1	تاریخ تحویل: 2/3/13	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری دهم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

1-

$$\underbrace{K(z-z')}_{\text{Kernel}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{(z-z')^2+4a^2\sin^2(\varphi'/2)}}$$

Kernel هسته انتگرال

ایراد در صورت سوال

$$\xi = \frac{|z-z'|}{2a}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$K(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{2a\sqrt{(z-z')^2+\sin^2\frac{\varphi'}{2}}} = \frac{1}{4\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{(z-z')^2+\sin^2\varphi'/2}}$$

اعمال تغییر متغیر ξ

$$K(z-z') = \frac{1}{4\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\xi^2+\sin^2\varphi'/2}} \qquad \sin^2\frac{\varphi'}{2} \to \text{Even}$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_{0}^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\xi^2+\sin^2\varphi'/2}}$$

باید سعی کنیم β را در انتگرال بیاوریم.

می‌دانیم $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \Leftarrow$

$$K(z-z') = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\xi^2+1-\cos^2\varphi'/2}} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{(1+\xi^2)\left[1-\frac{1}{1+\xi^2}\cos^2(\varphi'/2)\right]}}$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\xi^2}\cos^2(\varphi'/2)}} \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$K(z-z') = \frac{\beta}{2\pi a}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi'/2)}} \qquad x = \pi/2 - \varphi'/2$$

$$\Rightarrow K(z-z') = \frac{\beta}{2\pi a}\times\int_{\pi/2}^{0} -\frac{2\,dx}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2 x}} \Rightarrow K(z-z') = \frac{\beta}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2 x}}$$

$$\Longrightarrow K(z-z') = \frac{\beta}{\pi a}K(\beta), \quad K(\beta) = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2 x}}$$

ثابت ⟸ انتگرال بیضوی کامل نوع اول: $K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: آنتن ۱ — تکلیف سری دهم

تاریخ تحویل: 02/3/15

2 - الف) یک نوار نامحدود به پهنای $2w$ داریم چگالی بار از حل معادله زیر عرضه می‌شود

$$\int_{-w}^{w} \sigma(x')\, g(x,x')\, dx' = f(x) \qquad |x|<w \quad , \quad f(x)=1$$

می‌خواهیم معادله را به ازای $g(x,x') = -\frac{\ln|x-x'|}{\pi}$ حل کنیم. و به کمک توابع پالس همراه با (Point Matching

دقیق: حل آن: $f(x)=1 \Rightarrow \sigma(x) = \dfrac{2}{w \ln(\frac{2}{w}) \sqrt{1-(x/w)^2}}$

مسلما باید با MoM حل ببریم. مسئله ما انتگرال است. $L=\int$ مجهول ما σ و f تابع معلوم

$$L\sigma(x) = \int_{-w}^{w} \sigma(x')\, g(x,x')\, dx = f(x) \qquad \sigma(x) \doteq \sum_N \alpha_n \sigma_n \;\; \to \text{Basis functions}$$

$$L\sigma(x) = \sum_N \alpha_n L\sigma_n = g \quad , \quad \sigma_n = \begin{cases} 1 & |x-x_n| < \frac{\Delta x}{2} \\ 0 & \end{cases}$$

$-w$ — $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — w , Δx

$$* \quad x_i = -w + \frac{2w}{N}(i-1) + \frac{w}{N} \qquad \Delta x = \frac{2w}{N}$$

به N قسمت تقسیم می‌کنیم

Weighting functions. $W_m = \underbrace{\delta(x-x_m)}_{\text{Collocation مشابه روش}}$ به دلیل Point Matching

$$\langle W_m, \sigma(x) \rangle = \langle W_m, \sum_N \alpha_n L\sigma_n \rangle \qquad m = 1, \ldots, N$$

$$= \sum_N \alpha_n \underbrace{\langle W_m, L\sigma_n \rangle}_{L_{mn}} = \langle W_m, f(x) \rangle$$

می‌توان Σ را از ضرب داخلی خارج کرد.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{N1} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix}}_{\underline{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{\underline{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle W_1, f(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle W_N, f(x) \rangle \end{bmatrix}}_{\underline{a}}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{L}^{-1}\, \underline{a}$$

حال باید به محاسبه درایه‌های ماتریس L بپردازیم.

$$L_{mn} = \langle w_m, L u_n \rangle = \int_{-w}^{w} \delta(x-x_m)\left[\int_{-w}^{w} u_n(x')\, g(x,x')\, dx'\right] dx$$ fitting

$$L_{mn} = \int_{-w}^{w} u_n(x')\, g(x_m,x')\, dx' = \frac{-1}{2\pi}\int_{x_n-\frac{\Delta x}{2}}^{x_n+\frac{\Delta x}{2}} \ln|x'-x_m|\, dx'$$ $x'-x_m = y$

$$L_{mn} = \frac{-1}{2\pi}\int_{x_n-x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_n-x_m+\frac{\Delta x}{2}} \ln|y|\, dy = \frac{-1}{2\pi}\left(|y|\ln(|y|)-|y|\right)\Big|_{x_n-x_m-\frac{\Delta x}{2}}^{x_n-x_m+\frac{\Delta x}{2}}$$

$|x_n-x_m| = |n-m|\Delta x$ * با توجه به شکل $\Rightarrow L_{mn} = \frac{-1}{2\pi}\left(|y|\ln(|y|)-|y|\right)\Big|_{|n-m|\Delta x-\frac{\Delta x}{2}}^{|n-m|\Delta x+\frac{\Delta x}{2}}$

$$\Rightarrow L_{mn} = -\Delta x \cdot \frac{1}{2\pi}\left\{(|n-m|+\tfrac{1}{2})\ln\left[(|n-m|+1/2)\Delta x\right] - (|n-m|-1/2)\ln\left[(|n-m|-1/2)\Delta x\right] - 1\right\}$$

حالت کلی برای L_{mn}

$\underline{\alpha} = \underline{L}^{-1}\,\underline{g}$

در ادامه با توجه به N می‌توان معادله ماتریسی روبرو را حل کرد و سپس داریم:

$$u(x) = \sum_{N} \alpha_n u_n$$

$$f_1(x) = 1 \Rightarrow \langle w_m, f(x)\rangle = \langle w_m, 1\rangle = \int_{-w}^{w} \delta(x-x_m)\, dx = 1 \Rightarrow \underline{g} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{L}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} \to \alpha_n \Rightarrow u(x) = \sum_{N} \alpha_n u_n$$

ب) دقیقاً مشابه به سوال الف است صرفاً سمت راست فرق می‌شود.

$f_2(x) = \frac{x}{w}$ ، پاسخ دقیق: $u(x) = \frac{2}{w}\left(\frac{x}{w}\right)\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{w}\right)^2}}$

$$\langle w_m, f(x)\rangle = \langle w_m, x/w\rangle = \int_{-w}^{w} \delta(x-x_m)\frac{x}{w} = \frac{x_m}{w} \Rightarrow \underline{g} = \begin{bmatrix}x_1/w\\ \vdots \\ x_N/w\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{L}^{-1}\begin{bmatrix}x_1/w\\ \vdots \\ x_N/w\end{bmatrix} \to \alpha_n \Rightarrow u(x) = \sum_{N} \alpha_n u_n$$

Question 2 Plots

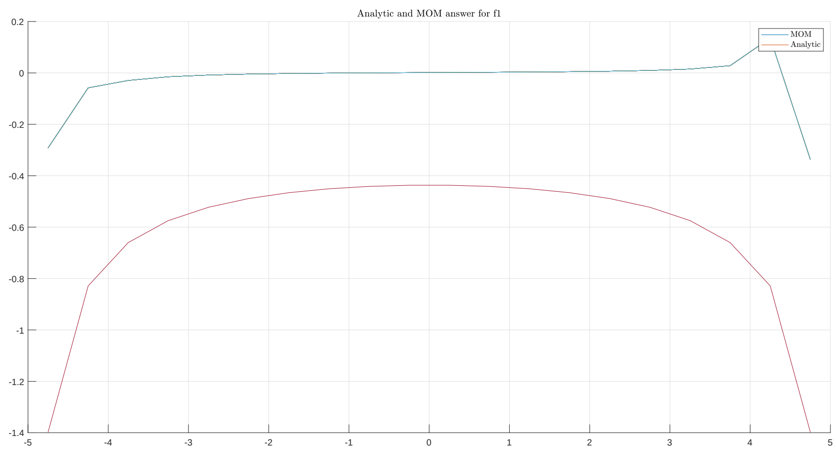


Figure 1: MOM and Analytic Solution for $f_1 = 1$

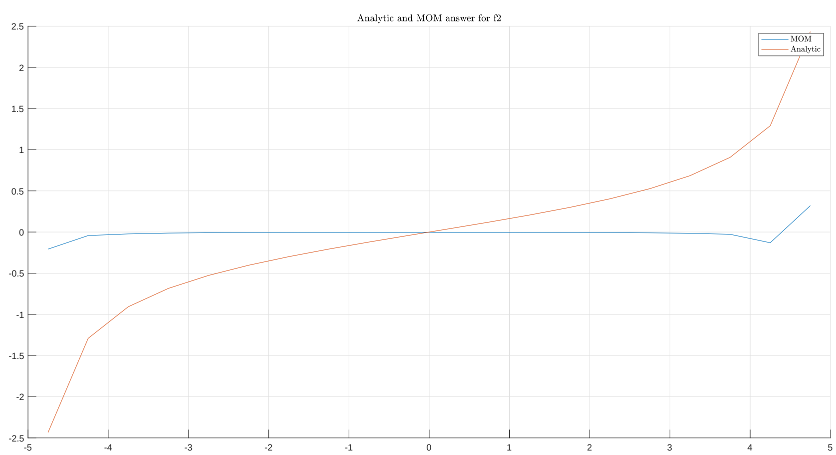
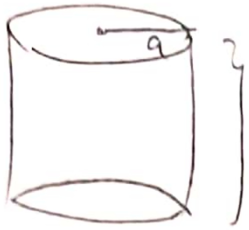


Figure 2: MOM and Analytic Solution for $f_2 = \frac{x}{W}$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری هفتم	تاریخ تحویل: 02 / 3 / 14	4

3 — استوانه رسانا توخالی شعاع a ، ارتفاع 2h



2h پتانسیل اعمالی : V_0

$$\vec{A}'(\vec{R}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{J(\vec{R}')\, e^{-jk|\vec{R}'-\vec{R}'|}}{|\vec{R}'-\vec{R}'|}\, dv'$$ طبق آنچه در درس داشتیم

Lorenz : $\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}' + j\omega\mu_0\epsilon_0\phi = 0$ * $\vec{E}' = -j\omega\vec{A}' - \vec{\nabla}\phi$ **

$$\vec{A}'(\vec{R}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-h}^{h} \frac{I(z')\, e^{-jk|\vec{R}'-\vec{R}'|}}{|\vec{R}'-\vec{R}'|}\,\hat{z}\, dz'$$

$$\vec{E}' = -j\omega\left(A + \frac{1}{k^2}\nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\right) \qquad \nabla\cdot\vec{A}' = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_z = -j\omega\left(A + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right), \quad E_z = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-h}^{h} I(z')\left[\frac{e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}'|}}{|\vec{R}-\vec{R}'|} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}'|}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\right] dz'$$

$$\rightarrow E_z = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-h}^{h} I(z')\left[1 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{e^{-jk|\vec{R}'-\vec{R}'|}}{|\vec{R}'-\vec{R}'|}\, dz'$$

$\hookrightarrow$ impressed field

شرایط مرزی در درس : $E'(\vec{R}') = -E^s(R)\Big|_{\rho=a}$ آنتن ۱ لود شده

میدان پراکنده شده

$|\vec{R}-\vec{R}'| = R_a$

$$-E'(\vec{R}') = E_z(\vec{R}') = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{-h}^{h} I(z')\left[1 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{e^{-jkR_a}}{R_a}\, dz'$$

$\xrightarrow{k^2 = j\omega\mu_0}$

$$-j\omega\epsilon E_z(\vec{R}') = \int_{-h}^{h} I(z')\left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}$$

4 ←

l : طول a : شعاع

Pocklington: $\displaystyle\int_{-l/2}^{l/2} I_z(z')\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right]dz' = -j\omega\epsilon_0 E_z^i(z)$

از تقریب سیم نازک استفاده خواهیم کرد. (جریان از محور z عبور کند.)

$$R_a = |\vec{R}-\vec{R}'| = \sqrt{a^2+(z-z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \frac{\partial R_a}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial R_a}\left[\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right]$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial z} = \frac{z-z'}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \left[(-jk)\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}+\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a^2}\right]\times\frac{z-z'}{R_a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \frac{1}{4\pi R_a}e^{-jkR_a}\left(-jk-\frac{1}{R_a}\right)\cdot\frac{z-z'}{R_a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \frac{\partial}{\partial R_a}\left[\left(-jk-\frac{1}{R_a}\right)\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\cdot\frac{z-z'}{R_a}\right]\frac{\partial R_a}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \left[\frac{1}{R_a^2}\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\cdot\frac{z-z'}{R_a}+\left(-jk-\frac{1}{R_a}\right)^2\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\cdot\frac{z-z'}{R_a}\right]$$

$$\left(\frac{z-z'}{R_a}\right)+\left(-jk-\frac{1}{R_a}\right)\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R_a}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right) = \left(\frac{1}{R_a^2}-k^2+\frac{1}{R_a^2}+j2k\frac{1}{R_a}\right)\times\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\left[\frac{z-z'}{R_a}\right]^2$$

$$+\left(jk+\frac{1}{R_a}\right)\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\left(\frac{R_a-\left(\frac{(z-z')^2}{R_a}\right)}{R_a^2}\right)$$

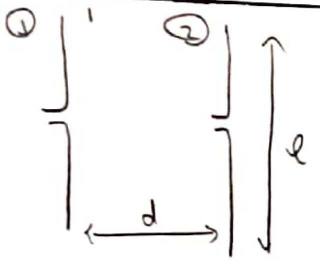
$$=\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a^3}\left[(z-z')^2\left(\frac{2}{R_a^2}-k^2+\frac{j2k}{R_a}\right)-\left(jk+\frac{1}{R_a}\right)\frac{a^2}{R_a}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right)=\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a^3}\left[\frac{R_a^2-a^2}{R_a^2}\left[2-R_a^2k^2+j2R_ak\right]-a^2(1+jkR_a)\right]=\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a^5}\left[2R_a^2-3a^2-R_a^4k^2+a^2R_a^2k^2+jkR(2R_a^2-3a^2)\right]$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_z(z')\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a}\right]dz'=\int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_z(z')\frac{e^{-jkR_a}}{4\pi R_a^5}\left[2R_a^2-3a^2-R_a^4k^2+a^2R_a^2k^2+jkR(2R_a^2-3a^2)+k^2\right]dz'$$

$$\to \text{Pocklington} \xrightarrow{\text{changes}}_{\text{to}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_z(z')\frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5}\left[(1+jkR_a)(2R_a^2-3a^2)+(kaR)^2\right]dz'=-j\omega\varepsilon_0E_z^i(z)$$

Richmond



۵ ـ الف)

طبق آنچه سرکلاس آموختیم داریم:

$d=\frac{\lambda}{4}$

$\ell=\frac{\lambda}{2}$ (نیم موج)

$$R_{21m}=\frac{Z_0}{4\pi}\left[2C_i(u_0)-C_i(u_1)-C_i(u_2)\right]$$

$$X_{21m}=-\frac{Z_0}{4\pi}\left[2S_i(u_0)-S_i(u_1)-S_i(u_2)\right]$$

$$u_0=kd=\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}=\pi/2 \qquad u_1=k\left(\sqrt{\ell^2+d^2}+\ell\right)=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{16}}+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\sqrt5}{4}\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)=\pi\left(\frac{\sqrt5}{2}+1\right), \qquad u_2=k\left(\sqrt{\ell^2+d^2}-\ell\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}\times\left(\sqrt{\lambda^2/4+\lambda^2/16}-\lambda/2\right)=\pi\left(\frac{\sqrt5}{2}-1\right)$$

$$Si(x)=\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad Ci(x)=\int_x^\infty\frac{\cos(t)}{t}dt \qquad Cin(x)=\int_0^x\frac{1-\cos t}{t}dt$$

MATLAB

$\downarrow$

$R_{21m}=38.43\ \Omega \qquad X_{21m}=-28.56\ \Omega \qquad Z_{21m}=R_{21m}+jX_{21m}$

$=38.43-j28.56$

7	تاریخ تحویل: 02/ 3/ 13	نام درس: آنتن ۱ تکلیف سری هفتم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب) با مراجعه به صفحه 473 کتاب Balanis خواهیم داشت:

$$R_{21,m} = -\frac{Z_0}{8\pi}\cos(U_0)\left[-2Ci(2U_0)+Ci(U_1)+Ci(U_2)-\ln(U_3)\right]$$

$$+\frac{Z_0}{8\pi}\sin(U_0)\left[2Si(2U_0)-Si(U_1)-Si(U_2)\right] \qquad d=3\lambda/4$$

$h=\lambda/4$, $l=\lambda/2$

$$X_{21,m} = -\frac{Z_0}{8\pi}\cos(U_0)\left[2Si(2U_0)-Si(U_1)-Si(U_2)\right]+\frac{Z_0}{8\pi}\sin(U_0)\left[2Ci(2U_0)-Ci(U_1)-Ci(U_2)-\ln(U_3)\right]$$

$$U_0 = kd = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3\lambda}{4} = 3\pi/2 \qquad U_1 = 2k(d+l) = \frac{4\pi}{\lambda}\left(\frac{3\lambda}{4}+\frac{2\lambda}{4}\right) = 5\pi$$

$$U_2 = 2k(d-l) = \frac{4\pi}{\lambda}\left(\frac{3\lambda}{4}-2\lambda/4\right) = \pi, \quad U_3 = \frac{d^2-l^2}{d^2} = \frac{\frac{9\lambda^2-4\lambda^2}{16}}{9\lambda^2/16}$$

$$= 5/9$$

با جاگذاری مقادیر به نتیجه نهایی خواهیم رسید.

6- در مقاله اول که درباره آشنایی با MoM می‌باشد دقیقاً به مشابه کلاس درس این روش معرفی شده دیگر فضای L معرفی همچنین f و g نیز بیان شده‌اند. همچنین نرم $f=\sum_n \alpha_n f_n$ نیز بیان شده. بیان شده که ضرایب α_n جهت f_n نیز معرفی گردیده است اشاره شده است که α_n معمولا تقریبی از f است همچنین testing func هم معرفی شده‌اند (w_m)

همچنین به بیان فرم ماتریسی معادلات پرداخته شده است.

در مقاله دوم که توسط Harrington در سال 1967 منتشر شده است. به فرمولاسیون مسائل میدان و حل آن‌ها با روش‌های ماتریسی تقلید روش MoM، Variational ... پرداخته می‌شود و کاربرد آن‌ها در الکترواستاتیک بررسی می‌شود.