

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

۱۳۹۵



وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

ریاضی (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۴۰۲۱۱
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر تالیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
حمدیرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طبیه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمد‌هاشم رستمی،
ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفائی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت
و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمدیرضا امیری، محمدحسن بیژن‌زاده، احسان بهرامی‌سامانی، رضا حیدری، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی،
محمدرضا سیدصالحی و مجتبی قربانی آرانی (اعضای گروه تالیف) - سیداکبر میرجعفری (ویراستار)

اداره کل نظارت بر شر و توزیع مواد آموزشی
لیدا نیکروش (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - سهیل صالح (طراح گرافیک)-
طاهره حسن‌زاده (طراح جلد) - راحله زادفتح‌اله (صفحه‌آرا) - پریسا لعل خوشاب، مریم دهقان‌زاده، زهرا ایمانی‌نصر،
علی نجمی، سیف‌الله بیک محمددلیوند، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی و احمد‌رضاء‌امینی (امور آماده‌سازی)
تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۰۹۱۶۱-۹، ۰۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۰۹۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

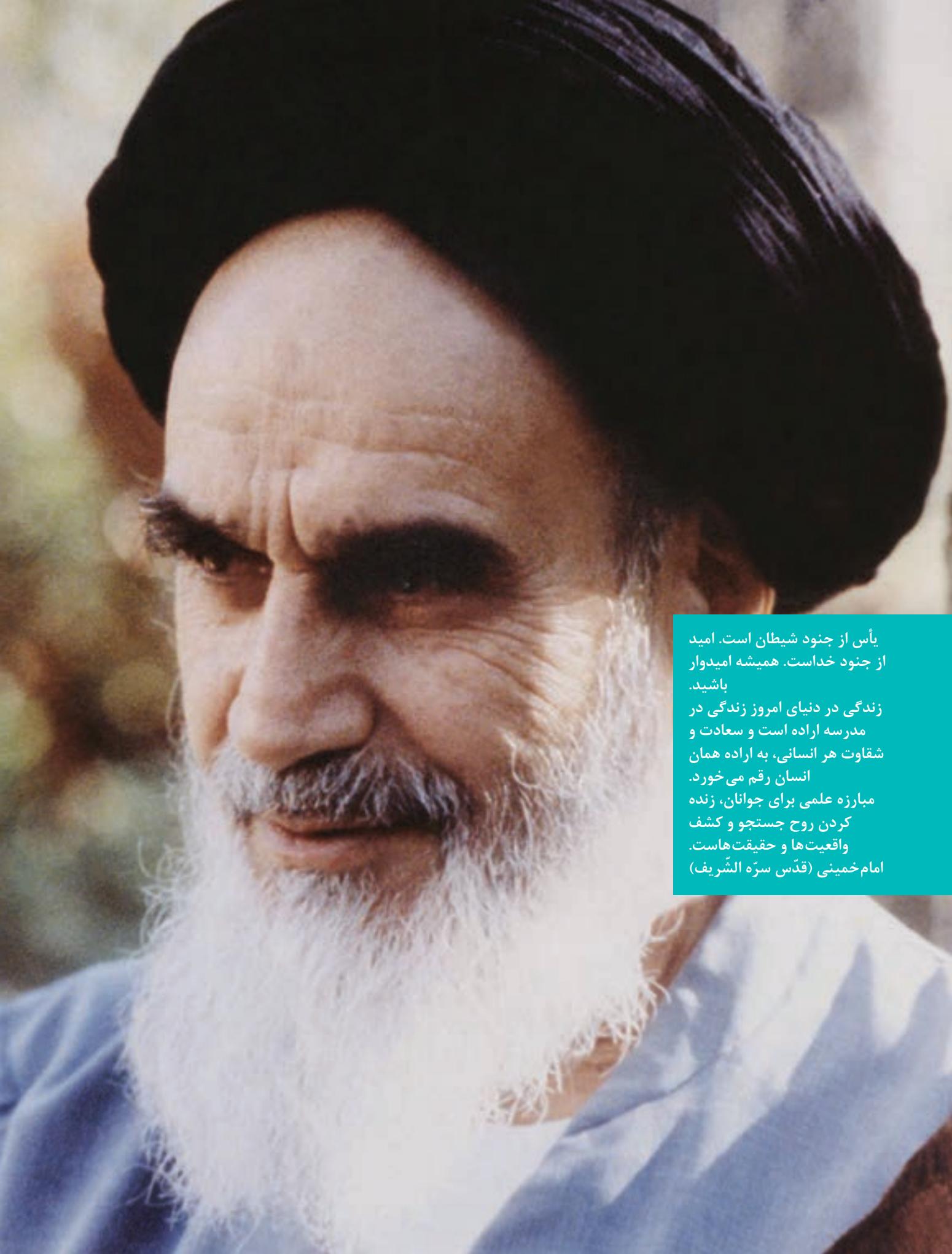
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱
(داروخشن) تلفن: ۰۹۱۶۱-۵، ۰۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۰۹۸۵۱۶۰، ۰۹۹۸۵۱۶۱-۵، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
چاپ اول ۱۳۹۵

نام کتاب:
پدیدآورنده:
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تالیف:
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تالیف:

مدیریت آماده‌سازی هنری:
شناسه افزوده آماده‌سازی:
نشانی سازمان:

ناشر:
چاپخانه:
سال انتشار و نوبت چاپ:
شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۵۱۲-۸
ISBN: 978-964-05-2512-8

A close-up portrait of Ayatollah Ruhollah Khomeini. He is an elderly man with a long, white, bushy beard and mustache. He has deep wrinkles on his forehead and around his eyes. He is wearing a dark turban and a light-colored robe. His gaze is directed slightly to the left of the camera.

یأس از جنود شیطان است. امید
از جنود خداست. همیشه امیدوار
باشید.

زندگی در دنیای امروز زندگی در
مدرسه اراده است و سعادت و
شقاوتش هر انسانی، به اراده همان
انسان رقم می خورد.

مبارزه علمی برای جوانان، زنده
کردن روح جستجو و کشف
واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

امام خمینی (قدس سرّه الشّریف)

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله ۱
درس اول : مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲
درس دوم : متمیک مجموعه ۸
درس سوم : الگو و دنباله ۱۴
درس چهارم : دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۱
فصل ۲: مثلثات ۲۸
درس اول : نسبت‌های مثلثاتی ۲۹
درس دوم : دایرة مثلثاتی ۳۶
درس سوم : روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۴۲
فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۴۷
درس اول : ریشه و توان ۴۸
درس دوم : ریشه n ام ۵۴
درس سوم : توان‌های گویا ۵۹
درس چهارم : عبارت‌های جبری ۶۳
فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها ۶۹
درس اول : معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۷۰
درس دوم : سهمی ۷۸
درس سوم : تعیین علامت ۸۳
فصل ۵: تابع ۹۴
درس اول : مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۹۵
درس دوم : دامنه و برد توابع ۱۰۱
درس سوم : انواع توابع ۱۰۹
فصل ۶: شمارش، بدون شمردن ۱۱۸
درس اول : شمارش ۱۱۹
درس دوم : جایگشت ۱۲۷
درس سوم : ترکیب ۱۲۳
فصل ۷: آمار و احتمال ۱۴۱
درس اول : احتمال با اندازه‌گیری شانس ۱۴۲
درس دوم : مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۱۵۲
درس سوم : متغیر و انواع آن ۱۵۹

سخنی با معلم

باسمہ تعالیٰ

کتاب حاضر همسو با برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی پایه‌های هشتم و نهم تألیف شده است. در گذشته تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در کتاب‌های جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوهٔ تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع و دشواری‌های فراوانی روبروست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدنظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعهٔ آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این برنامه به عهدهٔ دبیران ریاضی است. توانایی انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که در جهت ادای وظیفه نسبت به معلمان عزیز ریاضی، ضمن اطلاع رسانی به موقع دربارهٔ تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی را در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه که در انجام یک فعالیت به طور عمده مدنظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن داشت موردنظر است. فعالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاؤت دربارهٔ یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم انجام می‌پذیرد و هر جا که لازم باشد، راهنمایی دانش‌آموزان توسط او ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صد البته اجرای مناسب آن دارای ارزش زیادی خواهد بود.

هنگام انجام فعالیت، هدایت گفت‌وگوها در کلاس یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائهٔ دیدگاه‌ها و دفاع از ایده‌های خود و نیز قضاؤت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهدهٔ معلم است. به طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و مجال دادن به دانش‌آموزان برای اینکه خود به کشف مفهوم پردازند، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیzman باشد. کار در کلاس با هدف تبییت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ اما ارائهٔ و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرایند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این، اساساً آموزش راهبردها معمولاً^۱ به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی تر باشد. در کتاب حاضر سعی شده است بین مفاهیم و روش‌های ریاضی ارتباط و اتصال برقرار شود. توصیهٔ مؤلفان به همکاران ارجمند، تأکید بر اهداف کتاب درسی است و باید از ارائهٔ مسائلی که تنها بر محاسبات پیچیده و الگوریتم‌ها متکی هستند پرهیز شود.

پس از آماده شدن نسخه اولیه کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. نسخه‌های اولیه کتاب ماه‌ها قبل از چاپ کتاب روی ویگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی قرار گرفته بود. علاوه بر این نظرات اعتبار بخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مد نظر قرار گرفت. لازم است از تمام همکارانی که نسخه اولیه کتاب را مطالعه کردند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهادهای خود را به دفتر تألیف ارسال کرددند، تقدیر و تشکر کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نوید بخش حضور و مشارکت مؤثر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. در کنار این، مشاورینی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی از کتاب را مطالعه و نقد کردند که جا دارد از آنها نیز قدردانی شود. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تماشی همکاران و عزیزان را از طریق پست الکترونیکی و ویگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۱ دارد. بعلاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق ویگاه واحد ریاضی قابل دریافت است. اطمینان داریم که با انتقال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان

۱

مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان ماهنشان استان زنجان



درس اول مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوم متمم یک مجموعه

درس سوم الگو و دنباله

درس چهارم دنباله‌های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

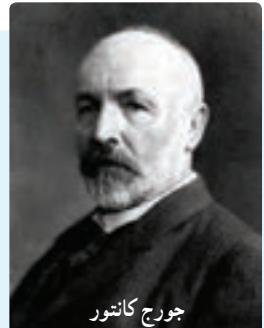
$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$: مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که توان آنرا به صورت $= \mathbb{Q}'$ مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی درباره مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس

۱) الف) مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشورخورده بنویسید.

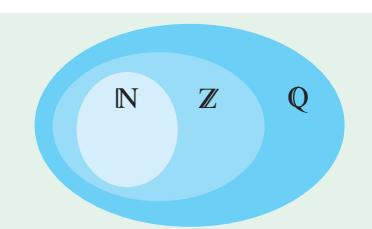
ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

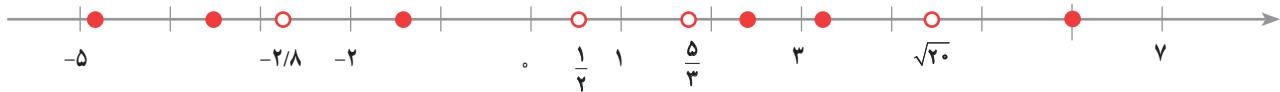
ث) مجموعه $\mathbb{N} - \mathbb{W}$ چند عضو دارد؟



درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ است؟ زیر آنها خط بکشید.

$$\frac{2}{45}, \frac{-7}{2}, 6, -\frac{4}{9}, \pi, -\sqrt{2}$$



بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های \mathbb{R} را درنظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} = A$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟



زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص است، «بازه» یا «فاسله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این‌رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین A را بین -2 و 1 نشان می‌دهیم و آن را **بازه بسته** از -2 تا 1 می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} = B$ به دست می‌آید که آن را **بازه باز** بین -2 و 1 می‌نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

$$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\} \quad \text{بازه بسته بین } -2 \text{ و } 1$$

$$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \quad \text{بازه باز بین } -2 \text{ و } 1$$

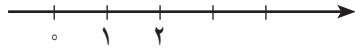
بازه‌های **نیم باز** هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته			
نیم باز	$[a, b)$		
نیم باز	$(a, b]$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، میدانیم که مجموعه جواب نامعادله $2x > 4$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+∞$ (یخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +∞)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty, 1]$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+∞$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

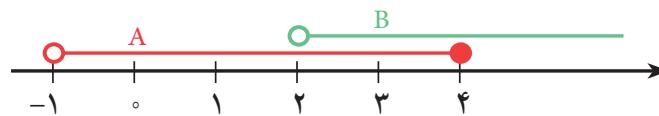
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +∞)$		
	$(-\infty, a)$		
		\mathbb{R}	
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4)$ و $B = (2, +∞)$ را بدست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -1 (یعنی: $(-1, 4] \cup (2, +∞) = (-1, +∞)$)

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین 2 و 4 به همراه خود عدد 4 ؛ (یعنی: $(-1, 4] \cap (2, +∞) = (2, 4]$)

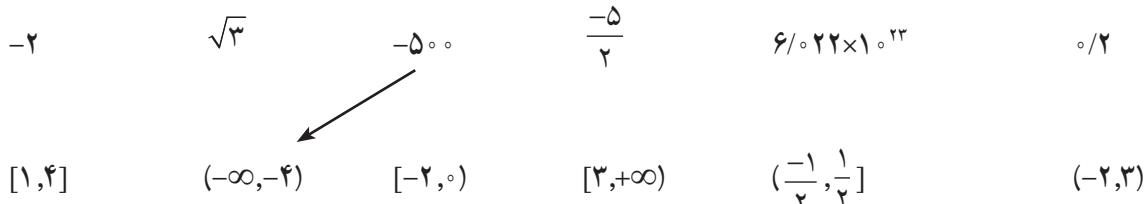
توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید :

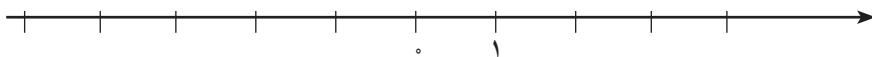
(الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ (ب) $-2 \in (-2, 0]$ (پ) $0 \in (-2, 0]$ (ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

(ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ (ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ (خ) $[2, 5] = (2, 5)$ (د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه های نظری آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = [-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



(الف) $A \cap B$ (ب) $A \cup B$ (پ) $A - B$ (ث) $B - A$

مجموعه های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 4 و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از 4 باشد.

(الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

(ب) A چند عضو دارد؟

(پ) درباره تعداد اعضای B چه می توان گفت؟

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این

مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

کار در کلاس

- ۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
			مجموعه اعداد اول یک رقمی
			مجموعه انسان‌های روی زمین
			مجموعه اعداد طبیعی فرد
			مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
			مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
			مجموعه داشت‌آموزان مدرسه شما
			مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
			مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
			مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
			مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 1°
			(بازه $1^{\circ}, 0^{\circ}$)
			مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

۲) دو مجموعه متناهی نام ببرید.

۳) دو مجموعه نامتناهی مثل بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.

۴) دو مجموعه نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $B \subseteq A$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریهای زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای برو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که $390,000,000 / 100,000$ اصله درخت در ۱۶۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

الف $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.

ب آیا می‌توان بین 0 و 1 به تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می‌توان گفت؟

ث اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

تمرین

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد 5 باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $C \subseteq D$.

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی.

ب) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد 36 .

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$.

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد 100 .

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به‌دست آورید:

الف) $(-2, 5) \cup (-3, 0)$

پ) $[3, +\infty) \cap (6, 10)$

ث) $(2, 4) - (3, +\infty)$

۵ مجموعه $\{3\} - \mathbb{R}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟



درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان‌دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با^۱ A' نشان‌دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $-A$ را **متمم A** می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

فعالیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهد.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

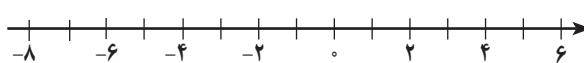
ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$$A = \{ \quad \}$$

$$B =$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نسخین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعداد	نوع کتاب
۲۴۰۰۰ جلد	کتاب‌های خطی
۱۰۰۰۰۰ جلد	کتاب‌های چاپی
۱۰۴۲۰۰۰ جلد	کل کتاب‌ها



U: مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

A': کتاب‌های چاپی
خطی

A': کتاب‌های چاپی

درس ۲۰م: مجموعه یک جموعه



۱۷ ج ۱۶۸۴۴

نحوه بیکاری

جمعیت در سنّ کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ یانگر نحوه بیکاری آن کشور خواهد بود.

۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۳ با فرض آنکه N مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad \{1, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\{3, 6, 9, 12, \dots\} \quad \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \quad \{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

۴ U مجموعه مرجع و A' زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\emptyset' = \quad U' = \quad A \cup A' = \quad A \cap A' =$$

۵ الف) اگر Z را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' را با نوشتan اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر R را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.

۶ فرض کنیم $\{1, 2, 3, 4, 5\} = U$ مجموعه مرجع باشد و $\{1, 2, 3\} = A$ و $\{2, 4\} = B$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A' = \{ \} \quad B' = \{ \} \quad \Rightarrow \quad (A')' = A$$

$$\Rightarrow =$$

$(A')'$
$\{1, 2, 3\}$

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$

$$\Rightarrow =$$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$

$$\Rightarrow =$$

$A - B$	$A - (A \cap B)$
$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$

$$\Rightarrow =$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ بدست آوریم.

فعالیت

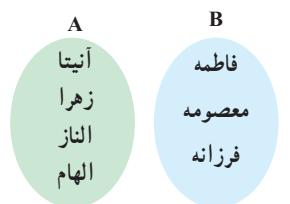
۱ یک تیم کوهنوردی متشكل از ۴ دانشآموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوههای اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانشآموز این تیم مجموعه $\{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\} = A$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $\{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\} = B$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.



به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **جزا می‌گوییم**.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B =$$



ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد 28 و 30 را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$28 : \text{مجموعه شمارنده‌های عدد } 28 \Rightarrow n(A) = 6$$

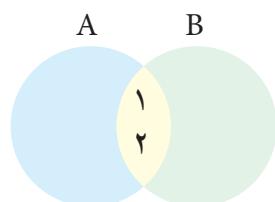
$$30 : \text{مجموعه شمارنده‌های عدد } 30 \Rightarrow n(B) =$$

$$28 : \text{شمارنده‌های مشترک } 28 \text{ و } 30 \Rightarrow n(A \cap B) =$$

$$A \cup B = \{ \dots \} \Rightarrow n(A \cup B) =$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶			



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار رویه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس

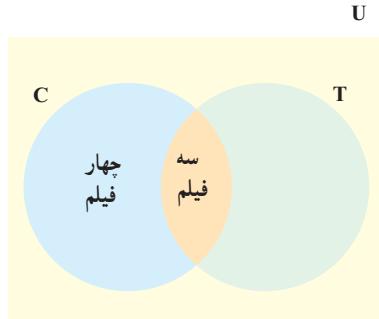


۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که :
 الف) پویانمایی با طنزند.
 ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل : مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پرکنید و جواب‌ها را بیابید.

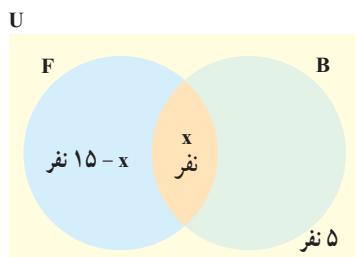
$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = \quad \forall + \dots - \dots = \dots$$

$$n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = \dots - \dots = \dots$$



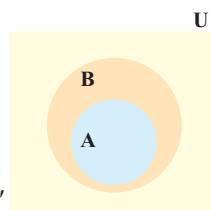
روش دوم حل : در نمودار وین مقابله، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

- ۱ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشد، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.
- روش اول حل :** با تکمیل نمودار زیر مقدار x را باید.

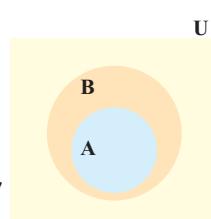


- روش دوم حل :** چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

- ۲ (الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟
- (ب) اگر $\{a, b, c, d, e\} = U$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.



A' را هاشور بزنید



B' را هاشور بزنید

تمرین

- ۱ \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.
- (الف) $A = [-2, 3]$ (ب) $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (پ) $C = (\circ, +\infty)$ (ت) $D = (-\infty, 1]$

- ۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.
- (الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.
- (ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.
- (پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۳) اگر $n(A) = 15$ ، $n(B) = 5$ و آنگاه $n(A \cup B) = 30$ را محاسبه کنید.

۴) فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A \cap B) = 20$ و $n(B) = 40$ ، $n(A) = 60$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B)$	(ب) $n(A \cap B')$	(پ) $n(A' \cap B)$	(ت) $n(A' \cap B')$
---------------------	--------------------	--------------------	---------------------

۵) در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانشآموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانشآموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانشآموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

(ب) تعداد دانشآموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.



۶) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۲۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

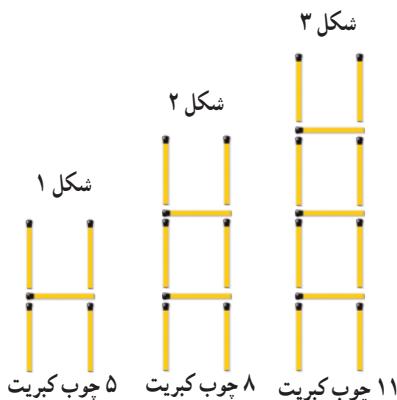


درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



دنباله اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شباهه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه سما ممکن است طرح‌های روی یک گل افتادگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا مارپیچ‌های روی میوه‌آنناس توجه شمارا به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a _n : تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a _n	a _۱ =۵	a _۲ =۸	a _۳ =۱۱	a _n =...	...

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1 = 5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم: اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_2, a_3 و a_n متغیرهای اندیس‌دار^۱ نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۸، ۱۱ و a_n است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الى آخر.

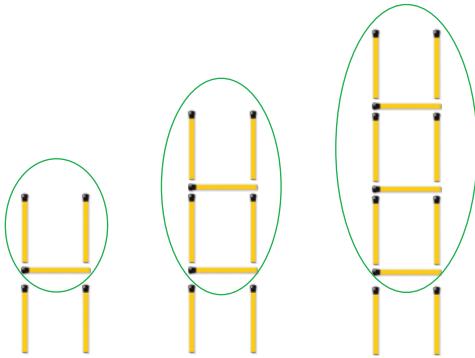
$$a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 11$$

الف با این نمادگذاری، a_n نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب a_n به چه معناست؟

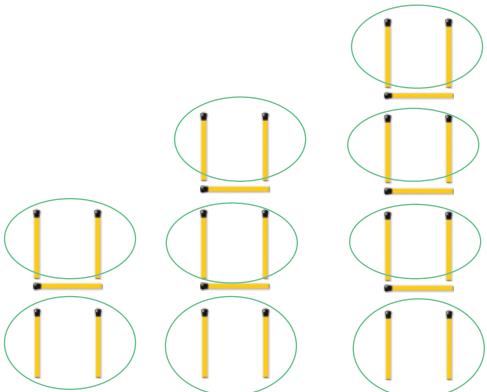
پ آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n بدست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱- در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x, y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.



۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگورا به صورت رو به رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.

$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = \quad \dots \quad a_n =$$



۲ آیسا روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n =$$

چوب های عمودی چوب های افقی

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آوردنند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیاورد.

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگوی نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.

a_1	a_2	a_3	a_4	...
5	8	11	14	
+3	+3	+3		

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متولی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بیان دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را درنظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحهٔ مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=3x+2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد 3 که در واقع اختلاف بین جملات متولی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an+b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an+b$ ، میزان تغییر جملات متولی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متولی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -4n+15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش 4 واحد کاهش می‌یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب 17 و 41 می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an+b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

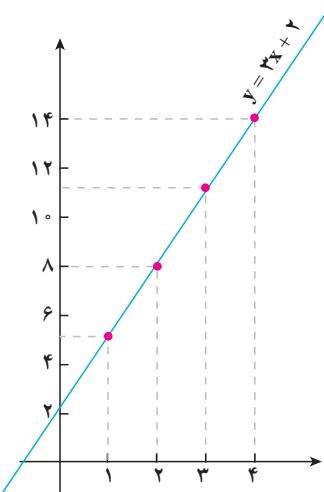
$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

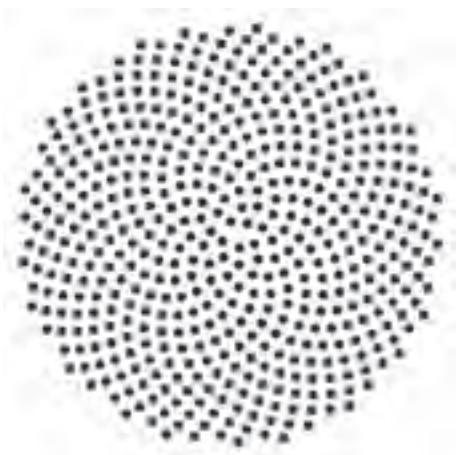
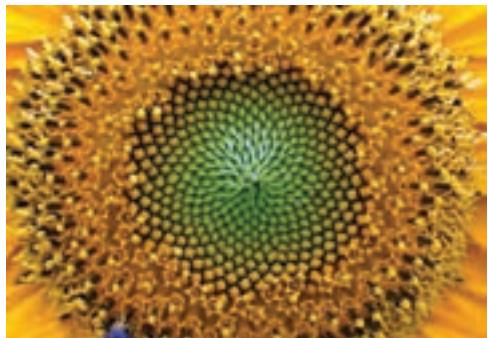
$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس $C_n = 4n+1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهد بود:

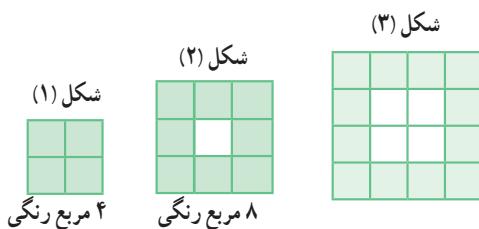
$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$

n	a_n	(n, a_n)
1	5	(1, 5)
2	8	(2, 8)
3	11	(3, 11)
4	14	(4, 14)
.	.	.
.	.	.
.	.	.





۱) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b _n : تعداد مربع‌های رنگی	۴	۸
رابطه بین n و b _n	b _۱ =۴	b _۲ =۸

۲) توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.

۳) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را باید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به دست آورید.

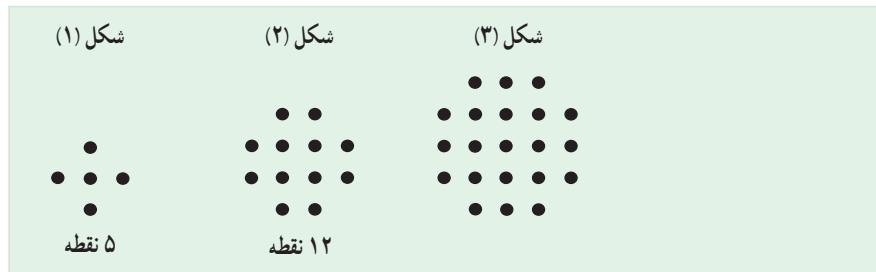
۴) شکل شماره ۲۵° دارای چند مربع رنگی است؟

۵) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

الگوهای غیرخطی

فعالیت

۱) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

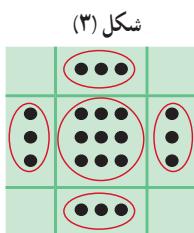
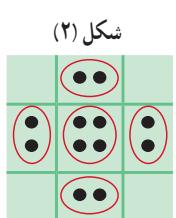
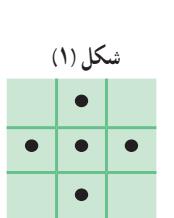


n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t _n : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲
رابطه بین n و t _n	t _۱ =۵	t _۲ =۱۲

۲) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟



۲ امیر رضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیر رضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



$$t_1 = (1)^2 + 4(1)$$

$$t_2 = (2)^2 + 4(2)$$

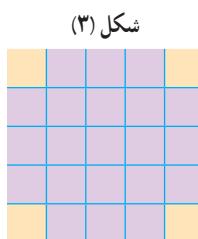
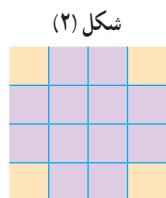
$$t_3 = (3)^2 + 4(3)$$

$$t_4 = (4)^2 + 4(4)$$

...

$$t_n =$$

۳ امیر محمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل ها مقدار t_n را بنویسید.



$$t_1 = 3^2 - 4$$

$$= (1+2)^2 - 4$$

$$t_2 = 4^2 - 4$$

$$= (2+2)^2 - 4$$

$$t_3 = (2+2)^2 - 4$$

$$t_4 = (4+2)^2 - 4$$

...

$$t_n =$$

۴ نشان دهید که دو مقدار بدست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظری کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل های متولی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می گیرند، یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

گرچه سه جمله ای دنباله داشتیم

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می دهیم. پس :

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱) دو دنباله دلخواه مثال بزنید.

۲) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $a_n = n^2 - 1$: $\dots, 3, \dots, 15, 24$

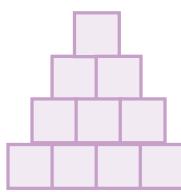
(ب) $b_n = -n + 4$: $2, 2, 1, 0, \dots, -2$

(ج) $c_n = -13 + 2n$: $-11, \dots, -7, \dots, -3$

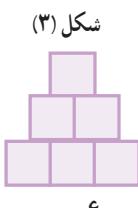
۳) در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4				...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$			
1	4	9	16			
0/1	0/0/1	0/0/0/1	0/0/0/0/1			
-1	8	-27	64			
5	18	31	44			
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$			
1	2	4	7			
3	1	4	1	5		
1	1	2	3	5		
2	3	5	7			

شكل (۴)



شكل (۳)



شكل (۲)



شكل (۱)

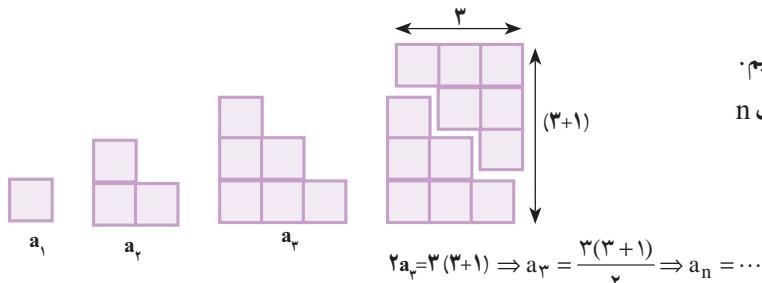


۱۹

۱) الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟



پ) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم.
با دقیق در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

تمرین

۱) به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

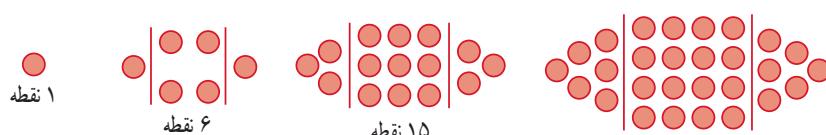
پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چندتاست؟

۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۳) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

$$(الف) a_n = 4n$$

$$(ب) b_n = 3n+1$$

$$(پ) c_n = n^2 + 2$$

$$(ت) d_n = n^2 + n$$

برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید. ۴)

(الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

(ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

$2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, \dots$

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_5	...	t_n	...
2000	$2000 + 4(1)$	$2000 + 4(2)$	$2000 + 4(3)$...	$2000 + (\dots)(4)$...	$2000 + (\dots)(n)$...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = \dots$$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$...	$t_1 + (\dots)d$...

$+d$ $+d$ $+d$

همان طور که مشاهده شد،

جمله a_n یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

$$d = \quad , a_n = \quad$$

$$(ب) 1, 3, 5, 7, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \dots , d = \quad , b_n = \quad$$

$$(پ) 5, 9, 13, 17, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \dots , d = \quad , c_n = \quad$$

$$(ت) 13, 7, 1, -5, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \dots , d = \quad , d_n = \quad$$

۲ و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.



سیم کارت‌های شرکت A

هزینه ثابت ماهانه : ۳۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه : ۲۰ تومان

سیم کارت‌های شرکت B

هزینه ثابت ماهانه : ۲۰۰۰ تومان

هزینه هر دقیقه مکالمه : ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان‌دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n

هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

(الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید.

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰

(پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

(ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کند. به یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟



سوزندوزی - سیستان و بلوچستان

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.
حل : آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

آرتین : از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم :

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \\ t_{16} &= t_1 + 15d \\ &= 4 + (15)(7) \\ &= 109 \end{aligned}$$

آرکان : یک الگوی خطی با قدر نسبت ۷ داریم. پس

$$\begin{aligned} t_n &= 7n + b \\ t_1 &= 7(1) + b \\ 4 &= 7 + b \Rightarrow b = -3 \\ t_n &= 7n - 3 \\ t_{16} &= 7(16) - 3 \\ t_{16} &= 109 \end{aligned}$$

کار در کلاس

- الف) یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.
ب) یک دنباله حسابی با قدر نسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن 10° باشد.
پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

- الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدeneند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه **واسطه حسابی** درج کرده‌ایم.
حل : با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d =$$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
18				62



پویانمایی روی سفال

- ب) بین 20° و 80° به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

20°			80°

تمرین

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

(الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

(پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

(ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

(ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

(ت) $10, 7, 4, 1, \dots$

(ج) $2, 2, 2, 2, \dots$

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20 و 56 است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول 3 و مجموع سه جمله بعدی آن 39 است. دنباله را مشخص کنید.

۴ (الف) دو جمله بعدی الگوی مقابله را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

(ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.
(پ) جمله چندم این دنباله 397 است؟

۵ (الف) واسطه حسابی بین 5 و 11 چه عددی است؟
(ب) واسطه حسابی بین 20 و 30 چه عددی است؟

(پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ مسئله زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.
«۱۰۰ قرص نان را بین 5 مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».



بخشی از پاپیروس رایند

قدیمی‌ترین کتاب ریاضی جهان

تاریخ تقریبی پاپیروس رایند (با احمدس^۱) سال 165° قبل از میلاد است. این پاپیروس یک متن ریاضی می‌باشد که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنمای را دارد و شامل 85 مسئله به خط هیراتی است. احمدس کاتب، آن را از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری کرده است. این پاپیروس در سال 1858 میلادی به وسیله مصريشناس اسکاتلندي، هنری رایند^۲، در مصر خردباری شد و سپس به موزه بریتانیا منتقل شد. پاپیروس‌های رایند 165° (ق.م.) و مسکو (185° ق.م.) از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس رایند در سال 1927 منتشر شد. این پاپیروس حدود $5/5$ متر طول و 30 سانتی‌متر عرض دارد.

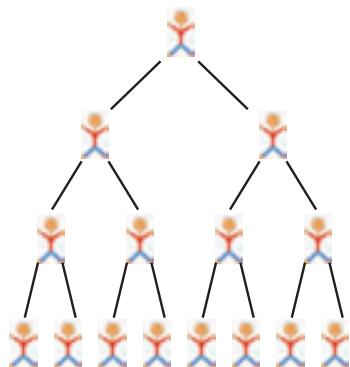
^۱ Ahmes

^۲ A. Henry Rhind

دنباله هندسی



علی به بیماری آنفولاتزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستاش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولاتزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش بینی می شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.



فعالیت

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را باید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می شوند؟

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می شوند؟

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولاتزا مبتلا می شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می شود.

در مثال بالا می توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم :

$2, 4, 8, 16, 32, \dots$

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم. یعنی :

دنباله هندسی، دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می نامیم.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهد بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$		

$\times r$ $\times r$ $\times r$ $\times r$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدر نسبت می باشد.

کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱ روش های مقابله را به کار بردند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ توضیح دهید.

۲ در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید.
سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$\times 3 \times 3 = r$

$$\text{ب) } b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 40, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \dots, b_n =$$

$$\text{پ) } c_1 = -6, c_2 = -12, c_3 = -24, c_4 = -48, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \dots, c_n =$$

$$\text{ت) } d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{4}, d_3 = \frac{1}{8}, d_4 = \frac{1}{16}, \dots, d_n =$$

الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow \dots \Rightarrow r = \dots \end{cases}$$

3	48
---	----

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

3				48
---	--	--	--	----

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

10		4000
10		80000
4		972

نگار

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{81}$$

نرگس

$$r = \frac{9}{3} = 3$$

$$t_7 = 9(3)^{7-1}$$

$$= 6561$$





- ۱ یک کوه یخی هزار شُنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.
پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟
- الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.
 - ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند.
 - پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود.
 - ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

تمرین

- ۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.
- (الف) $7, 28, 112, 448, \dots$
 - (پ) $\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$
 - (ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$
 - (ت) $5, 5, 5, 5, \dots$
- ۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.
- ۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
- الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.
 - ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.
- ۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال 2° درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.
- (الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟
 - (ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
- ۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.
- ۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.
- ۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پژوهشگی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،
- الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار							

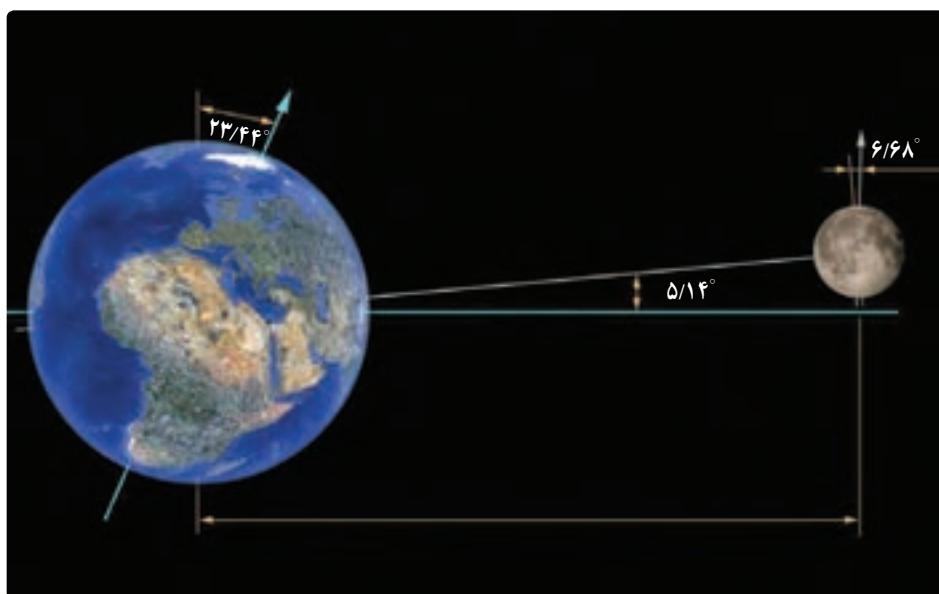
ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟



مثلث

الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رَحْمَانٌ : ٥)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمي در چرخش و گردش) هستند.



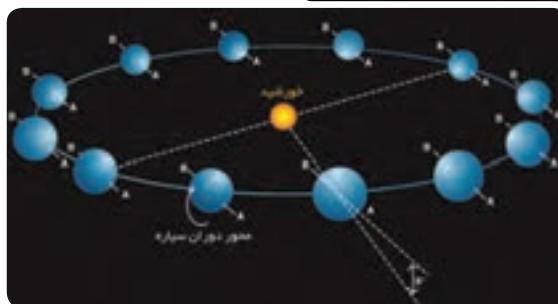
زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره قطبی، ستاره ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه های ساعت به دور خود، دوران می کند.



درس اول نسبت های مثلثاتی

درس دوم دائرة مثلثاتی

درس سوم روابط بین نسبت های مثلثاتی





برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت پیروزی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها 120° درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفون‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفون‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوابی انسان را دارند.

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



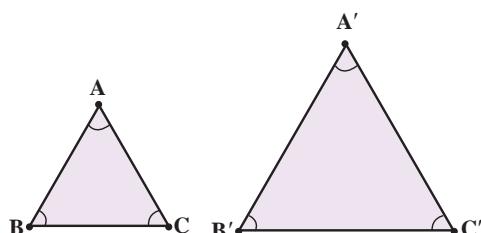
اگر زاویه هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدیم و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه

$$\text{داریم: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{B} = \hat{B}'$$

در هندسه ثابت می‌شود:

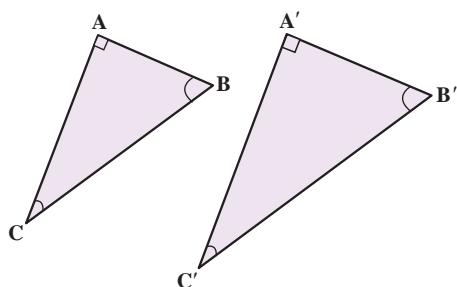


هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:

اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه $\hat{A} = \hat{A}'$, $A'B'C'$ و ABC جاهای خالی را کامل کنید.

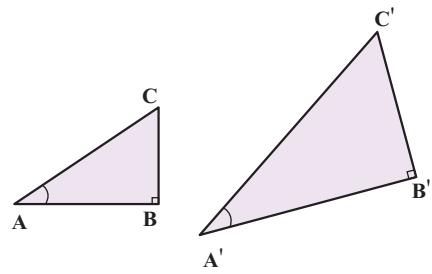
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$, می‌توان نتیجه گرفت (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ مطابق شکل بالا برابر باشد، داریم:

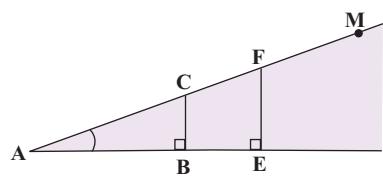
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

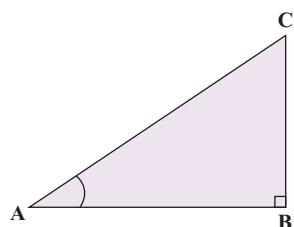
۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:



$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AE}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تاثرانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، داریم:

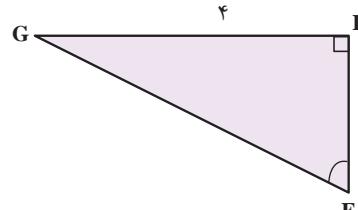
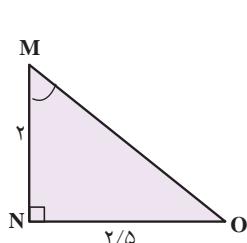
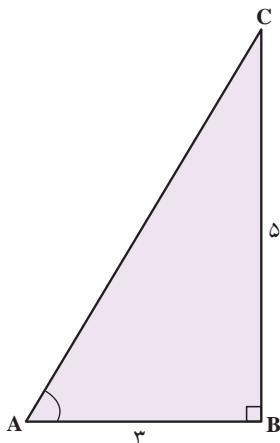
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$



عکس تاثرانت زاویه A را کثاثرانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

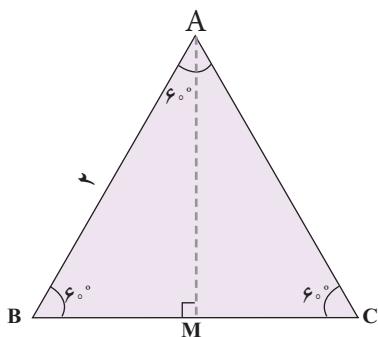
$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

$$\tan F = \frac{EF}{GF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{ON}{MN} = \frac{\frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \dots \dots \dots$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{2} = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{2}{BM} = \sqrt{3}.$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، تانزانت و کتانزانت زاویه ۴۵° را پیدا کنید.

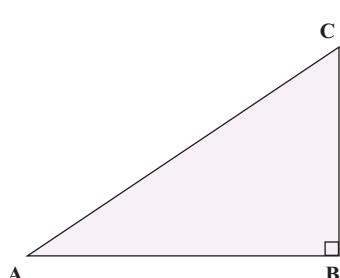
در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می‌نامیم و با $\sin A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}.$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} \text{به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویه } ABC, \tan A &= \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}, \\ &\text{از } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}. \end{aligned}$$

این رو . $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$



در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جالالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کند.

فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در نتیجه $(AC)^2 = 1^2 + 1^2$ و از این رو $AC = \sqrt{2}$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC = \sqrt{2}$.

علم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$.

مبینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \frac{DC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و تر.

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}.$$

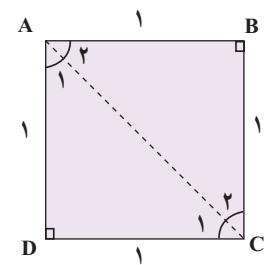
مریم: اگرون در مثلث قائم الزاویه ADC ، طبق تعریف داریم

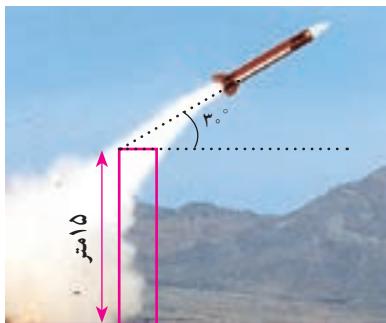
$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{و} \quad \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

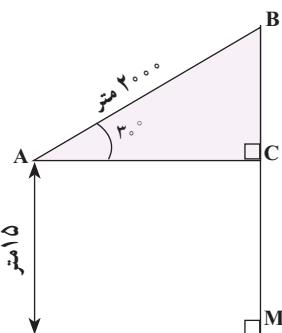




یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 30° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، بسادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

$$BC + MC = BC + \dots \dots \dots$$



بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\frac{1}{2} \sin 30^\circ$. پس در مثلث قائم الزاویه

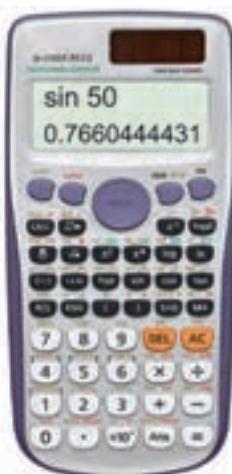
داریم :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{\text{وتر}} \Rightarrow BC =$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$$

فعالیت



۱ یک زاویه 50° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 50° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

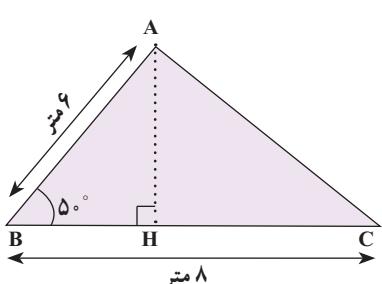
$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث } ABC$$

(الف) با توجه به اینکه $\sin 50^\circ \approx 0.76$ ، داریم :

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH \approx \dots \dots \dots$$

(ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

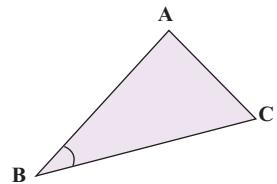
$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \dots \dots \dots \times \dots \dots \dots \approx \dots \dots \dots$$



کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع متناظر و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

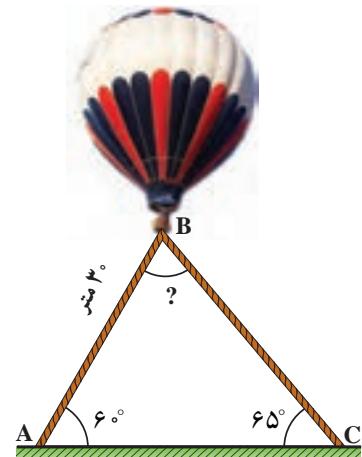


۲ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بال اطلاع رسانی توسط طناب به زمین بسته شده است.

طول یکی از طناب‌ها 30 متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

(الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

(ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.



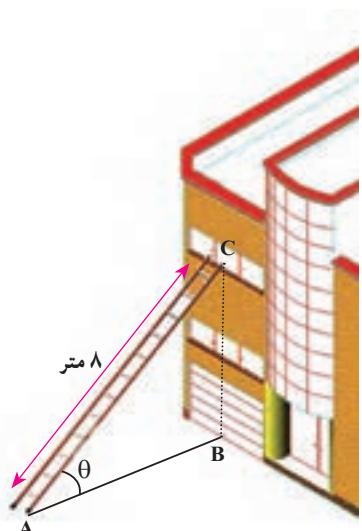
(پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه 65° ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

۳ مطابق شکل مقابل، نردنی به طول 8 متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردنی با سطح زمین $30^\circ = \theta$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردنی تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin \theta = \frac{\text{.....}}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = \Rightarrow BC =$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

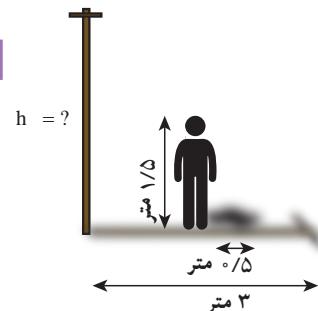
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = - = \Rightarrow AB =$$



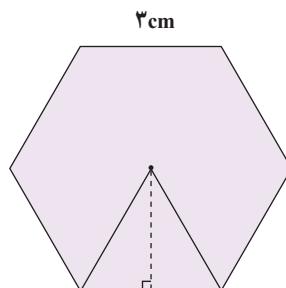
تمرین

۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن 3 متر است، حساب کند. قد

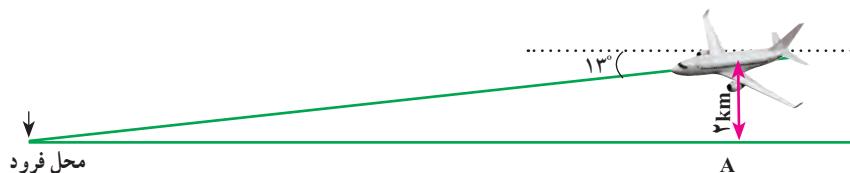
نسرين $1/5$ متر و طول سایه او در همان لحظه $1/5^\circ$ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟



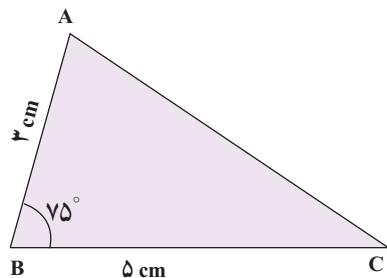
۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



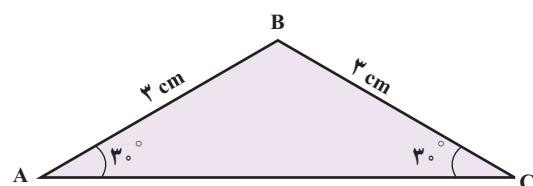
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.
 $\tan 13^\circ \approx 0.23$



۴ فرض کنید $0.96 \sin 75^\circ \approx 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



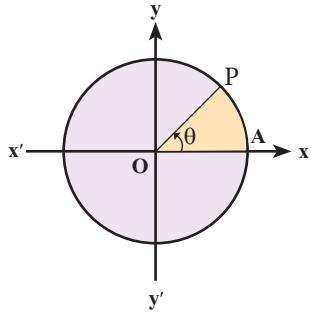
۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا یپسوى باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:
 ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً همزمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آتن نیست و آتن هر ماهواره می‌تواند حداقل $4/42$ درصد سطح کره زمین را پوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

درس دوم: دایره مثلثاتی



دایره رو به رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

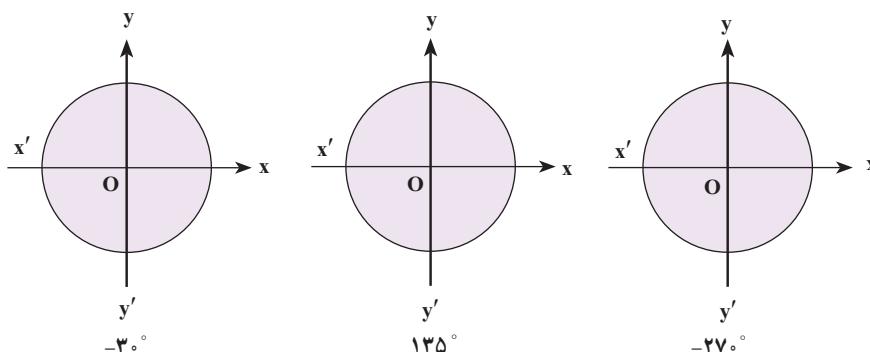
مثال

می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهای است.

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -90° , 90° , $90^\circ - 21^\circ$ و 225° داده شده‌اند.

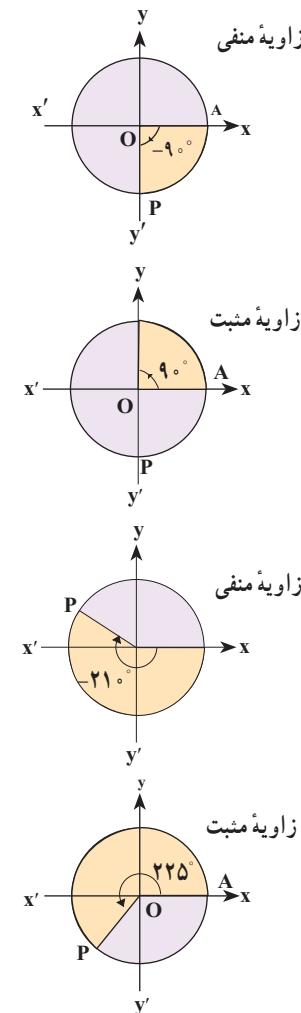
فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



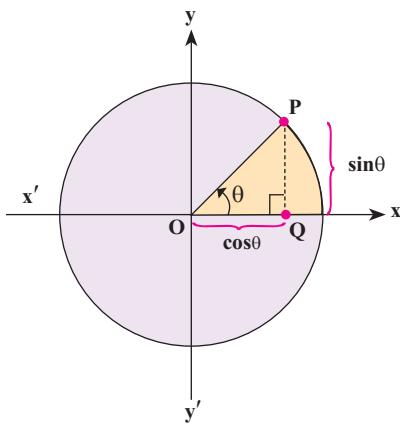
۲ فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی رو به رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط \overrightarrow{OP} با محور \overrightarrow{Ox} می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور \overrightarrow{Ox} عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$$\cos\theta = \dots\dots \quad \sin\theta = \dots\dots \quad \tan\theta = \dots\dots$$

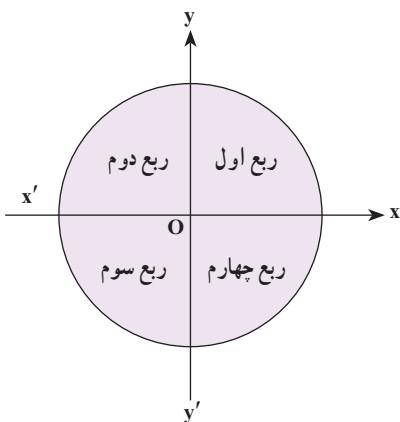


بررسی مختصات پرتوهای مثبت

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله Q تا مبدأ با برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور x' یا محور x را محور کسینوس‌ها و محور y' یا محور y را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر P نقطه دلخواه روی دایره مثبت باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x ‌ها زاویه θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x, y) است که در آن $y = \sin \theta$ و $x = \cos \theta$.



نکته: دو محور عمود بر هم x' و y' صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xoy را ربع اول، ناحیه $x'y$ را ربع دوم، ناحیه yox را ربع سوم و ناحیه $y'ox$ را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

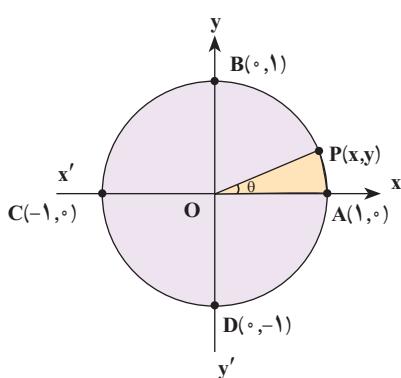
نکته: زاویه‌های 0° , 90° , 180° , 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

- ۱) مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟
- الف) -3° ب) 65° ت) 95° پ) 182°

۲) با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

مثال



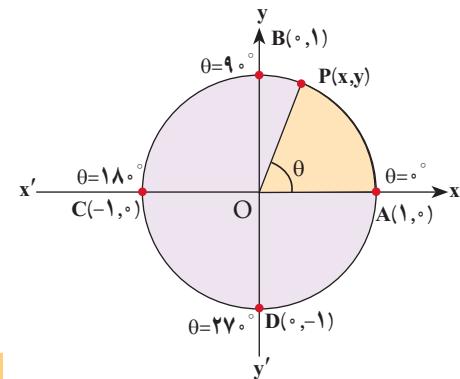
می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی روبه رو، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می‌گیرد و داریم $\sin \theta = y$ و $\cos \theta = x$. اگر $\theta = 90^\circ$ باشد، آنگاه $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ تعريف نمی‌شود (چرا?). همچنانی $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$.

فعالیت

۱ در دایره مثلثاتی رو به رو اگر $\theta = 90^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲ اگر $\theta = 180^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۳ اگر $\theta = 270^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.



کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	0°	90°	?	270°	360°
$\sin\theta$	0°		0°	-1	0°
$\cos\theta$			-1		
$\tan\theta$		تعريف نشده	0°		
$\cot\theta$			تعريف نشده		

۱ در ربع اول است $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
 ۲ در ربع دوم است $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
 ۳ در ربع سوم است $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 ۴ در ربع چهارم است $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

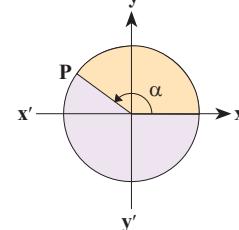
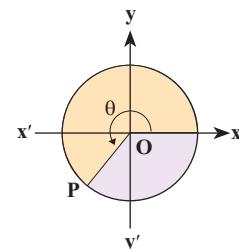
فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ و در ربع سوم، $x < 0$ ، $y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

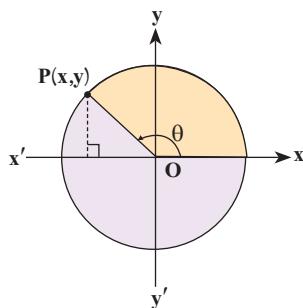
۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

۳ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$		-		
$\tan\theta$			+	
$\cot\theta$				-



نکته: برای هر زاویه دلخواه θ ، $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ و $-1 \leq \sin\theta \leq 1$



آقای جلالی، از دانش آموزان پرسید: اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{5}{\sqrt{5}}$ آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم $\sin \theta = \frac{5}{\sqrt{5}} = y$ ، بنابراین نقطه‌ای به عرض است.

ملعم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم الزاویه داریم: $1 = x^2 + y^2$. بنابراین و در

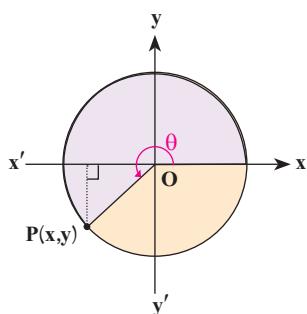
نتیجه $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. اکنون با توجه به اینکه نقطه P در ناحیه دوم واقع است، داریم

ملعم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی: چون θ زاویه‌ای در ربع است، پس طول نقطه P منفی است و از این رو قابل قبول است.

ملعم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات و است. در نتیجه :

$$\cot \theta = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\dots}{\dots}, \quad \cos \theta = x = \dots$$



۱ فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = \dots$ الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

۲ اگر $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

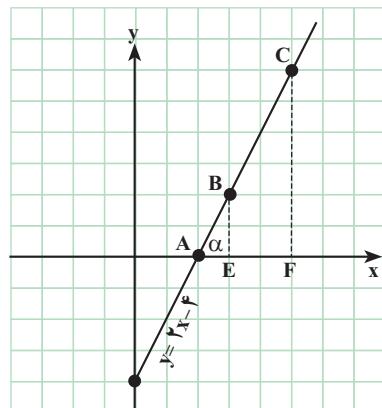
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y = 2x - 4$ در شکل رو به رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودهارا به ترتیب، E و F بنامید.
 الف) تانژانت زاویه α را بدست آورید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \dots\dots\dots$$

پ) از مقایسه قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟ توضیح دهید.



شیب هر خط که محور افقی را قطع می کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

کار در کلاس

فعالیت بالا را برای خط های زیر، تکرار کنید. ۱

$$x + y = 2$$

$$2y - 3x = 5$$

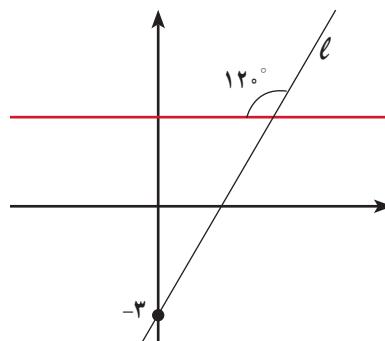
معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها 30° است و از نقطه $(1, 0)$ می گذرد. ۲

تمرین

۱ هر یک از زاویه های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.

$$\text{ت) } 185^\circ \quad \text{ب) } -135^\circ \quad \text{ب) } 225^\circ \quad \text{الف) } +270^\circ$$

- ۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.
- الف) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ در ربع چهارم
ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ در ربع سوم
- ۳ اگر $\tan \theta$ و $\sin \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟
- ۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.
- الف) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$
ب) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$
- ۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟
- ۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\cot \alpha > \tan \alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\tan \beta > \cot \beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- ۷ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x ها 45° است و نقطه $(2, -3)$ روی آن قرار دارد.
- ۸ با توجه به شکل زیر، معادله خط ℓ را به دست آورید.
- در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌های برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدر مطلق برابر با نصف طول وتری بهاندازه دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیبارک، اخترشناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً 30° درجه به 3° درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تأثیرات را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیش‌رفت بعدی داشت مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.



درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کیم.

فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{.....}$$

$$\sin \alpha = \dots \dots \dots$$

$$\cos \theta = \dots \dots \dots$$

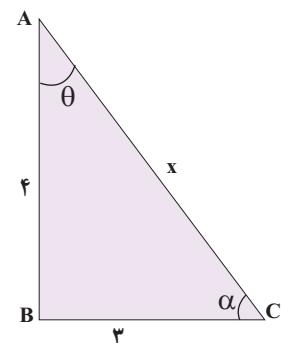
$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{.....}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots \dots \dots$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots \dots \dots$$

$$\cot \alpha = \dots \dots \dots$$



ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ را به دست آورید.

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

پ درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots \dots \dots$$

ت مشابه قسمت (ج) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ جاهای خالی را پر کنید:

(الف) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \dots \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\dots}$

(ب) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dots \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\dots}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α را با توجه به ناحیه‌ای که زاویه‌ای α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow[\text{در ناحیه سوم}]{\alpha} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت بر حسب سینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب سینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \dots$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

۱

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

۲

۳ اگر α را به دست آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را بدست $\tan \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ آورید.

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$), $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$) را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید :



ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شباهنروز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ & = \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنى بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :
 $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ (الف)

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \dots\dots$$

$$(ب) \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} + \dots = \dots + \dots$$

طرف راست

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟ ۱

(الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

۲ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $\cot \alpha + 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرین

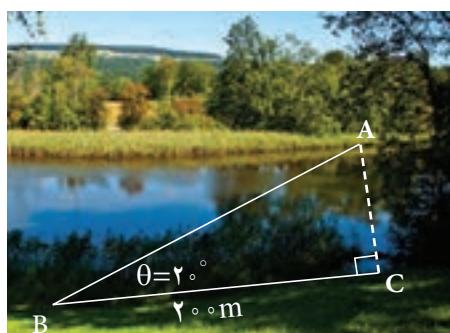
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۲ اگر $\tan \alpha$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 200 متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 20° باشد و $\sin 20^\circ = 0.34$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید).



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{(الف)}$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad \text{(ت)}$$

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \tan\alpha \quad \text{(پ)}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad \text{(ث)}$$



ولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تریت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمومیش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابو ریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقليدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس وغیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم ربیع‌الثانی ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.



توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



بانک سلول‌های بنیادی رویان



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکاراش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمی‌کند، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه ۲۱۶

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$; همچنین $8 = 2^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت \Rightarrow به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به طور خلاصه با علامت \Leftrightarrow نوشت. بنابراین می‌توانیم

$$\cdot 2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

فعالیت

- ۱) اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظری هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$(-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 \quad \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$$

$$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt{5^2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \Leftrightarrow \sqrt{10^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$(0/25)^2 = 0/0625 \Leftrightarrow \sqrt{4^2} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$(0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow \sqrt{4^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

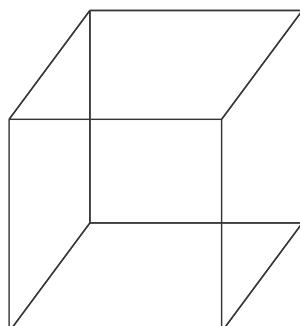
- ۲) در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷			۱۰۰	۷۲۹
ریشه سوم			-۳	۵	-۱۰	۱۵	

کار در کلاس

- ۱) حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع	۱	۲	۴	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۱۲۵

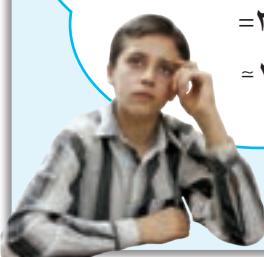


دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبرو به دست آورده‌اند:
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد: چون $3^3 = 27$ و
 $2 < \sqrt[3]{25} < 3$, پس $\sqrt[3]{25}$ بین ۲ و ۳ است.
 بهتر است $2/8$ را امتحان کنم
 $(2/8)^3 = (2/8) \times 2/8$
 $= 21/952$
 $= 22$



محسن: 25 به 27 نزدیک‌تر است
 تا 8 , پس بهتر است عدد $2/9$ را
 امتحان کنم.
 $(2/9)^3 = (2/9) \times 2/9$
 $= 24/389$
 $= 24/4$



دیبر: ریشه سوم 25 تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر $2/9$ بگیریم.
 $\sqrt[3]{25} \approx 2/9$

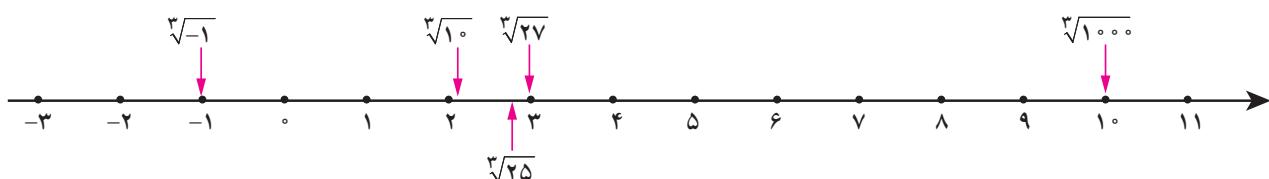
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دیبر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم 25 حاصل می‌شود.

$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم 25 به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $2/92$, $2/924$ و $2/9240$ کار می‌کنیم.

ریشه عددان را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۲ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} \quad \sqrt[3]{3} = 1/4 \quad \sqrt[3]{4} \approx \quad \sqrt[3]{125} = \quad \sqrt[3]{-8} =$$



- ۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متولی است :
- الف) چون $\sqrt[3]{36} < \sqrt[3]{30}$ پس $\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{5}$. همچنین چون $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{1}$.

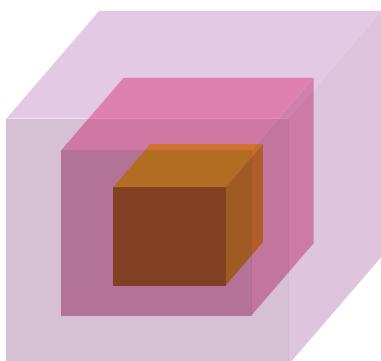
$$\square < \sqrt{10} < \square \quad \text{پ)$$

$$\square < \sqrt{7} < \square \quad \text{ب)$$

$$\square < \sqrt[3]{20} < \square \quad \text{ث)$$

$$\square < \sqrt[3]{-17} < \square \quad \text{ت)$$

- ۳ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا اعدادی بگذارید که نامساوی ها برقرار باشند.
- الف) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{4} < \sqrt{9}$ ب) $\sqrt[3]{10} < \sqrt{9} < \sqrt{4}$



- ۴ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

فعالیت

- ۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$$\begin{array}{ccc} 2^3 = 16 & \xrightarrow{\text{ریشه‌های چهارم}} & 5^3 = 125 \\ (-2)^3 = -16 & & (-5)^3 = -125 \end{array}$$

$\sqrt[4]{625}$ عددی مثبت و برابر است با ریشهٔ چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[4]{625} = 5$. همچنین $\sqrt[4]{625}$ عددی منفی است و برابر است با ریشهٔ چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[4]{625} = -5$.

آیا $\sqrt[4]{16}$ دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶ شود؟ اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ریشهٔ چهارم است که یکدیگرند.
اعدادی منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵			
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵		$\sqrt[4]{5}$	

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲		۷۱	-۲۴۳			۱۹	
ریشه پنجم	-۲	۵			-۱	-۱۰		

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

۴ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} =$$

$$\sqrt[5]{-32} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

$$\sqrt[5]{-0/00032} =$$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و
اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20}$$

$$-\sqrt{35}$$

$$\sqrt[3]{75}$$

$$\sqrt[3]{-8}$$

$$\sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt[3]{-90}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[4]{16}$$

$$-\sqrt[4]{20}$$

$$-\sqrt[3]{120}$$

$$\sqrt[4]{400}$$

$$\sqrt[5]{1}$$

$$\sqrt[5]{-32}$$

$$\sqrt[5]{400}$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{25}$$

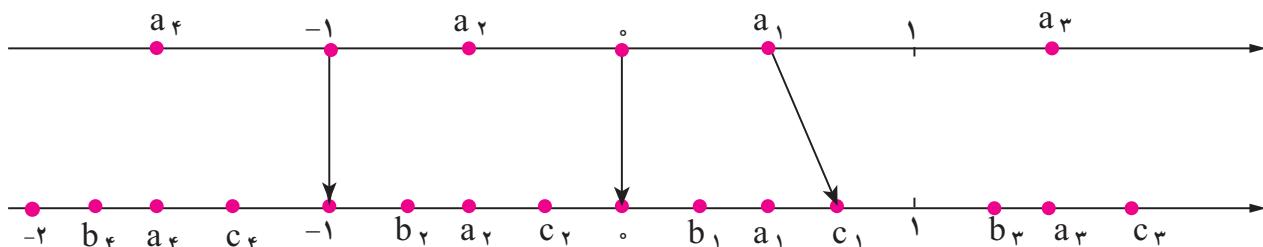
$$\sqrt[3]{7/25}$$

$$\sqrt[5]{16}$$

$$\sqrt[5]{64}$$

$$\sqrt[4]{90}$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

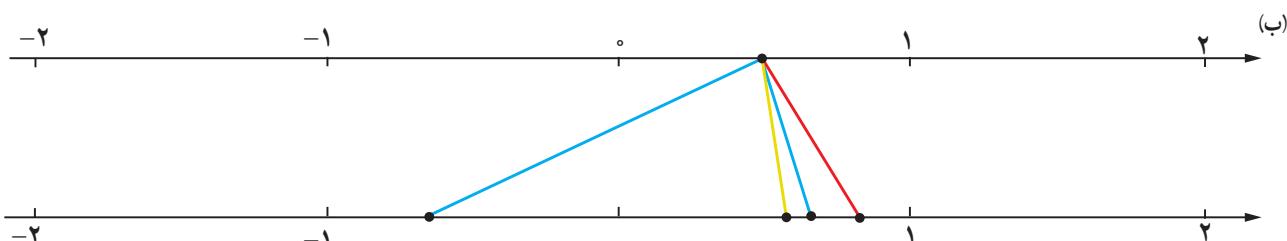
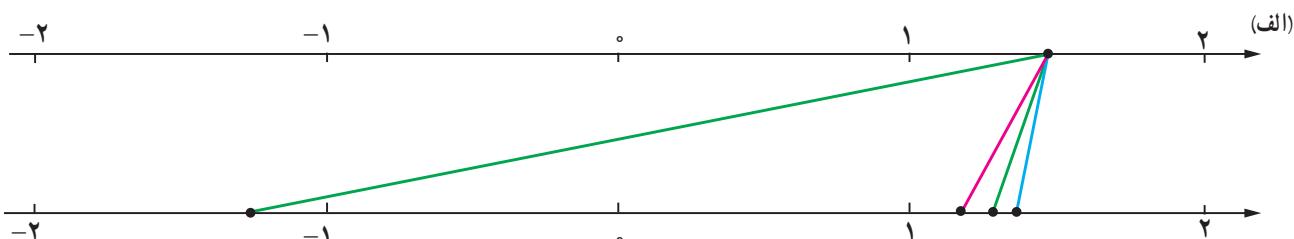
الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟

ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

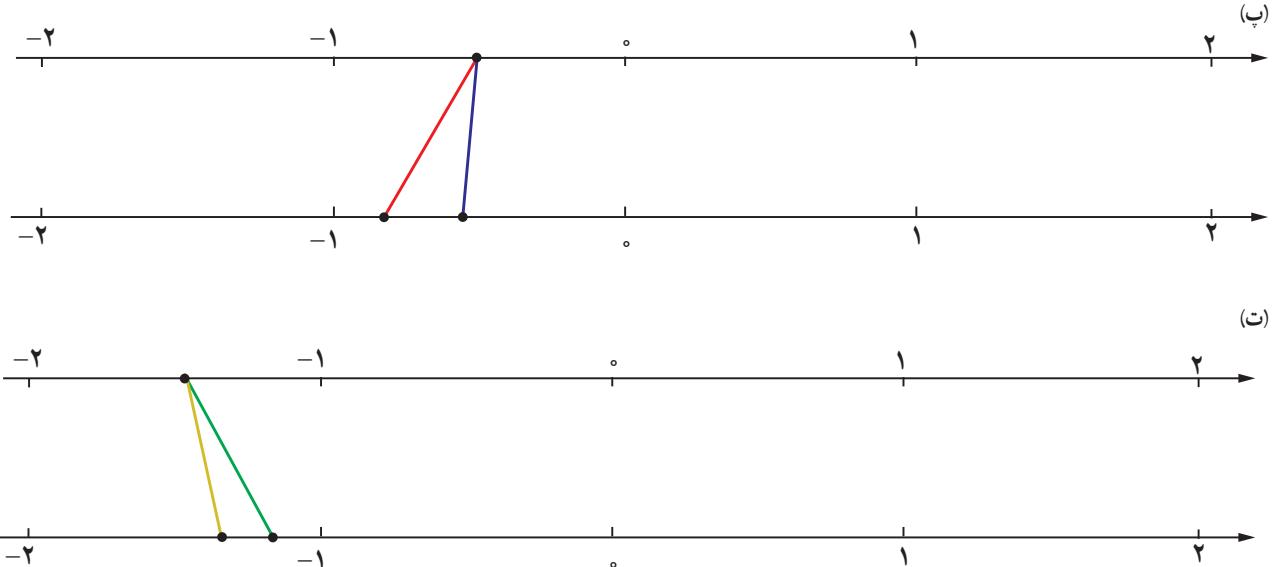
پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ریشه های چهارم عدد می باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[4]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ را باید.

۷ می دانیم $11 = \sqrt[5]{161051}$ ، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متواتی قرار دارد؟

۸ در جاهای خالی یکی از علامت های «<» ، «>» یا «=» را قرار دهید.

$$(-0/1)^5 \bigcirc (-0/1)^3$$

$$(\pm 1)^5 \bigcirc (\pm 1)^3$$

$$2^5 \bigcirc 2^2$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$$

$$\sqrt[5]{0/00001} \bigcirc 0/1$$

۹ قرار دهید $\square = \sqrt[5]{a}$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید \square برابر چه عددی است؟ بنابراین $\sqrt[5]{a^5} = a$ درباره $\sqrt[4]{a}$ چه می توان گفت؟

خواندنی



خنا - نخستین بزرگاله
شبیه سازی شده خارج میانه



پیانا - نخستین گرسنه
شبیه سازی شده خارج میانه

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت های بدن است. هر بافت سلول های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می تواند به سلول های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول های بدن را دارد. دانشمندان می گویند این سلول ها می توانند امکان معالجه بیماری هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست شناسی و پزشکی است. این سلول ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می شود. پیشرفت در زمینه سلول های بنیادی تنها ممکن بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول های بنیادی پیشرفت های چشمگیری داشته اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می شود.

درس دوم: ریشه n ام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه های پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$		$\sqrt[4]{64} = \pm\sqrt{8}$		$\sqrt[6]{64} = \pm\sqrt[3]{4}$		

ریشه های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ – یا همان و هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$ درباره ریشه های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می توانید بگویید؟
به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه n ام عدد ۶۴ چه می توان گفت؟
در حالت کلی تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه های n ام a چه می توان گفت؟

۲ جدول زیر را که درباره ریشه های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد		$\sqrt[6]{-64}$		

ریشه های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان برسد و مساوی ۶۴- شود.
درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه n ام a چه می توان گفت؟

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم. هرگاه :

$a > 0$	n زوج	دارای دو ریشهٔ a و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	$\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد		$a =$ $n =$	
$a < 0$	n زوج	ریشهٔ a وجود ندارد	$a =$ $n =$	
	n فرد		$a =$ $n =$	

کار در کلاس

۱) حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt[3]{125} =$$

$$\sqrt[5]{-32} =$$

$$\sqrt[7]{128} =$$

$$\sqrt[8]{256} =$$

$$\sqrt[9]{-1} =$$

$$\sqrt[4]{625} =$$

$$\sqrt[4]{16} =$$

$$\sqrt[5]{-1} =$$

$$\sqrt[7]{-128} =$$

$$\sqrt[9]{-0/001} =$$

$$\sqrt[7]{1} =$$

$$\sqrt[6]{0} =$$

۲) (الف) می‌دانید که $\sqrt[x^4]{x^4}$ دربارهٔ چه حدسی می‌زند؟ درستی حدس خود را دربارهٔ چند عدد آزمایش کنید.

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3$$

$$\sqrt[5]{35} = 3$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$$

$$\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = 2$$

پ) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = \dots$ ؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = \dots$

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

ث) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟

فعالیت

در سال نهم دیدید که :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} : b$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} : b$$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید.

با توجه به اینکه $\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots$ باشد.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{\dots} = 6$$

در باره $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ مثلی از a و b مثبت و مثلی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است. به طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & \text{زوج } n, a, b > 0 \\ \sqrt[n]{ab} & \text{دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد } a, b \end{cases}$$

قرارداد : به طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عده‌های منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه \sqrt{x} نوشته‌یم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $\sqrt[3]{2^5}$ و $\sqrt[3]{2^5}$ با هم برابرند؟ در باره $\sqrt[3]{(-2)^4}$ و $\sqrt[3]{(-2)^4}$ چه می‌توان گفت؟

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2})^3 &= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \end{aligned}$$

۳ درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به a و m, k بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	زوج n	$a > 0$	$n = 4$ $a = 2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ $(2 = 2)$
		$a < 0$	$n = 4$ $a = -2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ $(2 = -2)$
	فرد n	$a > 0$	$n = 3$ $a = 2$	$\sqrt[3]{2^3} =$ (\quad)
		$a < 0$	$n = 3$ $a = -2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} =$ (\quad)

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج n	$a > 0$	$n = 4$ $a = 16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		$a < 0$	$n = 4$ $a = -16$	تعريف نشده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
	فرد n	$a > 0$	$n = 3$ $a = 8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 =$
		$a < 0$	$n = 3$ $a = -8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 =$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

تمرین

۱) الف) یکی از علامت های $\langle \rangle$ یا در \square قرار دهید.

$$(0/5)^2 \quad \square \quad (0/5)^3$$

$$\sqrt{0/25} \quad \square \quad \sqrt[3]{0/125}$$

ب) وقتی $a < 0$ است، یکی از علامت های مقایسه را در \square قرار دهید.

$$a^4 \quad \square \quad a^3$$

$$\sqrt{a} \quad \square \quad \sqrt[3]{a}$$

۲) فرض کنیم $a = -1$ است، در \square علامت مناسب را قرار دهید.

$$\sqrt[n]{a} \quad \square \quad \sqrt[5]{a}$$

$$\sqrt[5]{a} \quad \square \quad \sqrt[10]{a}$$

$$a^4 \quad \square \quad a^5$$

$$a^3 \quad \square \quad a^5$$

۳) با توجه به تعریف ریشه (اگر $b^n = a$ آنگاه $\sqrt[n]{a} = b$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴) آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ $n=3, 4, 5$ یا $n=2$ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵) عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{3^{-5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{125}} = \sqrt[4]{3^{-4}} =$$

۶) به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که :

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت اند).

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت



پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت 2^n برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت 2^1 گرم، پس از 2^2 ساعت برابر 4^1 گرم، و پس از ساعت n برابر 2^n گرم می‌شود:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش پرسید: «آیا حتماً نا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟
محمد گفت: حدس می‌زنم وزن آنها $\frac{1}{2}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.
پدرش گفت: $\frac{1}{2}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.
اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $2^1 = \sqrt{2}$ ؛ یعنی $\sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ، $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$ ؛ همچنین برای عدددهای دیگر $\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$. می‌توانیم نمایهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < 0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $\frac{1}{(-2)^{\frac{1}{4}}}$ و $\frac{1}{(3)^{\frac{1}{2}}}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱) توان های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3^{\frac{1}{2}} =$$

$$4^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{1}{5^7} =$$

$$\frac{1}{5^2} =$$

$$\frac{1}{(-3)^5} =$$

$$6^{\frac{1}{4}} =$$

$$81^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{1}{(-5)^4} =$$

۲) کدام درست است؟

$$(a) (-32)^{\frac{1}{5}} = -2$$

$$(b) \sqrt[5]{-32} = -2$$

فعالیت

حاصل a^m که $a > 0$ و m دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

(قاعده ضرب توان)

در مورد توان های گویا هم می توانیم به طریق مشابه عمل کنیم :

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2 \times 1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$5^{\frac{8}{3}} = 5^{\frac{8 \times 1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی :

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای

چنین تعریف می کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$(p) \frac{3}{2}$$

$$(b) \frac{2}{3}$$

$$(f) \frac{5}{5}$$

$$(g) \frac{2}{(-3)^3}$$

$$(h) \frac{1}{16^4}$$

$$(t) \frac{2}{(-6)^7}$$

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > 0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح

برقرار بوده و داریم :

$$1) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$2) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3) (ab)^r = a^r \times b^r$$

باکتری ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حد اکثر رشد خود می رساند و می توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری ها دو برابر می شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می آید. اگر این روش تکثیر باکتری ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده ای از باکتری ها به وزن ۲۰۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملاً چنین اتفاقی نمی افتاد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهد بود. اگرچه بعضی از باکتری ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری ها مفیدند. باکتری ها در تهیه فراورده های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری ها در پاکسازی آبها و خاک های آلوده به آلاینده های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم های آبی و خشکی) دارند. مهم ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری ها صورت می گیرد.

۱) تساوی های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[4]{5} =$$

$$\sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{2} =$$

$$\sqrt[4]{5} =$$

$$(4 \times 2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\sqrt[5]{3} =$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} =$$

$$\sqrt[6]{3} =$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} =$$

۲) رادیکال ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{4^5} =$$

$$\sqrt[3]{7^2} =$$

$$\sqrt[3]{-1} =$$

$$\sqrt[5]{19} =$$

$$\sqrt[5]{64} =$$

$$\sqrt[3]{-27} =$$

$$\sqrt[5]{25} =$$

۳) جدول های زیر را کامل کنید:

$a > 0$	a^3	a^{-3}	a°	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = 5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	\dots	\dots	\dots

$a < 0$	a^3	a^{-3}	a°	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{4}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a = -5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	\dots	تعريف نمی شود	$(-5)^{\frac{4}{3}} = 25$	\dots

فعالیت

۱) با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \dots$$

۲) دیبر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[3]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توان ها را مانند توان های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دیبر: این کار را انجام می دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده ام. ما حق نداریم بنویسیم $\sqrt[4]{(-3)^4}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دیبر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

دبير: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانند، همان‌گونه که قبلاً گفتم چون $4^{\text{ عددی زوج}} \rightarrow \text{کمی زیر نیز استفاده کنید.}$

$$\sqrt[3]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

$$(5^2)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = = = 5^{\frac{1 \times 1}{2 \times 3}}$$

الف)

$$(4^7)^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4} = \frac{1}{4^{35}} = \frac{1 \times 1}{4^5 \times 7}$$

ب)

پ) اکنون برای هر عدد $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ را برای $r = \frac{1}{4}$ و $s = \frac{1}{2}$ تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{2}} = = a^{\frac{1 \times 1}{4 \times 2}}$$

تمرین

۱) هر یک از توانهای کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{16^2} & \frac{1}{3^3} \times \frac{2}{3^3} = & \frac{1}{5^2} = & \frac{3}{4^7} = & \left(\frac{1}{4^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \\ a^{\frac{2}{7}} = & & \frac{1}{3^2} = & \frac{2}{4^3} = & \\ \frac{-1}{3^2 \cdot 5} = & & \frac{2}{3^2 \cdot 5} = & \frac{-1}{17^{\frac{1}{2}}} = & \end{array}$$

۲) هر یک از رادیکال‌ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} & \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}} = & \sqrt[7]{a} = \\ \sqrt[5]{a^3} = & \sqrt[9]{a^2} = & \sqrt[5]{2^1} = \end{array}$$

می‌دانیم

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad \sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m و k طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt[4]{2^2}$ ، $\sqrt[4]{2^3}$ و $\sqrt[4]{2^4}$ برابرند.

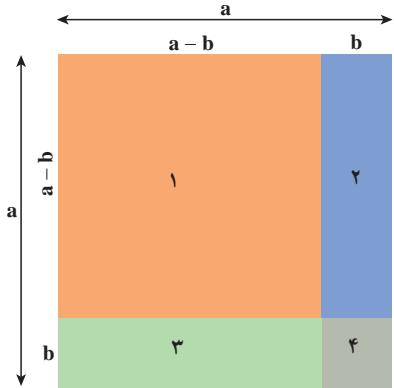
۳) فرض کیم $a = 64$ ، $s = \frac{1}{3}$ و $r = \frac{1}{2}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r ، s و k انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\sqrt{81}} =$$

درس چهارم: عبارت های جبری



فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده اید. می توانید بگویید چرا به تساوی $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اتحاد گفته می شود؟

در حقیقت می توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $b=\frac{1}{5}a$ و $a=5$ اختیار شود.

$$\begin{aligned} S_1 &= (a-b)^2 \\ S_1 &= S - S_2 - S_3 - S_4 \\ &= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (1) \Rightarrow (2) \text{ و } (1) &\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$(\frac{1}{5} + \frac{1}{5})^2 = (\frac{1}{5})^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5}^2$$

$$(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (1) به جای a ، b - قرار دهیم، به دست می اوریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (1) و (2) را با هم می نویسیم :

(3)

اکنون شما می توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱ با محاسبه $(a+b)^2$ اتحاد دیگری به دست می آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (\dots \dots \dots) (a+b) = \dots \dots \dots$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می آید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

می توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم :

$$(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + 2a(-b) + (-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - \dots \dots \dots + \dots \dots \dots - b^2$$

۲) یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$ محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \\ = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$$

۳) اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$ (۴)

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2bc + 2ca$$

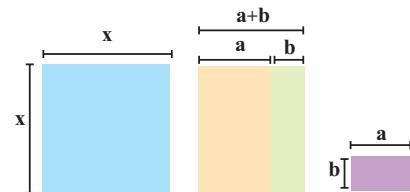
$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال ۱

عبارت $2x^3 + 3x^2 + x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

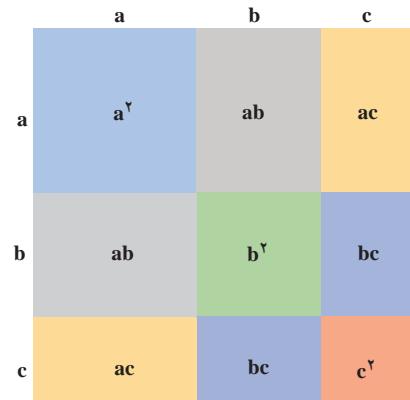
$$2x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^3 + 2x^2 + x^2 + x + 1 \\ = (x+1)x^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x^2 + x + 1) = (x+1)(2x+1)$$



مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3$ را تجزیه کنید :

$$a^3 - 2ab + a^2b - 2b^3 = a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a^2 + b)(a^2 - 2b)$$



کار در کلاس

۱) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \dots$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$$

۲) با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

$$x^3 - 125 =$$

$$x^6 - 1 =$$

فعالیت

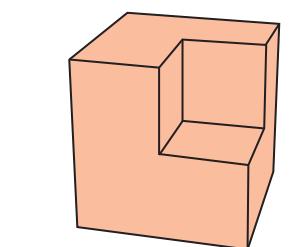
واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به خاطر دارید :

$$A^3 - B^3$$

$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵،

مشابه این در اتحاد مزدوج



$$a^3 - b^3 = (a-b)(a+b)$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده $a^3 - b^3$ است. همچنین $a^3 - b^3$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند :

..... و $(a+b)(a-b)$ و $(a+b)(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و $a+b$: بعضی از مضرب‌های $a+b$

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که شمارنده هر یک از آنها باشد.

۳ عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هایست؟

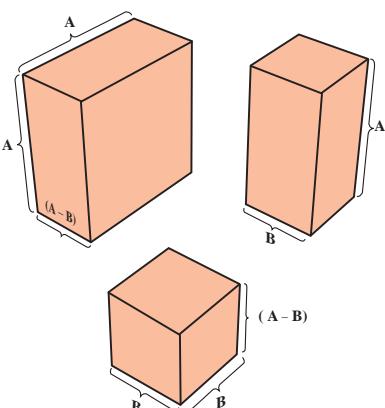
ب) $9a^2 + 3a + 1$

ب) $3a - 1$

الف) $a - 1$

ت) $3a + 1$

نکته: عبارت $\sqrt{3}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.



۴ کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟

$$\sqrt[3]{x^2} + x - 1 \quad \text{ت)$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 \quad \text{ب)}$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{3x - \sqrt{7}}{x^2} \quad \text{ج)$$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۶ حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} \quad \text{الف)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} \quad \text{ب)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \dots \dots \dots$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} = \dots \dots \dots$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

$$\text{الف) } \frac{x^5 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$$

$$\text{پ) } \frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$$

$$\text{ت) } \frac{y^4 - y}{y^3 + y^2 + y}$$

$$\text{ث) } \frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^3 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 + 3)}{8y(y+2)} = \dots \dots$$

در اتحاد ۲

$$a^r + 1 = (a+1)(a^{r-1} - a^{r-2} + \dots + 1)$$

قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1) ()$$

$$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1) ()$$

بررسی مخرج کسرهای جزئی

۳ گویا کردن مخرج های گنگ : صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت هایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (x \neq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

تمرین

۱ هر یک از عبارت ها را تا حد ممکن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

ب) $x^3 + y^3$

ب) $x^3 - y^3$

الف) $x^6 - y^6$

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1} \quad \text{ت)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \quad \text{الف)}$$

۳ بعضی از ضرب های عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب ها را ذهنی انجام دهید.

$$\text{الف) } 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

ب) 105^2

ب) 1007^2

ت) 99^2

۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید.

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه تایی فیثاغورسی می نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه تایی ها را می توانند شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می دهد :

$$(1/\circ 1)^{365} = 37/8$$

$$(\circ/99)^{365} = \circ/\circ 3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/\circ 1)^{73}$ و $(\circ/99)^{73}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

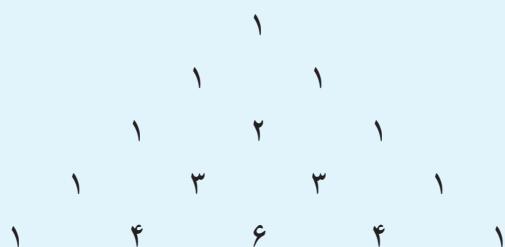
شما هم داستانی در باب توان ها بنویسید.

* (مثلث خیام)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ می‌توانید توان چهارم دو جمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (\quad) (a+b)$$

=

۲۶

معادله‌ها و نامعادله‌ها

سد دز، خوزستان



سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

درس اول
معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درس دوم

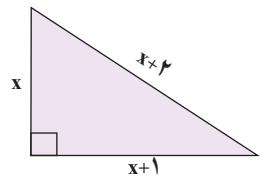
سهمی

درس سوم
تعیین علامت

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی بی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متواالی ۴، ۳ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟). از خواهر بزرگ تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متواالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متواالی بعد از x ، یعنی $x+1$ و $x+2$ در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$



اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل $= 0 - 2x - 3 = 0$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

فعالیت

می‌دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله درجه دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌انداز:

(۱) فاکتورگیری:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - \dots) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

۲ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - \dots) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \text{ یا } x - \dots = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \dots$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = ?$$

$$1 + 2 - 3 = ?$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = \dots$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\dots = ?$$

$$\dots = ?$$

$$\dots = 0 \quad \square$$

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اصلاح مثلث قائم الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$$3t^2 - t = 0$$

$$(الف) x^2 - 3x = 10$$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادله درجه دوم $x^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

۲ از دو طرف معادله $x^2 = 25$ ، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x = \pm 5$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

۳ اگر $a = x^2$ یک معادله درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت $x = \pm \sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

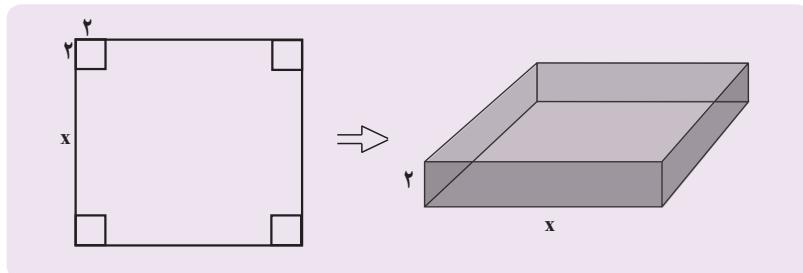
اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله

درجه دوم $a = x^2$ عبارت اند از :

$$x = -\sqrt{a} \text{ و } x = \sqrt{a}$$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تازدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = (x)(x)(2) = 2x^3$$

درس اول: معادله درجه دوم روش مربع کامل

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $2x^3 = 200$. بنابراین $x^3 = \dots$ و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های $\dots = x$ به دست می آید. و چون طول نمی تواند منفی باشد، تنها $\dots = x$ مورد قبول است و طول ضلع مریع اولیه $x + \dots = \dots = \dots$ سانتی متر است.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادله های زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

$$(a) x^3 - 27 = 0 \quad (b) t^3 + 7 = 0 \quad (c) 5x^3 = 20$$

.....
.....
.....
.....
.....

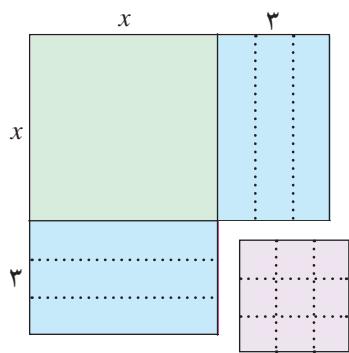
حل معادله درجه دوم به روش مریع کامل

فعالیت

- ۱) دو جمله ای $x^3 + 6x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله ای اضافه شود تا چند جمله ای حاصل به شکل مریع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

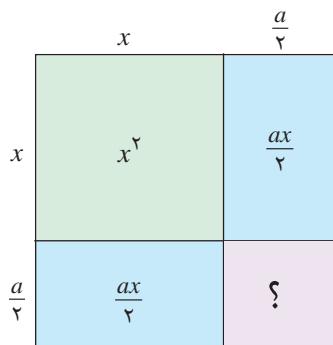
$$x^3 + 6x + \dots = (x + \dots)^3$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید، چه ارتباطی با شکل رو به رو دارند؟



- ۲) اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله ای $x^3 + ax$ چه جمله ای باید اضافه شود تا به شکل مریع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$x^3 + ax + \dots = (x + \dots)^3$$



مثال

معادله $x^3 - 6x + 4 = 0$ را به روش مریع کامل حل می کنیم.

معادله درجه دوم

به دو طرف معادله، -4 را اضافه کرده ایم

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مریع کامل شود

سمت چپ را به شکل مریع کامل می نویسیم

از دو طرف معادله، ریشه دوم می گیریم

به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده ایم

بنابراین جواب ها یا ریشه های این معادله عبارت اند از $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$

کار در کلاس

معادله های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$2r^2 + r - 2 = 0$$

$$n^2 - 4n + 5 = 0$$

$$t^2 + 3t = 3$$

$$x^2 + 2x = 24$$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش های قبل، روش هایی برای حل معادله های درجه دوم فرا گرفته اید. اکنون می خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش آموز : آیا با روش مربع کامل می توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟
معلم : بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می دهیم :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می کنیم

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به دو طرف معادله، ... را اضافه کرده ایم

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \dots = -\frac{c}{a} + \dots$$

به دو طرف معادله، ... را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را ساده کرده ایم

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{؛ پس : } (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

آیا می توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب های آن را به دست آورید؟

دانش آموز : اگر $\Delta > 0$ باشد، از سمت راست نمی توان ریشه دوم گرفت.

معلم : آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه ای ندارد. اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا می توانید ریشه های این معادله را به دست آورید؟

دانش آموز : بله. کافی است از دو طرف معادله $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ریشه دوم بگیریم :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش آموز: اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟
معلم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

دانش آموز: پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

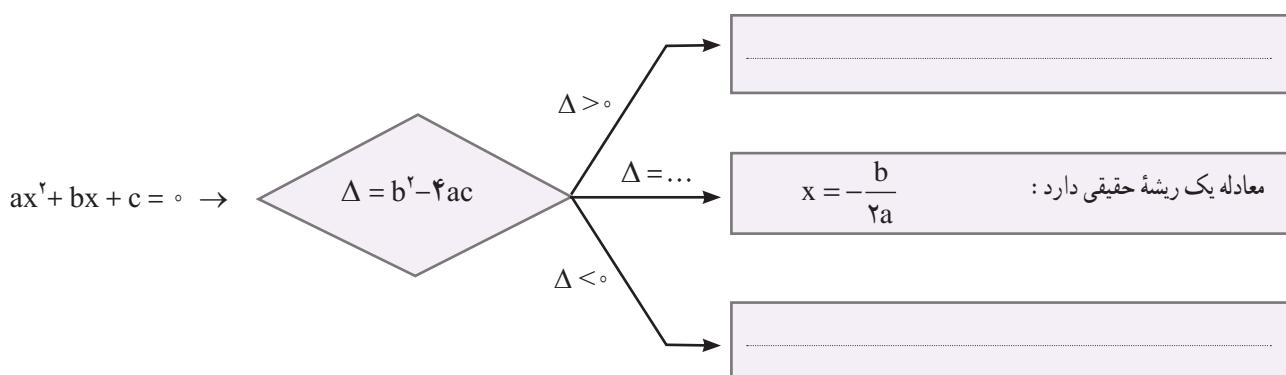
معلم: این ریشه از معادله $(x + \frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$ به دست آمده است و چون

هر دو معادله $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه

مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.



شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

مثال

از یک رشته سیم به طول 5 متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت 144 متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

 s  t

حل : اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن 5 متر است، پس $2(s+t) = 5$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t = 2.5$ می رسیم؛ بنابراین $s+t = 2.5$.

از سوی دیگر $st = 144$. با جایگذاری t بر حسب s در این معادله به شکل $s(2.5-s) = 144$ می رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم $s^2 - 2.5s + 144 = 0$ به دست می آید.

در این معادله $a = 1$, $b = -2.5$, $c = 144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2.5)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می آید :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2.5 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2.5 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

و چون $s = t$, پس برای t نیز دو جواب به دست می آید :

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 2.5 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 2.5 - 9 = 16 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع 9 و 6 سانتی متر به دست می آید.

تمرین

۱) معادله های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$1) x^2 - 11x = -1$$

$$2) 5t^2 = 2$$

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a-2)$$

$$4) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

۲) هر یک از معادله های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$1) n^2 - 2 = 26$$

$$2) x^2 + 12 = 3$$

$$3) (3t-2)^2 = 4$$

$$4) 3 - 3k = 3k(2k-1)$$

۳) معادله های زیر را به روش مریع کامل حل کنید.

$$1) x^2 - 6x = 7$$

$$2) s^2 - 3s + 3 = 0$$

$$3) r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$4) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

۴) هر یک از معادله های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$1) 4x^3 - 13x + 3 = 0$$

$$2) r - r^3 = 3$$

$$3) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$$

$$4) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۵) هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

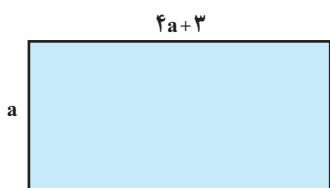
$$1) 2x^2 = 25$$

$$2) 9 - 6z + z^2 = 0$$

$$3) 4a^2 + 2a = 1$$

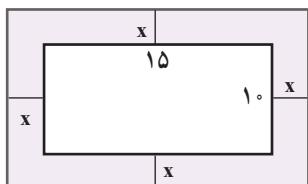
$$4) b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی 29° است. این دو عدد را پیدا کنید.



۷) طول یک مستطیل 3 سانتی متر بیشتر از 4 برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل 45 سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۸) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر 4 سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها 6 شود، سن هر کدام چقدر است؟



۹) یک عکس به اندازه 10 در 15 سانتی متر درون یک قاب با مساحت 300 سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۱۰) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، 45 بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را بدست آورید. اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها بدست آورید.



۱۱) فشار خون نرمال یک شخص مذکور^۱، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.006S^2 - 0.02S + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن S است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن 125 میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید).

۱- منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقه برش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.

مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادله $y=ax^2 + bx + c$ محاسبه شود که در آن a , b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است.



فعالیت

معادله $y = x^2 - 4$ را در نظر بگیرید.

(الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

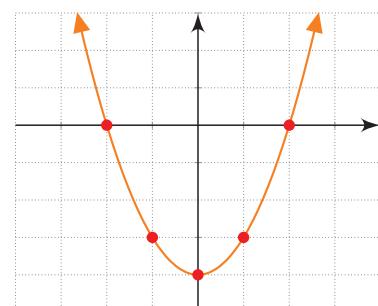
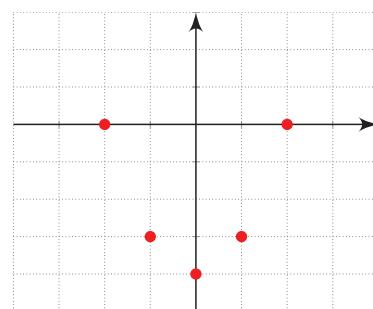
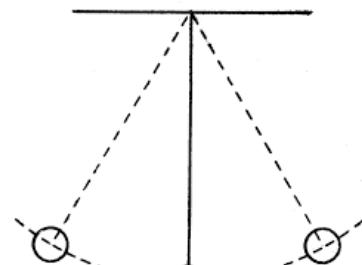
x	$y=x^2-4$	(x,y)
-2	$y=(-2)^2-4=4-4=0$	(-2, 0)
-1
0	$y=(0)^2-4=0-4=-4$	(0, -4)
1
2

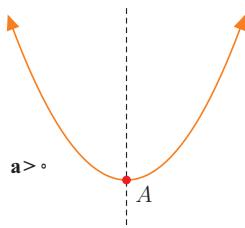
نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های رو به رو).

(ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

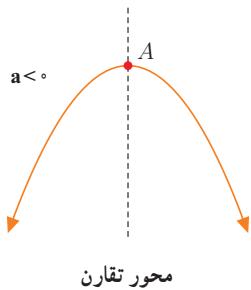
.....
.....
(پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

.....
.....
(ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور x ‌ها در چه نقاطی است؟





نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:



محور تقارن

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

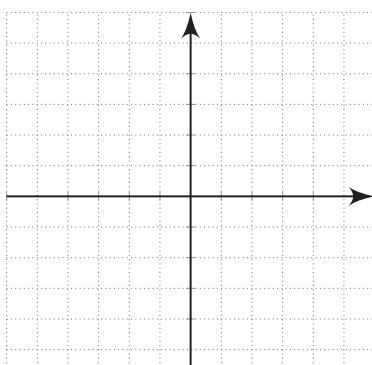
معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x-2)^2 + \dots$$

ب ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x-2=0 \Rightarrow \dots \dots \dots$$



x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x,y)
0
1
2
3
4

پ پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل $y = (x-2)^2 + 1$ به دست آورید؟

هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

ب) $y = -2x^2 + 1$

الف) $y = (x+1)^2 - 2$

فعالیت

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.

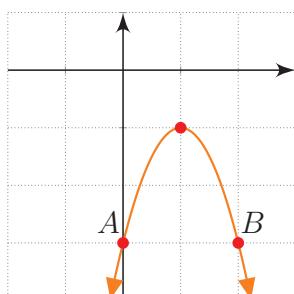
مثال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $c = -3$ ، $a = 2$ و $b = 4$ است. مختصات رأس سهمی را بدست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

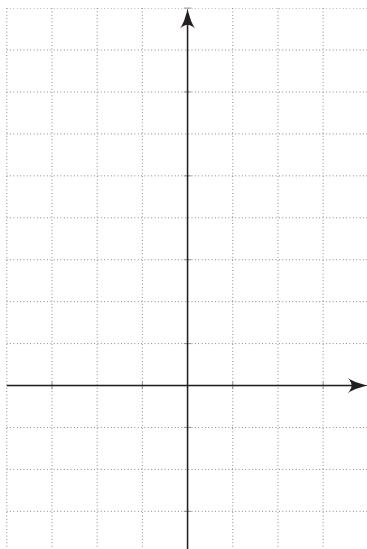


x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x,y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقیق نکنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x=1$ قرینه‌اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی بدست آورید.



معادله دو سهمی به صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه $(1, 0)$ است.

x	$y = 2x^2 + 1$	(x,y)

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x,y)

ب معادله سهمی دیگری را که نقطه A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

پ ضرایب x^2 در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -(x+1)^2 - 3$

ب) $y = 2x^2 - 2$

پ) $y = x - x^2$

ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

۲ اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x را در نقاط به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴ دو پرتاگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتاگر A، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید. پرتاگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر

طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح

زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنهای را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنهای با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنهای مسافت افقی پیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنهای ارتفاع پیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

طفوف سی سخت – کهگیلویه و بویر احمد



درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه $P(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = 5x - 200$	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای x ‌های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

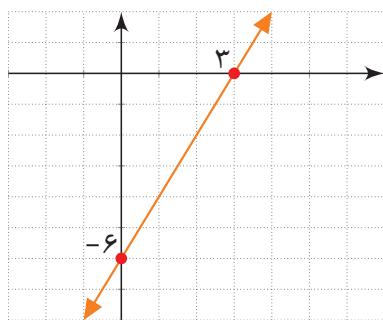
x	$x < 40$	40	$x > 40$
$P(x)$	-	+	+

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

فعالیت

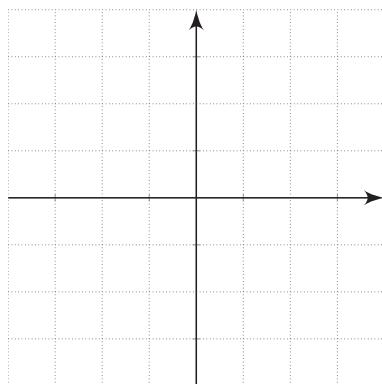
۱ نمودار خط $y = 2x - 6$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.



x	$x < 3$	3	$x > 3$
$y = 2x - 6$	+

- ۲ نمودار خط $y = -2x + 6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای x های مختلف تعیین می کند، کامل کنید.

x	$x < \dots$	\dots	$x > \dots$
$y = -2x + 6$	◦



- ۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

- ۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$ ، برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	موافق علامت a	◦	مخالف علامت a

مثال

عبارت $y = 5x - 2$ را تعیین علامت می کنیم.
ریشه عبارت $5x - 2 = 0$ از معادله $5x - 2 = 0$ به دست می آید که برابر $x = \frac{2}{5}$ است.
با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است :

x	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	◦	+

مقدار y را برای $x = 3$ و $x = -1$ به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

علامت عبارت $(2x-1)(3-x) = A$ را برای x های مختلف تعیین می کنیم.

جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های $x-3$ و $2x-1$ به صورت زیر است :

x	$x < 3$	3	$x > 3$
$3-x$	+	◦	-

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$2x-1$	-	◦	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم :

x	$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	◦	+		+
$3-x$	+		+	◦	-

بنابراین در سه ناحیه بالا که با رنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$ ، عبارت $2x-1$ مثبت است؛ ولی $x-3$ منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x-1)(3-x)$ به صورت زیر است.^۱.

x	$\frac{1}{2}$	3
$2x-1$	-	◦
$3-x$	+	
A	-	◦

دقیق کنید که روی ستون ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x=4$ و $x=0$ به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

کار در کلاس

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$B = (2x-3)^2 \quad \text{ب}$$

$$A = (3x+1)(x-2) \quad \text{الف}$$

$$D = \frac{x-1}{5-2x} \quad \text{ت}$$

$$C = x^3(7-x) \quad \text{پ}$$

۱- از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.

۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجه مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{b}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوییم. ($a \in \mathbb{R}$).

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادله $P(x) = 0$ به شیوهٔ مربع کامل، $(x - x_1)(x - x_2)$ را به شکل رو به رو می‌نویسیم.

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

که در آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به دست می‌آوریم.

فعالیت

- ۱ فرض کنید که معادله $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ دو ریشه متمایز $x_1 < x_2$ داشته و به شکل (۱) تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1	x_2
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$
$(x - x_1)(x - x_2)$
$P(x)$...	مخالف علامت a

- ۲ اگر معادله $P(x) = a(x - x_1)^2$ ریشه مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل (۲) بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1
$(x - x_1)^2$...
$P(x)$...

- ۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$...

- ۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x) = 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

مثال

عبارت $A = 2x^3 - x - 3$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله $A = 0$ را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

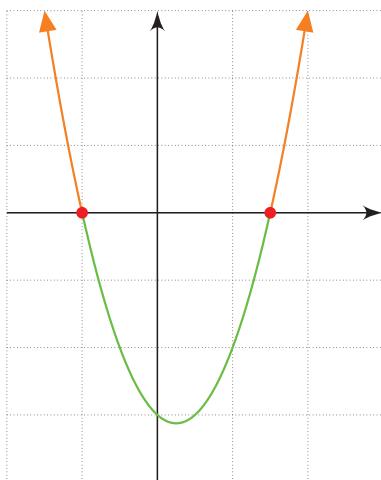
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

پس معادله $A = 0$ دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1$$

با توجه به اینکه $a = 2$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x	-1	$\frac{3}{2}$
$P(x)$	+	○



نمودار سهمی $y = 2x^3 - x - 3$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای x ‌های مختلف تعیین کرد. برای $x < -1$ ، نمودار بالای محور x ‌هاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $x > 1.5$ ، نمودار پایین محور x ‌هاست؛ پس علامت y منفی است.

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هر یک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 1 \end{cases}$$

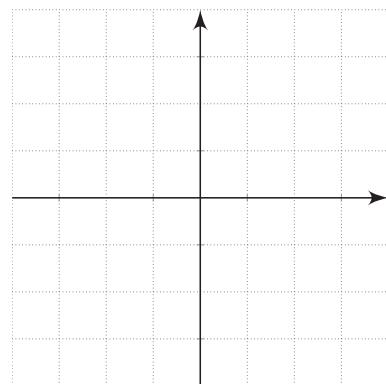
x	-2	○	1	3
x	-	-	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	0
x^2+x-2	+	0	-	0
$P(x)$	-	+	0	-

تعريف نشده

تعريف نشده

کار در کلاس

- ۱) چندجمله‌ای $y = -x^3 + x + 2$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.



- ۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

$$A = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند :

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم :

۱- خاصیت جمع :

برای عبارت‌های جبری A ، B و C ، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$

۲- خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

$$2x - 1 \geq -7$$

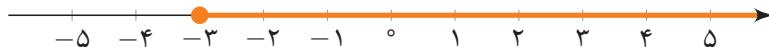
$$2x \geq -6$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$x \geq -3$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -3\}$ که با نماد بازه به

شكل $(-3, +\infty]$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

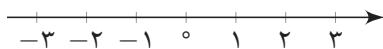


فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$-2 < 3x - 1, \quad 3x - 1 \leq 8$$

- ۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.



$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow \dots \dots \dots$$



$$3x - 1 \leq 8 \Rightarrow \dots \dots \dots$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.

- ۲ می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت $1 - 1 \leq 3x - 2$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

$$-2 < 3x - 1 \leq 8 \quad \text{به دو نامعادله } +1 \text{ را اضافه می‌کنیم.}$$

$$\dots < 3x \leq 9 \quad \text{دو نامعادله را در } \frac{1}{3} \text{ ضرب می‌کنیم.}$$

$$\dots < x \leq \dots$$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

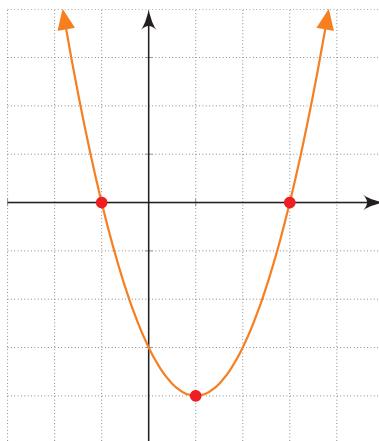
کار در کلاس

حداقل و حداتر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد و رابطه ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی گراد (C) تبدیل می کند، به صورت $(F - 32) = \frac{5}{9}C$ است. حداقل و حداتر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

فعالیت

سهمی $y = 2x^3 - 3$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x ، نمودار سهمی، پایین محور x هاست؟



ب جدول تعیین علامت عبارت $y = 2x^3 - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x ، علامت y منفی است؟

پ نشان دهید که از مجموعه جواب های به دست آمده در هر یک از قسمت های الف و ب می توان برای حل نامعادله $2x^3 - 3 \geq 0$ استفاده کرد.

کار در کلاس

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف $x^4 \leq 4$

$$3x^3 - x - 2 \geq 0$$

مثال

برای چه مقادیری از m ، عبارت $y = x^3 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مقدار

مثبت داشته باشد، باید $a > 0$ و $\Delta = m^2 - 4 < 0$ باشد. در این عبارت، $a = 1$ و $\Delta = m^2 - 4 < 0$ است؛

بنابراین $m^2 < 4$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^2 < 4$ به صورت زیر است:

m	-2	2
$m^2 < 4$	+	0

بنابراین برای اینکه $m^2 < 4$ منفی باشد، باید $m < -2$ و $m > 2$.

مثال

$$\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0 \text{ را حل می کنیم.}$$

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2 - 9}{2x + 1}$ را تعیین علامت می کنیم. برای این کار ریشه های صورت و مخرج این کسر را پیدا می کنیم. ریشه های معادله $x^2 - 9 = 0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشه معادله $2x + 1 = 0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3
$x^2 - 9$	+	0	-
$2x + 1$	-	-	0
$\frac{x^2 - 9}{2x + 1}$	-	0	+

↑
تعريف نشده

بنابراین اگر $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} > 0$ بزرگتر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$.

نامعادله های قدر مطلقی

می دانیم که $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $= 3$ و $= -3$ زیرا فاصله هر دو عدد 3 و -3 از مبدأ برابر 3 است.

فعالیت

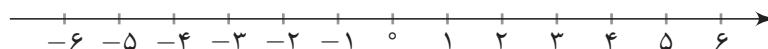
- ۱) نامعادله $3 \leq |x|$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچکتر یا مساوی 3 باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده اید، به صورت بازه بنویسید.

.....

- ۲) نامعادله $3 \geq |x|$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگتر یا مساوی 3 باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده اید، به صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$\begin{cases} |x| \leq 3 \Rightarrow \dots \leq x \leq \dots & \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = \dots \\ |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq \dots \text{ یا } x \leq \dots & \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = \dots \end{cases}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و $\|u\|$ یک عبارت جبری باشد. در این صورت^۱

۱- اگر $-a \leq u \leq a$ سپس $|u| \leq a$.

۲- اگر $u \leq -a$ یا $u \geq a$ سپس $|u| \geq a$.

مثال

نامعادله های زیر را حل می کنیم.

الف $|x - 3| \leq 2$

ب $|2x - 1| > 5$

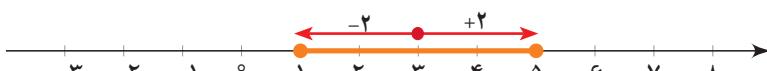
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می کنیم: $2 \leq x - 3 \leq -2$ برای حلقه ای که فاصله آنها از نقطه ۳، حداقل دو باشد. اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



برای حل نامعادله $|x - 3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداقل دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.

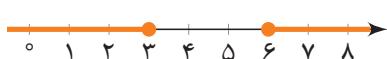


^۱- در هر یک از این نامعادله ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب ها نیز علامت مساوی ندارند.

- ۱ در هریک از نامعادلهای زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

$$\text{الف) } \frac{x}{3} + 1 < 2$$

$$\text{ب) } |5 - 2x| \geq 1$$



- ۲ یک نامعادله قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.

- ۳ یک نامعادله قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.

تمرین

- ۱ در هریک از نامعادلهای زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

$$x(x+4) < 0$$

$$\text{الف) } 1 < 2x - 3 \leq 3$$

$$\text{ج) } \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

$$\text{چ) } |7 - 2x| < 1$$

$$\text{پ) } -2 < \frac{5-x}{2} < 0$$

$$\text{ح) } \left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$$

$$\text{ت) } \frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کارسنجیگان بدنه، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کارسنجیگان بدنه، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

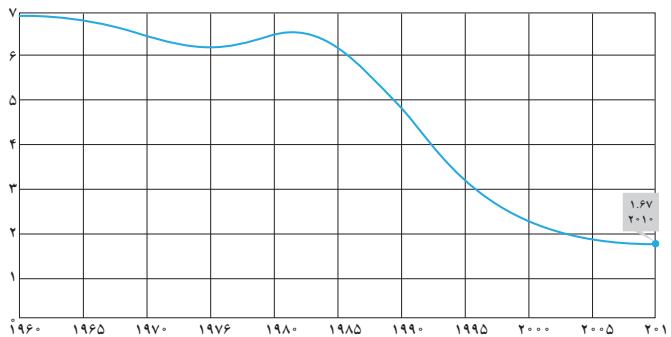


تابع

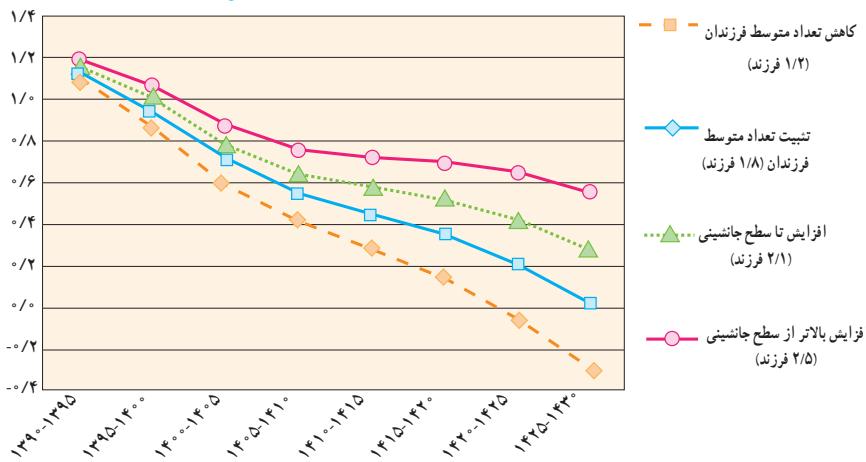


تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمدن شدن می‌باشد. بطوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی پاشد در آن موقع، حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهد داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در بی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج ساله در چهار وضعیت مختلف
تعداد متوسط فرزندان تا ۱۴۳۰ شمسی



درس اول مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

درس دوم دامنه و برد توابع

درس سوم انواع توابع

درس اول: مفهوم قابع و بازنمایی‌های آن

بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

دما بی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می‌شود.

قیمتی که به اجنباس یک فروشگاه نسبت داده می‌شود.

نمره‌هایی که به یک دانش‌آموز در دروس مختلف تعلق می‌گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.



فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.
با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دمara می‌توان به آن نسبت داد.
درباره بقیه جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

به یک ساعت معین فقط یک دمara می‌توان نسبت داد؛ یعنی
یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

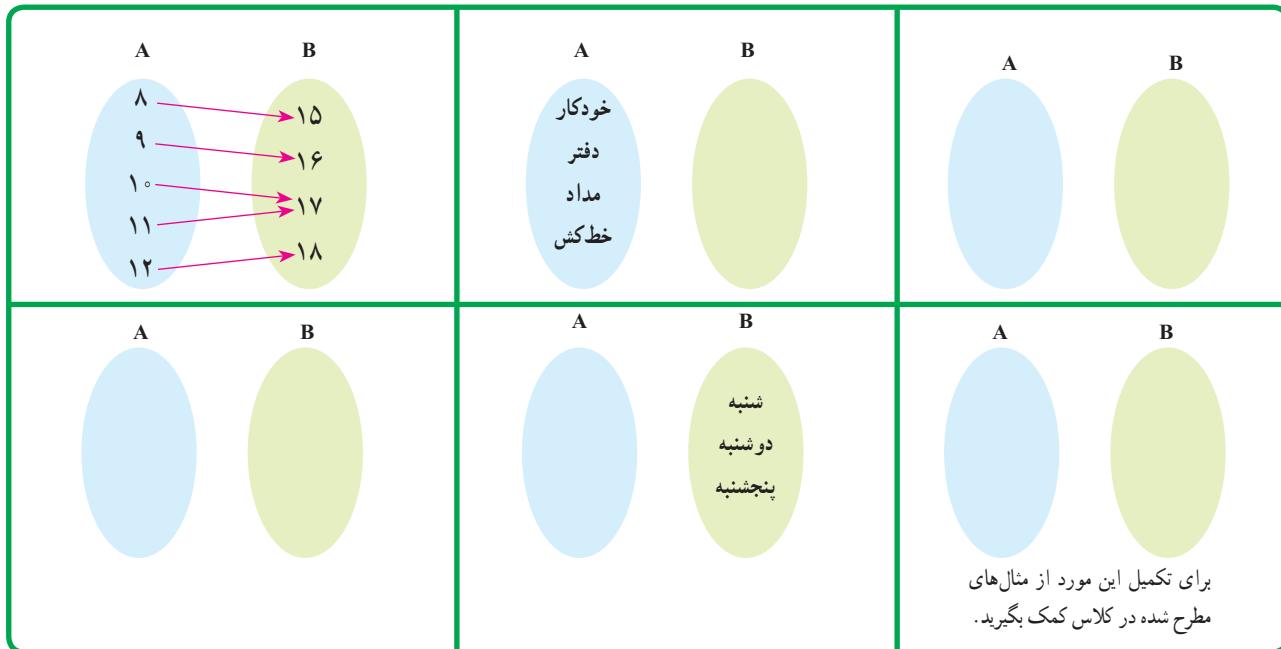
کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش	
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه	

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



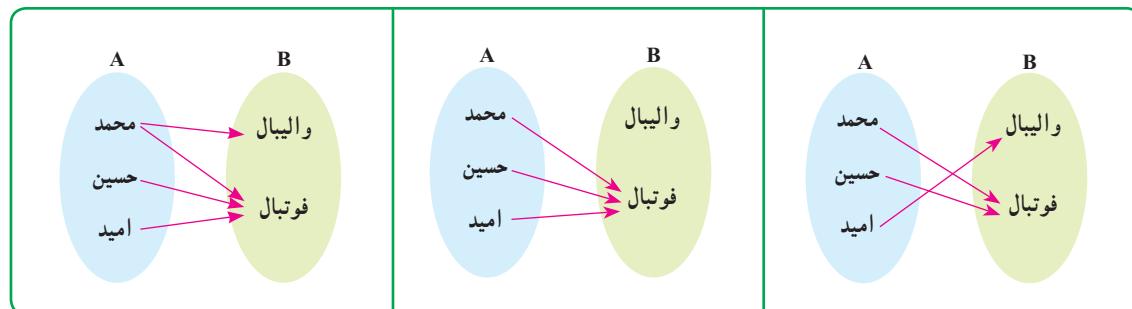
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

کار در کلاس

۱) مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

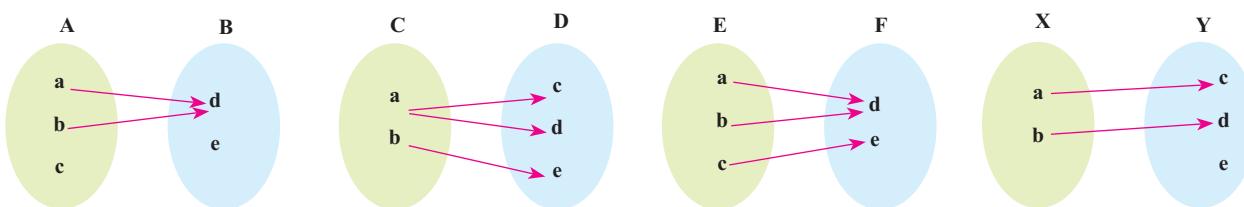


گرسنگی و مفهوم تابع و بازنمایی

۱) از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل بک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.



- ۲) الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.
۳) کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟

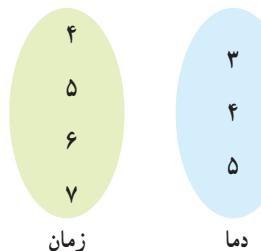
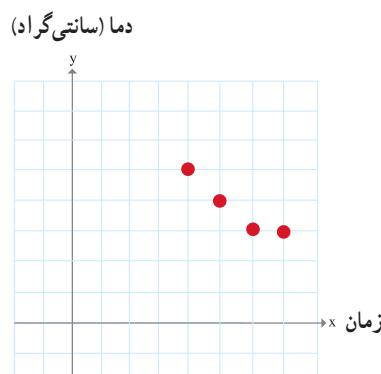


فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.

رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	5	4		

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های $(4, 5)$ و $(4, 5)$ برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا که «**زوج مرتب**» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.
 $f = \{(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2)\}$

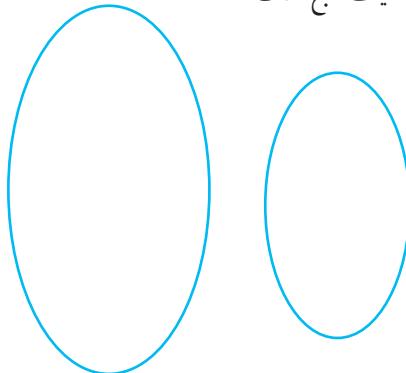
در هر زوج مرتب عضو اول را «**مؤلفه اول**» و عضو دوم را «**مؤلفه دوم**» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب $(3, 6)$ ، مؤلفه اول 6 و مؤلفه دوم 3 است. مجموعه f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمای را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

- ۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت							

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟



درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی

۱ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

توصیف رابطه	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار پیکانی	جدول یا نمودار
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$		
	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$		
به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.			

۲ الف) کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$$

$$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$$

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن



۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

- الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.
- ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.
- ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.
- د) رابطه‌ای که به هر دانشآموز، دوستان او را نسبت می دهد.
- ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می دهد.
- و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

۲ مجموعه‌های زیر یک تابع است.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2,1), (3,-5), (3,7)\}$$

$$h = \{(2,3), (3,2), (1,1)\}$$

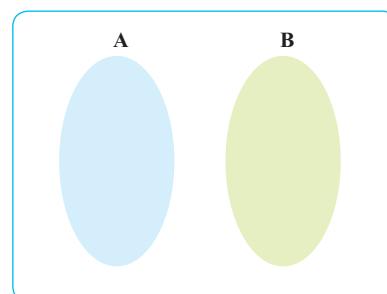
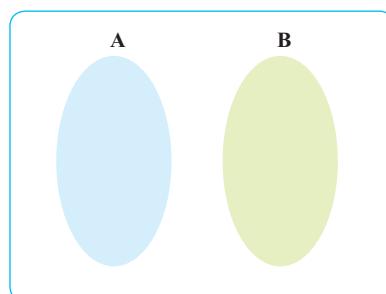
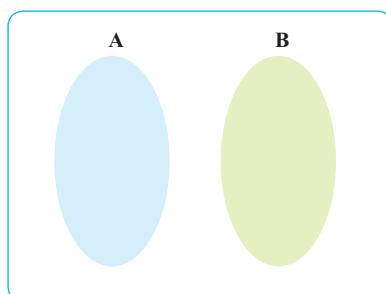
$$r = \{(2,0), (-7,0)\}$$

$$g = \left\{ \left(\frac{1}{5}, 1 \right), \left(-5, 1 \right), \left(8, 1 \right) \right\}$$

$$k = \{(2,5)\}$$

$$l = \{(1,2), (2,4), (3,6), \dots\}$$

۴ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لاقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	۱۸۰°			

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(\text{مثلث}, 180^\circ), (\text{مربع}, 360^\circ), (\text{لوزی}, 360^\circ), (\text{پنج ضلعی}, 540^\circ)\}$$

چرا f یک تابع است؟

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده هر تابع را **(دامنه)** و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را **(برد)** آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا :

$$\begin{aligned} &\{(\text{پنج ضلعی}, 540^\circ), (\text{لوزی}, 360^\circ), (\text{مربع}, 360^\circ), (\text{مثلث}, 180^\circ)\} \\ &= \{(\text{پنج ضلعی}, 540^\circ), (\text{لوزی}, 360^\circ), (\text{مربع}, 360^\circ), (\text{ مثلث}, 180^\circ)\} \end{aligned}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲		
محیط	۲	۴				۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۲ (الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

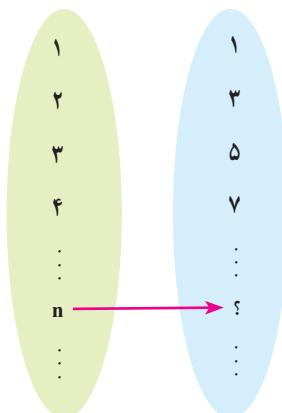
فعالیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳						



چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع:

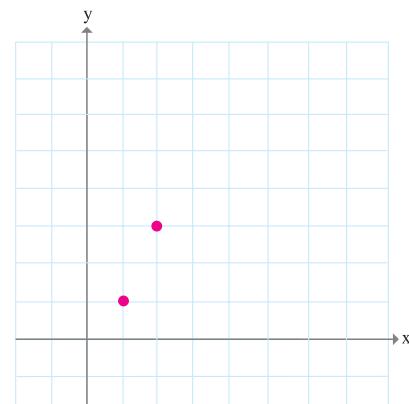
$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots, (n, \dots)\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً^۱ می‌نویسند $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=5$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

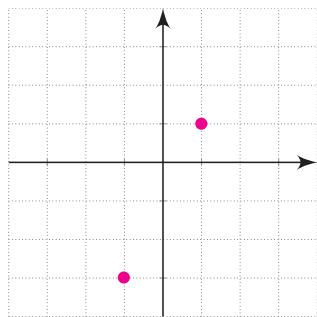


رابطه بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

کار در کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n)=n^3+1$ داده شده باشد و دامنه آن $A=\{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	1	2	3	-1	0		
y	1	3	5	-3			

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

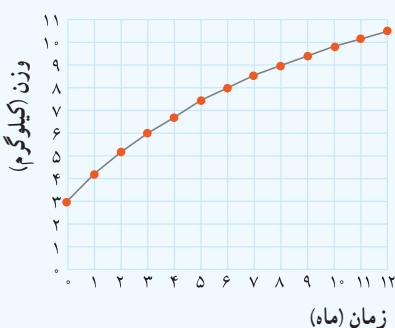
نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = \quad g(0) = \quad g\left(\frac{2}{7}\right) = \quad g(\sqrt{5}) = \quad g(1^{\circ}) =$$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. در اینجا x یک عدد است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

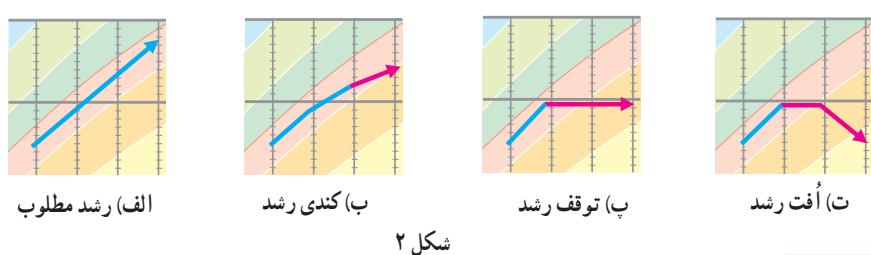
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد.^۱ وزن یک کودک تابعی از زمان است.



شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

هنگامی که پژوهشکان می‌خواهند درباره رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخدده که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲

فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که آن را پژوهش (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟

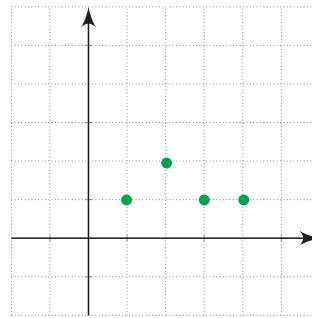
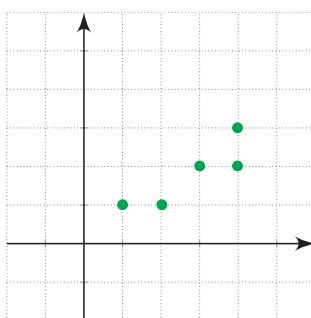
پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماهها اندازه گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده اید، می توانید وزن او را در فاصله بین ماهها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می دهند؟ توضیح دهید.



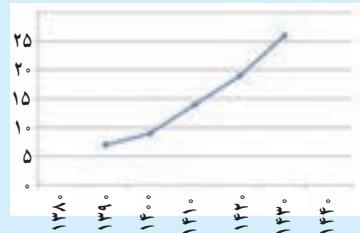
می توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می شود، به دست آورید.

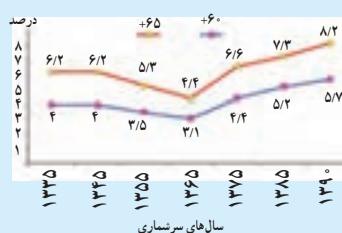
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرضها، نمودار را حداقل در قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالماندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می رسند. منظور از سالماندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت ثبت وضعيت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالماندی ۸٪ جزء جوان ترین کشورها بوده است. نتایج پیش بینی های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات جمجمیت ایران تا سال ۱۰۰۰ آینده نشان می دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

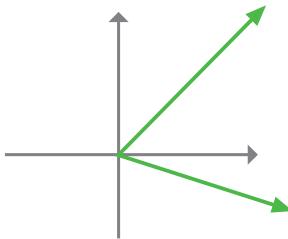
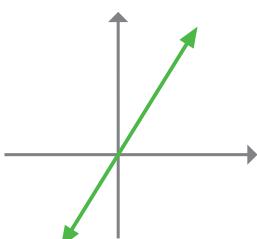
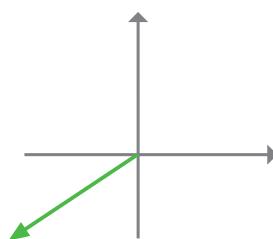
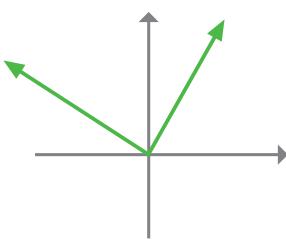
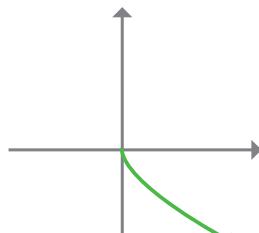
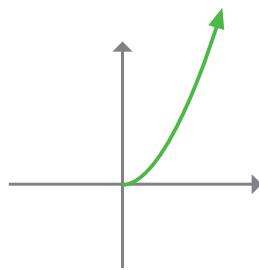
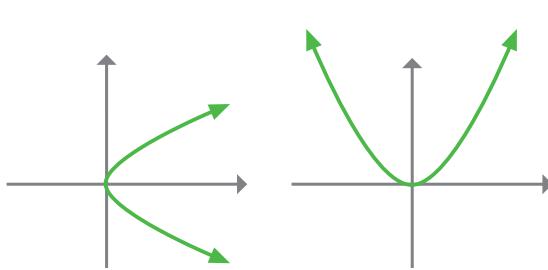
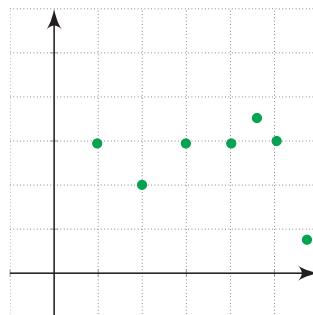
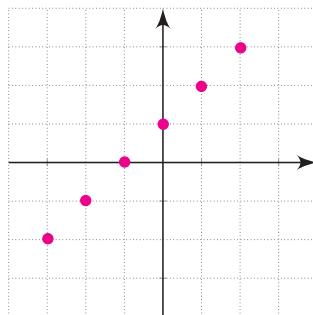
نمودار پیش بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



نسبت جمعیت سالماند ایران در طی سال های سرشماری



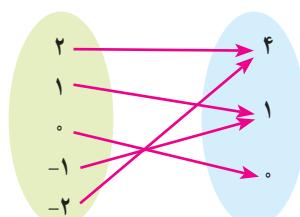
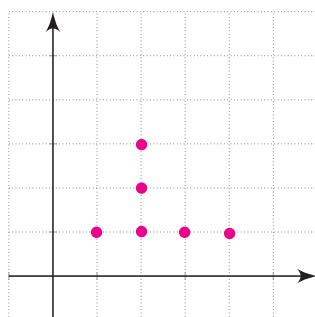
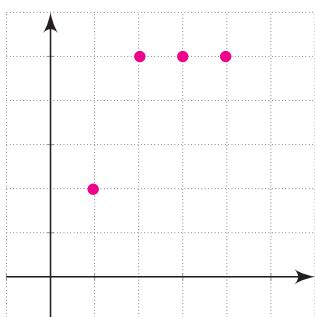
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



تمرین

۱ کدام یک تابع است؟

دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

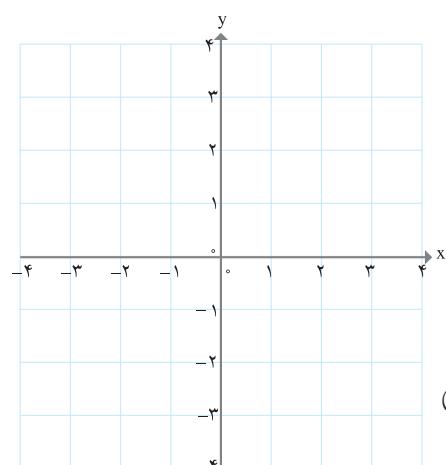
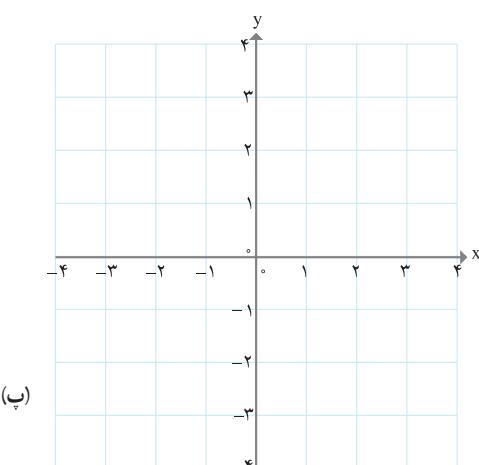
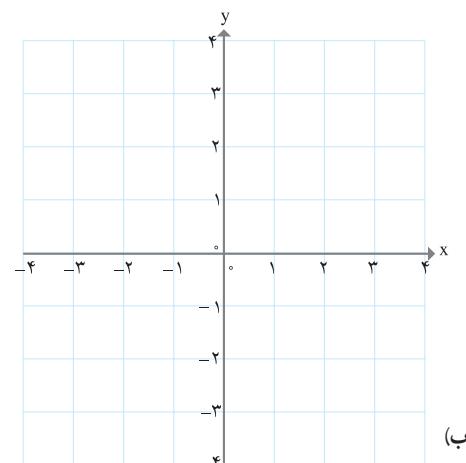
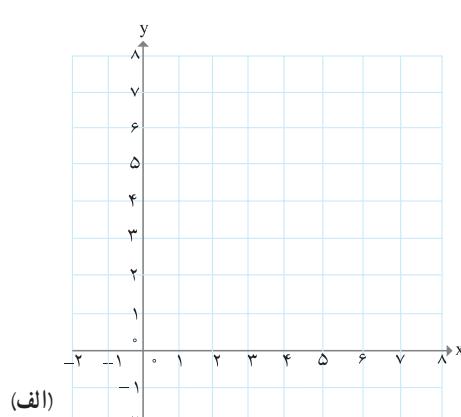
(الف)

(ب)

(پ)

(ت)

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	؟	مجموعه اعداد حقیقی	؟	؟



فرصت‌گیری‌های مختلف و نویسندگان

۱) یک شمع 2° سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت 4 سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

نمودار این تابع را رسم کنید.

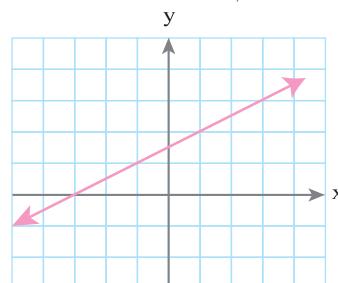
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۲) آیا خط $y = 5x$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5x$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۳) نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[5, -3]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟

۴) نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟



۵) جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های مختلف زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق 10° کیلومتری زیرزمین است، بیابید.

۶) الف) تابع $f(x) = -3x$ را رسم کنید و مقادیر $(2)f$ و $(1)f$ و $(0)f$ و $(-\sqrt{5})f$ و $(-\frac{3}{4})f$ را به دست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

۱۱ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع رارسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۱۲ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۳ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت $1/\text{دیگر}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

(الف) $f(t) = t - 1$

(ب) $f(t) = 1/t$

(پ) $f(t) = t + 1$

(ت) $f(t) = 1/t - 1$

۱۴ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(-2) = 3, g(0) = 5, g(1) = 2, g(2) = \frac{1}{3}$ ؛ $g(4) = 3$ ؛ g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن رارسم کنید.

۱۵ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) -2°C درجه سانتی‌گراد، چند درجه فارنهایت است؟

ب) 40°F درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را بحسب فارنهایت به دست دهد.

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۶ طول یک مستطیل 3 واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۷ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۸ نمودار تابعی رارسم کنید که دامنه آن $[1, 2]^{\circ}$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توانرسم کرد؟

درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۲/۵		x
مساحت آن	۰/۰۱				۱۶		۱۴۴

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵		r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π				

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از $f(x) = \dots$ است و به صورت $\dots = \dots$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از $g(r) = \dots$ است و به صورت $\dots = \dots$ قابل نمایش است.

چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را تابع درجه دوم می‌نامیم.

حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید :

$$V(r) = \dots$$

تابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، تابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

تابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند :

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 1$$

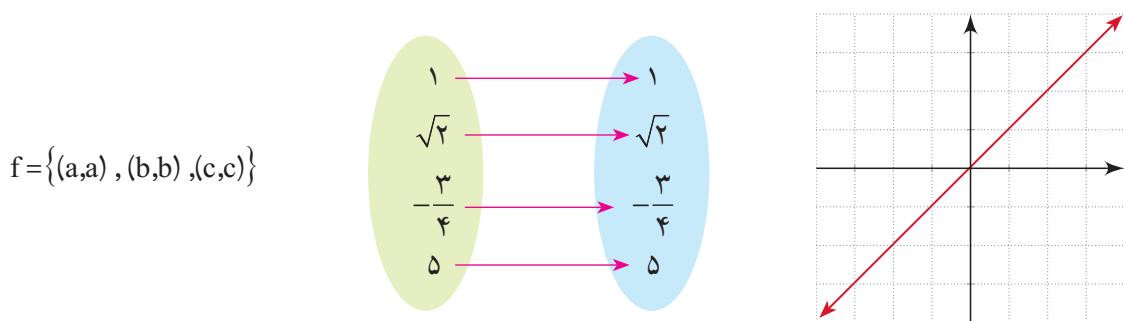
$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت $1 + 2x^3 + 5x$ نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

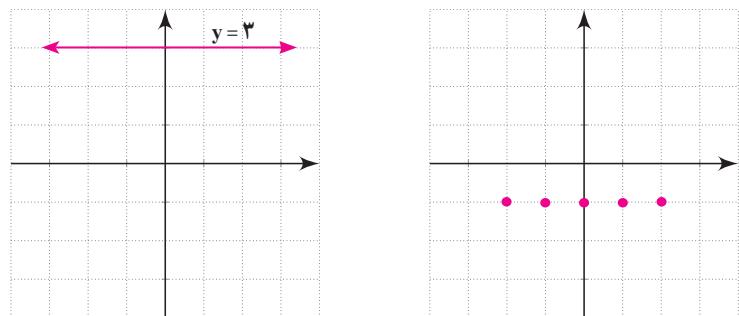
۲ دامنه و برد تابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟



اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.
اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟

ساعت	۸	۹	۱۰
دماهی هوا	۱۹	۱۹	۱۹



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

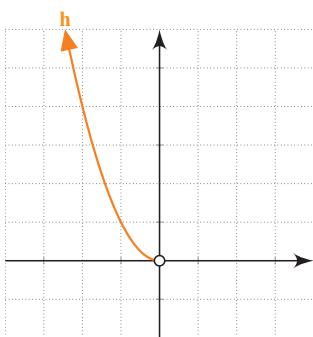
یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

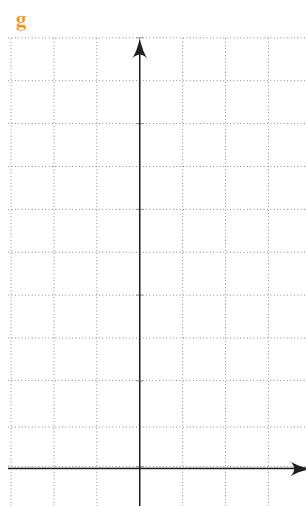
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

گرسنگی‌نمودار

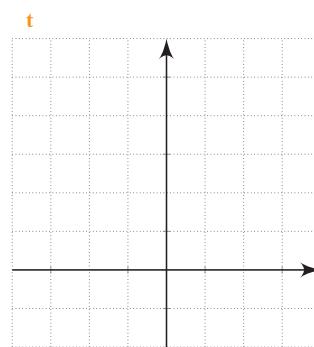
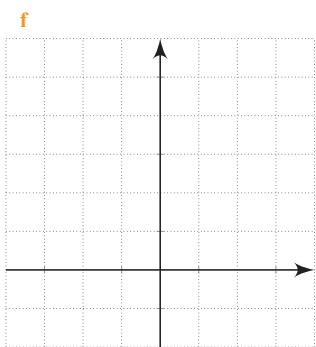
۱۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x) = x^r$	$g(x) = x^r$	$h(x) = x^r$	$t(x) = x^r$
دامنه	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد				



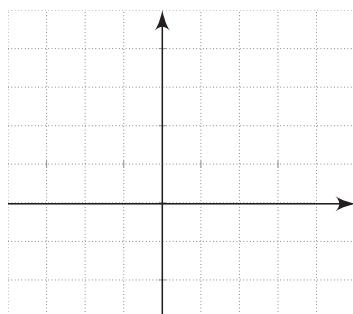
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر : اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگترین مجموعه ممکن را دامنه درنظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $x^r = f(x)$ را مجموعه اعداد حقیقی درنظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



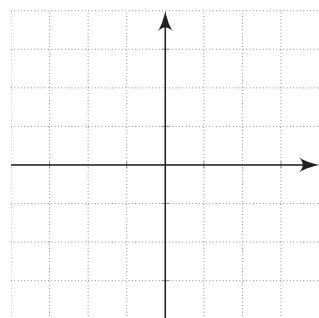
x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$				

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$\text{تابع قدر مطلق را به صورت } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ نیز نمایش می‌دهند.}$$

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

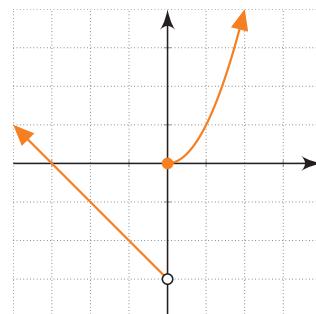


مثال

تابع مقابله نیز یک تابع قطعه‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابله رسم شده است.



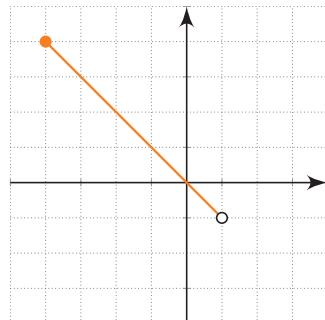
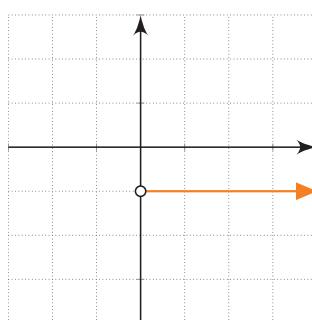
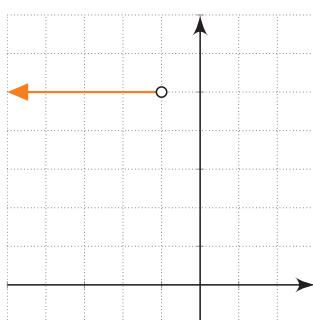
فعالیت

توابع f , g و h نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

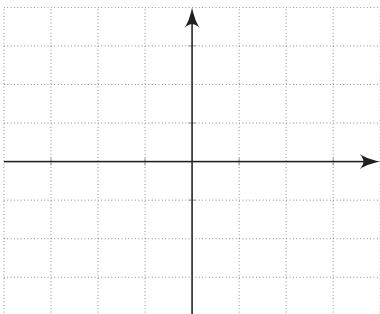
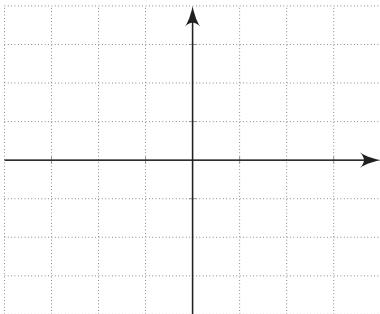
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



مقادیر $f(3)$, $f(-2)$, $g(\sqrt{5})$ و $h(-\frac{1}{5})$ را باید.



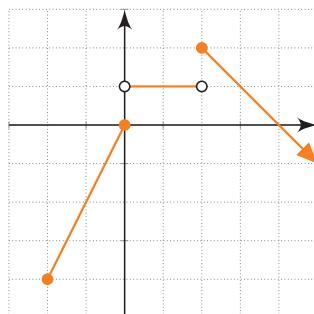
۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $g(-2)$ را به دست آورید.

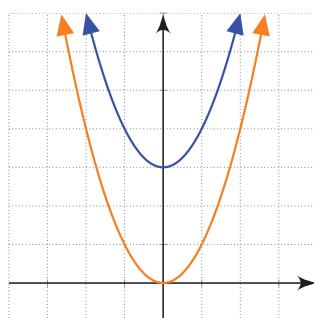
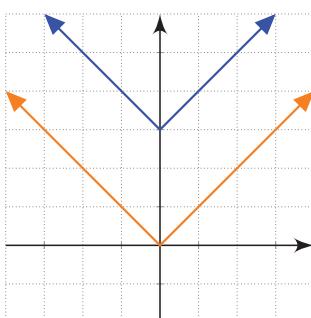
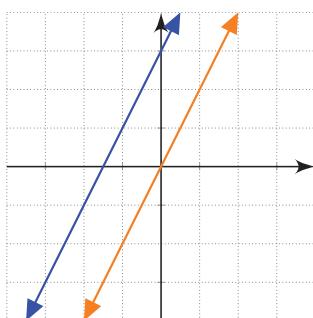
۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



رسم بوخی توابع به کمک انتقال

فعالیت

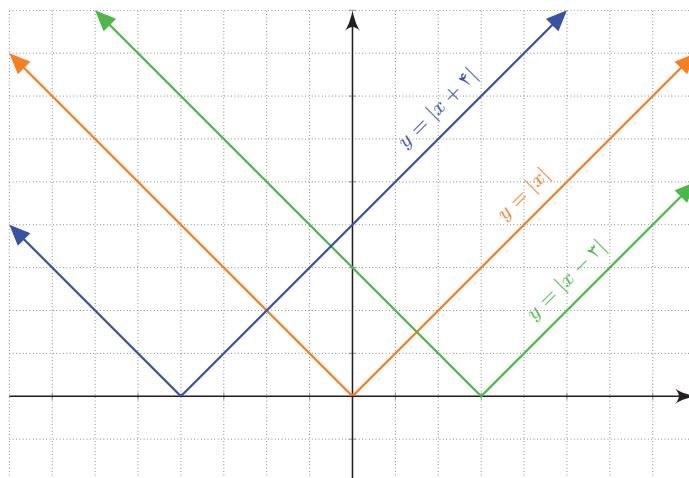
نمودارهای توابع $f(x) = 2x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = x^3$ و $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = |x| + 3$, $h(x) = x^3 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس تابع $y = 2x - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید.



با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$, می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

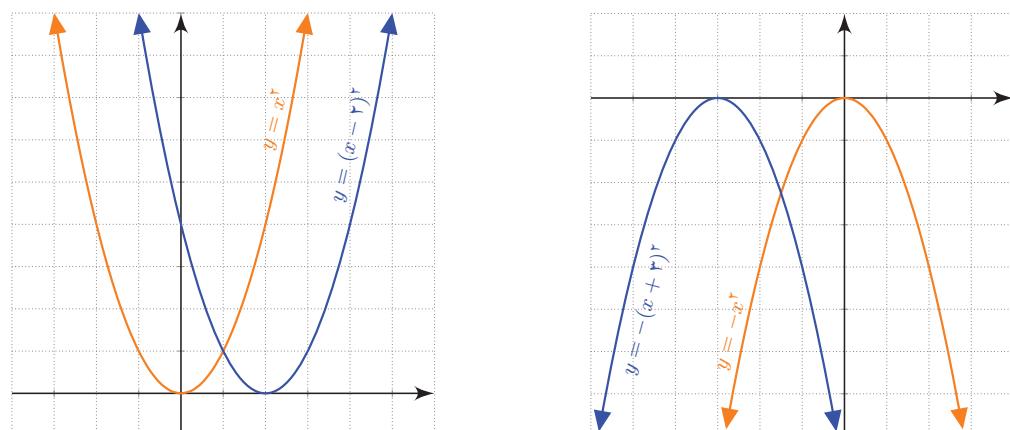
کار در کلاس

- ۱ در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع $|x| = f(x)$ رسم شده‌اند، بباید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را واحد در امتداد محور x ‌ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال درجهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

- ۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $y = x^2$ و $y = -x^2$ نمودار تابع $y = (x+1)^2$ رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بباید. نمودار $y = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



در شکل های زیر نمودار توابع درجه دوم f , g , h و t رسم شده اند.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

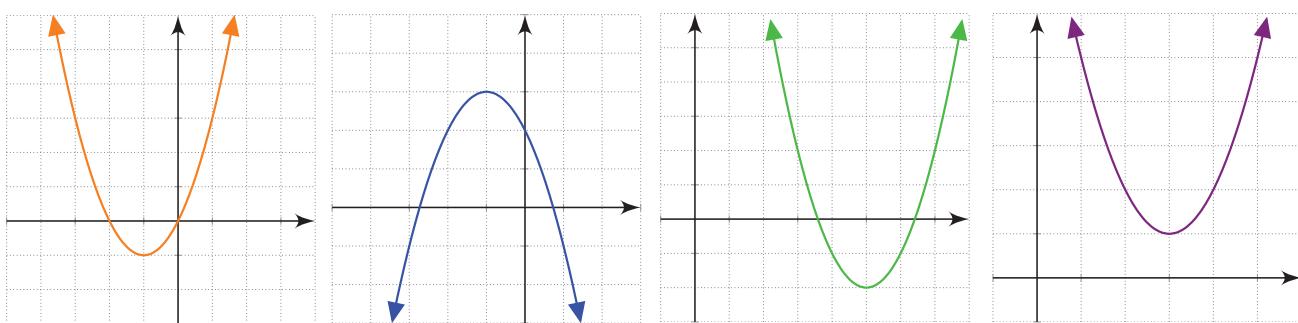
$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می دهند؟

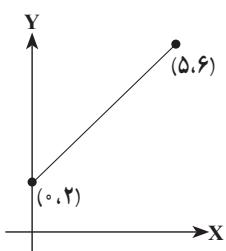
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید :



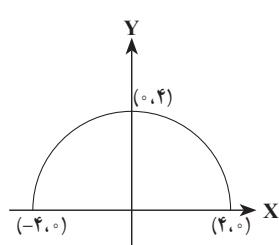
تمرین

۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{5, 0\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخ ها چگونه خواهد بود؟

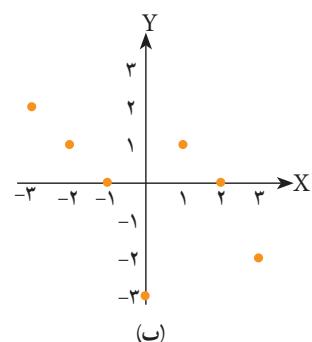
۲ در شکل های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



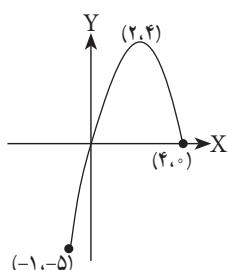
(الف)



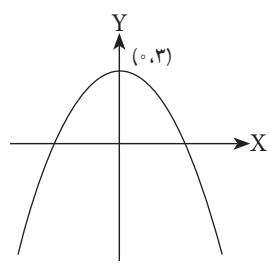
(ب)



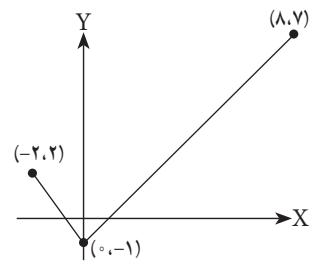
(ب)



(ت)



(ث)



(ج)

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^3 - 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(-\infty, +\infty)$ است.

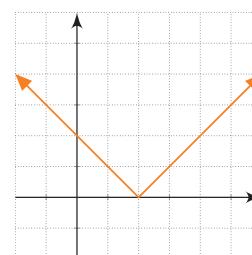
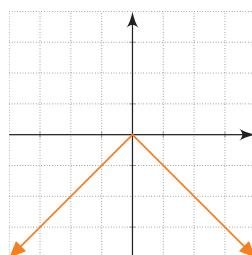
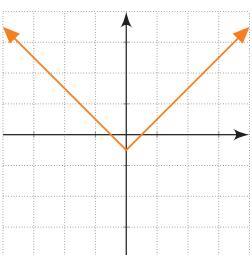
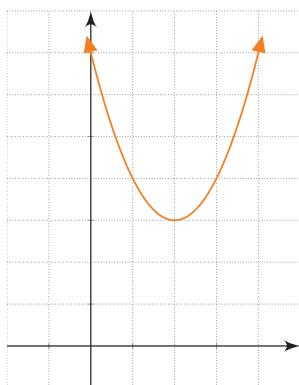
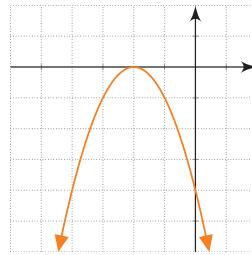
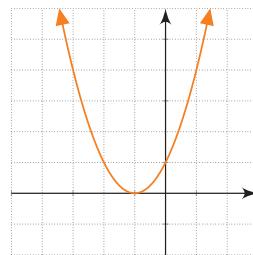
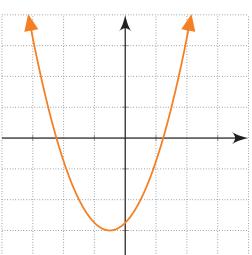
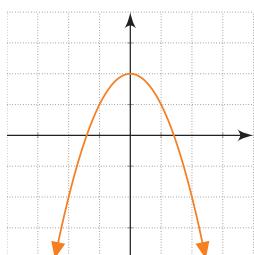
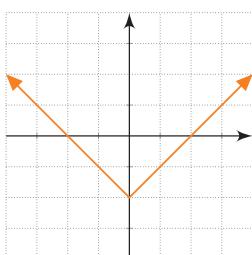
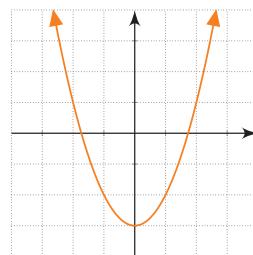
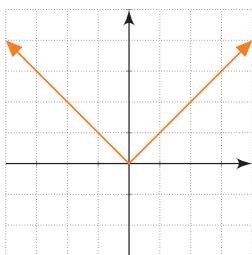
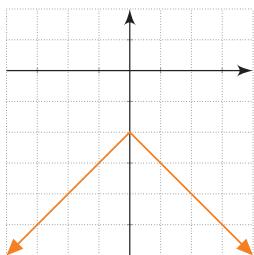
ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{x}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(-\infty, +\infty)$ است.

پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

ت) اگر $f(1) = \frac{f(2)}{2}$ آنگاه، $f(x) = 2x + 1$.

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از x بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و بُرد این توابع چیست؟



الف) $y = x^3 - 2$

ث) $y = (x + 1)^3$

ج) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^3 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

د) $y = (x - 2)^3 + 3$

پ) $y = |x|$

ج) $y = |x - 2|$

ذ) $y = |x| - 2$

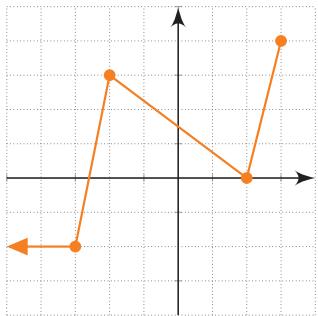
ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^3$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^3 - 3$

۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرین ۵ به بازه $[2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.



$$f(\sqrt{5}), \quad f(6), \quad f(3), \quad f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f(0), \quad f\left(-\frac{5}{2}\right)$$

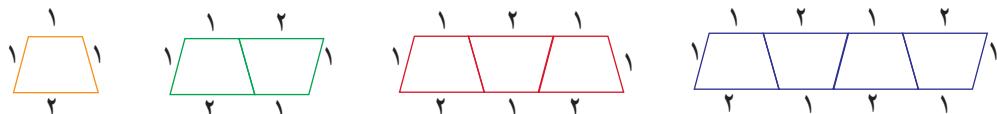
۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(4, 3)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد. $f(-4)$ و $f(-1)$ را بدست آورید.

۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان پیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را بر حسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

محیط شکل	۱	۲	۳	۴	۵	n
تعداد ذوزنقه‌ها						

ب) چرا رابطه بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-2, 1)$ و $(-3, 2)$ می‌گذرد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۹

شمارش، بدون شمردن

وَإِنْ تَعْدُوا بِقَمَةَ الْلَّهِ لَا تُخْصُّهُمَا «سوره ابراهيم آية ۳۴»
و اگر بخواهید نمی توانید نعمت های خدا را بشمارید.



داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی هم رنگ نباشند؟

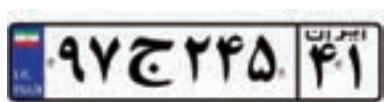
درس اول شمارش

درس دوم جایگشت

درس سوم ترکیب

درس اول: شمارش

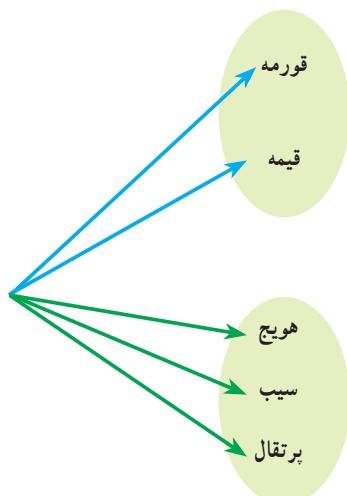
شاید شمارش در نظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ اما آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟



می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

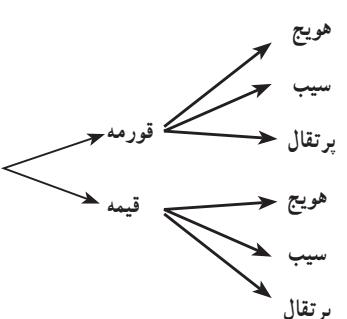
اصل جمع و اصل ضرب

فعالیت



۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آبمیوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آبمیوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آبمیوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

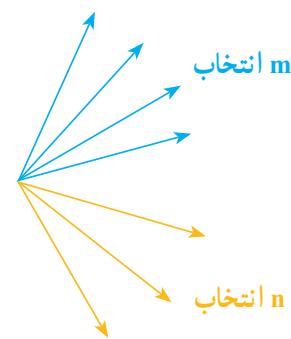
۲ هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آبمیوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آبمیوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟



۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آبمیوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار موردنظر فقط بایکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط بکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آبمیوه‌فروشی» را انجام می‌دهد.»

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

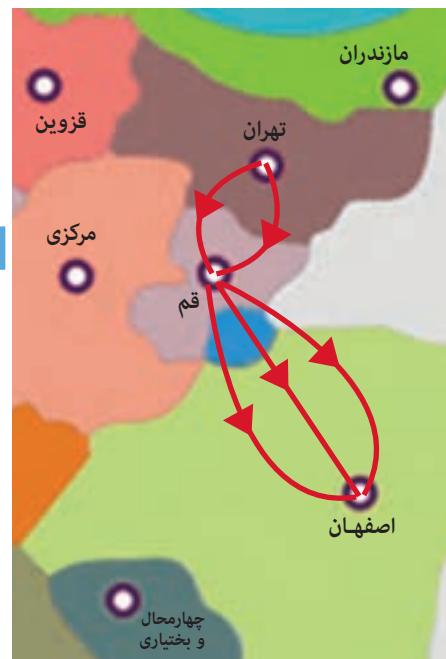
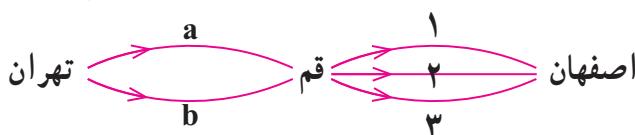
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آبمیوه‌فروشی که مرحله دوم است، صورت می‌پذیرد.»

مثال

فردی می‌خواهد با اتوبوس خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟
حل : طبق اصل ضرب تعداد حالات $= 2 \times 3 = 6$ است که عبارت اند از :

- | | | |
|-----|-----|-----|
| a,۱ | a,۲ | a,۳ |
| b,۱ | b,۲ | b,۳ |



تعمیم اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش ، ... و برای انجام مرحله k روش m_k وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌انداز : مريم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌انداز : گردوبی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

۲ هفته‌ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌های را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

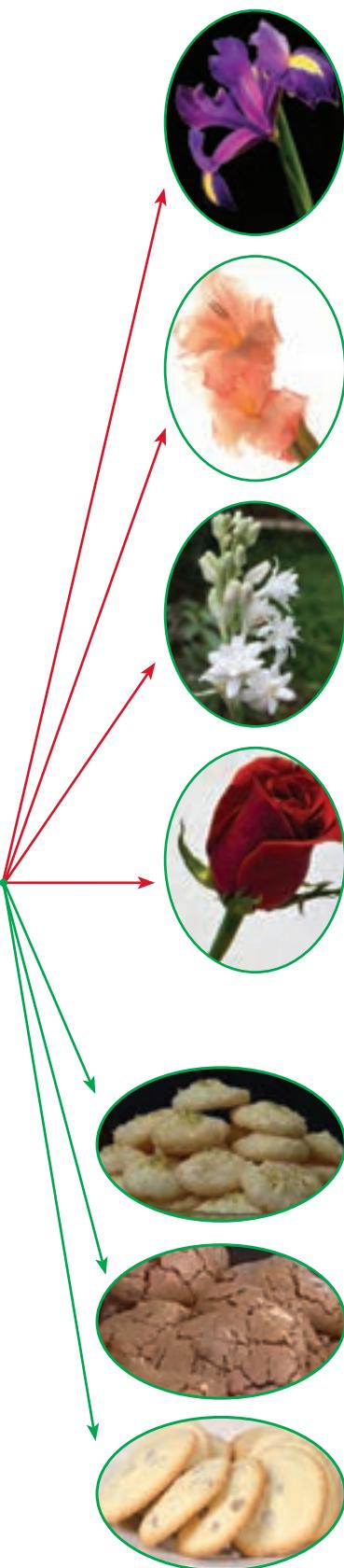
۳ در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل : اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.
با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.



مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل :

حالت اول : اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد : $2 \times 2 \times 2 = 26 \times 26 \times 26 = 26624$

حالت دوم : اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد : $2 \times 3 \times 2 = 21 \times 21 \times 21 = 21632$

تعداد حالات ممکن : $26624 + 21632 = 48256$

کار در کلاس

الف با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۵ و ۲۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای بدست آوردن جواب، تعداد راههای پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

$$5 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \times 5 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \times \dots \times \dots =$$

با نمودار درختی در سالهای پیش آشنا شده اید. از این نمودار نیز می توان برای بدست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.

ب با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

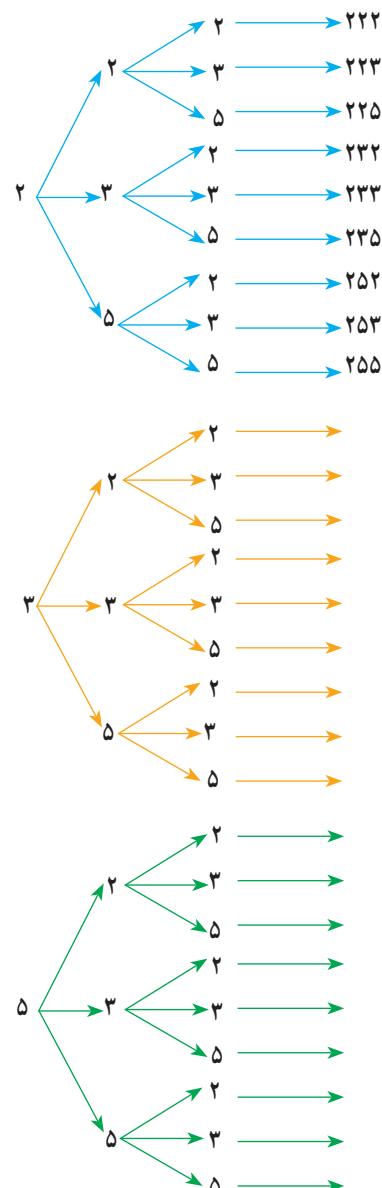


→ تعداد حالات

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



→ تعداد حالات



گرسنگی در حساب

۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟
 لذا $\dots \times \dots \times \dots = \dots$ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.

یک عدد فوار
گرفته است
یک عدد فوار
گرفته است
تعداد حالت ها →

با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟ پ

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟
 لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با $\dots \times \dots = \dots$

با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟ ت

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با $\dots \times \dots \times \dots = \dots$

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

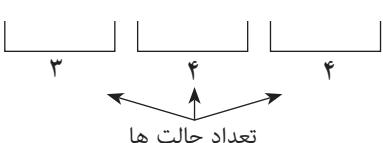
ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

حل:

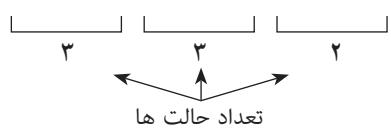
الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.



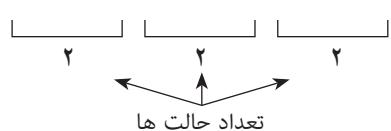
لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت.

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند باید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین 18 عدد می‌توان نوشت.
 $3 \times 3 \times 2 = 18$

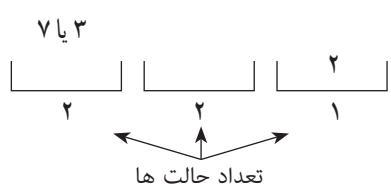


پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید 3 یا 7 باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

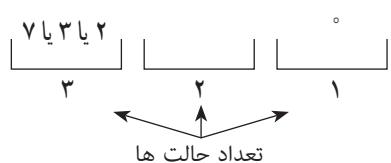


ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید 0 یا 2 باشد و چون در حالتی که رقم 2 سمت راست باشد، رقم 0 سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را درنظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول : اگر رقم سمت راست 2 باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.
 $2 \times 2 \times 1 = 4$



حالت دوم : اگر رقم سمت راست 0 باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به صورت مقابل است.
 $3 \times 2 \times 1 = 6$
 لذا در کل 10 عدد می‌توان نوشت.



راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به صورت زیر جواب را حساب کرد :

$$10 = \text{جواب قسمت (پ)} - \text{جواب قسمت (ب)} = \text{جواب قسمت (ت)}$$

تمرین

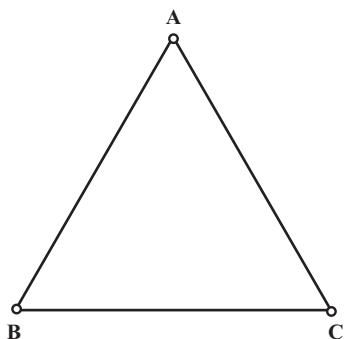
۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.
 ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه‌اول یک عدد و گزینه‌دوم یک حرف الفبای فارسی است.

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟



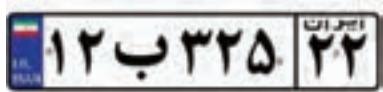
۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

۴ با پلاک‌های به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{\text{ی, ۵, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب}\}$$

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده



(اتوماتیک و غیر اتماتیک) تولید می‌شود.

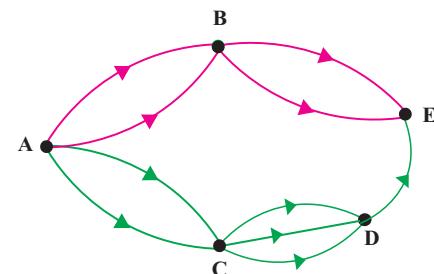
الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می‌شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتماتیک تولید می‌شود؟

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر :

- الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد?
ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟



۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

۸ مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.
مسئله : چند عدد دورقمی زوج می‌توان نوشت؟ به طوری که؟

حل : تعداد راه‌های نوشتیکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتندگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



درس دوم: جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌های a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

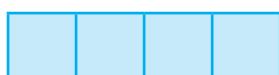
a	b	c
a	c	b

۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چیزش‌ها را بدست آورد؟

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.



«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

۱ اولین مربع (مثالاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پوشود؟

- پس از پوشیدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟

- حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

- حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

..... × ×

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

۲ به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تیتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

۴ با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متولی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (ن فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1! = 1 \times 2 = 2! = 1 \times 2 \times 3 = 3!$ و الی آخر قرار داد: $1! = 1$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

$$\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 5 \times 5! \quad \text{(الف)}$$

۸!

$$10! = \frac{n!}{(n-1)!} \quad \text{(ب)}$$

۸!

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!}} = 5 \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{10!}{8!} = \frac{n!}{(n-2)!} \quad \text{(د)}$$

$$\frac{5!}{4!} = \frac{n!}{(n-4)!} \quad \text{(ه)}$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{n!}{(n-5)!} \quad \text{(ز)}$$

$$\frac{5!}{4!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{(ر)}$$

۳

حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\frac{9!}{7!} \quad 9 \times 8 \times 7 \times 6 \quad (\text{ب})$$

$$11 \times 10 \times 9 \quad 8 \quad (\text{ت})$$

$$n(n-1) \quad n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{ج})$$

فعالیت

۱

تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با

۲

حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟
- بنابراین تعداد کلمات سه حرفی موردنظر برابر است با

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳

تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.

۴

اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۵

تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۶

تعداد جایگشت‌های r -تایی از n شیء متمایز ($n \leq r$) را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

تعداد جایگشت‌های r -تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟

ج چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشنتمان کلمات ۸ حرفی بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به دست آوریم؛ لذا جواب برابر !۸ است.

در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌های روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر !۷ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیانند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دو حرف را یک حرف درنظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با !۷. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با !۲×۷!

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش تایی از هشت شیء متمایز

$$\text{یعنی } P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = ۲!$$

اینکه چهار حرف آخر مشخص اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشنتمان دو حرف اول توسط

حروف کلمه «جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار

$$\text{شیء متمایز؛ یعنی : } P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = ۱۲$$

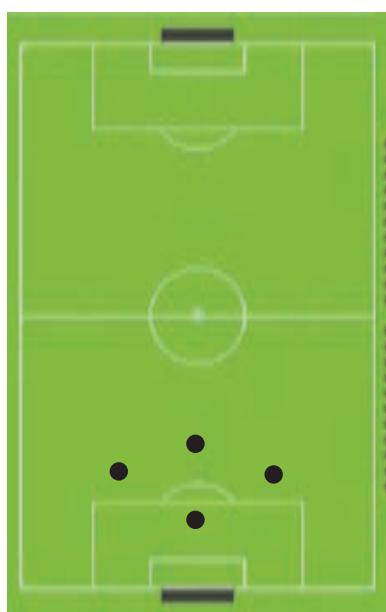
ت) چهار حرف اول، حروف کلمه «جهان» هستند که به $4!$ حالت می‌توانند بیانند. حال 4 حرف آخر را باید با 4 حرف باقی‌مانده (\bar{g} ردی) نوشت که این کار را هم به $4!$ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمه مورد نظر به $4! \times 4!$ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی $4!$. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که درنظر بگیریم، برای نوشتن کلمه 8 حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با $5!$. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با: $4! \times 5!$.

ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس 3 انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این 3 حرف برای چیش 7 حرف دیگر $7!$ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با: $3 \times 7!$.

کار در کلاس

۱ یک مریب فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌تواند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مریب وجود دارد؟



۲ با اعدادهای 5 و 3 و 2 و 1 چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال 18 تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار 210 تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

۳ کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$6! = 2! + 2!$	$6! = 6 \times 5!$
$8! = 4! \times 2!$	$2 \times 3! = 6!$
$(3!)^2 = 9!$	$4! = \frac{8!}{2!}$

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداقل (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟



درس سوم: قرکیب

فعالیت

۱ همان طور که دیدید، با پنج رقمی بارقمهای غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌انداز:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۲۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارد؟

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

$\{1, 2, 3, \dots, 5\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

نتیجه: همان طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام روش چینش هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعه ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو موردنظر اهمیت دارد.

از طرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر

است با :

$$\frac{P(n,r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تابی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های r تابی از n شیء متمایز را معمولاً $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های

$$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

الف کمیته ۴ نفره باشد؟

ب کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

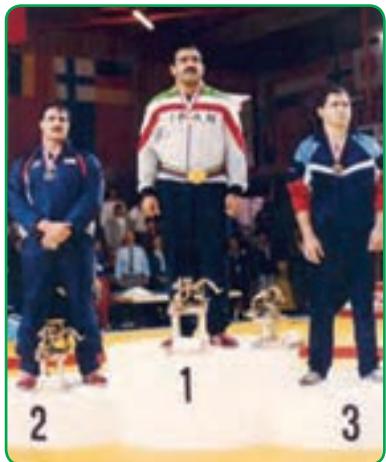
ث کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



غلامرضا تختی، قهرمان جهان

حل:



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین وزن جهان

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با :

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب) تعداد روش های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{1} = 4$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش های انجام این کار برابر است با :

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

پ) تعداد راه های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{2} = 6$. حال ۳ داور دیگر باید از

بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شوند که به $\binom{5}{3} = 10$ حالت می توانند انتخاب شوند. بنابراین

طبق اصل ضرب، تعداد روش های انجام کار برابر است با :

$$6 \times 10 = 60$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی

۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{4}{3} = 4$ حالت می توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر

دیگر باید از بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{5}{2} = 10$ طریق می تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $= 4 \times 10 = 40$ روش وجود دارد.

در حالتی که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{4}{4} = 1$ روش صورت می گیرد

و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شود که به $\binom{5}{1} = 5$ طریق می تواند

صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $= 5 \times 1 = 5$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $= 40 + 5 = 45$.

ث) تعداد روش های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{3} = 4$ ، تعداد روش های انتخاب

۲ داور ژاپنی برابر است با : $\binom{3}{2} = 3$ و تعداد راه های انتخاب ۲ داور روس برابر است با :

$\binom{2}{2} = 1$ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با : $= 4 \times 3 \times 1 = 12$.

ج) می دانیم تعداد کل کمیته های ۵ نفره که می توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{9}{5} = 126$.

از طرفی این کمیته های ۵ نفره به دو دسته زیر تقسیم می شوند :

دسته اول : حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم : هیچ داور ایرانی در آنها نیست.
جمع افراد این دو دسته برابر 126 می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تراست، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از 126 کم کنیم.

$$\text{اما تعداد افراد دسته دوم برابر } = \binom{5}{5} \text{ است. چرا؟}$$

$$\text{لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با : } 126 - 1 = 125$$

کار در کلاس

- ۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های n شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های n تابی از n شیء متمایز مشخص شود؟
- (الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنى و بى معنى).
 - (ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.
 - (پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت دفاع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.
 - (ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.
 - (ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.
 - (ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

- ۲ در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

- ۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه :
- (الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟
 - (ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟
 - (پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چندحالات برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند داش آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.

محمد : از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛

لذا سه حالت زیر را می‌توان درنظر گرفت :

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{0} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{1} = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

پس در کل $4+4+4=12$ حالت امکان دارد.

پژمان : می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های

$$\binom{3}{2}$$

راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب

$$\text{کرد؛ لذا جواب برابر است با : } \binom{3}{2} \times 2 \times 2 = 12$$

حمدی : ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آنرا حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $= 2^4 = 16$ حالت است.

– دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2 ، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 ، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

فعالیت

۱) می‌دانیم که همان تعداد زیر مجموعه‌های اتایی از یک مجموعه n عضوی است.

حال و $\binom{n}{r}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک بار با فرمول، بدست آورید.

۲) (الف) یک مریق قصد دارد از بین بازیکنان شماره های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

به زمین نمی روند	به زمین می روند
۱,۲,۳	۴,۵
۱,۲,۴	۳,۵

ب) این بار این مریق قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بشینند. چه انتخاب هایی دارد؟

پ) بین تعداد انتخاب های $\binom{5}{3}$ و $\binom{5}{2}$ چه رابطه ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می کنید؟
ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک بار با استفاده از توجیه بالا و یک بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

۳) جاهای خالی را پر کنید.

(الف) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با:

(ب) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست

پ) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست،
برابر است با:

برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

۴) فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

(الف) تعداد زیرمجموعه های r عضوی مجموعه A برابر است با:

(ب) تعداد زیرمجموعه های r عضوی A که در آنها a نیست، برابر است با:

(پ) تعداد زیرمجموعه های r عضوی A که در آنها a نیست، برابر است با:

بنابراین:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

- ۱** یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه زانی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟
- ۲** یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:
- الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
 - ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
 - پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
- ۳** در یک کلاس تعدادی از دانشآموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟
- ۴** گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟
- ۵** یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟
- چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟
- ۶** هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

۷) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص

درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه ادویه هستند که باید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از

ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۸) مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{2} \quad \text{الف)$$

$$\binom{5}{3} + \binom{6}{2} \quad \text{ب)}$$

اشترانکوه، لرستان





آمار و احتمال



امروزه آمار و احتمال به عنوان یک علم پر کاربرد در همه علوم از جمله علوم پزشکی، علوم فنی و مهندسی، هواشناسی، محیط زیست و ... استفاده می شود.



آمار و احتمال در پزشکی



آمار و احتمال در کشاورزی



آمار و احتمال در مهندسی کامپیوتر



آمار و احتمال در محیط زیست

درس اول **احتمال یا اندازه‌گیری شناس**

درس دوم **مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه**

درس سوم **متغیر و انواع آن**

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما از چگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکرده‌ایم، نتیجهٔ پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به عنوان مثال نتیجهٔ یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد. همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعهٔ شامل همهٔ این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعهٔ S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

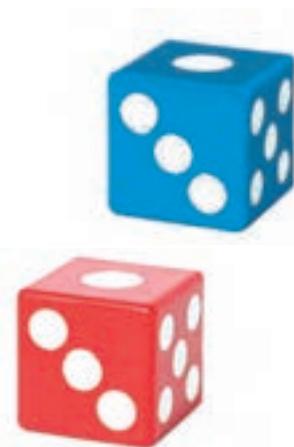


پیشامدهای تصادفی

فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سوال‌ها پاسخ دهید :

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)			(۱,۵)	
۲	(۲,۱)		(۲,۳)			(۲,۶)
۳			(۳,۲)		(۳,۵)	
۴			(۴,۲)			
۵						(۵,۶)
۶	(۶,۱)					(۶,۵)



۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌های را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند
هاشور بزند؛ چه الگویی به دست می‌آید؟

۴ با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

۵ با توجه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی
برابر است؟ (راهنمایی: به عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹،
برابر است)



کار در کلاس

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:
۱ آیا می‌توانید نتیجه حاصل را به صورت قطعی بیان کنید؟

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟

۳ همه حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

۴ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید.

۵ جدول 2×6 یا 6×2 مربوط به این آزمایش رارسم کنید.

مثال ۱

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ اما از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر
ترتیب به دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجه به اصل ضرب تعداد همه حالت‌های
ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$. حالت (پ، پ، د، پ) به
معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم
و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» $A = \{(d, p, p, p), (p, d, p, p), (p, p, d, p), (p, p, p, d)\}$

ب پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» $B = \{(d, p, p, p), (p, d, p, p), (p, p, d, p), (p, p, p, d), (p, p, p, p)\}$

ب پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» $B = \{(p, p, p, p), (d, p, p, p), (p, d, p, p), (p, p, d, p), (p, p, p, d)\}$

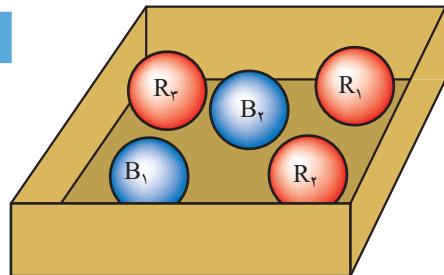


پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» $C = \{(p, p, d), (p, d, d), (d, p, p), (d, d, p)\}$

پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد» $D = \{(p, p, p, p), (p, p, p, d), (p, p, d, d), (p, d, d, d)\}$

مثال ۴

در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از $\binom{5}{3} = 10$ زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$S = \{R_1 R_2 R_3, R_1 R_2 B_1, R_1 R_2 B_2, R_1 R_3 B_1, R_1 R_3 B_2, R_2 R_3 B_1, R_2 R_3 B_2, B_1 B_2 R_1, B_1 B_2 R_2, B_1 B_2 R_3\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت:

$$A = \{B_1 R_1 R_2, B_1 R_1 R_3, B_1 R_2 R_3\}$$

$$B = \{R_1 R_2 R_3\}$$

$$C = \{R_1 R_2 R_3\}$$

اگر S را مجموعه مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی $'A$ با کدامیک از مجموعه‌های B یا C برابر است؟

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای (A-B), (A ∩ B), (A ∪ B) در فضای نمونه‌ای S به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

(الف) اجتماع دو پیشامد:

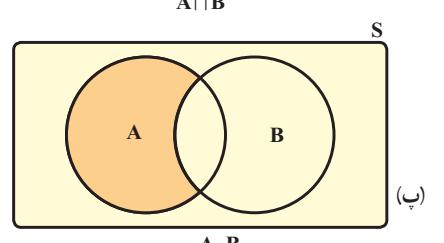
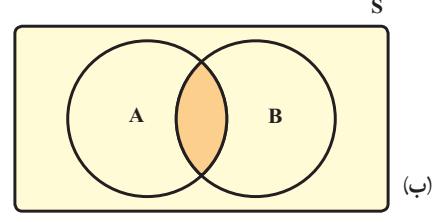
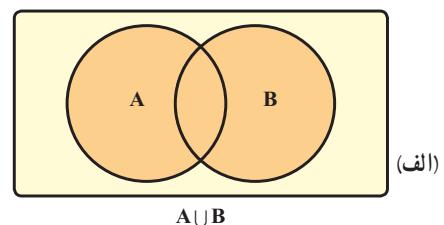
پیشامد $(A ∪ B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.
(یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند).

(ب) اشتراک دو پیشامد:

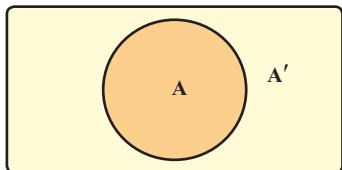
پیشامد $(A ∩ B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

(پ) تفاضل دو پیشامد:

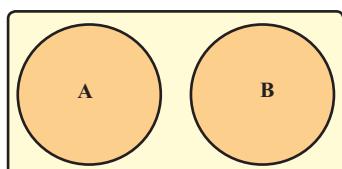
پیشامد $(A - B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



ت) متمم یک پیشامد:



اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (یا A^C) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین با توجه به نمودار واضح است که $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup A' = S$.



تعريف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند.

تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A' ، دو پیشامد ناسازگارند.

اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ و $B \cap C = \emptyset$ باشد.

مثال ۱۱

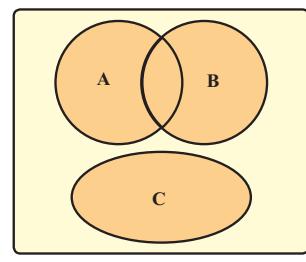
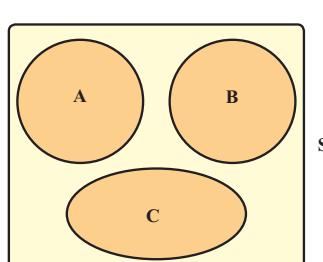
اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «روشندن عدد بزرگ‌تر از ۴»، «روشندن عدد کوچک‌تر از ۳» و «روشندن عدد ۳ یا ۴» را به ترتیب A ، B و C تعریف کنیم، در این صورت همواره، پیشامدهای A ، B و C دو به دو ناسازگارند و داریم:

(الف) $A = \{5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3, 4\}$

(ب) $A' = \{1, 2, 3, 4\}$, $B' = \{3, 4, 5, 6\}$, $C' = \{1, 2, 5, 6\}$

مثال ۱۲

کدام یک از شکل‌های زیر سه پیشامد دو به دو ناسازگار را نشان می‌دهد؟



کار در کلاس

- ۱) با توجه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پرکنید.
- $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
- $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
- $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$
- الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»
- $(A \cap B) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2)\} \rightarrow n(A \cap B) = 10$

- ب) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»
- $\dots = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

پ پیشامد آنکه $A-C$ رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی» پس
داریم :

$$A-C = \{(1,1), (1,3), (1,5), \dots, (5,5)\}$$

ت پیشامد $C-B$ را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.

ث اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعريف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟

۱ تاسی را می اندازیم، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعريف کنید که :

الف A و B ناسازگار باشند.

ب A و B و C دو به دو ناسازگار باشند.

پ $(A \cap B)$ و C ناسازگار باشند .

مثال

یک تاس و ۲ سکه را با هم می اندازیم :

الف فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

$$n(S) = ۶ \times ۴ \times \dots = \dots$$

ب پیشامد آنکه «هردو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.
 $A = \{(\text{ر, ر, ر}), (\text{ر, ر, پ}), (\text{ر, پ, پ}), (\text{ر, پ, ر}), (\text{پ, ر, ر}), (\text{پ, پ, پ})\}$

پ پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.



$$B = \{(6, \text{پ, پ}), (5, \text{پ, پ}), (4, \text{پ, پ}), (3, \text{پ, پ}), (2, \text{پ, پ}), (1, \text{پ, پ})\}$$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

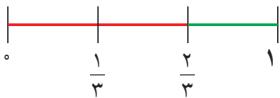
می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $\frac{n(A)}{n(S)}$ تعريف می‌شود،

عددی است حقیقی که $0 \leq P(A) \leq 1$. همچنین می‌دانیم $P(A)$ هر چقدر به ۱ تزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به صفر تزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبه $P(A)$ شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شناسن رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



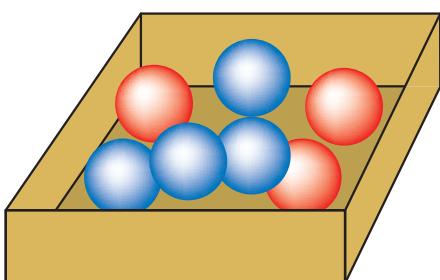
$$S = \{43, 34, 24, 42, 23, 32\}$$

$$A = \{34, \dots, \dots, 32\}, B = \{\dots, \dots\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

واضح است که $P(A) > P(B)$ ، پس شناسن رخداد پیشامد A از شناسن رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد ، بیشتر است)

در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :



$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

الف هر سه مهره آبی باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

ب هر سه مهره همنگ باشند.

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{35} = \frac{1}{7}$$

پ دقیقاً ۲ مهره همنگ باشند.

یا هر سه مهره آبی ، یا هر سه قرمز

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{35} = \frac{18+12}{35} = \frac{6}{7}$$

دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو آبی و یک قرمز

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهای در این فضا باشند، در این صورت :

$$I) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$II) P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$$

$$III) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{زیرا } P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{\dots\dots} = \dots\dots = 0, \quad P(S) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$$

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{زیرا } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{ تقسیم طرفین بر } n(S)}$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - P(A \cap B)$$



آندری نیکولاویچ کولموگوروف ریاضی دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه‌های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

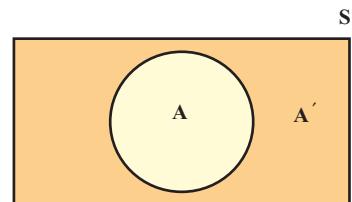
کار در کلاس

اگر A' متمم A در فضای نمونه‌ای S باشد، $(A \cup A')$ ناسازگارند) نشان دهید.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$\text{می‌دانیم } P(A \cup A') = P(S) = \dots\dots$$

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \dots\dots \\ P(A') = \dots\dots \end{cases}$$



مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس $n(S) = 36$)

$$\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ب مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند:

$$B = \{ (3,5), (5,3), (2,6), (6,2), (4,4) \}$$

$$C = \{ \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots \}$$



تو کز سرای طبیعت نمیروی بیرون
کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد

فرض کنیم تعداد دكمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟

از آنجایی که رایانه ۵۰ دكمه دارد احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر است با $\frac{1}{50}$ چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

$$\frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{5^{10}}$$

اگر همین کودک بخواهد بیت بالا را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟ اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟ طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به وجود آمده است؟

دھنی

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{2}{36} = \\ (B \cap C) = \{(3,5), (5,3)\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{36}$$

پ مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

$$D = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow \text{مجموع دو تاس ۷} \\ A = \text{هر دو تاس زوج} \rightarrow n(A) = 6, (A \cap B) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(D \cup A) = P(D) + P(A) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{15}{36}$$

ت مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبه آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.
پیشامد مجموع کمتر از ۱۱ = A

$$A' = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \quad (\text{پیشامد مجموع، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱})$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{3}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

ث حاصل ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$$A = \{(2,6), \dots, \dots, \dots\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \dots$$

مثال

اگر حروف کلمه جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد:

الف حرف «ی» آخر باشد؟

ب دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

حل:

طبق مثال حل شده در فصل ۶ داریم:

$$P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{2}{8}$$

$$n(C) = 1 \times 2 \times \dots \times 6$$

$$P(C) = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{56}$$

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:
 الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش با پدیده تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدنه؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کيسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کيسه خارج می‌کیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانشآموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانشآموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنسی روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانشآموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هر رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشند؟

۷) یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر $\frac{34}{100}$ درصد از مشتریان کارت نوع A و 62% درصد کارت نوع B و 15% درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

۸) اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:
 الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟
 ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

۹) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A) \leq P(B)$.



چشم تو
عين الیقین من
قطعت نگاه تو
دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بني نام ناگزیر تو می سیرم

قصر امین پور

ماد عصر احتمال به سرمی بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
امان
بني نام تو
حتی
یک سطح احتمال ندارم

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه



آیا تاکنون به نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمره یک خانواده فکر کرده‌اید؟

خانواده‌ای را که شامل پدر، مادر و فرزندان است، در نظر بگیرید. اعضای این خانواده در فصل بهار، می‌خواهند به یک مسافرت تفریحی به یکی از شهرهای کشور بروند.

برای این منظور پدر و مادر خانواده با پیگیری اخبار هواشناسی، به دنبال تعیین مناسب ترین زمان برای مسافرت خود هستند. در این اخبار، کارشناس هواشناسی می‌گوید:

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده، درباره میزان دمای هوا، رطوبت جوی و بارش باران طی ده روز گذشته و با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی، پیش‌بینی می‌شود، دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر شود و بدون تغییر در میزان رطوبت جوی، هوا صاف آفتابی باشد.»

آنها پس از شنیدن این گزارش، تصمیم می‌گیرند سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب کنند.

بنابراین هرچه اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تر باشد و از روش‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی استفاده شود، تصمیم‌گیری‌های بهتری در خانواده گرفته می‌شود.

تعريف آمار و علم آمار:

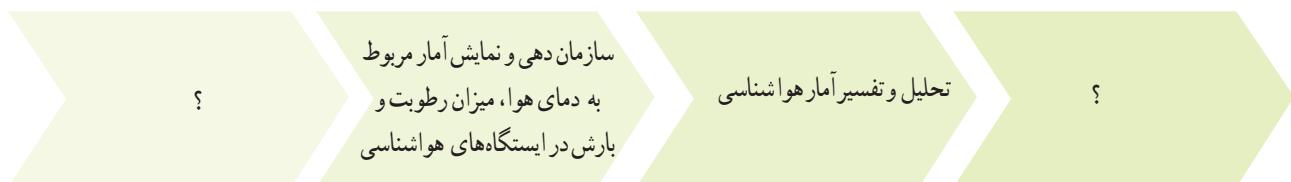
آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاؤت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۳ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.



کارخانه لامپ‌سازی

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهنده چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

ادامه خط تولید لامپ‌ها

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها



۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

- الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده هاست.....
- ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، تیجه استفاده از «علم آمار» است.....
- پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است.....

۷ به شکل رویه را توجه کنید : آیا این شکل را می توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه اند؟ برای پاسخ به این سوالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)



کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر

هر تصویر از تعداد زیادی مربع های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک **جدول عددی** تشکیل می شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می دهد. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می توان به دست آورد. در اینجا نکته حائز اهمیت، کاربرد **پردازش تصویر** است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی شان مقایسه کرد.



۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

?		
	?	?
	?	?

شکل

۱	?	?
?	?	۰
?	۰	۳

جدول عددی

الف چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینه سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی)

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای اینکه میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری تحت عنوان، معیار «شاخص توده بدن» استفاده می‌کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) بر حسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد (H) بر حسب متر یا به عبارت دیگر $\frac{W_{kg}}{(H_m)^2}$ محاسبه می‌شود و براساس آن نتایج زیر به دست می‌آید :



کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی

طبقه‌بندی	شاخص توده بدن
کم وزن	کمتر از ۱۸/۵
وزن طبیعی	۲۴/۹ تا ۱۸/۵
اضافه وزن	۲۹/۹ تا ۲۵
چاقی درجه یک	۳۴/۹ تا ۳۰
چاقی درجه دو	۳۹/۹ تا ۳۵
چاقی درجه سه	بیشتر از ۴۰

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص توده بدن شناسایی می‌شود. به عنوان مثال، عواملی همچون «رزیم غذایی سالم» و «کم تحرکی» می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند. بنابراین، امروزه با توجه به تغییر شیوه‌های زندگی، از جمله ماشینی شدن و استفاده از خوراکی‌های آماده، نیاز به استفاده از رزیم غذایی سالم، عدم مصرف خوراکی‌های مضر و همچنین ورزش و فعالیت بدنسازی، بسیار ضروری است. به همین منظور، ورزش صبحگاهی و ایجاد بوفه سالم در مدارس، گامی کوچک؛ اما مؤثر در جهت سلامت افراد است.

مثال ۱

فرض کنید وزن شخصی 100 کیلوگرم و قدش 1 متر و 47 سانتی‌متر باشد. شاخص توده بدن شخص به صورت زیر است:

$$\text{شاخص توده بدن} = \frac{100}{(1/74)^2} = 33 / 0.2$$

۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پژوهشی، درباره چاق بودن

این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۲ درباره چاق بودن خودتان و اعضای خانواده خود اظهار نظر کنید.

ب شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می‌دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.



شکل الف – افراد یک شهر

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟



شکل ب – افراد انتخابی از شهر

همان گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان‌گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند.

همان‌طور که می‌بینید این بار پاسخ به سؤالات، با دقت پیشتر و آسان‌تر داده می‌شود و به راحتی درصد افراد چاق در زیر مجموعه انتخابی قابل محاسبه است.

تعريف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه یا جمعیت** نامیده می شود و هریک از این افراد یا اشیا را **عضو جامعه** می نامند.



تعريف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازه جامعه یا حجم جامعه** گویند.
به عنوان مثال، دانشآموزان یک مدرسه می توانند یک جامعه باشند و هریک از دانشآموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.



تعريف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.

تعريف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را **اندازه نمونه یا حجم نمونه** گویند.
به عنوان مثال دانشآموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانشآموزان مدرسه هستند و هریک از دانشآموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می شوند.

کاردرکلاس

در نمودار رو به رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانه «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار رو به رو ارائه شده است.
با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحه بعد را کامل کنید.

نمودار مربوط به تعداد قطعات تولیدی

تعداد کل قطعات تولیدی ■ تعداد نمونه های انتخابی



جامعه	عضو جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه
کارخانه الف	قطعات تولیدی			۱۰۰۰
کارخانه ب			قطعات تولیدی انتخابی	

تمرین



۱ می خواهیم درباره **کیفیت محصولات تولیدی** یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید :

جامعه	اندازه جامعه	اندازه نمونه	ویژگی مورد بررسی

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

- الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.....
- ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.....
- پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.....

۳ در شکل زیر، دانشآموزان یک مدرسه در صفت صحبتگاهی مشاهده می شوند. هر صفت افقی نشان‌دهنده تعداد دانشآموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



درس سوم: متغیر و انواع آن

فعالیت



مزرعه هلو

شکل رو به رو محصولات هلوی یک مزرعه کشاورزی را نشان می دهد. میوه های هلوی این مزرعه را به عنوان اعضای جامعه در نظر بگیرید. یکی از میوه ها را انتخاب کنید. برای بررسی مرغوبیت این میوه، می توان به چند ویژگی از آن مانند وزن و کیفیت توجه کرد. به کمک یک ترازوی دیجیتالی، وزن آن به راحتی قابل اندازه گیری است.

الف برای اندازه گیری کیفیت میوه هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه گیری می توان به این سؤال پاسخ داد؟

ب آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می دهد؟

پ کشاورز چگونه می تواند کیفیت میوه هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟

برای پاسخ به سوالات «الف» و «ب» باید گفت که هیچ ترازو و یا وسیله ای که بتواند میزان کیفیت میوه هلو را اندازه گیری کند، وجود ندارد. با این حال کشاورزان با توجه به کیفیت آن، این میوه را به صورت «درجه یک»، «درجه دو» و «درجه سه» به بازار عرضه می کنند. به عبارت بهتر، عدد یک را به میوه های هلوی بسیار مرغوب و درشت، عدد دو را به میوه های هلوی متوسط و عدد سه را به میوه های هلوی ریز نسبت می دهند. برای پاسخ به سوال «پ»، کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی (طراحی و نحوه تولید محصولات)



علم آمار در مهندسی کشاورزی کاربرد بسیار زیادی دارد. یک مهندس کشاورزی همواره علاقه مند است تا کمیت و کیفیت تولید محصولاتش به بیشترین حد ممکن برسد. برای این منظور، مهندس کشاورزی از انواع کودها مانند نیترات آمونیوم، فسفر و ... استفاده می کند. اما سوالی که در اینجا مطرح می شود، آن است که چه میزان کود باید استفاده شود تا کمیت و کیفیت تولید محصولات آن به بیشترین مقدار برسد؟ اینجاست که علم آمار با طراحی آزمایش هایی، به این سؤال پاسخ می دهد.

بدین منظور، قطعات مختلفی از زمین به طوری که از نظر رطوبت، حاصلخیزی خاک، نور و ... کاملاً یکسان باشند، در نظر گرفته می شود. سپس به مطالعه درصد های مختلف کودهای مورد نظر در این قطعات زمین پرداخته می شود. به عبارت دیگر علم آمار در تعیین عوامل مؤثر مانند کودهای مورد استفاده در زمین کشاورزی و سطوحی از عوامل مانند درصد هایی از میزان استفاده کودها برای رسیدن به تولیدات بیشتر کشاورزی به مهندسان کشاورزی کمک می کند.

تعريف متغیر و مقدار متغیر

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیر** می‌گویند.

به عنوان مثال در شکل «الف» وزن و کیفیت میوه هلو به عنوان دو متغیر مربوط به میوه هلوست و مقادیر آن در جدول زیر آمده است :



شکل الف

متغیر مربوط به میوه هلو	مقدار متغیر
وزن هلو	۲۰۰ گرم
کیفیت هلو	درجه یک (۱)، درجه دو (۲)، درجه سه (۳)

کاردرکلاس

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است. «سرعت خودرو» و «میزان بنزین مصرفی»، قابل اندازه‌گیری است. به عنوان مثال حداکثر سرعت این خودرو در جاده‌ها 120 کیلومتر بر ساعت است. به عبارت دیگر مقدار متغیر «سرعت خودرو» برابر با 120 کیلومتر بر ساعت است.



شکل ب

همچنین اگر خودرویی به عنوان مثال برای هر 100 کیلومتر، 8 لیتر بنزین مصرف کند؛ بنابراین مقدار متغیر «میزان مصرف خودرو» برابر با 8 لیتر برای هر 100 کیلومتر است. ولی در این مثال رنگ خودرو قابل اندازه‌گیری نیست. می‌توان انواع رنگ‌های مشکی، سفید و ... را به عنوان مقادیر متغیر «رنگ خودرو» در نظر گرفت و آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد.

به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟ در سطرهای خالی مقدار هر یک از متغیرهای معرفی شده جدید را بیان کنید.

مقدار متغیر	متغیرهای یک خودرو
120	حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده
8	میزان بنزین مصرفی برای هر 100 کیلومتر
سفید	رنگ خودرو



- ۱ جدول زیر متغیرهایی را که درباره یک دانشآموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد.
مقدار این متغیرها را درباره خودتان در جدول زیر بنویسید.

متغیرهای یک دانش آموز	مقدار متغیر
سن دانش آموز	
نمره ریاضی نهم دانش آموز	
گروه خونی (A ، O ، B ، AB)	
قد دانش آموز	
وزن دانش آموز	

متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	۱/۲ متر

- ۲ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول رو به رو بنویسید.
- ۳ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید.

کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست



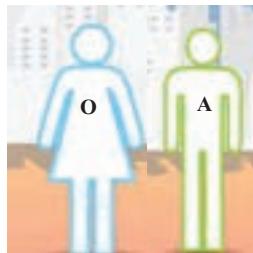
علم آمار و احتمال در محیط زیست کاربرد دارد. به عنوان مثال با استفاده از این علم می‌توان به شناسایی و شناخت عوامل مؤثر بر زیستگاه‌های مطلوب حیوانات در حال انقراض اشاره کرد. این موضوع مدیران محیط زیست را در مدیریت و حفاظت از این زیستگاه‌ها یاری می‌کند. یکی از این حیوانات در حال انقراض «یوزپلنگ ایرانی» است. یوزپلنگ ایرانی یک زیرگونه به شدت در معرض خطر انقراض از یوزپلنگ است که اکنون تنها چند ده قلاده از آن در ایران یافت می‌شود. این جانور در مناطق بیابانی در سطح منطقه زندگی می‌کرد و سال‌هاست که نسل آن در معرض نابودی کلی قرار دارد. یوزپلنگ از خانواده گربه سانان به شمار می‌آید؛ اما به دلیل داشتن دست و پایی بلند، بدنه کشیده و باریک، و سینه‌های فراخ تا حدود زیادی به سگ‌های تازی شبیه است. در میان گربه‌سانان، یوز با داشتن ارتفاع شانه‌ای برابر با ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر و وزنی بین ۴۰ تا ۲۷ کیلوگرم از جمله گربه سانان کوچک جثه به شمار می‌رود. اندازه طول بدن آن به ۱/۲ متر می‌رسد و طول دم آن نیز میان ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر است. همچنین سر این جانوران به نسبت کوچک است.

متغیرهای کمی و کیفی

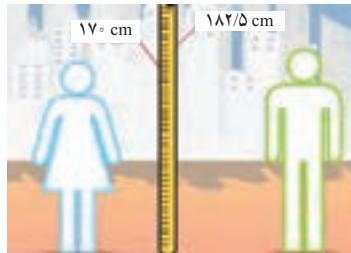
فعالیت

در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آنها سوالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سوالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال:

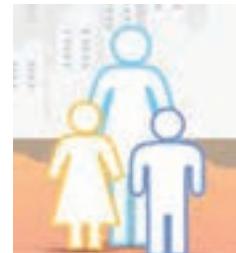
و سوال آخر:
«گروه خونی خود را بگویید؟»



از همان خاتم و آقامی پرسیم:
«قد شما چند سانتی متر است؟»



از مادر یک خانواده می‌پرسیم:
«چند فرزند دارید؟»



از یک آقا و خانم می‌پرسیم:
«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»



حال به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر
تعداد فرزندان
قد افراد
گروه خونی
میزان لذت بردن از آشپزی

متغیر

؟

؟

؟

متغیرهایی که قابل
اندازه‌گیری نیستند

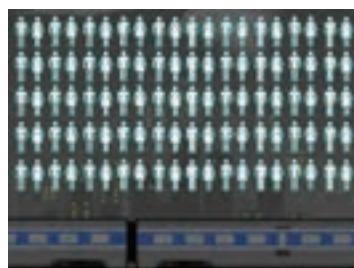
ب با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.

تعریف متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعریف متغیرهای کیفی

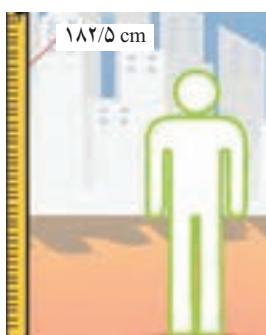
متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.



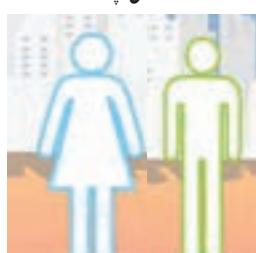
شكل الف



شكل ب



شكل پ



شكل ت

کاردرگلاس

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید:

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر **کمی** است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر..... است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر..... است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر..... است.

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده)

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای)

۳ جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	سؤال (متغیر)
	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	موی شما چه رنگی است؟
	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	وزن شما چه عددی است؟
	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی‌برم	چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟

انواع متغیرهای کمی

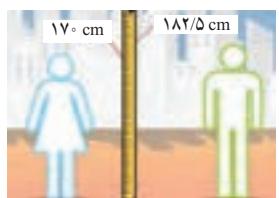
فعالیت



همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی‌اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌برسیم: چند فرزند دارد؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۰، ۱، ۲، ...



۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن: ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعه دانشآموزان پایه دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانشآموزان کشور در بازه [۴۶, ۷۵] قرار می‌گیرد.

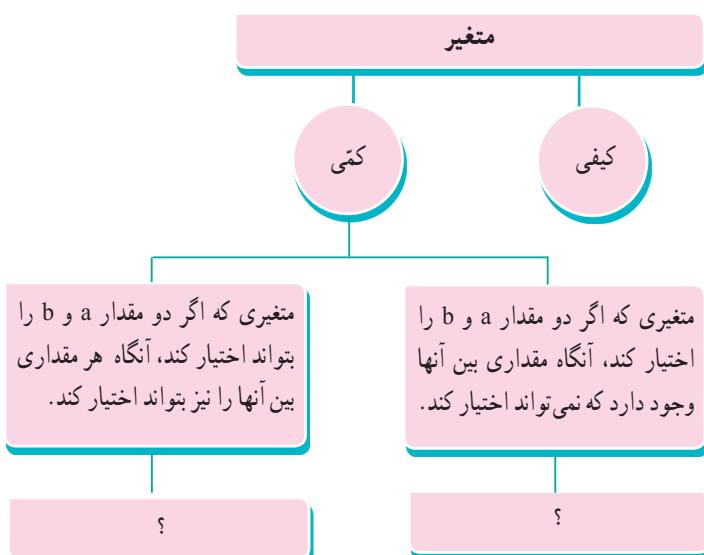
آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانشآموز باشد؟

۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازه [۰, ۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



انواع متغیر کمی:

۱) متغیر پیوسته ۲) متغیر گسسته



تعريف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک داش آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعريف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

کار در کلاس



- ۱) با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را مشخص کنید.
- الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر 120 کیلومتر بر ساعت است.
- ب) میزان مصرف بنزین این خودرو ، یک متغیر و مقدار آن برای هر 100 کیلومتر است.
- پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر است و این تعداد برابر با است.

۲) انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |
| <input type="checkbox"/> پیوسته | <input type="checkbox"/> گسسته |

- الف) تعداد ماهی‌های یک دریا
- ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه بررسید.
- پ) وزن افراد
- ت) تعداد دانش آموزان یک مدرسه

۵ در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

نوع متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	سؤال (متغیر)
	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی متر	قد شما چه عددی است؟
	۸۰/۵ کیلوگرم	وزن شما چه عددی است؟
، ۳، ۲، ۱، ۰	تعداد دوستان شما چند نفر است؟
	۷۲، ۷۱، ۷۰ و کیلوگرم	وزن دوستان چه عددی است؟
	۳۰، ۳۲/۵، ۲۲ و	شاخص توده بدن خانواده شما چه عددی است؟
	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی متر	ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟

أنواع متغيرات كيفية

فعالية

به سؤال‌های زیر توجه کنید:

سؤال: از یک آقا و خانم می‌پرسیم: چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟

برخی از جواب‌های ممکن: خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم

سؤال: گروه خونی خود را بگویید.

برخی از جواب‌های ممکن: گروه خونی A، B، O، AB

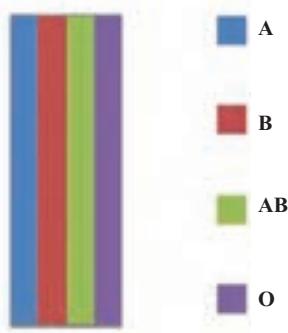
در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ

به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

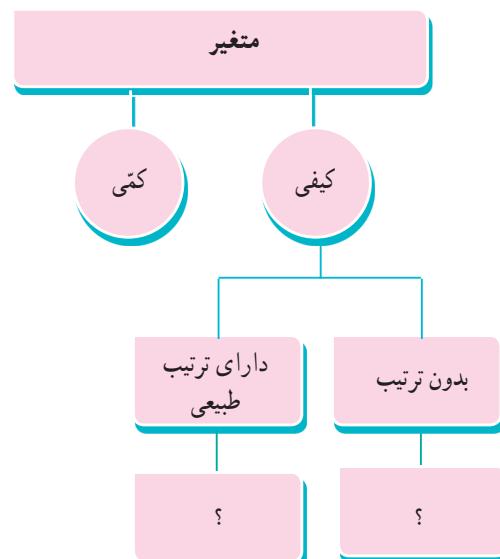
در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



شکل اف



شکل ب



متغیرهای ترتیبی و اسمی
انواع متغیر کیفی:

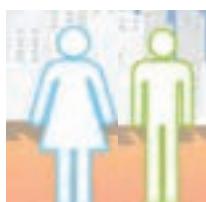
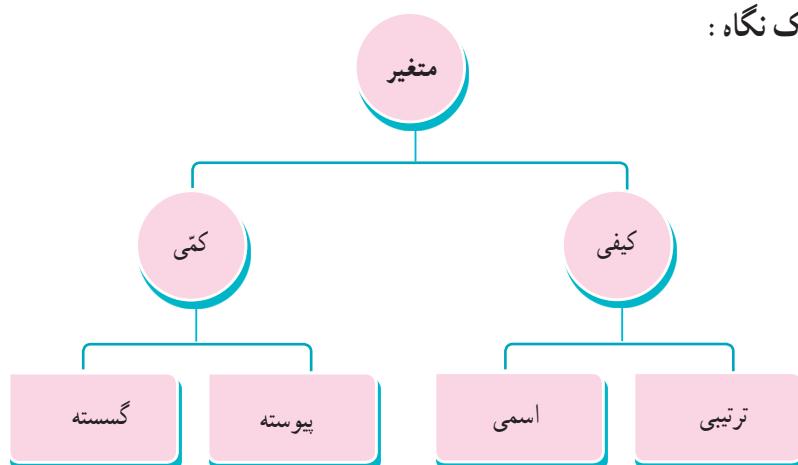
متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

۱) متغیر ترتیبی ۲) متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی): متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه:



شكل الف



شكل ب

- بسیار زیاد،
- زیاد،
- متوسط،
- کم،
- بسیار کم



شكل پ

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:
در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر **اسمی** است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به دست می‌آورد، یک متغیر
است و مقادیر آن است.

در شکل «پ»، میزان علاقه شما درباره خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر
است و مقادیر آن است.

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

اسمی ترتیبی

اسمی ترتیبی

اسمی ترتیبی

اسمی ترتیبی

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)

ب) نزد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

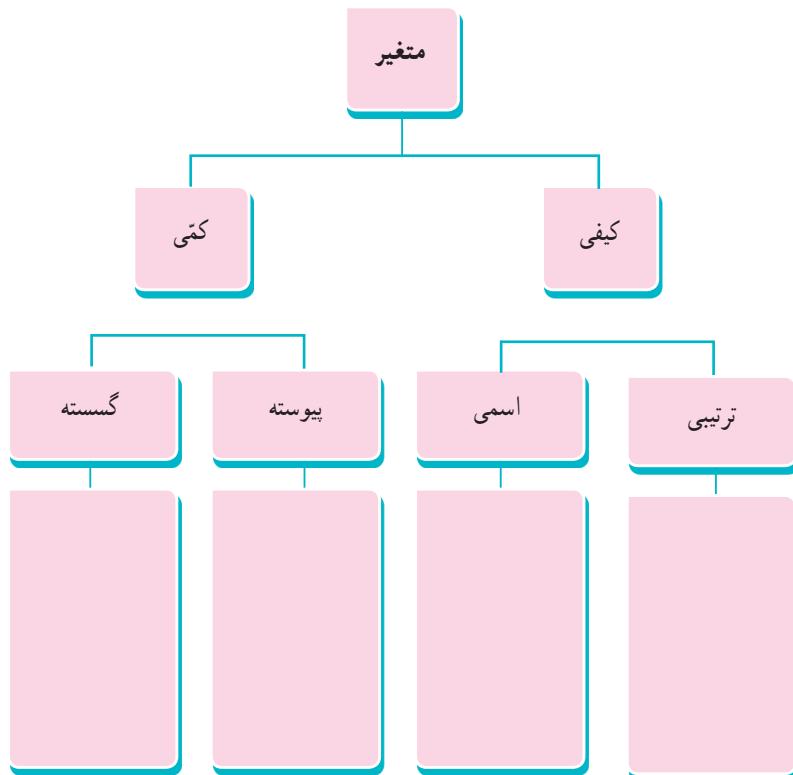
پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)

ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.



نوع متغیر	متغیر
	۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر در یک شهر
	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتایی دارند
	۴- میزان دمای هوا
	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
	۶- انواع وضعیت هوا (آفتایی، ابری، بارانی، برفی)
	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)



درس سوم: متغیرها

۳ جدول زیر متغیرهای دانشآموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گستته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانشآموزان	متغیر اسمی	متغیر ترتیبی	متغیر پیوسته	متغیر گستته	متغیر کیفی	متغیر کمی	سن
نمره ریاضی نهم							
جنسیت (دختر و پسر)							
قد							
وزن							
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)	X				X		
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)							
شاخص توده بدن							

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گستته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳ ، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

?	?	?
?		?
?	?	?

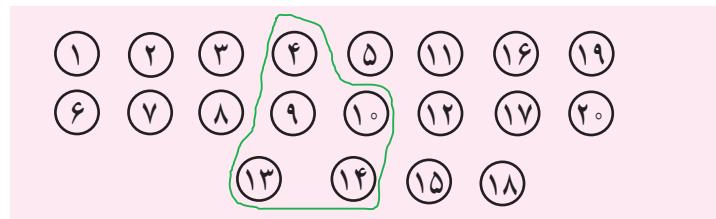
شکل

?	۳	۳
۲	?	۲
?	۱	۱

جدول عددی

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک هر یک مثال بزنید.

۷ شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازه جامعه چه عددی است؟

ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟

پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید.

جدول زیر را کامل کنید.

۸

نوع متغیر	متغیر
	وزن یک هلو
	کیفیت یک هلو
	اندازه طول بدن یوزپلنگ ایرانی
	اقوام ایرانی
	وضعیت آب و هوا
	دماهی هوا در قله
	فشار هوا در قله کوه

