

2. الف) خطرات آماری که در لکس ارائه شده داریم:

| احتمال | پیام |
|--------|------|
| a_1 | 0.5 |
| a_2 | 0.2 |
| a_3 | 0.2 |
| a_4 | 0.04 |
| a_5 | 0.04 |
| a_6 | 0.01 |
| a_7 | 0.01 |

- $a_1: 1$
- $a_2: 01$
- $a_3: 001$
- $a_4: 0001$
- $a_5: 00001$
- $a_6: 000001$
- $a_7: 000000$

دقت کنید که خاصیت $Unique$ نیست. اما طول کدها تبهترین حالت است.
(ب) برای حل این مسئله از ناصفاای گرفت بهره میگیریم. آنرا به این صورت حساب میکنیم

$$H(x) = - \sum_{i=1}^M P_i \log_2 P_i = -0.5 \log_2 0.5 - 0.2 \log_2 0.2 - 0.2 \log_2 0.2 - 0.04 \log_2 0.04 - 0.04 \log_2 0.04 - 0.01 \log_2 0.01 - 0.01 \log_2 0.01$$

$$H(x) = 1.9332$$

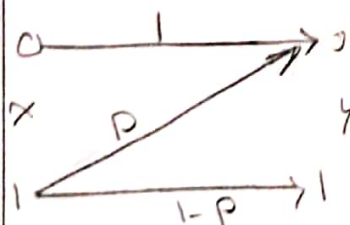
بهرین حالت $\bar{n} = 2$ و $1.9332 < 2$ ✓

یعنی طبق ما مسام گرفت چنین چیزی ممکن می باشد.
(پ) متوسط طول کدها را \bar{n} نامیده و حساب میکنیم.

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^7 P_i n_i = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.04 + 5 \times 0.04 + 6 \times 0.01 + 7 \times 0.01$$

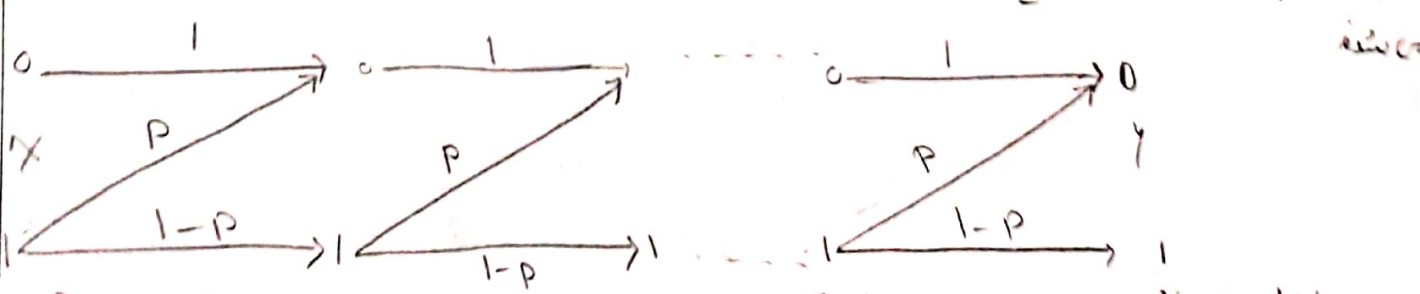
$$\bar{n} = 1.98$$

بهرین حالت $\bar{n} = 1.98$ و $1.9332 < 1.98$ ✓



3. ابتدا شکل کانال داده شده در مسأله را رسم میکنیم.

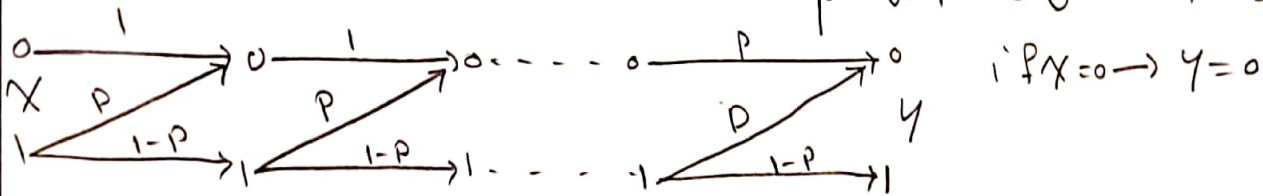
حال طبق بیان مسأله این کانال n بار به صورت سری به هم متصل می شود.



$$P_{out} = Pr\{X+Y\} = P$$

ما خود اهم نشان دهم این کانال مسأله به کانال اصلی است.

م. خواص ۱. احتمال خطا را هم در کانال معادل می‌توانیم. اگر ورودی به کانال صفر باشد، یعنی $X=0$ ، خطا بودن صبیح سه ضربه هم معنات. یعنی $Y=0$ پس $X=0 \rightarrow Y=0$
اما اگر ورودی ۱ باشد. از بابیت ضربه خطا نداریم. ممکن است ۰ یا ۱ شود. یک بار دیگر دیکوگرام کانال را رسم می‌کنیم.



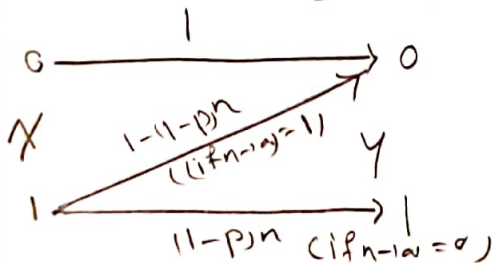
$$\text{if } X=1 \rightarrow \Pr\{Y=1|X=1\} = \underbrace{(1-P) \cdot (1-P) \cdot \dots \cdot (1-P)}_{n \text{ times}} = (1-P)^n$$

$$\Pr\{Y=0|X=1\} = P + P(1-P) + P(1-P)^2 + P(1-P)^3 + \dots + P(1-P)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{سری هندسی}} \Pr\{Y=0|X=1\} = P \cdot \frac{1 - (1-P)^n}{1 - (1-P)} = \frac{P(1 - (1-P)^n)}{P} = 1 - (1-P)^n$$

$$\Pr\{Y=0|X=1\} + \Pr\{Y=1|X=1\} = 1 \quad \text{البته رابطه بالا از روی } \Pr\{Y=1|X=1\} \text{ و این نکته که}$$

بهر کانال به دست آمدن بود. پس کانال مورد نقل به صورت معادل به فرست زیر می‌شود.



حال به معنای احتمال خطای آن می‌پردازیم.

$$P_e = \Pr\{X \neq Y\} = 1 - (1-P)^n$$

به وضوح از روی شکل مشخص است.

حال به حساب ظرفیت کانال در حالت حدی خواص هم برداشت می‌کنیم $n \rightarrow \infty$

$$\text{می‌دانیم: } C = \max_{P(x)} I(X;Y) \quad I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$0: \alpha \quad 1: 1-\alpha \quad H(Y|X) = \alpha H(Y|X=0) + (1-\alpha) H(Y|X=1)$$

$$H(Y|X=0) = \sum_{i=0}^1 -\Pr\{Y=i|X=0\} \log \Pr\{Y=i|X=0\} = -1 \times \log 1 + 0 = 0$$

$$H(Y|X=1) = \sum_{i=0}^1 -\Pr\{Y=i|X=1\} \log \Pr\{Y=i|X=1\} = -(1-P)^n \log (1-P)^n - (1-(1-P)^n) \log (1-(1-P)^n)$$

$$\rightarrow H(Y|X=1) = (1-P)^n \log \frac{1}{(1-P)^n} + (1-(1-P)^n) \log \frac{1}{1-(1-P)^n} \quad n \rightarrow \infty \rightarrow (1-P)^n = 0$$

$$\rightarrow H(Y|X=1) = 0 + \log 1 = 0 \quad I(X;Y) = H(Y)$$

در حالت حدی باید به این که $(1-P)^n = 0$ شود هیچ ابهامی باقی نماند. پس $H(Y) = 0$ می‌دانیم.

$$I(X;Y) = 0 \rightarrow C_{n \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{ظرفیت کانال معادل}$$

| | | Y | | | $P_X(X)$ |
|----------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | 1 | 2 | 3 | |
| X | 1 | P_{11} | P_{12} | P_{13} | $\frac{1}{2}$ |
| | 2 | P_{21} | P_{22} | P_{23} | $\frac{1}{4}$ |
| | 3 | P_{31} | P_{32} | P_{33} | $\frac{1}{4}$ |
| $P_Y(y)$ | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | |

1- جدول داده های مسأله را یک بار دیگر رسم می کنیم.
طبق: صحتی که در گذشته در مورد ترتیب تعریف P_{ij} به صورت
 $P_{ij} = P\{Y=j | X=i\} P\{X=i\}$ زیر اصلاح می گردد.

در مورد آنتروپی تمام از رابطه مقابل اصلاح داریم:
 $H(X,Y) = H(X) + H(X,Y)$

حل این مسأله به کمک رابطه فوق بسیار دشوار خواهد بود. در حالت کلی برای این که $H(X,Y)$ را کم کنیم باید به این که $\text{Conditioning does not increase entropy}$ اگر X, Y از هم مستقل باشند، $H(X,Y)$ را می توان استخراج نمود که ما کم است.

X, Y مستقل $P(X,Y) = P(X) P(Y)$

$$\Rightarrow P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3} \quad P(X=1, Y=2) = \frac{1}{12} \quad P(X=1, Y=3) = \frac{1}{12}$$

$$P(X=2, Y=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=2, Y=2) = \frac{1}{24} \quad P(X=2, Y=3) = \frac{1}{24}$$

$$P(X=3, Y=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=3, Y=2) = \frac{1}{24} \quad P(X=3, Y=3) = \frac{1}{24}$$

سختی محاسبه احتمالات بالا 1 خواهد بود.
حال به صورت به کمک تعریف ارائه شده P_{ij} ها را به دست می آوریم.

$P_{ij} = P\{Y=j | X=i\} P\{X=i\} = P\{X=i, Y=j\}$ پس نتیجه می شود که احتمالاتی که در بالا
به دست آوردیم همان P_{ij} ها است.

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

7- الف) منتهی داریم که سه بیل تولید کنند مثلاً a_1, a_2, a_3 (تولید می کنند) P است. ما کم
آنتروپی را به دست خواهیم آورد. فرض می کنیم احتمال تولید a_1 برابر P ، a_2 برابر α ، و a_3 برابر $1-P-\alpha$
 $P(a_1) = P$ ، $P(a_2) = \alpha$ ، $P(a_3) = 1-P-\alpha$ ما داریم: $H(X) = - \sum_{i=1}^M P_i \log_2 P_i$

برای ما کم کردن از مقادیر متفاوت
 $H(X) = -P \log_2 P - \alpha \log_2 \alpha - (1-P-\alpha) \log_2 (1-P-\alpha)$
ما کم کنیم
 $\rightarrow \frac{\partial H(X)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow 0 - \log_2 \alpha - \frac{1}{\ln 2} + \log_2 (1-P-\alpha) + \frac{1}{\ln 2} = 0$

$$\log_2 \alpha = \log_2 (1-\alpha-p) \Rightarrow \alpha = 1-\alpha-p, \quad \alpha = \frac{1-p}{2}$$

میتواند ما سوکه احتمال تولید α که به است: $\alpha = \frac{1-p}{2}$ پس احتمال تولید α به $\frac{1-p}{2}$ است. پس می‌توانیم که برای ماکسیم شدن آن تدریجی باید p را به 0 نزدیک کنیم. حال مقایسه کرده

$$H(X)_{\max} = -p \log_2 p - \left(\frac{1-p}{2}\right) \log_2 \frac{1-p}{2} - \left(\frac{1-p}{2}\right) \log_2 \frac{1-p}{2} \quad \underline{q=2}$$

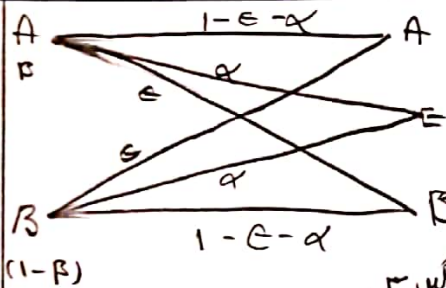
$$H(X)_{\max} = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 \frac{1-p}{2} = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) + (1-p)$$

$$H(X)_{\max} = 1-p - h_b(p)$$

(ب) کانال داده شده را رسم می‌کنیم. حال رابطه ظرفیت کانال

$$C = \max_{P(x)} I(X;Y)$$

را ارائه می‌کنیم.



$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

توزیع ورودی Y را β و $1-\beta$ (به ترتیب برای A و B) در نظر می‌گیریم.

$$H(Y|X) = \beta H(Y|X=A) + (1-\beta) H(Y|X=B)$$

$$H(Y|X=A) = -\sum_i P(Y=i|X=A) \log P(Y=i|X=A)$$

$$\rightarrow H(Y|X=A) = -\alpha \log \alpha - \epsilon \log \epsilon - (1-\epsilon-\alpha) \log (1-\epsilon-\alpha)$$

با توجه به تقارن این عبارت است: $H(Y|X=A) = H(Y|X=B)$ پس داریم:

$$H(Y|X=B) = -\alpha \log \alpha - \epsilon \log \epsilon - (1-\epsilon-\alpha) \log (1-\epsilon-\alpha) \rightarrow$$

$$H(Y|X) = -\alpha \log \alpha - \epsilon \log \epsilon - (1-\epsilon-\alpha) \log (1-\epsilon-\alpha) \quad \text{حال به جای } H(Y) \text{ می‌گذاریم.}$$

$$H(Y) = -P(Y=A) \log P(Y=A) - P(Y=B) \log P(Y=B)$$

$$\Rightarrow H(Y) = -(\beta(1-\epsilon-\alpha) + (1-\beta)\epsilon) \log (\beta(1-\epsilon-\alpha) + (1-\beta)\epsilon) - \alpha\beta - (1-\beta)\alpha \log \alpha - (1-\beta)\alpha \log \alpha$$

$$- \beta\epsilon - (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) \log (\beta\epsilon + (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha))$$

$$\rightarrow H(Y) = -\beta(1-\epsilon-\alpha) - (1-\beta)\epsilon \log (\beta(1-\epsilon-\alpha) + (1-\beta)\epsilon) - \alpha \log \alpha - \beta\epsilon - (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)$$

$$\log (\beta(1-\epsilon-\alpha) + (1-\beta)\epsilon)$$

حال می‌توانیم $I(X;Y)$ را استخراج کنیم.

$$I(X;Y) = -\beta(1-e^{-\alpha} - (1-\beta)e) \log \beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) - \alpha \log \alpha - \beta e - (1-\beta)(1-e-\alpha) \log (1-\beta)(1-e-\alpha) + e$$

$$+ \alpha \log \alpha + e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha)$$

$$\rightarrow I(X;Y) = -\beta(1-e^{-\alpha} - (1-\beta)e) \log \beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) - \beta e - (1-\beta)(1-e-\alpha) \log \beta e + (1-\beta)(1-e-\alpha)$$

$$+ e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha)$$

برای ماکسیم سازی از شرط مشتق افکاره میگیریم.

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow (- (1-e^{-\alpha}) + e) \log \beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) - \frac{(1-e^{-\alpha}) + e}{\ln 2}$$

$$- e + (1-e-\alpha) \log \beta e + (1-\beta)(1-e-\alpha) + \frac{-e + (1-e-\alpha)}{\ln 2} + 0 + 0 = 0$$

$$\rightarrow (- (1-e^{-\alpha}) + e) \log \beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) = (e - (1-e-\alpha)) \log \beta e + (1-\beta)(1-e-\alpha)$$

$$\rightarrow \log \beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) = \log \beta e + (1-\beta)(1-e-\alpha) \rightarrow$$

$$\beta(1-e^{-\alpha} + (1-\beta)e) = \beta e + (1-\beta)(1-e-\alpha) \rightarrow \beta - \beta e - \beta \alpha + e - \beta e$$

$$= \beta e + 1 - e - \alpha - \beta + \beta e + \beta \alpha \rightarrow 2\beta - 4\beta e - 2\beta \alpha + 2e + \alpha - 1 = 0$$

$$\rightarrow e(2-4\beta) + \alpha(1-2\beta) + 2\beta - 1 = 0 \rightarrow \beta = \frac{1}{2} \checkmark$$

پس توزیع $\beta = \frac{1}{2}$ سبب حاصل شدن ماکسیم $I(X;Y)$ می شود. نتیجتاً مثل فیت به صورت زیر

$$C = (-\frac{1}{2}(1-e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}e) \log \frac{1}{2}(1-e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}e + (-\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(1-e^{-\alpha})) \log \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}(1-e^{-\alpha})$$

$$+ e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha)$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2}(1-\alpha) \log \frac{1}{2}(1-\alpha) + (-\frac{1}{2}(1-\alpha) \log \frac{1}{2}(1-\alpha) + e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha))$$

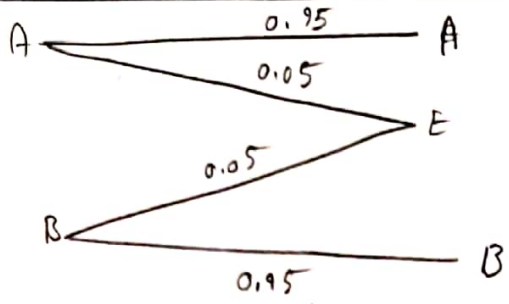
$$\rightarrow C = -(1-\alpha) \log \frac{1-\alpha}{2} + e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha)$$

$$\xrightarrow[\text{با 2 ضرب}]{\text{برای ساده}} C = -(1-\alpha) \log (1-\alpha) + e \log e + (1-e-\alpha) \log (1-e-\alpha) + (1-\alpha)$$

پایه بالا را با همان به خدمت بسیار شکل نه صرف قابل خلاصه کرد. در حالت خاص α و β ها BEC , BSC را بررسی می کنیم.

$$\text{if } \alpha = 0 \rightarrow C = 1 - h_{\text{bit}}(e), \quad \text{if } e = 0 \rightarrow C = 1 - \alpha$$

ظرفیت BEC را می دهد



پ) شکل کانال را در این حالت رسم می کنیم.

$$f_{X(r)} = \frac{1}{2} e^{-x} - P_{r(X=1)} = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2e}$$

$$Pr(X=1) = \int_{-\infty}^0 f_{X(r)} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2e}$$

سپس احتمال آن که سبیل در بیدار شود 1/2 است و اگر بیدار شود 1/2 است. احتمال آن که سبیل بیدار شود 1/2 است.

$$H(1/2) = - \sum_{i=1}^2 P_i \log P_i$$

آن قدری را باید محاسبه کنیم.

$$H(1/2) = -\frac{1}{2e} \log \frac{1}{2e} - (1 - \frac{1}{2e}) \log (1 - \frac{1}{2e}) \Rightarrow H(1/2) = 0.6886 \frac{\text{bit}}{\text{sym}}$$

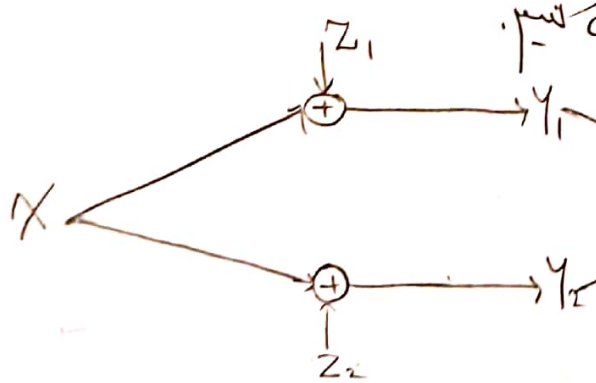
طبق تعریف ما در این مورد H(1/2) ما سه مشکل داریم. اولاً ما را می توانیم از آن استفاده کنیم. باید فراموش نکنیم که کانال رسم شده یک کانال BEC است که طبق آن در این مورد

$$E = 0 \rightarrow C = 1 - \alpha$$

ب به است از این E = 0 ظرفیت آن خیلی کم می شود. یعنی:

$$C = 1 - 0.05 = 0.95 \xrightarrow{\text{Shannon}} C_{9,9} = 0.95, 0.6886 \checkmark \text{ Reliable}$$

9- الف) ظرفیت کانال چهار ایست به یک سر می کنیم.



در انتقال حوازا کانال چهار ورودی

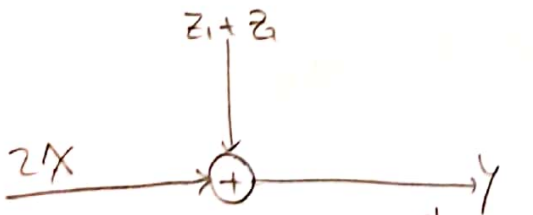
هر کانال به صورت مجموع ورودی

$$Y_1 = X + Z_1$$

$$Y_2 = X + Z_2$$

از روی شکل نیز مشخص است که $Y = Y_1 + Y_2$ پس می توانیم بنویسیم که: $Y = 2X + Z_1 + Z_2$

و کانال معادل به صورت متوالی می شود.



از روی X → P, B 2X → 4P, B

ما داریم که توان سیگنال با محدود سیگنال ارتباط دارد.

از روی آماره احتمال به خاطر داریم که میانگین تدریب خطا در این مورد

مجموع میانگین آن ها است پس در این مورد

$$Z_1 \sim N(0, 1)$$

$$Z_2 \sim N(0, 1) \quad E\{Z_1 + Z_2\} = 0$$

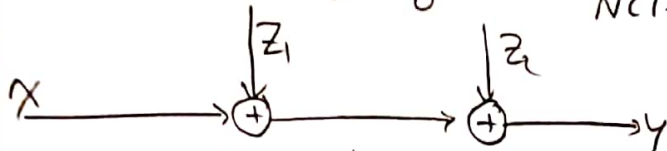
$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(z_1 + z_2) = \text{Var}(z_1) + \text{Var}(z_2) + 2 \text{Cov}(z_1, z_2) = N + N + 2NP = 2N(1+\rho)$$

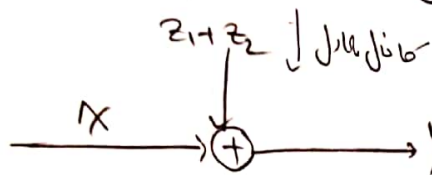
حالت به راحتی می توانیم ظرفیت کانال را بدست کنیم. $C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_{sig}}{n_{noise}} \right)$

$$z_1 + z_2 \sim N(0, 2N(1+\rho)) \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{4P}{2N(1+\rho)} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2P}{N(1+\rho)} \right)$$



برای کانال مبدی نیز داریم:



$$z_1 + z_2 \sim N(0, 2N(1+\rho))$$

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_{sig}}{n_{noise}} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{2N(1+\rho)} \right)$$

ظرفیت این کانال نیز به سادگی گرفته شد.

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2P}{N(1+\rho)} \right)$$

جواب برای کانال ادل داریم

$$\text{if } \rho = 1 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

می بینیم که به ازای $\rho = 1$ کمترین

$$\text{if } \rho = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2P}{N} \right)$$

ظرفیت و به ازای $\rho = -1$ بیشترین ظرفیت

$$\text{if } \rho = -1 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \infty = \infty$$

که به دست می آوریم، هملا و آخر $\rho = -1$ کانال
بدیهی است و متناهی کند که در عمل رخ نمی دهد.

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{2N(1+\rho)} \right)$$

برای کانال درم داریم:

$$\text{if } \rho = 1 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{4N} \right)$$

می بینیم که به ازای $\rho = 1$ کمترین ظرفیت

$$\text{if } \rho = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{2N} \right)$$

و به ازای $\rho = -1$ بیشترین ظرفیت که به دست

$$\text{if } \rho = -1 \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \infty = \infty$$

می آوریم. هملا و آخر $\rho = -1$ کانال به صورت

بدیهی است و متناهی کند که در عمل رخ نمی دهد.

8- دوازده از کلید اول که به این باسده نام جدول داده شده است

$$P_k = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}, \quad k=1, 2, \dots \rightarrow P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{2}{9}, P_3 = \frac{2}{27}, \dots$$

| دولت | دولت | دولت |
|-------|---------------|--|
| a_1 | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| a_2 | $\frac{2}{9}$ | 0 |
| | | $\frac{1}{3}$ |
| | | $\frac{1}{9}$ |
| | | $\frac{1}{27}$ |
| | | $\frac{1}{81}$ |
| | | $\frac{1}{243}$ |
| | | $\frac{1}{729}$ |
| | | $\frac{1}{2187}$ |
| | | $\frac{1}{6561}$ |
| | | $\frac{1}{19683}$ |
| | | $\frac{1}{59049}$ |
| | | $\frac{1}{177147}$ |
| | | $\frac{1}{531441}$ |
| | | $\frac{1}{1594323}$ |
| | | $\frac{1}{4782969}$ |
| | | $\frac{1}{14348907}$ |
| | | $\frac{1}{43046721}$ |
| | | $\frac{1}{129140163}$ |
| | | $\frac{1}{387420489}$ |
| | | $\frac{1}{1162261467}$ |
| | | $\frac{1}{3486784401}$ |
| | | $\frac{1}{10460353203}$ |
| | | $\frac{1}{31381059609}$ |
| | | $\frac{1}{94143178827}$ |
| | | $\frac{1}{282429536481}$ |
| | | $\frac{1}{847288609443}$ |
| | | $\frac{1}{2541865828329}$ |
| | | $\frac{1}{7625597484987}$ |
| | | $\frac{1}{22876792454961}$ |
| | | $\frac{1}{68630377364883}$ |
| | | $\frac{1}{205891132094649}$ |
| | | $\frac{1}{617673396283947}$ |
| | | $\frac{1}{1853020188851841}$ |
| | | $\frac{1}{5559060566555523}$ |
| | | $\frac{1}{16677181699666569}$ |
| | | $\frac{1}{50031545098999707}$ |
| | | $\frac{1}{150094635296999121}$ |
| | | $\frac{1}{450283905890997363}$ |
| | | $\frac{1}{1350851717672992089}$ |
| | | $\frac{1}{4052555153018976267}$ |
| | | $\frac{1}{12157665459056928801}$ |
| | | $\frac{1}{36472996377170786403}$ |
| | | $\frac{1}{109418989131512359209}$ |
| | | $\frac{1}{328256967394537077627}$ |
| | | $\frac{1}{984770902183611232881}$ |
| | | $\frac{1}{2954312706550833698643}$ |
| | | $\frac{1}{8862938119652501095929}$ |
| | | $\frac{1}{26588814358957503287787}$ |
| | | $\frac{1}{79766443076872509863361}$ |
| | | $\frac{1}{239299329230617529580083}$ |
| | | $\frac{1}{717897987691852588740249}$ |
| | | $\frac{1}{2153693963075557766220747}$ |
| | | $\frac{1}{6461081889226673298662241}$ |
| | | $\frac{1}{19383245667680019895986723}$ |
| | | $\frac{1}{58149737003040059687960169}$ |
| | | $\frac{1}{174449211009120179063880507}$ |
| | | $\frac{1}{523347633027360537181641521}$ |
| | | $\frac{1}{1570042899082081611544924563}$ |
| | | $\frac{1}{4710128697246244834634773689}$ |
| | | $\frac{1}{14130386091738734503804321067}$ |
| | | $\frac{1}{42391158275216203511412963201}$ |
| | | $\frac{1}{127173474825648610534238889603}$ |
| | | $\frac{1}{381520424476945831602716668809}$ |
| | | $\frac{1}{1144561273430837494808149976427}$ |
| | | $\frac{1}{3433683820292512484424449929281}$ |
| | | $\frac{1}{10301051460877537453273349787843}$ |
| | | $\frac{1}{30903154382632612359820049363529}$ |
| | | $\frac{1}{92709463147897837079460148090587}$ |
| | | $\frac{1}{278128389443693511238380444271761}$ |
| | | $\frac{1}{834385168331080533715141332815283}$ |
| | | $\frac{1}{2503155504993241591145423998445849}$ |
| | | $\frac{1}{7509466514979724773436271995337547}$ |
| | | $\frac{1}{22528399544939174320308815986012641}$ |
| | | $\frac{1}{67585198634817522960926447958037923}$ |
| | | $\frac{1}{202755595804452568882779343874113769}$ |
| | | $\frac{1}{608266787413357706648338031622341307}$ |
| | | $\frac{1}{1824799362239073119944914094867023921}$ |
| | | $\frac{1}{5474398086717219359834742284591071763}$ |
| | | $\frac{1}{16423194259151658079504226853773215289}$ |
| | | $\frac{1}{49269582777454974238512680561319645867}$ |
| | | $\frac{1}{147808748332364922715538041683958937601}$ |
| | | $\frac{1}{443426244997094768146614125051876812803}$ |
| | | $\frac{1}{1330278734991284304439842375155630438409}$ |
| | | $\frac{1}{4000836204973852913319527125466891315227}$ |
| | | $\frac{1}{12002508614921558739958581376390673945681}$ |
| | | $\frac{1}{36007525844764676219875744129172021836843}$ |
| | | $\frac{1}{108022577534294028659627232387516065510529}$ |
| | | $\frac{1}{324067732602882085978881697162548196531587}$ |
| | | $\frac{1}{972203197808646257936645091487644589594761}$ |
| | | $\frac{1}{2916609593425938773809935274462933768784283}$ |
| | | $\frac{1}{8749828780277816321429805823388791306352849}$ |
| | | $\frac{1}{26249486340833448964289417469166373919058547}$ |
| | | $\frac{1}{78748459022490346892868252407499121757175641}$ |
| | | $\frac{1}{236245377067471040678604757222497365271526923}$ |
| | | $\frac{1}{708736131202413122035814271667492095814580769}$ |
| | | $\frac{1}{2126208393607239366107442815002476287443742287}$ |
| | | $\frac{1}{6378625180821718098322328445007428862331226861}$ |
| | | $\frac{1}{19135875542465154294966985335022286586993680583}$ |
| | | $\frac{1}{57407626627395462884890955995066859760981041749}$ |
| | | $\frac{1}{172222879882186388654672867985190579282943125247}$ |
| | | $\frac{1}{516668639646559165963918603955571737848829375741}$ |
| | | $\frac{1}{1550005918939677497891755811866715213546488127223}$ |
| | | $\frac{1}{4650017756819032493675267435599145640639464381669}$ |
| | | $\frac{1}{13950053270457097481025802306797436921918393145007}$ |
| | | $\frac{1}{41850159811371292443077406920392310765755179435021}$ |
| | | $\frac{1}{125550479434113877329232220761176932297265538305063}$ |
| | | $\frac{1}{376651438302341631987696662283530796891796614915189}$ |
| | | $\frac{1}{1129954314907024895963089986850592390675389844745567}$ |
| | | $\frac{1}{3389862944721074687889269960551777172026169534236699}$ |
| | | $\frac{1}{1016958883416322406366780988165533151607850860270909}$ |
| | | $\frac{1}{3050876650248967219090342974496599454823552580812727}$ |
| | | $\frac{1}{9152629950746901657271028923489798364470657742438181}$ |
| | | $\frac{1}{27457889852240704971813086770469395093411973227314543}$ |
| | | $\frac{1}{82373669556722114915439260311408185280235919681943629}$ |
| | | $\frac{1}{247120908670166344746317780934224555840707759045830887}$ |
| | | $\frac{1}{741362725910498834238953342802673667522123277137492661}$ |
| | | $\frac{1}{2224088177731496502716859928408020902566369831412477983}$ |
| | | $\frac{1}{6672264533194489508150579785224062707699109494237433949}$ |
| | | $\frac{1}{20016793599583468524451739355672188123097328482712301847}$ |
| | | $\frac{1}{60050380798750405573355218067016564369291985448136905541}$ |
| | | $\frac{1}{180151142396251216710065654201049693107875956344410716623}$ |
| | | $\frac{1}{540453427188753650130196962603149079323627869033232149869}$ |
| | | $\frac{1}{1621360281566260950390590887809447237970883607100696449607}$ |
| | | $\frac{1}{4864080844698782851171772663428341713912650821302089348821}$ |
| | | $\frac{1}{14592242534096348553515317980285025141737952463906268046463}$ |
| | | $\frac{1}{43776727602289045660545953940855075425213857391718804139389}$ |
| | | $\frac{1}{131330182806867136981637861822565226275641572175156412418167}$ |
| | | $\frac{1}{393990548420601410944913585467695678826924716525469237354501}$ |
| | | $\frac{1}{1181971645261804232834740756403087036480774149576407711863503}$ |
| | | $\frac{1}{3545914935785412698504222269209261109442322448729223135590509}$ |
| | | $\frac{1}{10637744807356238095512666807627783328326967346187669406771527}$ |
| | | $\frac{1}{31913234422068714286538000422883349984980902038562908219314581}$ |
| | | $\frac{1}{95739703266206142859614001268649049954942706115688724657943743}$ |
| | | $\frac{1}{287219109798618428578842003805947149864828118347066173973831229}$ |
| | | $\frac{1}{861657329395856285736526011417841449594484355041198521921493687}$ |
| | | $\frac{1}{2584971988187568857209578034253524348783453065123595565764481061}$ |
| | | $\frac{1}{7754915964562706571628734092760572846350359195370786697293443183}$ |
| | | $\frac{1}{2326474789368811971488620227828171853905107758611235909188032955}$ |
| | | $\frac{1}{7000424368106435914465860683484515561715323275833707727564098865}$ |
| | | $\frac{1}{21001273084319307743397582050453546685145969827501123182692296595}$ |
| | | $\frac{1}{63003819252957923230192746151360638055437909482503369548076889785}$ |
| | | $\frac{1}{189011457758873769690578238454081914166313728447509108644230669355}$ |
| | | $\frac{1}{567034373276621309071734715362245742498941185342527325932691008055}$ |
| | | $\frac{1}{1701103119829863927215204146086737227496823556027581977798073024165}$ |
| | | $\frac{1}{5103309359489591781645612438259211682490470668082745933394219072495}$ |
| | | $\frac{1}{15309928078468775344936837314777635047471412004248237799182657217485}$ |
| | | $\frac{1}{45929784235406326034810511944332905142414236012744713397547971652455}$ |
| | | $\frac{1}{137789352706218978104431535832998715427242708038234139192643914957365}$ |
| | | $\frac{1}{413368058118656934313294607498996146281728124114702417577931744872095}$ |
| | | $\frac{1}{1240104174355970802939883822496988438845184372344107252733795234616285}$ |
| | | $\frac{1}{3720312523067912408819651467490965316535553117032321758191385703848855}$ |
| | | $\frac{1}{11160937569203737226458954402472895949606659351096965274574157111546565}$ |
| | | $\frac{1}{33482812707611211679376863207418687848819978053290895823722471334639665}$ |
| | | $\frac{1}{100448438122833635038130589622256063546459934159872687471167413903918995}$ |
| | | $\frac{1}{301345314368490905114391768866768190639379802479618062413502241711756985}$ |
| | | $\frac{1}{904035943105472715343175306590304571918139407438854187240506725135270985}$ |
| | | $\frac{1}{2712107829316418146029525919770913715754418222316562561721520175405812955}$ |
| | | $\frac{1}{8136323487949254438088577759312741147263254666949687685164560526217538855}$ |
| | | $\frac{1}{24408970463847763314265733277938223441789763990849063055493681578652616555}$ |
| | | $\frac{1}{73226911391543289942797199833814670325369291972547189166481044735957849555}$ |
| | | $\frac{1}{219680734174629869828391599491444010976107875917641567499443134207873548555}$ |
| | | $\frac{1}{659042202523889609485174798474332032928323627752924702498329402623620645555}$ |
| | | $\frac{1}{1977126607571668828455524395422996098784970883258774107494988207870861935555}$ |
| | | $\frac{1}{5931379822714906485366573186268988296354912649776322322484964623612585805555}$ |
| | | $\frac{1}{17794139468144719456099719558806964889064737949328966967454893870837757415555}$ |
| | | $\frac{1}{53382418304434158368299158676420894667194213847986890902364681612513272245555}$ |
| | | $\frac{1}{160147254913302475104897476029262683901582641543960672707094044837539816735555}$ |
| | | $\frac{1}{480441764739907425314692428087788051704747924631881018121282134512619450205555}$ |
| | | $\frac{1}{1441325294219718275944077284263364155114243773895643054363846403537858350615555}$ |
| | | $\frac{1}{4323975882659154827832231852789092465342731321686929163091539210613575051835555}$ |
| | | $\frac{1}{1297192764797746448349669555836727739602819396506078748927461763184072515550555}$ |
| | | $\frac{1}{3891578294393239345049008667509183218808458189518236246782385289552217546650555}$ |
| | | $\frac{1}{11674734883179718035147025902527549656425374568554708740347155868656652639950555}$ |
| | | $\frac{1}{35024204649539154105441077707582648969276123705664126221041467605969957919850555}$ |
| | | $\frac{1}{105072613948617462316323233122747946907828371$ |