جای x^3 ، لفظ «مکعب»، به جای x^2 لفظ «مال»، به جای x ، لفظ «ریشه»، «شیء»، «ضلع» یا «جذر» و به جای مقدار عددی لفظ «درهم» یا «عدد» را به کار می‌بردند. خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادله «مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به کار برده‌اند.

این معادله را با زبان امروزی بنویسید.

آیا می‌توانید از روی شکل اثبات را تکمیل کنید؟



روش مربع کامل

در این روش با استفاده از جملات شامل متغیر یک مربع کامل می‌نویسیم و سپس با تغییرات مناسب معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱ : معادله $x^3 - 20x + 100 = 0$ را حل کنید.

نصف ضریب x عدد -10 است و چندجمله‌ای $(x - 10)^3$ را در نظر می‌گیریم. این چندجمله‌ای رابطه مشخصی با چندجمله‌ای $x^3 - 20x + 100$ دارد.

$$(x - 10)^3 = (x^3 - 20x) + 100$$

با توجه به تساوی بالا می‌توانیم معادله اصلی را به صورت $(x - 10)^3 - 100 + 100 = 0$ بنویسیم که پس از ساده‌سازی به صورت $(x - 10)^3 = 0$ درمی‌آید. در نتیجه $x - 10 = 0$ برابر ریشه‌های دوم 7 است، یعنی

$$x - 10 = \pm\sqrt[3]{0}$$

جواب‌های این معادله عبارتند از: $x = 10 + \sqrt[3]{0}$ و $x = 10 - \sqrt[3]{0}$.

در روش به کار گرفته شده در مثال فوق، چندجمله $x^3 - 20x + 100$ را بر حسب $(x - 10)$ نوشتیم، بنابراین روش را روش مربع کامل می‌نامند.

مثال ۲ : معادله $x^3 - 2bx + 15 = 0$ را حل کنید.

در اینجا، نصف ضریب x برابر $(-b)$ است و چندجمله‌ای $2bx - x^3$ را بر حسب $(x - b)$ می‌نویسیم.

$$(x - b)^3 = (x^3 - 2bx) + b^3$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - b)^2 - b^2 + 15 = 0$ نوشته می‌شود. پس :

$$(x - b)^2 = b^2 - 15$$

$$x - b = \pm \sqrt{b^2 - 15}$$

$$x = b + \sqrt{b^2 - 15} \quad \text{و} \quad x = b - \sqrt{b^2 - 15}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $b^2 - 15$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $b^2 - 15$ است.

مثال ۳ : معادله $x^2 - 2x + c = 0$ را حل کنید.

ابتدا کاری می‌کنیم که ضریب x^2 برابر ۱ شود. طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و معادله $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{c}{3} = 0$ را به دست می‌آوریم. حال روش قبلی را تکرار می‌کنیم.

در اینجا، نصف ضریب x برابر $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ است و چندجمله‌ای $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$ را بحسب $(x - \frac{1}{3})^2$ می‌نویسیم.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = (x^2 - \frac{2}{3}x) + (\frac{1}{3})^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3}$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} + \frac{c}{3}$.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3} = \frac{1-3c}{9}$$

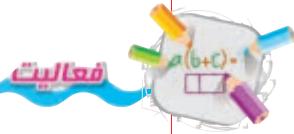
$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{1-3c}{9}} = \pm \frac{\sqrt{1-3c}}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{1-3c}}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{1-3c}}{3}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $1 - 3c$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد. پس شرط داشتن جواب در این معادله، نامنفی بودن $1 - 3c$ است.

فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم

در فعالیت صفحه بعد، روش مریع کامل را روی یک معادله درجه دوم دلخواه پیاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم تحت چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد و در صورت وجود جواب، فرمولی برای جواب‌های معادله درجه دوم بیابیم.



یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصلفر است.

۱- طرفین معادله بالا بر عدد ناصلفر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب x^2 برابر ۱ باشد.
نشان دهید جواب‌های این معادله جدید همان جواب‌های معادله اصلی است.

۲- نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{2a}$ است. چندجمله‌ای $(x + \frac{b}{2a})^2$ را با چندجمله‌ای معادله جدید مقایسه کنید.

$$\cdot (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} (x + \frac{b}{2a})^2 \text{ بنویسید و نتیجه بگیرید}$$

۴- تحت چه شرایطی تساوی بالا امکان پذیر است؟ تحت چه شرایطی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جواب دارد؟

۵- نشان دهید که اگر $4ac - b^2$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب‌های معادله اصلی برابر

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ جواب‌های دو معادله}$$

۶- نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب‌های زیر است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

خوارزمی نیز تمام عملیات گفته شده این بخش را برای حل یک معادله درجه دوم انجام داده بود ولی در محاسبه جواب‌ها فقط از ریشه مثبت عبارت $4ac - b^2$ استفاده نموده است، بنابراین مناسب است که این فرمول‌ها را فرمول‌های خوارزمی برای معادلات درجه دوم بنامیم.

در هر معادله درجه ۲ به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ، عبارت $4ac - b^2$ را با Δ نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta > 0$ یا $\Delta = 0$.
اگر $\Delta < 0$ ، معادله دو جواب دارد که عبارتند از :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$ معادله فقط دارای یک جواب $x = -\frac{b}{2a}$ است.
اگر $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد.

مثال ۱ : جواب‌های معادله $= 0 - 3x^2 + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $\Delta = 0 > (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$. چون $\Delta > 0$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است.

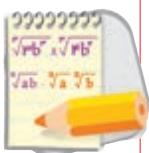
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

مثال ۲ : جواب‌های معادله $= 0 - 9x^2 + 4 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $\Delta = 0 > (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$. چون $\Delta = 0$ ، این معادله دارای یک جواب $x = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$ است.
مثال ۳ : جواب‌های معادله $= 0 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $\Delta = 0 < -4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$. چون $\Delta < 0$ ، این معادله جواب ندارد.



تمرین در کلاس

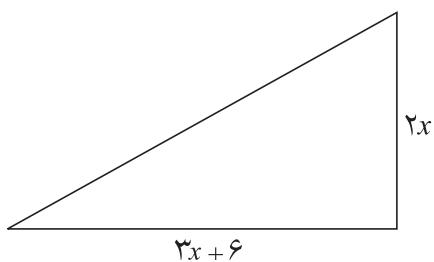
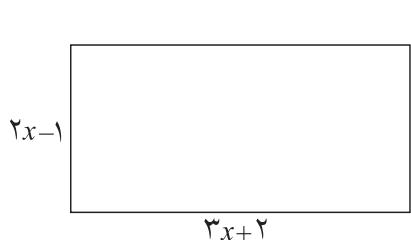
معادله مربوط به قاب عکس را که در ابتدای این فصل به دست آمد، حل کنید و جواب‌های آن را تفسیر کنید.



مسائل

- ۱- با روش مریع کامل معادلات زیر را حل کنید.
 (الف) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (ب) $x^2 + 3x = 0$
- ۲- کدام‌یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را باید.
 (الف) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (ب) $x^2 - 7x + 4 = 0$
- ۳- با استفاده از فرمول کلی جواب‌های معادلات درجه دوم، معادلات زیر را حل کنید.
 (الف) $7x^2 - 8x + 1 = 0$ (ب) $x^2 - 3x + 2 = 0$
- ۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $= 0 - ax^2 + 2 = 0$ برابر (-4) باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟
- ۵- اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و مساحت آن $= 20$ سانتی‌مترا مربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

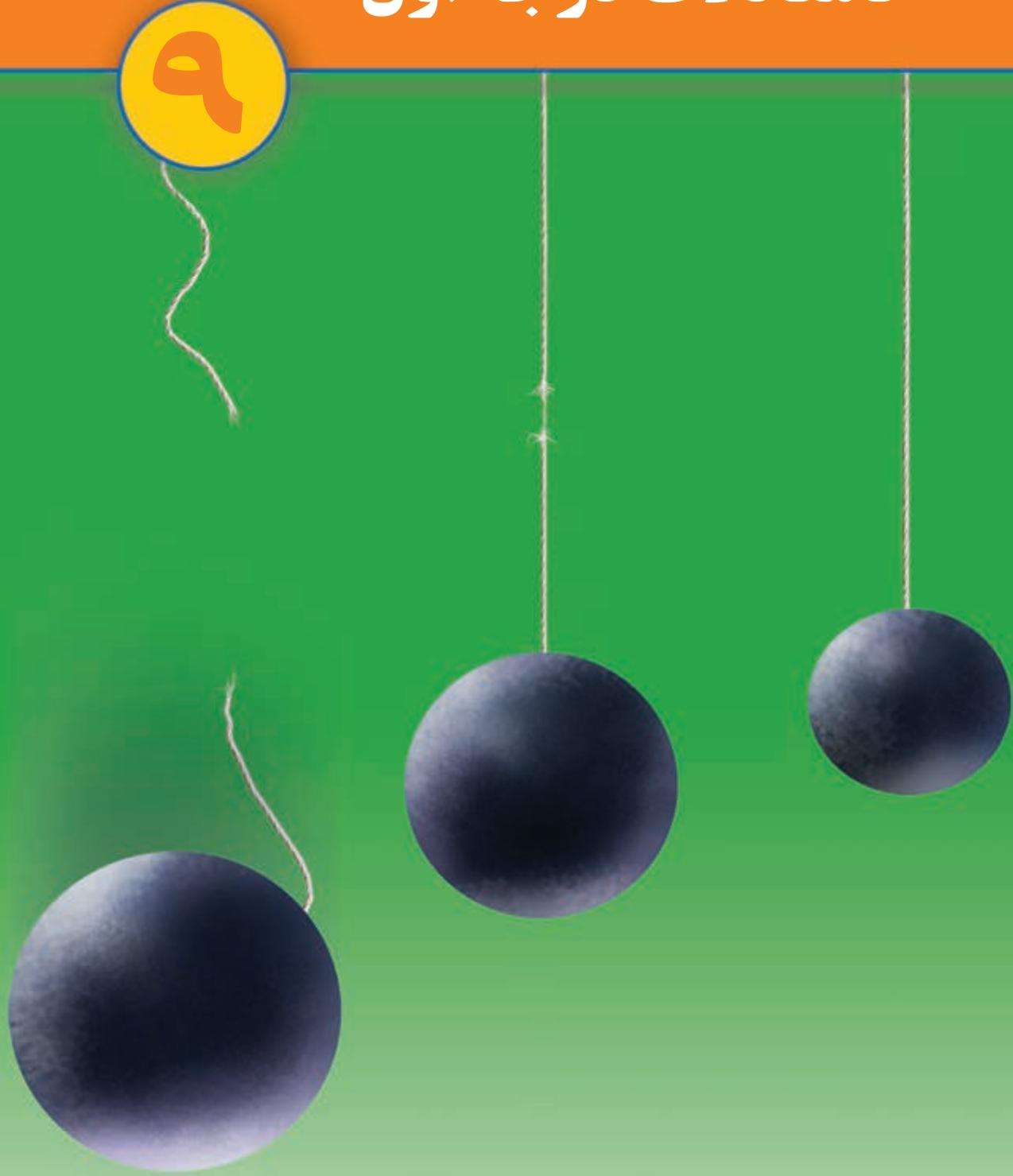
۶- در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



۷- اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه برابر $2a + 2$ و $2a + 1$ و $2a$ شده باشد، کدام عدد طول وتر خواهد بود؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.



نامعادلات درجه اول

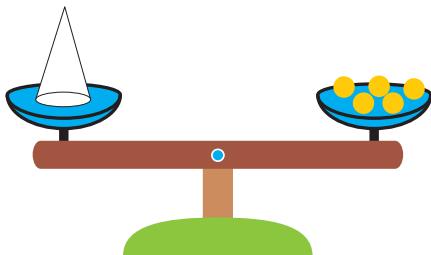


اگر گلوله‌ای را به نخی آویزان کنیم، معمولاً نخ گلوله را نگه می‌دارد. اما با افزایش وزن گلوله، جایی می‌رسد که نخ پاره می‌شود. این مقدار وزن مربوط به چگونگی نخ است.

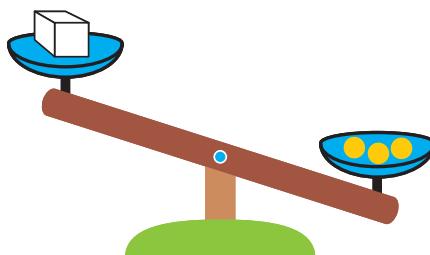
با دانستن قدرت تحمل نخ می‌توانید آن مقادیری از وزن گلوله‌ها را که نخ تحمل می‌کند بنویسید.

نامساوی

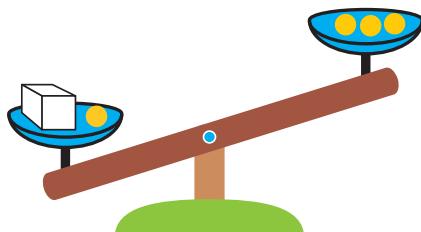
حسن آقا یک خواربارفروشی دارد. او برای به دست آوردن وزن اجناس از یک ترازوی دو کفه‌ای به شکل زیر استفاده می‌کند.



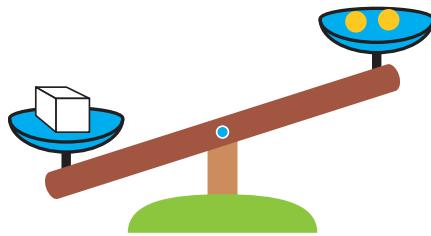
اما، معمولاً وزن اجسام، با استفاده از وزنهایی که حسن آقا در اختیار دارد به طور دقیق قابل تعیین نیستند و با هرگونه وزنه‌گذاری روی کفه‌های ترازو، هر دفعه یک طرف سنگین‌تر می‌شود. روزی او برای تعیین وزن بسته‌ای، حدس زد این بسته حدوداً ۳ کیلوگرم وزن دارد و سه وزنه یک کیلوگرمی در یک کفه قرار داد و بسته را در کفه دیگر قرار داد. کفه ترازو در طرف وزنهای، پایین آمد و حسن آقا نتیجه گرفت بسته سبک‌تر است و وزن بسته کمتر از ۳ کیلوگرم است.



اگر وزن بسته را x بنامیم، بیان ریاضی وضعیت ترازو در شکل بالا به صورت $3 < x$ است. در مرحله دوم حسن آقا یک وزنه یک کیلوگرمی در کفه مربوط به بسته قرار داد، و با این عمل، کفه مربوط به بسته پایین رفت.



بیان ریاضی این وضعیت ترازو به صورت $1 + x < 3$ است. اگر از طرفین این ترازو یک وزنه یک کیلوگرمی برداریم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند و نتیجه می‌شود $x < 2$.



این عمل به معنای آن است که از طرفین نامساوی $1 + x < 3$ عدد ۱ را کم کرده‌ایم و نامساوی به همان شکل برقرار مانده است.

وضعیت ترازو به هر شکلی که باشد، اگر از طرفین ترازو وزن یکسانی را برداریم یا اضافه کنیم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند. بیان ریاضی این مطلب به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} &\text{اگر } a + c < b + c, \text{ آن‌گاه } a < b \\ &\text{اگر } a - c < b - c, \text{ آن‌گاه } a < b \end{aligned}$$

نامساوی کوچکتر یا مساوی

یک روز، معلم از ناهید خواست فهرست نام همکلاسی‌های خود را که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاه‌تر هستند، تهیه کند. پس از این کار، معلم از ناهید خواست، مجموعه این شاگردان را به زبان ریاضی بنویسد. ناهید پس از کمی فکر گفت: اگر مجموعه همه دانش‌آموزان کلاس را با M نشان دهیم، چون قد من ۱۴۷ سانتی‌متر است این مجموعه را به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$\{x \in M \mid \text{قد}(x) < 147\}$$

معلم از دانش‌آموزان کلاس پرسید: آیا این مجموعه، همه همکلاسی‌های ناهید که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاه‌تر هستند را نشان می‌دهد؟

زهره گفت: خود ناهید در این مجموعه نیست چون قد او ۱۴۷ سانتی‌متر است و هیچ عددی از خودش کمتر نیست.

ناهید گفت: درست است. کسانی که با من هم‌قد هستند در این مجموعه نیستند. تعریف را باید اصلاح کنیم.

بهتر است این مجموعه را به صورت زیر بنویسیم.

$$\{x \in M \mid x < 147\} = \{x \mid x < 147\}$$

معلم گفت: اگرچه تعریف ناهید از این مجموعه درست است. این رابطه‌ای که ناهید آن را به کار برد است نوعی نامساوی است که آن را نامساوی «کوچکتر یا مساوی» می‌نامند. برای بیان کوچکتر بودن یک عدد از عدد دیگر از نماد « \leq » استفاده می‌کردیم. برای بیان «کوچکتر یا مساوی» بودن یک عدد از یک عدد دیگر از نماد « \geq » استفاده می‌شود. برای بیان این که عدد a از عدد b کوچکتر یا مساوی است، می‌نویسیم $b \leq a$. جمله $a \leq b$ ، به معنای آن است که یکی از دو حالت $b < a$ یا $b = a$ برقرار است.



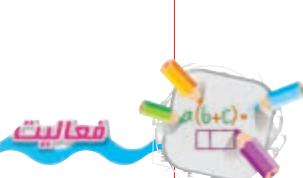
دلیل درستی یا نادرستی هریک از نامساوی‌های زیر را بیان کنید.

الف) $3 \leq 2$ ب) $3 \leq 3$ ج) $3 \leq 4$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $n > 1$ آنگاه $n \leq 2$.

مثال: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

نامعادلات



آقای صالحی می‌خواست خانه‌اش را رنگ کند. او که فقط ۱۰ روز برای این کار وقت داشت با یک نقاش قرارداد بست که حداقل در ۱۰ روز، خانه را رنگ بزند و تحويل دهد.

۱- اگر کار نقاش x روز طول بکشد، بازای چه مقادیری از x ، نقاش به قرارداد عمل کرده است؟



- ۲- اگر کار نقاش ۱۱ روز طول بکشد، آیا او توانسته است به قرارداد عمل کند؟
- ۳- مهلت انجام کار را به صورت ریاضی بنویسید.
- ۴- اگر نقاش حداقل ۶ روز برای انجام کارش نیاز داشته باشد، این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید.
در این صورت تحويل کار در چند روز می‌تواند انجام شود تا نقاش به قرارداد هم عمل کرده باشد؟ این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید.



در این فصل به حالت‌هایی برخورد کردیم که جواب مسئله فقط یک عدد خاص نبود و مسئله به گونه‌ای بود که بیش از یک جواب برای آن وجود داشت. مسائلی شبیه مسائل بالا را که بیان ریاضی آن‌ها به صورت یک نامساوی بین دو چندجمله‌ای یا دو عبارت گویا باشند را نامعادله می‌نامند. مثلاً، نامساوی‌های زیر نامعادله هستند.

$$2x - 1 < 6 , \quad 5x + 3 < -4x + 5 \leq 2(x + 1)$$

در این فصل فقط در مورد نامعادلاتی بحث خواهیم کرد که به صورت یک نامساوی بین دو چندجمله‌ای حداقل درجه اول از یک متغیر باشند.

جواب‌های یک نامعادله، مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن‌ها، نامساوی برقرار شود. همه جواب‌های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آن را مجموعه جواب آن نامعادله می‌نامند.

مثال: در نامعادله $12 \leq 5x - 1$ کدام‌یک از اعداد ۰، ۱، ۲، ۴ و ۶ از جواب‌های نامعادله هستند؟
مقدار $x = 0, 1, 2, 4$ به ازای $5x - 1 = 12$ کمتر است، پس ۰، ۱، ۲ و ۴ در مجموعه جواب این نامعادله قرار دارند. اما $x = 5$ به ازای $5x - 1 = 24$ بزرگتر است، پس این اعداد در مجموعه جواب این نامعادله قرار ندارند.

روش‌های حل نامعادلات

می‌دانید که اگر به طرفین یک نامعادله عددی را اضافه یا کم کنیم، نامساوی همچنان به همان شکل برقرار می‌ماند. با استفاده از این عمل می‌توان نامعادلات را ساده‌تر کرد.

مثال: نامعادله $5 < x + 1 < 2x - 1$ را حل کنید.

ابتدا به طرفین نامساوی $(x -)$ و سپس ۱ را اضافه می‌کنیم.

$$2x - 1 < x + 5$$

$$2x - 1 - x < x + 5 - x$$

$$x - 1 < 5$$

$$x - 1 + 1 < 5 + 1$$

$$x < 6$$

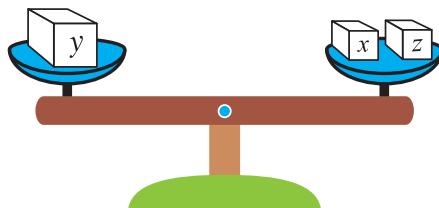
بنابراین، مجموعه اعداد کمتر از ۶، مجموعه جواب این نامعادله هستند.

همان‌گونه که در حل معادلات دیدیم، بسیار پیش می‌آید که برای حل معادله طرفین تساوی را در عددی ضرب می‌کردیم. در حل نامعادلات نیز بسیار پیش می‌آید که باید طرفین نامعادله را در عددی ضرب کنیم. باید بدانیم که ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد، چه تغییری در نامساوی ایجاد می‌کند. فعالیت زیر، این مسئله را بررسی می‌کند.

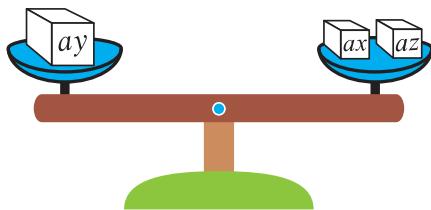


فرض کنید x و y دو عدد مثبت هستند که $y < x$ و a یک عدد مثبت است.

- ۱- بسته‌هایی به وزن‌های x و y در نظر بگیرید و آن‌ها را در دو کفه یک ترازو قرار دهید. وضعیت ترازو به چه شکل درمی‌آید؟ شکل آن را بکشید.
- ۲- آیا می‌توان وزنهایی به یکی از دو کفه اضافه کرد تا طرفین هم وزن شوند؟ وزن این وزنه اضافی را z بنامید و بیان ریاضی تساوی به دست آمده را بنویسید.



۳- طرفین تساوی به دست آمده را در a ضرب کنید. تساوی جدید را به صورت وزن بسته‌هایی که در یک ترازو قرار دارند نشان دهید.



۴- اگر بسته به وزن az را از کفه ترازو برداریم وضعیت ترازو به چه شکل در می‌آید؟ کدام نامساوی را می‌توانیم نتیجه بگیرید؟

۵- این نامساوی را با نامساوی اول مقایسه کنید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود که اگر یک نامساوی بین دو عدد مثبت برقار باشد، می‌توان طرفین نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب کرد و نامساوی مجدداً به همان شکل برقار می‌ماند. در فعالیت بالا، برای آن که از ترازو استفاده کنیم، مجبور بودیم دو عدد x و y را مثبت فرض کنیم، ولی مثبت بودن x و y ضروری نیست و حتی اگر x یا y ، یا هر دو، مثبت هم نباشند، برای هر عدد مثبت a ، از $y < x$ می‌توان نتیجه گرفت $ay < ax$. برای اثبات این مطلب تمرين زیر را انجام دهید.



فرض کنید x و y دو عدد باشند که $y < x$ و فرض کنید a عدد مثبتی باشد. دلیل درستی هر مرحله از محاسبه زیر را بیان کنید.

$$\begin{aligned}x &< y \\ \circ &< y - x \\ \circ &< a(y - x) \\ \circ &< ay - ax \\ ax &< ay\end{aligned}$$

به این ترتیب، می‌توانیم نتیجه کلی زیر را بیان کنیم و از آن در حل نامعادله‌ها استفاده کنیم.

اگر x و y دو عدد باشند که $y < x$ ، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $ay < ax$

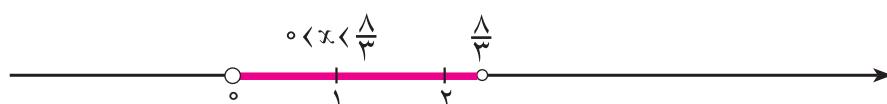
در تقسیم طرفین یک نامساوی بر یک عدد مثبت، رابطه مشابهی برقرار است، زیرا تقسیم بر a همان ضرب در $\frac{1}{a}$ است. اگر a عدد مثبت باشد $\frac{1}{a}$ نیز مثبت است، پس با ضرب طرفین یک نامساوی در $\frac{1}{a}$ ، نامساوی به همان شکل برقرار می‌ماند.

اگر x و y دو عدد باشند که $y < x$ ، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $\frac{y}{a} < \frac{x}{a}$

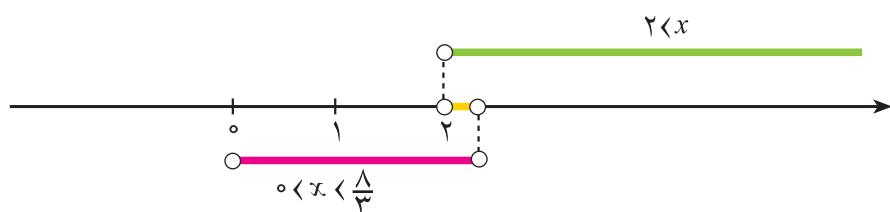
مثال: اگر از کالایی سه بسته هم وزن داشته باشیم، که وزن دوتای آن‌ها روی هم از ۴ کیلوگرم بیشتر و وزن سه تای آن‌ها روی هم از ۸ کیلوگرم کمتر باشد، هر بسته از این کالا چه وزن‌هایی ممکن است داشته باشد؟ اگر وزن هر بسته را x بنامیم، بیان ریاضی داده‌های مسئله به صورت $2x < 4$ و $3x < 8$ است. با تقسیم طرفین نامعادله اول بر ۲ نتیجه می‌شود $x < 2$. بنابراین، مجموعه جواب این نامعادله به شکل زیر است.

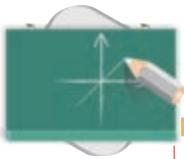


با تقسیم طرفین نامعادله دوم بر ۳ نتیجه می‌شود $x < \frac{8}{3}$. همچنین چون وزن هر بسته عددی مثبت است داریم $x > 0$. بنابراین مجموعه جواب نامعادله دوم به شکل زیر است.



اشتراک این دو مجموعه، مجموعه جواب‌های مشترک هر دو نامعادله است و عبارت است از

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{8}{3} \right\}$$




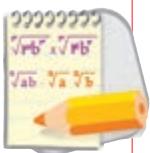
تمرین در کلاس

احمد و اصغر دو دوست هستند که هر کدام تعدادی خرگوش دارند. تعداد خرگوش‌های احمد دو برابر خرگوش‌های اصغر است.

۱- اصغر 10 خرگوش جدید می‌خرد و با این کار، تعداد خرگوش‌هایش از تعداد خرگوش‌های احمد بیشتر می‌شود. این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید. چه نتیجه‌ای در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به دست می‌آورید؟

۲- اگر سه تا از خرگوش‌های احمد دو قلو بزایند، مجددًا تعداد خرگوش‌های احمد بیشتر می‌شود. این مطلب را به صورت ریاضی بنویسید. چه نتیجه جدیدی در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به دست می‌آورید؟

۳- آیا می‌توانید بگویید اصغر دقیقاً در ابتدا چند خرگوش داشته است؟



مسائل

نامعادلهای زیر را حل کنید.

$$ج) 1 - 4 < 2x$$

$$ب) 3x - 4 \leq 5x - 8$$

$$الف) 2x + 7 < x - 4$$

$$ه) \frac{x}{4} < \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$$

$$د) \frac{x}{3} \leq x - \frac{1}{2}$$

حل یک مسئله

در ایام عید، خانواده زهرا برای مسافرت می‌خواهد با ماشین خودشان از بزد به مشهد بروند. هزینه هر روز اقامت در مشهد برای این خانواده سی هزار تومان است و هزینه رفت و برگشت به مشهد روی هم بیست هزار تومان است. اگر این خانواده در ابتدای سفر چهارصد هزار صد هزار تومان پول به همراه خود بردارند، حداقل چند روز در مشهد می‌توانند بمانند؟

معلم، از اکرم خواست تا در پای تخته این مسئله را حل کند. اکرم گفت: ابتدا باید بینیم مجھول مسئله چیست. در اینجا تعداد روزهایی که خانواده زهرا می‌توانند در مشهد بمانند مجھول است و آن را با x نشان می‌دهیم.

بعد باید فرضیات و اطلاعاتی که در مسئله آمده است را به صورت ریاضی بنویسیم. در اینجا می‌توانیم بگوییم که اگر از چهارصد هزار تومان، هزینه اقامت در مشهد را کم کنیم حداقل به اندازه هزینه رفت و برگشت به مشهد باید باقی بماند، یعنی $30000 - 40000 \leq 40000x$.

معلم، از فرزانه خواست بقیه مسئله را او حل کند. فرزانه گفت: این، یک نامعادله است و برای حل آن به طرفین « -40000 » اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود $x \leq 30000 - 38000 = 40000 - 20000$. طرفین نامساوی را برابر $30000 - 38000 = \frac{38}{6}x$ تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌شود $x \leq 12/6$ ، یعنی خانواده زهرا می‌توانند بیش از ۱۲ روز در مشهد بمانند.

یکی از دانشآموزان گفت: این جواب قابل قبول نیست زیرا معنای آن این است که این خانواده با چهارصد هزار تومان، می‌توانند تا هر وقت که می‌خواهند در مشهد بمانند.

معلم گفت درست است، حتماً در جایی از حل این مسئله اشتباهی رخداده است. این اشتباه در کجاست؟ باید یکی عملیاتی را که انجام داده‌ایم بررسی کنیم تا اشتباه را به دست آوریم. اکرم گفت من می‌دانم اشتباه در کجاست. بهتر است نامعادله را به صورت زیر حل کنیم.

$$40000 - 30000x \leq 20000$$

$$40000 - 30000x + 30000x \leq 20000 - 30000x + 30000x$$

$$40000 + 30000x \leq 20000$$

$$40000 + 30000x - 20000 \leq 20000 - 30000x$$

$$30000x \leq 38000$$

$$x \leq \frac{38000}{30000} \approx 12/6$$

اکرم گفت: با این جواب، این خانواده حداقل ۱۲ روز می‌توانند در مشهد بمانند و نه بیشتر و این جواب قابل قبول است. این جواب شبهه جواب فرزانه است با این تفاوت که جهت نامساوی برعکس آن است. لابد اشتباه محاسبات فرزانه در آن است که در جایی باید جهت نامساوی را تغییر دهد. این عمل احتمالاً باید به هنگام تقسیم بر « -30000 » انجام شود، زیرا تقسیم بر اعداد مثبت، نامساوی را به همان شکل نگه می‌دارد، ولی تقسیم بر اعداد منفی شاید نامساوی را برعکس می‌کند.

معلم گفت: پس باید بررسی کنیم که ضرب یک عدد منفی در طرفین یک نامساوی چه تغییری در نامساوی ایجاد می‌کند.



تمرین دریافت

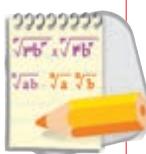
فرض کنید x و y دو عدد باشند که $y < x$ و فرض کنید a عددی منفی باشد.

۱- طرفین نامساوی $y < x$ را ابتدا با $-y$ و سپس با $-$ جمع کنید و یک نامساوی جدید به دست آورید.

۲- « $-a$ » عددی مثبت است و طرفین نامساوی به دست آمده را در « $-a$ » ضرب کنید و پس از ساده کردن نتیجه بگیرید.
 $.ay < ax$

از تمرین بالا نتیجه می شود :

اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب کنیم یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض می شود و نامساوی در یک جهت دیگر برقرار می شود.



مساله

۱- نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آنها را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$x \leq \frac{2x - 3}{5} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{3x}{2} - 4 > \frac{2x}{3} + 1 \quad \text{(الف)}$$

$$x(x - 3) < (x - 1)^2 \quad \text{(د)}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{x}{4} + \frac{x}{5} \quad \text{(ج)}$$

$$x - 8 < 2x - 1 \quad , \quad 2x - 1 < -5 \quad \text{(و)}$$

$$\frac{5x}{2} \leq (1-x)^2 - (x+3)^2 \quad \text{(ه)}$$

$$x - 1 < 2x - 3 \quad , \quad 2x - 3 < -\frac{x}{2} + 1 \quad \text{(ز)}$$

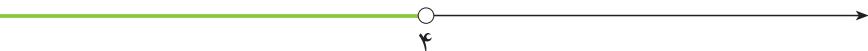
۲- در عبارت های زیر در \square یکی از نمادهای « $<$ » یا « $>$ » یا « $=$ » را قرار دهید.

(الف) اگر $a < 1$ ، آنگاه $a^3 < 1$.

(ب) اگر $a < 0$ و $1 < a$ ، آنگاه $a^3 < a$.

(ج) اگر $0 < a < 1$ آنگاه $a^3 < a$.

۳- کدام یک از شکل‌های زیر مربوط به مجموعه جواب نامعادله $x - 1 \leq 2(x - 1)$ است؟

- (الف) 
- (ب) 
- (ج) 
- (د) 

۴- یک شرکت سازنده میزهای تحریر، برای پرداخت حقوق کارگران و مخارج دستگاه‌ها، ۳۲۰۰۰۰۰ تومان

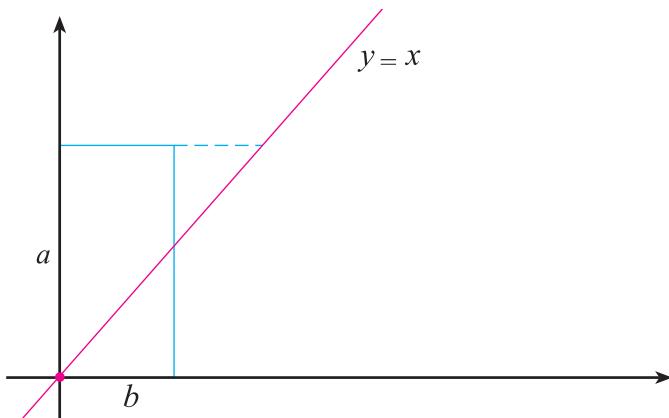
هزینه هفتگی دارد. هزینه مواد اولیه برای هر میز ۲۰۰۰۰ تومان، و قیمت فروش هر میز ۳۰۰۰۰ تومان است.

الف) اگر تعداد میزهای تولید شده در یک هفته را x بنامیم، مقدار هزینه انجام شده در یک هفته را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

ب) با فرضیات قسمت (الف)، درآمد به دست آمده در یک هفته را بنویسید.

ج) تفاضل هزینه از درآمد را سود می‌نامند. این شرکت حداقل چند میز در هفته باید بفروشد تا سود بیرد؟

$$5- \text{از طریق شکل زیر نشان دهید برای هر دو عدد مثبت } a \text{ و } b \text{ داریم: } \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geq ab$$



۶- هزینه تولید x متر سیم بر حسب تومان از رابطه $C = 60x + 17000$ محاسبه می‌شود. اگر قیمت فروش

هر متر سیم ۴۰۰ تومان باشد، چه مقداری از سیم باید به فروش برسد تا کارخانه ضرر نکند؟

تمرین های تکمیلی

فصل اول - اعداد و نمادها

۱- عدد $1 - \sqrt{5}$ را روی محور نمایش دهید.

۲- الف) عبارت «حاصلضرب عدد يک دوم در خودش کوچکتر از يک دوم است» را به زبان ریاضی بنویسید.

ب) عبارت قسمت (الف) را برای عدد دلخواه به زبان فارسی و ریاضی بنویسید.

۳- عبارت $2 \div 6 \times 4 - 2 \div 5 \times 2 + 2 \times 3$ را در نظر بگیرید علی و حسن دو دانشآموز هستند که ترتیب‌های زیر را برای بهدست آوردن عبارت فوق مشخص کرده‌اند که هر دو درست است:

$$2 \times 3 + 2 \div 5 \times 2 + 6 \times 4 \div 2$$

تریک پیشنهادی علی
تریک پیشنهادی حسن

الف) یک ترتیب درست دیگر برای انجام عملیات فوق ذکر کنید.

ب) کدام ویژگی از اعمال است که نشان می‌دهد ترتیب علی و حسن درست است؟

فصل دوم - مجموعه ها:

۱- در هر کدام از قسمت های زیر،

اگر A و B و C زیر مجموعه هایی از اعداد طبیعی باشند در هر کدام از قسمت های زیر A و B و C را طوری مشخص کنید که شرایط ذکر شده را داشته باشد :

الف) $B \subset C$ و $A \subset B$ (ج) $A \cap B = C$ (د) $B \subset A$ و $C \subset A$ (هـ) $B \cap C = \emptyset$

فصل سوم- توان رسانی و ریشه‌گیری:

۱- ریشه‌های دوم اعداد زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{49}$ ب) $1^{\circ} 4$ ج) b⁴

۲- ریشه سوم اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) ٨٠٠٪ ب) a^۳ ج) $\frac{a^6}{b^4}$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{(الف)} \quad \sqrt[3]{64}$$

$$\text{(ب)} \quad \sqrt{36}$$

$$\text{(ج)} \quad \sqrt{\frac{36}{49}}$$

$$\text{(د)} \quad \sqrt[3]{-125}$$

$$\text{(ه)} \quad \sqrt[3]{\frac{b^6}{c^3}}$$

۴- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{(الف)} \quad \sqrt[3]{\frac{-64}{27}}$$

$$\text{(ب)} \quad \sqrt[3]{18a^3}$$

$$\text{(ج)} \quad \sqrt[3]{\frac{a^{\frac{1}{3}}b^2}{24c^3}}$$

۵- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و آن‌ها را ساده کنید.

$$\text{(الف)} \quad 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$$

$$\text{(ب)} \quad -5\sqrt{6} \times (-2)\sqrt{18}$$

$$\text{(ج)} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{18}$$

$$\text{(د)} \quad 2\sqrt[3]{a^4 b^3} \times \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$\text{(ه)} \quad 2\sqrt[3]{4} \times (-3)\sqrt[3]{2}$$

۶- مخرج اعداد و عبارت‌های زیر را گویا کنید و آن‌ها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{(الف)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{(ج)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\text{(د)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$$

$$\text{(ه)} \quad \sqrt[3]{\frac{4a}{3b^3c}}$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{(الف)} \quad 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$\text{(ب)} \quad 4\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{40}$$

$$\text{(ج)} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{81}} - \sqrt[3]{\frac{25}{3}}$$

$$\text{(د)} \quad 5\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6}$$

$$\text{(ه)} \quad a\sqrt{b} + c\sqrt{b}$$

$$\text{(و)} \quad \sqrt[3]{8y} - \sqrt[3]{y^4}$$

$$\text{(ز)} \quad \sqrt{a^2 b^4} - \sqrt{a^2 c}$$

۸- به جای \square عدد مناسب قرار دهید.

$$\text{(الف)} \quad \sqrt{5} + \sqrt{20} + \square = 7\sqrt{5}$$

$$\text{(ب)} \quad \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{96} - \square = \sqrt[3]{12}$$

فصل چهارم- چندجمله‌ای‌ها و اتحادها:

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $(x^2 - y^2) + (x^2 + 2y^2)$

(ب) $(4y + ax) + (x + y)$

(ج) $\frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}x - 1$

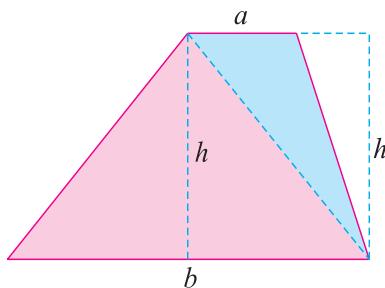
۲- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

(الف) $3x(y - z)$

(ج) $(a + b)(x + y)$

(ب) $4x^3(x + y + 1)$

(د) $(a + b)(a + c)$



۳- با استفاده از شکل روی‌برو فرمول مساحت ذوزنقه را از طریق مساحت مثلث‌ها به دست آورید.

۴- کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد هستند؟

(الف) $3x + y = x + 3y$

(ب) $y^2 + 1 = y$

(ج) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$

۵- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

(الف) $(4x + 5)(4x + 3) =$

(ب) $(\frac{1}{3} - 2x)(\frac{1}{3} - x) =$

(ج) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$

(د) $(2a - 3)(2a + 3) =$

۶- به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

(الف) $x^3 + 8x + 15 =$

(ب) $x^3 + x + \frac{1}{4} =$

(ج) $x^3 + 2x - 8 =$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

(الف) $(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) =$

(ب) $(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) =$

(ج) $(x + \frac{1}{3})^3 =$

(د) $(ax - 1)^3 =$

۸- به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

(الف) $27x^3 - y^3 =$

(ب) $a^3 - \frac{1}{8} =$

(ج) $b^3 + \frac{8}{27} =$

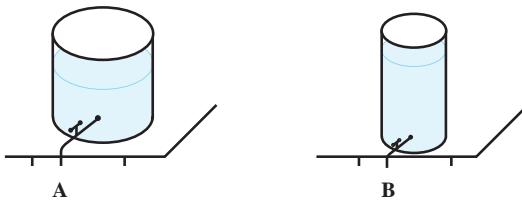
۹- چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

(الف) $x^9 + 1$

(ب) $x^5 - x$

فصل پنجم - معادلات درجه اول و معادله خط:

۱ - دو منبع آب A و B به شکل زیر در اختیار داریم.



گنجایش منبع A، 12° لیتر و گنجایش منبع B، 7° لیتر است. این دو منبع را پر از آب می‌کنیم و در لحظه $t = 0$ شیر هر دو همزمان باز می‌کنیم. در هر ثانیه از شیر منبع A، ۳ لیتر آب و از شیر منبع B، ۲ لیتر آب خارج می‌شود.

الف) کدام منبع زودتر خالی می‌شود و چند ثانیه زودتر خالی می‌شود؟

ب) آیا زمانی می‌رسد که حجم آب در دو منبع مساوی شود؟

ج) آیا زمانی می‌رسد که حجم آب در منبع B نصف حجم آب در منبع A شود؟

۲ - دوست شما به دلیل بیماری در جلسه درس معادلات درجه اول غایب بوده است. در یک برگه کاغذ چگونگی حل معادله $17 = 3x - 32$ را برای او توضیح دهید.

۳ - دو نقطه روی محور x ها باید به طوری که فاصله آن‌ها چهار باشد و یکی از این نقاط روی نیم خط منفی و نقطه دیگر روی نیم خط مثبت باشد. این مسئله چند جواب دارد؟

۴ - نقطه A به عرض ۳ را روی محور y ها در نظر بگیرید. دو نقطه B و C را روی محور x ها باید به طوری که مثلث ABC در رأس A متساوی الساقین باشد ($AB=AC$). مسئله چند جواب دارد؟

آیا می‌توانید دو نقطه روی محور x ها باید که مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد؟ مسئله چند جواب دارد؟

۵ - با رسم محورهای مختصات سه نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ را در صفحه مشخص کنید.

الف) شبیه خط‌هایی که اضلاع مثلث ABC را می‌سازند حساب کنید.

ب) نقطه C را طوری تغییر دهید تا شبیه همه اضلاع مثلث ABC مثبت شود.

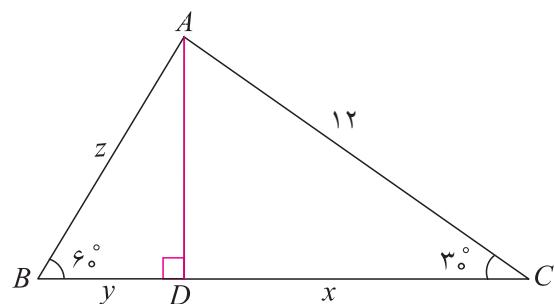
ج) نقطه A را طوری تغییر دهید تا شبیه همه اضلاع مثلث ABC منفی شود.

۶ - معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط $6 = 3x + 2y$ و $3 = x - 2y$ بگذرد و بر خط $1 = x$ عمود باشد.

۷ - معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $1 = x + 7y$ و $3 = x - 7y$ می‌گذرد و با خط $5 = 4x + y$ موازی است.

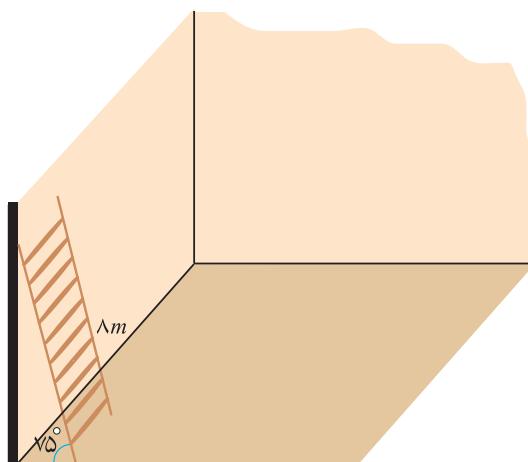
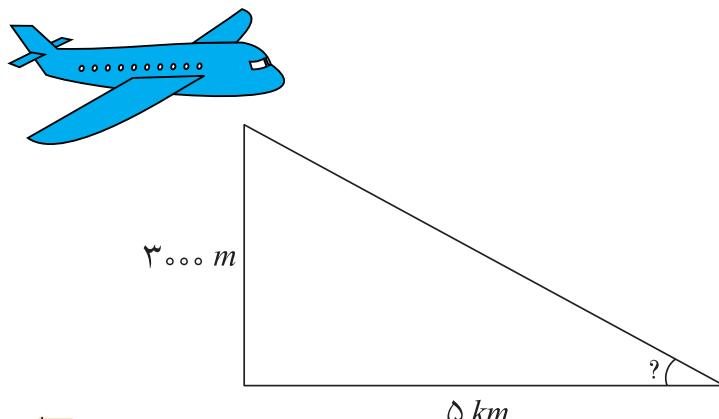
فصل ششم-نسبت های مثلثاتی:

۱- در مثلث زیر مقادیر x و y و z را به دست آورید.



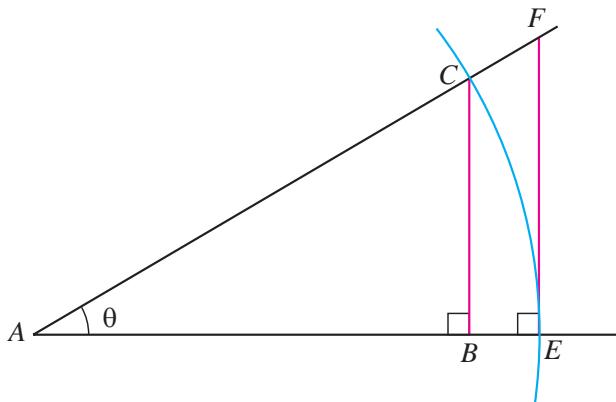
۲- یک عدد مثبت انتخاب کنید و آن را a بنامید. یک زاویه حاده θ بسازید که $\tan \theta = a$

۳- هواپیمایی در ارتفاع 3000 متری در حال پرواز است. این هواپیما وقتی به فاصله 5 کیلومتری باند فرود می‌رسد، روی یک خط شروع به پایین آمدن می‌کند تا در ابتدای باند به زمین برسد. تانژانت زاویه‌ای که مسیر این هواپیما با سطح زمین می‌سازد چقدر است؟ از روی تانژانت این زاویه با رسم مثلث و استفاده از نقاله تعیین کنید هواپیما با چه زاویه‌ای به زمین رسیده است؟



۴- نرده‌بانی به طول 8 متر به دیواری تکیه داده شده است. زاویه نرده‌بان با سطح زمین 75 درجه است. نوک نرده‌بان تا زمین چقدر فاصله دارد؟ (راهنمایی: یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه 75 درجه را با استفاده از نقاله و رسم مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری با خط‌کش حساب کنید).

۵- در شکل زیر مثلث ABC در رأس B و مثلث AEF در رأس E قائمه هستند و طول اضلاع های AC و AE برابر ۱ می باشند و زاویه رأس A را θ می نامیم.



الف) طول اضلاع AB، BC و EF را بحسب یکی از نسبت های مثلثاتی زاویه θ حساب کنید.

ب) طول اضلاع AF را از طریق تساوی $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$ بحسب نسبت های مثلثاتی زاویه θ حساب کنید.

ج) طول اضلاع AF را از طریق قضیه فیثاغورس به دست آورید و نتیجه بگیرید $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$.

فصل هفتم- عبارت های گویا:

۱- مخزن آبی دو شیر دارد. اگر یکی از این شیرها را باز کنیم در 90° دقیقه 100 لیتر آب را تخلیه می کند. اگر دو شیر را با هم باز کنیم 100 لیتر آب در 20° دقیقه تخلیه می شود. اگر شیر دوم را به تنها بی باز کنیم، در چند دقیقه 100 لیتر آب تخلیه خواهد شد؟

۲- مستطیلی در نظر بگیرید که طول و عرض آن اعداد x و y باشند. دایره ای در نظر بگیرید که محیط آن برابر محیط این مستطیل باشد. نسبت مساحت این دایره را به مساحت این مستطیل بنویسید و به عنوان یک عبارت جبری گویا بودن یا نبودن آن را تعیین کنید. در حالتی که این مستطیل، یک مربع باشد، این نسبت به چه شکل در می آید؟

۳- قاعده متوازی الاضلاعی برای عددی مانند x برابر $2 - x$ و مساحت آن برابر $2 - 3x - x^3$ است. ارتفاع این متوازی الاضلاع را بحسب x به دست آورید.

۴- حاصل عبارت رو به رو را ساده کنید.

$$\frac{x+1}{x^2-4} \div \frac{x^2-1}{x-2}$$

۵- نشان دهید چندجمله ای $(5 - 3a)x^3 - 5ax^2 - x + a$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

۶- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را به دست آورید.

$$x^2 + x^4 - 2 \left| \begin{array}{r} 2+x^2 \\ \hline \end{array} \right.$$

۷- کدام عبارت جبری در $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ضرب شود، حاصل برابر $a - b$ می‌شود؟

۸- اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ باشد حاصل $\sqrt{x + \frac{1}{x}}$ چیست؟

فصل هشتم- معادلات درجه دوم و حل آنها:

۱- با روش مربع کامل معادله زیر را حل کنید.

$$x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$$

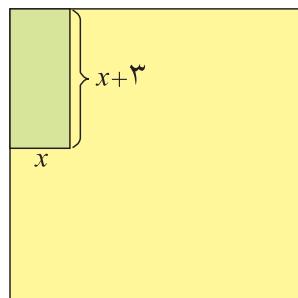
۲- کدام یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را بیابید.

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

۳- با استفاده از فرمول کلی جواب معادلات درجه دوم، معادله زیر را حل کنید.

$$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$$

۴- در شکل زیر در کنار زمینی مربعی شکل به طول 8° متر با چهار ای به ابعاد $x + 3$ و $x + 3$ درست کرده‌ایم اگر باقیمانده مساحت زمین 49° مترمربع باشد مقدار x چیست؟



۵- عددی طبیعی بیابید که مربع آن ۳۴۲ واحد بیشتر از خود عدد باشد.

فصل نهم- نامعادلات درجه اول:

۱- مقدار a را چنان بیابید که نقطه $A(a+2, 3-6a)$ در ربع دوم صفحه مختصات باشد.

۲- حدود m را چنان بیابید که معادله درجه دوم $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ دارای ریشه حقیقی نباشد.

- ۱- مجموعه مقالات کمیته فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، دبیرخانه شورای عالی انقلاب فرهنگی
 - ۲- ریاضیات ۱ چاپ ۱۳۸۶، علی رضا مدقالچی، اسماعیل بابلیان.
- ۳- FUNCTIONS, STATISTICS AND TRIGONOMETRY SHARON, L. SENK
AND OTHERS.
- ۴- MATHEMATICS, SCOTT FORESMAN, ADDISON WESLEY.
- ۵- MATHEMATICS FOR STUDENTS, J.L.MARTIN, MCMILLAN.
- ۶- MATHEMATICS FOR TEACHERS, J.L.MARTIN, MCMILLAN.
- ۷- MATHEMATICAL IDEAS, CHARLES D.MILLER, SEVENTH EDITION,
HARPER COLLINS PUBLISHER.
- ۸- MIDDLE GRADES MATH TOOLS FOR SUCCESS PRENTICE HALL.
- ۹- PRINCIPLES & STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS N.C.T.M.
- ۱۰- REAL LIFE MATHEMATICS, EVERYDAY USE OF MATHEMATICS
CONCEPTS, EVAN M.GLAZER , JOHN W. MCCONNELL GREENWOOD
PRESS.
- ۱۱- WWW. TIMSS/RELEASED ITEMS/ MATHEMATICS /08
(TIMSS 2008). سوالات قابل انتشار ۲۰۰۳



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیاسی آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطابق

این کتاب از طریق نامه ب نشری تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - کروه دسی مربوط و یا پیام نکار (Email)

ارسال نمایند.

ذخیره این کتاب امی دسی ابتدایی و متوسطه قدری