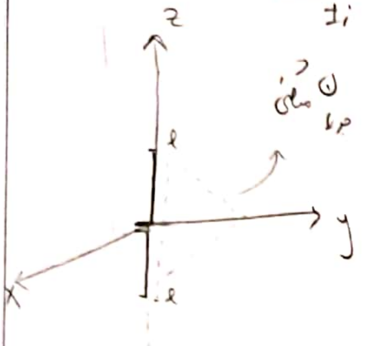
1	تاریخ تحویل: 01/12/22	نام درس: آنتن ۱ — تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

۱-

الف) می‌خواهیم $\vec{h}(\theta,\varphi)$ را برای دو قطبی بسیار کوچک با طول 2ℓ و جریان مثلثی به دست آوریم.

$$\vec{h}(\theta,\varphi) \triangleq \frac{\vec{N}_t(\theta,\varphi)}{I_i} \qquad I_i:\ \text{جریان ورودی آنتن} \qquad , \quad \vec{N}(\theta,\varphi) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{R}')\, e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'} dv'$$



$$\hat{R} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \qquad \vec{R}' = z'\hat{z}$$

$$\rightarrow \hat{R}\cdot\vec{R}' = z'\cos\theta \qquad \vec{N}(\theta,\varphi) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{R}')\, e^{jkz'\cos\theta} dv'$$

$$\vec{J}(\vec{R}')\, dv' = I(z')\,dz' \rightarrow \vec{N}(\theta,\varphi) = \int_{z'=-\ell}^{\ell} I(z')\, e^{jkz'\cos\theta} dz'$$

در درس دیدیم: برای جریان مثلثی $I(z') = \left(1 - \frac{|z'|}{\ell}\right) I_0 \Rightarrow \int_{-\ell}^{\ell} \left(1 - \frac{|z'|}{\ell}\right) I_0 e^{jkz'\cos\theta} dz'\,\hat{z}$

$$e^{\circ} \overset{\text{taylor}}{=} 1 + \circ + \cdots \Rightarrow \vec{N}(\theta,\varphi) = I_0 \int_{-\ell}^{\ell} \left(1 - \frac{|z'|}{\ell}\right) \hat{z}\, dz' = 2I_0 \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{z'}{\ell}\right) dz'\,\hat{z}$$

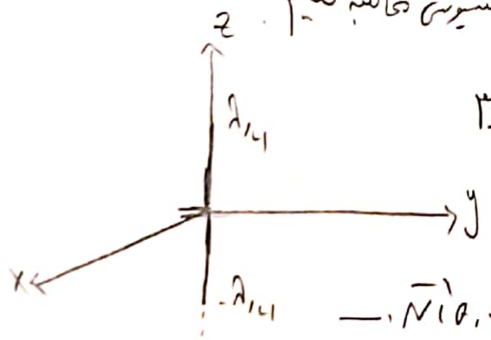
$$= 2I_0 \left(z' - \frac{z'^2}{2\ell}\right)\Big|_0^{\ell} \hat{z} = 2\left(\ell - \frac{\ell^2}{2\ell}\right)\hat{z} = \ell I_0 \hat{z}, \qquad \vec{N}(\theta,\varphi) = \vec{N}_t(\theta,\varphi) + \hat{R}\, N_R(\theta,\varphi) \ \ \text{farfield}$$

$$\vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{\vec{N}_t(\theta,\varphi)}{I_i} \xrightarrow{I_i = I_0} \vec{h}(\theta,\varphi) = \ell\hat{z} \qquad \hat{z} \underset{\text{farfield}}{=} \cos\theta\,\hat{R} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\longrightarrow \vec{h}(\theta,\varphi) = -\ell\sin\theta\,\hat{\theta}$$

ب) در اینجا می‌خواهیم $\vec{h}(\theta,\varphi)$ را برای دو قطبی نیم موج با توزیع جریان سینوسی محاسبه کنیم.

در این آنتن $\ell = \lambda/2$ می‌دانیم: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$



$$\hat{R}\cdot\vec{R}' = z'\cos\theta \qquad \vec{N}(\theta,\varphi) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{R}')\, e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'} dv'$$

$$\longrightarrow \vec{N}(\theta,\varphi) = \hat{z}\int_{V'} \vec{J}(\vec{R}')\, e^{jkz'\cos\theta} dz'$$

در فصل دوم کتاب Balanis جریان سینوسی برای $-\ell/2 \le z' \le \ell/2$ به صورت زیر معرفی شده است: $I(z') = I_0 \cos\left(\frac{\pi}{\ell} z'\right)\hat{z}$.

در اینجا با توجه به اینکه $\ell = \lambda/2$ فرض شده، خواهیم داشت:

$$I(z') = I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z'\right)\hat{z}$$

$$\rightarrow \vec{N}(\theta,\varphi) = \hat{z}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z'\right) e^{jkz'\cos\theta} dz' \overset{\text{اویلر}}{=} \hat{z} I_0 \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(kz')\left(\cos(kz'\cos\theta) + j\sin(kz'\cos\theta)\right) dz' = \hat{z} I_0 \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(kz')\cos(kz'\cos\theta)\, dz' + \underbrace{\hat{z} I_0 \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} j\cos(kz')\sin(kz'\cos\theta)\, dz'}_{\text{فرد}}$$

2	تاریخ تحویل: 01/12/22	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$\vec{N}'(\theta,\varphi) = \hat{z} I_0 \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(kz')\cos(kz'\cos\theta)\,dz'$ میدانیم: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\rightarrow \vec{N}'(\theta,\varphi) = \frac{\hat{z} I_0}{2}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos(kz'(1+\cos\theta))\,dz' + \frac{\hat{z} I_0}{2}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos(kz'(1-\cos\theta))\,dz'$

$= \frac{\hat{z} I_0}{2}\left[\frac{+1}{k(1+\cos\theta)}\sin(kz'(1+\cos\theta)) + \frac{1}{k(1-\cos\theta)}\sin(kz'(1-\cos\theta))\right]_{-\lambda/4}^{\lambda/4}$

$= \hat{z} I_0\left[\frac{1}{k(1+\cos\theta)}\sin(kz'(1+\cos\theta)) + \frac{1}{k(1-\cos\theta)}\sin(kz'(1-\cos\theta))\right]_{0}^{\lambda/4}$

$= \hat{z} I_0\left[\frac{\sin(\frac{k\lambda}{4}(1+\cos\theta))}{k(1+\cos\theta)} + \frac{\sin(\frac{k\lambda}{4}(1-\cos\theta))}{k(1-\cos\theta)}\right] \xrightarrow{k=\frac{2\pi}{\lambda}}$

$= \frac{\hat{z} I_0 \lambda}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{1+\cos\theta} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\pi/2\cos\theta)}{1-\cos\theta}\right] \xrightarrow{\sin(\pi/2\pm x)=\cos x}$

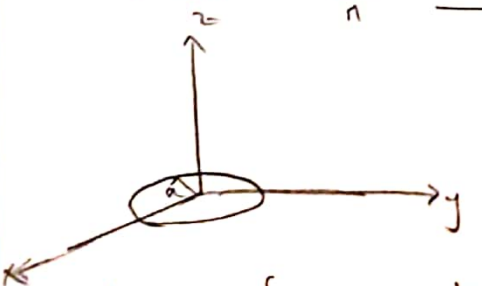
$= \frac{\hat{z} I_0 \lambda}{2\pi}\left[\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{1+\cos\theta} + \frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{1-\cos\theta}\right] = \frac{\hat{z} I_0 \lambda}{\pi}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$\rightarrow \vec{N}'(\theta,\varphi) = N_t(\theta,\varphi) + \hat{R}\underbrace{\overset{0}{N_R(\theta,\varphi)}}_{\text{far field}}$, $\vec{N}'(\theta,\varphi) = \frac{\hat{z} I_0 \lambda}{\pi}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\rightarrow \vec{N}'(\theta,\varphi) = N_t(\theta,\varphi) = -\frac{I_0\lambda}{\pi}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}$ $\vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{\vec{N}_t(\theta,\varphi)}{I_i}$

$\rightarrow \vec{h}(\theta,\varphi) = -\frac{\lambda}{\pi}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}$ or $\vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{-2}{k}\frac{\cos(\pi/2\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}$

ب) در این قسمت حلقه جریان را بررسی می‌کنیم.



$I_{loop} = I_0\hat{\varphi}'$

بنا به تقارن کروی، حلقه به صورت زیر است،

$\vec{N}'(\theta,\varphi) = \int_{V'} \vec{J}'(\vec{R}')\, e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'}$

$\hat{R} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$

$\vec{R}' = a\cos\varphi'\,\hat{x} + a\sin\varphi'\,\hat{y}$

$\hat{\varphi}' = -\sin\varphi'\,\hat{x} + \cos\varphi'\,\hat{y}$

$\rightarrow \hat{R}\cdot\vec{R}' = a\sin\theta(\cos\varphi\cos\varphi' + a\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi' = a\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')$

$\rightarrow \vec{N}'(\theta,\varphi) = \int I_0\hat{\varphi}' e^{jka\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')}\,d\varphi'$ حال باید $\hat{\varphi}'$ را استاندارد کرد سپس در ادامه داریم (صفحه بعد)

$$\vec{N}(\theta,\varphi) = -I_0\hat{x}\int_0^{2\pi} \sin\varphi' e^{jka\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')} a\,d\varphi' + I_0\hat{y}\int_0^{2\pi}\cos\varphi' e^{jka\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')} a\,d\varphi'$$

با توجه به این که حلقه بسیار کوچک است: $e^{jka\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')} \approx 1 + jka\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')$ سری تیلور [illegible]

$$\vec{N}(\theta,\varphi) = -I_0\sin\theta\hat{x}\int_0^{2\pi}\sin\varphi' a\,d\varphi' + I_0\sin\theta\hat{y}\int_0^{2\pi}\cos\varphi' a\,d\varphi' - I_0\sin\theta\hat{x}\int_0^{2\pi}\sin\varphi' jka^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi'$$

$$+I_0\sin\theta\hat{y}\int_0^{2\pi}\cos\varphi' jka^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = -I_0\sin\theta\hat{x}\int_0^{2\pi}\sin\varphi' jka^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi'$$

$$+I_0\sin\theta\hat{y}\int_0^{2\pi}\cos\varphi' jka^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = -jka^2I_0\sin\theta\hat{x}\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi' + jka^2I_0\sin\theta\hat{y}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = -\frac{jka^2I_0\sin\theta}{2}\hat{x}\int_0^{2\pi}[\sin(\varphi) + \sin(2\varphi'-\varphi)]\,d\varphi'$$

$$+\frac{jka^2I_0\sin\theta}{2}\hat{y}\int_0^{2\pi}[\cos(\varphi) + \cos(2\varphi'-\varphi)]\,d\varphi' = -\frac{jka^2I_0\sin\theta}{2}(2\pi\sin\varphi)\hat{x} + \frac{jka^2I_0\sin\theta}{2}2\pi\cos\varphi\,\hat{y}$$

$$= -j\pi ka^2I_0\sin\theta\sin\varphi\,\hat{x} + j\pi ka^2I_0\sin\theta\cos\varphi\,\hat{y}\ ,\quad \hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{N}(\theta,\varphi) = j\pi ka^2I_0\sin\theta\hat{\varphi}}_{\text{از اینجا داریم}\ \to N(\theta,\varphi)} \qquad \vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{j\pi ka^2I_0\sin\theta}{I_0}\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{h}(\theta,\varphi) = j\pi ka^2\sin\theta\,\hat{\varphi} \quad \text{or} \quad \vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{2j\pi^2a^2}{\lambda}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

ت) در این قسمت $\vec{h}(\theta,\varphi)$ را برای دوقطبی نیم‌موج خمیده حساب می‌کنیم. این کار مثل حالتی است که از دوقطبی بخش ب مربوط با دامنه $2I_0$ تشکیل شده. پس می‌توانیم از رابطه به دست آمده برای $\vec{h}(\theta,\varphi)$ استفاده کنیم، فقط باید تغییر در I_0 را لحاظ کنیم پس داریم:

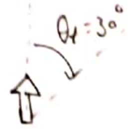
$$\vec{h}(\theta,\varphi) = -\frac{2\lambda}{\pi}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta} \quad \text{or} \quad \vec{h}(\theta,\varphi) = -\frac{4}{k}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\theta)}{\sin\theta}\hat{\theta}$$

2 - الف)

$\lambda = 10m,\ R = 1000m,\ \theta_t = 30$ آنتن فرستنده: دوقطبی بسیار کوچک

$\theta_r = 150°$

در این حالت آنتن گیرنده نیز یک دوقطبی بسیار کوچک موازی با فرستنده است.



$$T = \frac{P_t}{P_r} = ?\qquad \text{Friis: } \frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_r D_t\, P\, q$$

$$P = q = 1 \Rightarrow \frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_r D_t \qquad \frac{\lambda}{4\pi R} = \frac{10}{4\pi \times 1000} = \frac{1}{400\pi}$$

چیزی که اینجا برای ما مشکل است، محاسبهٔ راستاوری آنتن فرستنده و گیرنده است

یادآوری:

$$D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi\, U(\theta,\varphi)}{P_{rad}} \qquad P_{rad} = \int U(\theta,\varphi)\, d\Omega$$

برای دوقطبی بسیار کوچک، $\vec{E} = \frac{Z_0\, jkc\, e^{-jkR}}{4\pi R} \sin\theta\, \hat{\theta}$, $W_{rad} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{k^2 (I\,dl)^2}{16\pi^2 R^2} \sin^2\theta\, \hat{R}$

$$U(\theta,\varphi) = R^2 W_{rad} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{k^2 (I\,dl)^2}{16\pi^2} \sin^2\theta \ ,\quad P_{rad} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{Z_0 k^2 (I\,dl)^2}{32\pi^2} \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{Z_0 k^2 (I\,dl)^2}{32\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{Z_0 k^2 (I\,dl)^2}{16\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} = \frac{Z_0 k^2 (I\,dl)^2}{12\pi}$$

$$\rightarrow D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi\, U(\theta,\varphi)}{P_{rad}} = \frac{\frac{2\pi\, Z_0 k^2 (I\,dl)^2 \sin^2\theta}{16\pi^2}}{\frac{Z_0 k^2 (I\,d)^2}{12\pi}} = \frac{3}{2} \sin^2\theta$$

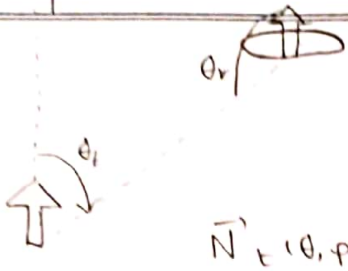
$$D_t = \frac{3}{2} \sin^2(30°) = \frac{3}{8} \qquad D_r = \frac{3}{2} \sin^2(150°) = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow \frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{1}{400\pi}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 8.905182156 \times 10^{-8}$$

q را خودمان فرض کردیم که ۱ است. اما برای P میتوان استدلال دقیق آورد.

$$P = \frac{|\vec{h}_r \cdot \vec{h}_t|^2}{|\vec{h}_r|^2\, |\vec{h}_t|^2} \ ,\qquad \vec{h}(\theta,\varphi) = \frac{\vec{N}_t(\theta,\varphi)}{I_0}$$

چون فرستنده و گیرنده هم‌راستا هستند پس $P = 1$ است.



ب) آنتن ویلر هم Dipole دارد هم حلقه، لذا برای $\vec N'$ آن خواهیم داشت:

$$\vec N'_t(\theta,\varphi)_{ویلر} = \vec N'_t(\theta,\varphi)_{حلقه} + \vec N'_t(\theta,\varphi)_{Dipole}$$

$$\vec N'_t(\theta,\varphi)_{Dipole} = a_1 \sin\theta\,\hat\theta \qquad \vec N'_t(\theta,\varphi)_{حلقه} = b_1 \sin\theta\,\hat\varphi$$

a_1 و b_1 جهت سادگی آورده شده‌اند، متناسب با شرایط آنتن‌ها به ترتیب $a_1 = -\ell I_0$ ، $b = \frac{2j\pi^2 a^2}{\lambda} I_0$ می‌باشد.

در ادامه داریم: $D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi|\vec N'^{\,ویلر}_t|^2}{\iint |\vec N'^{\,ویلر}_t|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$ ، $\vec N'_t(\theta,\varphi)_{ویلر} = a_1\sin\theta\,\hat\theta + b_1\sin\theta\,\hat\varphi$

$$\to |\vec N'_t(\theta,\varphi)_{ویلر}|^2 = (a_1^2+b_1^2)\sin^2\theta \qquad P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(a_1^2+b_1^2)\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{8\pi}{3}(a_1^2+b_1^2)$$

$$\to D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi\times(a_1^2+b_1^2)\sin^2\theta}{\frac{8\pi}{3}(a_1^2+b_1^2)} = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

(مشابه آنتن Dipole)

$$D(\theta,\varphi)_{wheeler} = \frac{3}{2}\sin^2\theta \quad , \quad \text{Friis: } \frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_r D_t P q$$

$$q = 1 \quad , \quad \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right) = \frac{1}{400\pi} \quad , \quad \frac{P_r}{P_t} = P\cdot(8.9051821561\times 10^{-8})$$

حالا باید مقدار P را بدست آوریم.

$$P = \frac{|\vec E_t\cdot\vec h_r|^2}{|\vec E_t|^2\cdot|\vec h_r|^2} \quad , \quad \vec E_t = \frac{\overbrace{Z_0 jk}^{c}\, c\, e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat\theta$$

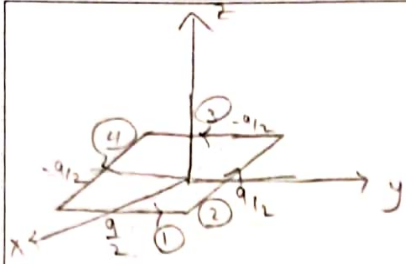
$$\vec h_r = \vec h_{Dipole} + \vec h_{حلقه} = \underbrace{\frac{a_1}{I_0}}_{a_1'}\sin\theta\,\hat\theta + \underbrace{\frac{b_1}{I_0}}_{b_1'}\sin\theta\,\hat\varphi = a_1'\sin\theta\,\hat\theta + b_1'\sin\theta\,\hat\varphi$$

$$\Rightarrow P = \frac{|c a_1' \sin^2\theta|^2}{(a_1'^2+b_1'^2)\sin^2\theta\cdot c^2\sin^2\theta} \to P = \frac{c^2 a_1'^2\sin^4\theta}{(a_1'^2+b_1'^2)c^2\sin^4\theta} = \frac{a_1'^2}{(a_1'^2+b_1'^2)}$$

$$\to \frac{P_r}{P_t} = \frac{a_1'^2}{a_1'^2+b_1'^2}\cdot 8.9051821561\times 10^{-8}$$

Scanned by CamScanner

6	تاریخ تحویل: 01/12/22	نام درس: آنتن ۱ تمرین سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472



3 - الف) برای به دست آوردن $\vec{E}$ ، $\vec{H}$ نیاز داریم که ابتدا $\vec{A}(\vec{R})$ را به دست آوریم:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R}\int_{V'} \vec{J}(\vec{R}') e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'} dv'$$

$$\vec{J}(\vec{R}')dv' = I(\vec{R}')d\vec{l}'$$

چون جریان در مسیر ثابت است.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi} I \oint_C \frac{e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'}}{|\vec{R}-\vec{R}'|} d\vec{l}'$$

راه دور: $|\vec{R}-\vec{R}'| \approx R - \hat{R}\cdot\vec{R}'$

C: مسیر حول مربع

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R} I \oint_C \frac{e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'}}{1-\frac{\hat{R}\cdot\vec{R}'}{R}} d\vec{l}'$$

$$\overset{\text{تقریب}}{=} \frac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R} I \oint e^{jk\hat{R}\cdot\vec{R}'}\left(1+\frac{\hat{R}\cdot\vec{R}'}{R}\right)$$

برای هر کدام از مسیرها 1، 2، 3، 4 باید انتگرال بگیریم. با کمک تیلور بسط می‌کنیم.

$$\hat{R} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \qquad 1: \vec{R}' = \frac{a}{2}\hat{x} + y'\hat{y}$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R}\hat{y}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jk\left(\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi\right)}\left(1+\frac{a/2\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi}{R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jka/2\sin\theta\cos\varphi}\left[\hat{y}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jky'\sin\theta\sin\varphi}dy' + \hat{y}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jky'\sin\theta\sin\varphi}\left[\frac{\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}{R} + \frac{y'\sin\theta\sin\varphi}{R}\right]dy'\right]$$

$$\xrightarrow[\sin\theta\sin\varphi = g]{\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi = f} \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jkf}\left[\hat{y}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jkgy'}dy' + \hat{y}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jkgy'}\frac{f+gy'}{R}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jkf}\left[\hat{y}\frac{2}{kg}\sin\left(\frac{kga}{2}\right) + \hat{y}\frac{f}{R}\cdot\frac{2}{kg}\sin\left(\frac{kga}{2}\right) + \frac{2j\sin\left(\frac{kga}{2}\right)}{Rgk^2}\hat{y} - \frac{jkga\cos\left(\frac{kga}{2}\right)}{Rgk^2}\hat{y}\right] = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jkf}\left[a\hat{y} + \frac{af}{R}\hat{y} + \frac{aj}{Rk}\hat{y} - \frac{aj}{Rk}\hat{y}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jkf}\left[a\hat{y} + \frac{af}{R}\hat{y}\right] = \frac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R} e^{jk\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}\left[a\left(1+\frac{\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}{R}\right)\hat{y}\right]$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R} e^{jk\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}\, a\left(1+\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{2R}\right)\hat{y}$$

7	تاریخ تحویل: 01 / 12 / 22	نام درس: تمرین ۱ تحلیل سیستم دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

② : $\vec{R'} = x'\hat{x} + a/2\,\hat{y}$, $\hat{R}.\vec{R'} = x' \underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{f} + a/2 \underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{g}$

$$A_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} e^{-jkR}(-\hat{x})\int_{-a/2}^{a/2} e^{jk(fx'+g)}\left(1+\frac{fx'+g}{R}\right)dx' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} e^{-jkR} e^{jkg}\hat{x}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jkfx'}\left(1+\frac{fx'+g}{R}\right)dx'$$

$$= -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R}\cdot e^{jkg}\left[\hat{x}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jkfx'}dx' + \hat{x}\int_{-a/2}^{a/2} e^{jkfx'}\frac{fx'+g}{R}dx'\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{jkg}\left[\hat{x}\frac{2}{kf}\sin\left(\frac{kfa}{2}\right) + \left(\frac{2j\sin\left(\frac{kfa}{2}\right) - jkfa\cos\left(\frac{kfa}{2}\right)}{Rfk^2}\right)\hat{x} + \hat{x}\frac{g}{R}\frac{2}{kf}\sin\left(\frac{kfa}{2}\right)\right] = -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{jkg}\left[a\hat{x} + a\frac{g}{R}\hat{x} + \frac{aj}{Rk}\hat{x} - \frac{aj}{Rk}\hat{x}\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{jkg} a(1+g/R)\hat{x} \Rightarrow A_2 = -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{jk\frac{a}{2}\sin\theta\sin\varphi} a\left[1+\frac{a\sin\theta\sin\varphi}{2R}\right]\hat{x}$$

مسیر ③ دقیقاً مشابه مسیر ① ، مسیر ④ دقیقاً مشابه مسیر ② است، صرفاً با توجه به $\vec{R'}$ تعریف

③ : $\vec{R'} = -a/2\,\hat{x} + y'\hat{y}$

باید مراقب علامت + و - باشیم، داریم:

$$\Longrightarrow A_3 = -\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{-jk\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi} a\left(1-\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{2R}\right)\hat{y}$$

④ : $\vec{R'} = x'\hat{x} - a/2\,\hat{y} \Rightarrow A_4 = +\frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} e^{-jk\frac{a}{2}\sin\theta\sin\varphi} a\left(1-\frac{a\sin\theta\sin\varphi}{2R}\right)\hat{x}$

$$\vec{A'}(\vec{R'}) = \sum_{i=1}^{4} A_i$$

پس حالا می‌توانیم $\vec{A}(\vec{R})$ را عرضه کنیم.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R} a\Big(e^{jk\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}\left(1+\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{2R}\right)\hat{y} - e^{jk\frac{a}{2}\sin\theta\sin\varphi}\left(1+\frac{a\sin\theta\sin\varphi}{2R}\right)\hat{x}$$

$$- e^{-jk\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi}\left(1-\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{2R}\right)\hat{y} + e^{-jk\frac{a}{2}\sin\theta\sin\varphi}\left(1-\frac{a\sin\theta\sin\varphi}{2R}\right)\hat{x}\Big)$$

$$= \frac{\mu_0 I e^{-jkR}}{4\pi R}\Bigg[\left(a2j\sin(ka/2\sin\theta\cos\varphi) + \frac{a^2\sin\theta\cos\varphi}{R}\cos\left(k\frac{a}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)\right)\hat{y} +$$

$$\left(-a^2 j\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\varphi\right) - a^2\frac{\sin\theta\sin\varphi}{R}\cos\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)\right)\hat{x}\Bigg] \xrightarrow{a\ll\lambda \to ak\ll 1}$$

$$\to \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R}\left[\left(+jka^2\sin\theta\cos\varphi + \frac{a^2\sin\theta\cos\varphi}{R}\right)\hat{y} + \left(-jka^2\sin\theta\sin\varphi + \frac{a^2\sin\theta\cos\varphi}{R}\right)\hat{x}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R}a^2\sin\theta\left[\left(jk+\frac{1}{R}\right)\cos\varphi\,\hat{y} - \left(jk+\frac{1}{R}\right)\sin\varphi\,\hat{x}\right]$$

$$\xrightarrow{\hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y}} \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 e^{-jkR} I}{4\pi R}a^2\sin\theta\left(jk+\frac{1}{R}\right)\hat{\varphi}$$

$$\longrightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0(a^2 I)e^{-jkR}}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{jk}{R}\right)\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\text{Far field}} \vec{A}(\vec{R}) = \frac{j\mu_0(a^2 I)e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = -j\omega A_t = -j\omega A_\varphi\hat{\varphi} = \frac{Z_0 k^2\overbrace{(a^2 I)}^{m}e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{H}(R) = \frac{\hat{R}\times\vec{E}(\vec{R})}{Z_0} = \frac{-k^2(a^2 I)e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

ب) ابتدا با حلقه مقایسه می‌کنیم. طبق آنچه در درس دیدیم داریم:

$$\vec{A}_{loop}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I a e^{-jkR}}{4\pi R}\cdot jka\pi\sin\theta\left(1-\frac{j}{kR}\right)\hat{\varphi} \xrightarrow{\text{Far field}} \vec{A}_{loop}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I a e^{-jkR}}{4\pi R}jka\pi\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$m_{loop} = I\pi a^2 \longrightarrow \vec{A}_{loop}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 m e^{-jkR}}{4\pi R}jk\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

اگر $m_{Square} = m_{loop}$ باشد، $\vec{A}$ دو آنتن‌ها یکسان است.

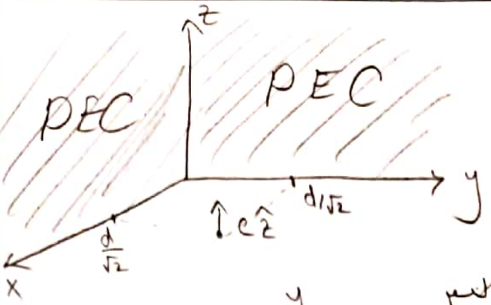
حال سراغ Dipole خواهیم رفت. در درس دیدیم:

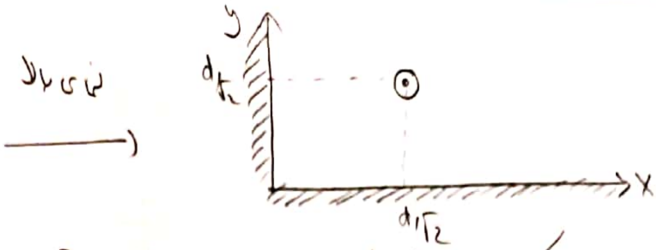
$$\vec{A}_{Dipole}(\vec{R}) = \frac{\mu_0\overbrace{(2lI_0)}^{m_{Dip}}e^{-jkR}}{4\pi R}\hat{z} \xrightarrow{\text{Far field}} -\frac{\mu_0 m_{Dip}e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{A}_{Dipole}(\vec{R}) = -\frac{\mu_0 m_{Dip}e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat{\theta}, \qquad \vec{A}_{Square}(\vec{R}) = -jk\frac{m}{m_{Dip}}\left(\vec{A}_{Dipole}(\vec{R})\cdot\hat{\theta}\right)\hat{\varphi}$$

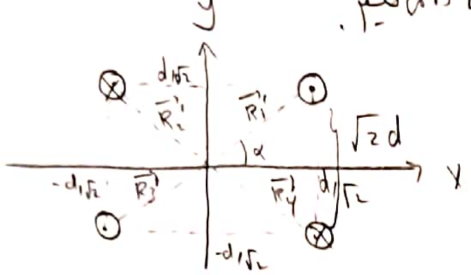
سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دوم	تاریخ تحویل: 01 / 12 / 22	9

-4





مطابق آنچه در الکترومغناطیس آموختیم، از تکنیک تصاویر استفاده می‌کنیم.



در درسنامه ۳: $\vec A_{single}(\vec R) = \underset{\text{راه دور}}{\underbrace{-\frac{M_0 c e^{-jkR}}{4\pi R}}} \sin\theta\,\hat\theta$

$$\Rightarrow \vec A_{tot}(\vec R) = -\frac{M_0 c e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat\theta\left[e^{jk\vec R_1'\cdot\hat R} - e^{+jk\vec R_2'\cdot\hat R} + e^{jk\vec R_3'\cdot\hat R} - e^{+jk\vec R_4'\cdot\hat R}\right]$$

$$= -\frac{M_0 c e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat\theta\left[e^{jk\frac{d}{\sqrt2}(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)} - e^{+jk\frac{d}{\sqrt2}(-\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)}\right.$$

$$\left.+ e^{jkd/\sqrt2(-\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)} - e^{jkd/\sqrt2(\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)}\right]$$

$$= -\frac{M_0 c e^{-jkR}}{4\pi R}\sin\theta\,\hat\theta\left[e^{jk\frac{d}{\sqrt2}\sin\theta\sin\varphi} - e^{-jkd/\sqrt2\sin\theta\sin\varphi}\right]\left[e^{jk\frac{d}{\sqrt2}\sin\theta\cos\varphi} - e^{-jk\frac{d}{\sqrt2}\sin\theta\cos\varphi}\right]$$

$$\rightarrow \vec A_{tot}(\vec R) = \frac{-M_0 c e^{-jkR}}{4\pi R}\,2j\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\sin\varphi)\,2j\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\,\hat\theta$$

$$\rightarrow \vec A_{tot}(\vec R) = \frac{M_0 c e^{-jkR}}{\pi R}\sin\theta\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\sin\varphi)\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\cos\varphi)\,\hat\theta$$

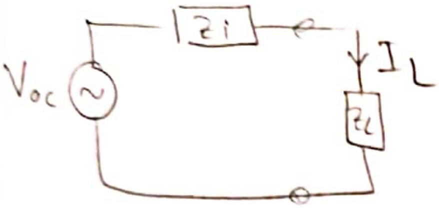
$$\vec E(\vec R) = -j\omega A_t = \frac{-jkz_0c}{\pi}\sin\theta\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\sin\varphi)\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\cos\varphi)\,\hat\theta$$

$$\vec H(\vec R) = \frac{\hat R\times\vec E(\vec R)}{z_0} = \frac{jkz_0c}{\pi}\sin\theta\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\sin\varphi)\sin(kd/\sqrt2\sin\theta\cos\varphi)\,\hat\varphi$$

پس مسئله به پاسخ رسید.

10	تاریخ تحویل: 01/12/22	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

۵ - یک مدل مداری برای آنتن ارائه می‌کنیم.



$Z_i = R_i + jX_i \qquad Z_L = R_L + jX_L$

$I_L = \dfrac{V_{oc}}{Z_i + Z_L}, \quad P_L = \dfrac{1}{2} R_L |I_L|^2$

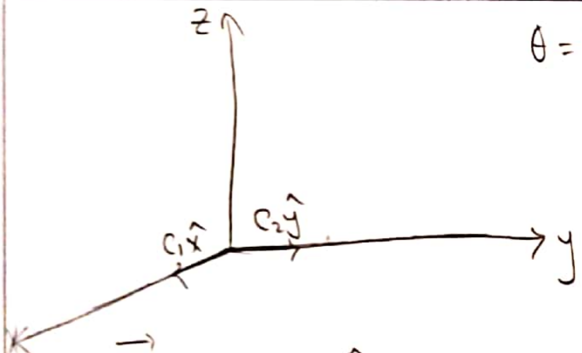
$\longrightarrow P_L = \dfrac{|V_{oc}|^2}{|Z_i + Z_L|^2} \dfrac{R_L}{2}$ تطبیق : $Z_i = Z_L^* \longrightarrow R_i = R_L$, $X_i = -X_L$

$\longrightarrow P_{L_{\text{تطبیق}}} = \dfrac{R_i |V_{oc}|^2}{4R_i^2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{|V_{oc}|^2}{8R_i}, \quad q = \dfrac{P_L}{P_{L_{\text{تطبیق}}}} = \dfrac{\dfrac{|V_{oc}|^2}{|Z_i+Z_L|^2}\dfrac{R_L}{2}}{\dfrac{|V_{oc}|^2}{8R_i}}$

$\longrightarrow q = \dfrac{4R_i R_L}{|Z_i + Z_L|^2}$

---

۶ -



$\theta = 30°, \quad \varphi = 45°, \quad C_2 = jC_1$

$\hat{x} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi} + \sin\theta\cos\varphi\,\hat{R}$

$\hat{y} = \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{R}$

می‌دانیم که برای دو قطبی‌ها $\vec{C} = \vec{N}(\theta,\varphi)$ پس خواهیم داشت:

$\vec{N}_1(\theta,\varphi) = C_1\hat{x}, \quad \vec{N}_2(\theta,\varphi) = C_2\hat{y}$ ، می‌دانیم: $\vec{N}(\theta,\varphi) = \vec{N}_t(\theta,\varphi) + \hat{R}N_R(\theta,\varphi)$ far field

$\longrightarrow \vec{N}_{1t}(\theta,\varphi) = C_1\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - C_1\sin\varphi\,\hat{\varphi} \qquad \vec{N}_{2t}(\theta,\varphi) = C_2\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + C_2\cos\varphi\,\hat{\varphi}$

$\vec{A}_{\text{Dipole}}(\vec{R}) = \dfrac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R}\vec{N}_t(\theta,\varphi), \quad \vec{A}_{tot}(\vec{R}) = \dfrac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R}\Big[(C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi)\cos\theta\,\hat{\theta}$

$+ (C_2\cos\varphi - C_1\sin\varphi)\,\hat{\varphi}\Big] \xrightarrow[\theta = 30°,\ \varphi = 45°]{C_2 = jC_1} \vec{A}_{tot}(\vec{R}) = \dfrac{\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R}\Big[(C_1 + jC_1)\dfrac{\sqrt{6}}{4}\hat{\theta} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(jC_1 - C_1)\hat{\varphi}\Big]$

$\longrightarrow \vec{A}_{tot}(\vec{R}) = \dfrac{\mu_0 e^{-jkR}C_1}{4\pi R}\Big[(1+j)\dfrac{\sqrt{6}}{4}\hat{\theta} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(j-1)\hat{\varphi}\Big], \quad \vec{E} = -j\omega\vec{A}_t$

$\longrightarrow \vec{E}(\vec{R}) = \dfrac{-j\omega\mu_0 e^{-jkR}C_1}{4\pi R}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big[(1+j)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\theta} + (-1+j)\hat{\varphi}\Big]$

$\longrightarrow \vec{E}(\vec{R}) = \dfrac{j\omega\mu_0 e^{-jkR}}{4\pi R}C_1\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big[\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-j3\pi/4}\hat{\theta} + e^{-j\pi/4}\hat{\varphi}\Big]$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری (۱۰)	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۱۲ / ۲۲	11

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$ ، $\varphi_1 = -\frac{3\pi}{4}$ ، پلاریزاسیون بیضوی خواهیم داشت ⟵ $\Rightarrow \vec{E}(\vec{R}) = E_\theta \hat{\theta} + E_\varphi \hat{\varphi}$

۷- انجام شد.