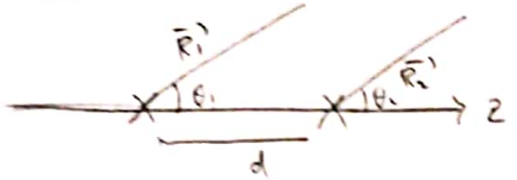
سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری پنجم	تاریخ تحویل: 02/2/13	1

۱- آرایه دو عنصر همسانگرد داریم (Isotropic) با فاصله آن‌ها d است. Endfire هستیم.



Endfire: $\delta = \pm kd$ $\qquad \theta_1 = \theta_2 = \theta$

We know: $D(\theta,\varphi) = 4\pi \dfrac{U(\theta,\varphi)}{P_{rad}}$ $\qquad P_{rad} = \int U(\theta,\varphi)\, d\Omega$, $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

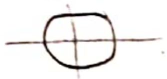
We also know: $U(\theta,\varphi) = R^2\, W_{rad}.\hat{R}$, $W_{rad} = \dfrac{1}{2\eta_0} |\vec{E}|^2 \hat{R}$

$\Rightarrow U(\theta,\varphi) = \dfrac{R^2}{2\eta} |\vec{E}|^2$, $D(\theta,\varphi) = \dfrac{4\pi\, U(\theta,\varphi)}{\iint U(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \longrightarrow$

$$D(\theta,\varphi) = \frac{\frac{4\pi R^2}{2\eta} |\vec{E}|^2}{\iint \frac{R^2}{2\eta} |\vec{E}|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \Rightarrow D(\theta,\varphi) = 4\pi \frac{|\vec{E}|^2}{\iint |\vec{E}|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

$\vec{E}$ = Element pattern $\times \underbrace{AF}_{\text{سازه آرایه}}$ مطابق آنچه در درس آموختیم داریم:

اگر آنتن همسانگرد، ربطی به θ، φ ندارد و کاملاً



است، لذا خواهیم داشت:

$$D(\theta,\varphi) = 4\pi \frac{|AF|^2}{\iint |AF|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \qquad [AF_n] = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right|$$

$$\xrightarrow{N=2} [AF]_n = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin(\psi)}{\sin\psi/2} \right| = \frac{1}{2} |\cos\psi/2| \times 2 = |\cos(\tfrac{\psi}{2})|$$

$\psi = kd\cos\theta + \delta$, $\delta = \pm kd$

آرایه به تقارن ندارد که با $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ تغییر نمی‌کند.

$\Rightarrow \delta = \psi - kd\cos 0 \xrightarrow{\psi=0} \delta = -kd$

لذا اینجانب $\theta=0$ را انتخاب می‌کنم.

$\rightarrow \psi = kd\cos\theta - kd = kd(\cos\theta - 1) \Rightarrow [AF]_n = |\cos(\frac{kd}{2}(\cos\theta - 1))|$

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(\tfrac{kd}{2}(\cos\theta - 1)) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \xrightarrow[\substack{U=\cos\theta \\ dU=-\sin\theta d\theta}]{\text{تغییر متغیر}} -2\pi \int_1^{-1} \cos^2(\tfrac{kd}{2}(U-1))\, dU$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دوم	تاریخ تحویل: 02 / 2 / 3	2

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \cos^2\left(\frac{kd}{2}(v-1)\right) dv = \pi \int_{-1}^{1} 1+\cos(kd(v-1))\,dv = 2\pi + \frac{\pi}{kd}\sin(kd(v-1))\Big|_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow P_{rad} = 2\pi + \frac{\pi}{kd}\sin(2kd)$$

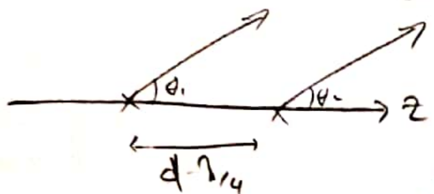
با توجه به این که در این سوال دنبال D_0 هست، صورت باید با ماکسیمم جا

جایگزینی 4π را اختیار کنیم:

$$D_0 = \frac{4\pi}{2\pi + \frac{\pi}{kd}\sin(2kd)} \xrightarrow{k=\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{4}{2+\frac{\lambda}{2\pi d}\sin\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)}$$

$$\Rightarrow D_0 = \frac{2}{1+\frac{\lambda}{4\pi d}\sin\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)}$$

2- آرایه خطی است. دو عنصر همسانگرد، $d=\lambda/4$ در راستای محور z. می‌خواهیم طوری طراحی کنیم که End fire باشد که در واقع یعنی $\delta=-kd$ یعنی $\theta=0$ باشد. پس همین طراحی را برای $\delta=kd$ برای $\theta=\pi$ تکرار می‌کنیم.



$\theta_1=\theta_2=\theta$

در درس دیدیم: $AF=\sum_{n=1}^{N} e^{j(n-1)\psi}$

$$\xrightarrow{N=2} AF = 1+e^{j\psi} = 1+e^{j(kd\cos\theta+\delta)}$$

$$= e^{j\psi/2}\left(e^{-j\psi/2}+e^{j\psi/2}\right) = 2e^{j\psi/2}\cos(\psi/2) \Rightarrow |AF| = 2\cos\left(\frac{kd\cos\theta+\delta}{2}\right)$$

Visible Range $(-kd+\delta,\ kd+\delta) = (\delta-\pi/2,\ \delta+\pi/2)$

نکته‌ای که باید در نظر بگیریم این است که فقط یک لوب اصلی می‌خواهیم. بنابراین برای حالت $\theta=0$، $\theta=\pi$ باید دقت کنیم که مقدار ψ در $2k\pi$ بیشتر از یک بار نیفتد؛

$$\theta=0 \rightarrow \psi = kd\cos\theta+\delta = 0 \rightarrow \delta=-kd = -\frac{2\pi}{\lambda}\times\lambda/4 = -\pi/2$$

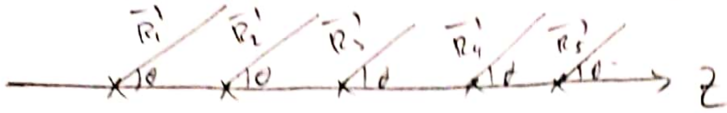
$$\theta=\pi \rightarrow \psi = kd\cos\theta+\delta = 0 \rightarrow \delta=kd = +\frac{2\pi}{\lambda}\times\lambda/4 = \pi/2$$

پس عملاً در این مسأله که در صورت مسأله بود، d را ثابت کرده‌ایم.

سروش مس‌فروش مشهد | نام درس: آنتن ۱ (تکلیف سری سوم) | تاریخ تحویل: 02/2/3

شماره دانشجویی: 810198472

3 - آرایه یکنواخت با N عنصر همسانگرد داریم. در امتداد محور z فاصله المان ها d است. می خواهیم D را بیابیم.



مشابه به سوال ۱ عمل خواهیم کرد. تفاوتی ندارد که با $|AF|$ کار کنیم یا با $[AF]_n$ که نرمالیزه است.

$$D(\theta,\phi)=\frac{4\pi U(\theta,\phi)}{\iint U(\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi}\equiv\frac{4\pi\,\underbrace{[AF]_n}_{max}}{\underbrace{\iint [AF]_n^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{P_{rad}}}$$

$$[AF]_n=\frac{1}{N}\left|\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}\right| \qquad \text{فرض}: \theta=0 \xrightarrow{EndFire} \delta=-kd$$

$$\rightarrow \psi=\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}d}_{kd}(\cos\theta-1) \xrightarrow[\lambda\gg d]{\text{فرض ساده‌سازی}} \psi\ll 1 \rightarrow \sin(\psi/2)=\psi/2$$

$$\rightarrow [AF]_n=\left|\frac{\sin(N\psi/2)}{N\psi/2}\right| \qquad P_{rad}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(N\psi/2)}{(N\psi/2)^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\left(\frac{N\psi}{2}\right)^2}\sin\theta\, d\theta=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\sin\theta\, d\theta$$

$$x=\frac{N}{2}\cdot\frac{2\pi d}{\lambda}(\cos\theta-1)\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dx=-\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\, d\theta, \quad P_{rad}=\frac{-2\lambda}{Nd}\int_0^{-\frac{2N\pi d}{\lambda}}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$$

$$\xrightarrow[N\gg\lambda/d \rightarrow \frac{Nd}{\lambda}\rightarrow\infty]{\text{فرض ساده کننده}} \frac{2\lambda}{Nd}\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\pi/2} \rightarrow P_{rad}=\frac{2\pi\lambda}{Nd2}=\frac{\pi\lambda}{Nd}$$

$$D_0=\frac{4\pi\overbrace{[AF]_n}^{max=1}}{\frac{\pi\lambda}{Nd}}=\frac{4\pi Nd}{\pi\lambda}=\frac{4Nd}{\lambda}$$

---

4 - الف) N المان ایزوتروپیک (Isotropic) در محور z ها داریم. فاصله المان ها d است.

$$[AF]_{Binomial}=(1+z)^{N-1}$$

$$[AF]=(1+z)^3=1+3z+3z^2+z^3, \quad z=e^{j\psi} \rightarrow (AF)=1+3e^{j\psi}+3e^{j2\psi}+e^{j3\psi}$$

$$a_0=1,\ a_1=3,\ a_2=3,\ a_3=1 \xrightarrow[\psi=kd\cos\theta+\delta]{\text{فرض تحریک}} a_0'=1,\ a_1'=3e^{j\delta},\ a_2'=3e^{j2\delta},\ a_3'=e^{j3\delta}$$

4	تاریخ تحویل: 02/2/5	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب)

$[AF] = 1 + 3e^{j\psi} + 3e^{j2\psi} + e^{j3\psi} = 1 + e^{j3\psi} + 3(e^{j\psi} + e^{j2\psi})$

$= e^{+j\frac{3\psi}{2}}(e^{-j3\psi/2} + e^{+j3\psi/2}) + 3e^{j3\psi/2}(e^{-j\psi/2} + e^{j\psi/2})$

$\Rightarrow [AF] = 2e^{j3\psi/2}\cos(3\psi/2) + 6e^{j3\psi/2}\cos(\psi/2)$

$\Rightarrow [AF] = 2e^{j\frac{3\psi}{2}}(\cos(3\psi/2) + 3\cos(\psi/2))$ برای سادگی فرض آنتن ایزو می کنیم لذا $\delta = 0$

$[AF] = 2e^{j\frac{3kd\cos\theta}{2}}\left(\cos\left(\frac{3kd\cos\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{kd\cos\theta}{2}\right)\right)$

$\underline{\text{Ans.}}\quad [AF]_{\text{اندازه}} = 2\cos\left(\frac{3\pi d}{\lambda}\cos\theta\right) + 6\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\right)$

پ) $d = \frac{3\lambda}{4} \Rightarrow [AF]_{\text{اندازه}} = 2\cos\left(\frac{9\pi}{4}\cos\theta\right) + 6\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cos\theta\right)$

$[AF] = 0 \xrightarrow{\frac{3\pi}{4}\cos\theta = x} 2\cos(3x) + 6\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(3x) + 3\cos(x) = 0$

$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^3(x) = 0 \Rightarrow \cos^3(x) = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi$

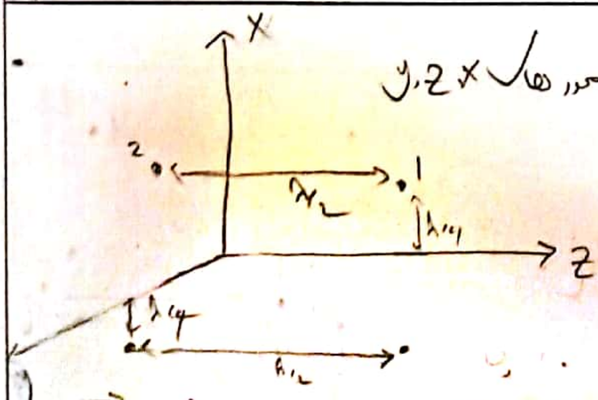
$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}\cos\theta = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \Rightarrow 3/4\cos\theta = \frac{2n-1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4n-2}{3}$

$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2(n-1)}{3}\right) \qquad -1 \leq \cos\theta \leq 1 \Rightarrow n = 1 \text{ or } n = 0$

$\theta = \arccos(+2/3) = 0.84106867 \text{ rad} = 48.18968512909^\circ$

$\theta = \arccos(-2/3) = 2.30052398 \text{ rad} = 131.8103148723$

$\text{Nulls}: 48.18968512909^\circ \text{ and } 131.810314723^\circ$



5 – برای درک بهتر، با شکل جلو می‌رویم. (جای محورهای x, z, y عملاً عوض شده‌اند.) $\hat{R} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$

می خواهیم ساختار آرایه را بیابیم. برای این موضوع برای هر کدام از المان‌ها تا 4 باید $\vec{R'_1}$ را برابر با ... محاسبه کنیم.

$\vec{R'_1} = \lambda/4(\hat{x} + \hat{z}) \quad \vec{R'_2} = \lambda/4(-\hat{z} + \hat{x}) \quad \vec{R'_3} = \frac{\lambda}{4}(-\hat{x} - \hat{z}) \quad \vec{R'_4} = \frac{\lambda}{4}(\hat{z} - \hat{x})$

۵	تاریخ تحویل: 02/2/3	نام درس: آنتن ۱ — تکلیف کامپیوتری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$[AF] = \sum_{i=1}^{4} e^{jk\hat{R}_i'\cdot\hat{R}} = \sum_{i=1}^{4} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\hat{R}_i'\cdot\hat{R}}$$

$$= e^{j\frac{\pi}{2}(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta)} + e^{j\frac{\pi}{2}(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta)} + e^{j\frac{\pi}{2}(-\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta)} + e^{j\frac{\pi}{2}(\cos\theta-\sin\theta\cos\varphi)}$$

$$= e^{j\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi}\left(e^{j\pi/2\cos\theta}+e^{-j\pi/2\cos\theta}\right) + e^{-j\pi/2\sin\theta\cos\varphi}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta}+e^{+j\pi/2\cos\theta}\right)$$

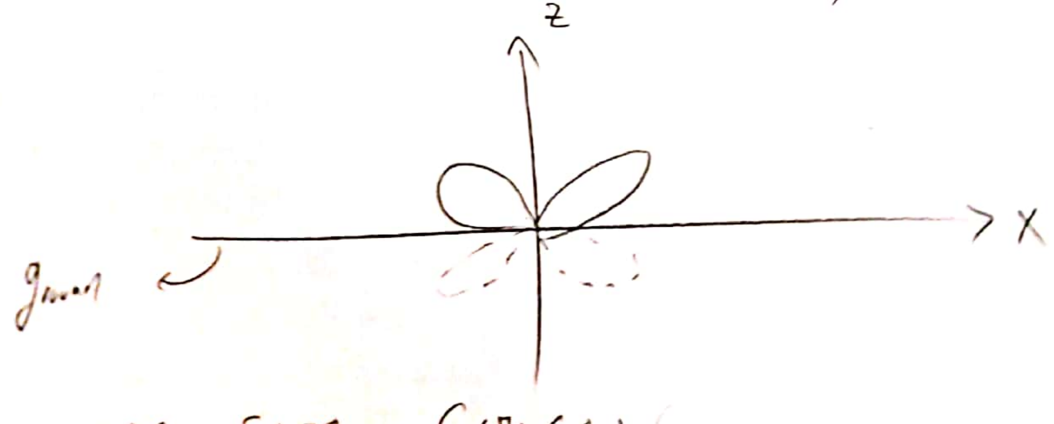
$$= 2\cos(\pi/2\cos\theta)\left[e^{j\pi/2\sin\theta\cos\varphi}+e^{-j\pi/2\sin\theta\cos\varphi}\right]$$

$$\Rightarrow [AF] = 4\cos(\pi/2\cos\theta)\cos(\pi/2\sin\theta\cos\varphi) \xrightarrow{\text{Normalize}} [AF]_n = \cos(\tfrac{\pi}{2}\cos\theta)\cos(\tfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi)$$

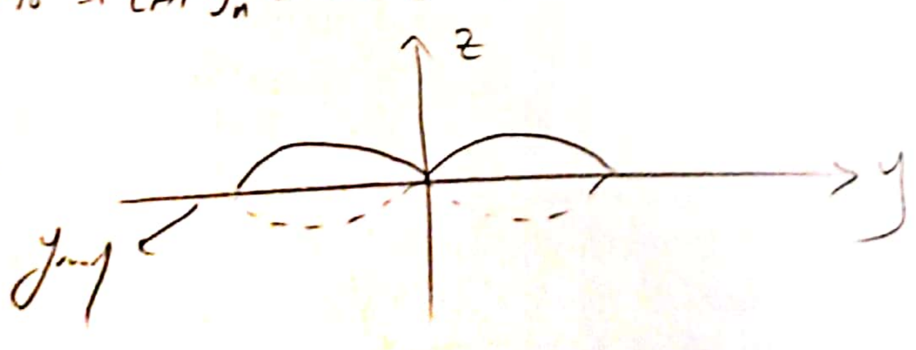
برای رسم الگوی میدان، عملا همان الگوی سازه آرایه را رسم کنیم کافی است

ابتدا برای صفحه XOZ :

$$XOZ:\ \varphi=0 \rightarrow [AF]_n = \cos(\tfrac{\pi}{2}\cos\theta)\cos(\tfrac{\pi}{2}\sin\theta)$$



$$YOZ:\ \varphi=90^\circ \rightarrow [AF]_n = \cos(\pi/2\cos\theta)$$



سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دهم	تاریخ تحویل: 02 / 2 / 3	6

6- انجام ندادم.