| 1 | تاریخ تحویل: ۰۱/۱/۲۹ | نام درس: مخابرات دیجیتال<br>تکلیف سری سوم | سروش مس‌فروش مشهد<br>شماره دانشجویی: 810198472 |
|---|---|---|---|

۱- الف) $Pr\{a_k=1\}=Pr\{a_k=-1\}=0.5$ $\quad b_k=a_k-a_{k-1}$ $\quad X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, p(t-kT)$

$$R_b=\langle b_k, b_{l+k}\rangle = E\{(a_k-a_{k-1})(a_{l+k}-a_{l+k-1})\} \xrightarrow{\text{با توجه به استقلال}}$$

$$R_b = E\{a_k a_{l+k}\} - E\{a_k a_{l+k-1}\} - E\{a_{k-1} a_{l+k}\} + E\{a_{k-1} a_{l+k-1}\} \xrightarrow{\text{حالت بندی}}$$

$l=0 \rightarrow R_b = E\{a_k^2\} - 2E\{a_k\}E\{a_{k-1}\} + E\{a_{k-1}^2\} = 2\sigma^2 + 2m^2 - 2m^2 = 2\sigma^2$

$l=1 \rightarrow R_b = E\{a_k\}E\{a_{k+1}\} - E\{a_k^2\} - E\{a_{k-1}\}E\{a_{k+1}\} + E\{a_k\}E\{a_{k+1}\} = m^2 - m^2 - \sigma^2 - m^2 + m^2 \rightarrow R_b = -\sigma^2$

$l=-1 \rightarrow R_b = E\{a_k\}E\{a_{k-1}\} - E\{a_k\}E\{a_{k-2}\} - E\{a_{k-1}^2\} + E\{a_{k-1}\}E\{a_{k-2}\}$
$= m^2 - m^2 - \sigma^2 - m^2 + m^2 = -\sigma^2$

$o.w \rightarrow R_b = m^2 - m^2 - m^2 + m^2 = 0$

$$R_b = \begin{cases} 2\sigma^2 & l=0 \\ -\sigma^2 & l=1 \\ -\sigma^2 & l=-1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

پس به طور کلاسه و مغیر م قوانیم بنویسیم.

محاسبه $m, \sigma$: $m = E\{a_k\} = \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{2}\times 1 = 0$

$\sigma = E\{a_k^2\} - m^2 = E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 1$

$$\rightarrow R_b = \begin{cases} 2 & l=0 \\ -1 & l=1 \\ -1 & l=-1 \\ 0 & o.w \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_b(\tau) = 2\delta(\tau) - \delta(\tau+1) - \delta(\tau-1)$$

ب) از قضیه Wiener-Khinchin باید استفاده بکنیم.

$$R_x(t+\tau, t) = E\{x(t+\tau)x^*(t)\} = \sum_k \sum_l E\{b_k b_l\}\,\delta(t+\tau-kT)\,\delta(t-lT)$$

$$\xrightarrow{n=k-l} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} R_n\,\delta(t-nT)\,\delta(t-lT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\,\delta(t-nT)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT)$$

$$\langle R_x(t+\tau, t)\rangle_t = \sum_n R_n\,\delta(t-nT)\ \langle \sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT)\rangle_t,\quad \langle \sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} \rightarrow \langle R_x(t+\tau, t)\rangle = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\,\delta(t-nt) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi nft}$$

$$\rightarrow G_{x_T}(f) = \frac{|P_T(f)|^2}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi nfT} = \frac{|P_T(f)|^2}{T}\left(2 - e^{-j2\pi fT} - e^{+j2\pi ft}\right)$$

$$\rightarrow G_{x_T}(f) = \frac{2|P_T(f)|^2}{T}\left(1-\cos(2\pi ft)\right) \qquad P_t \rightarrow \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\rightarrow P_T(f) = T\,\mathrm{Sinc}(Tf) \rightarrow G_{x_T}(f) = 2T\,\mathrm{Sinc}^2(Tf)\left(1-\cos(2\pi ft)\right)$$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | تاریخ تحویل: 01 / 1 / 29 | نام درس: مخابرات دیجیتال (ملک سرمدی) |

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810108472

پ) $a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ ... $P_r\{a_k=0\} = P_r\{a_k=1\} = 0.5$ $\quad m = E\{a_k\} = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\sigma^2 = E\{a_k^2\} - m^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

مجددا به مشابه قسمت قبل داریم:

$$R_b = \begin{cases} 2\sigma^2 & l=0 \\ -\sigma^2 & l=1 \\ -\sigma^2 & l=-1 \\ 0 & o.w \end{cases} \longrightarrow R_b = \begin{cases} \frac{1}{2} & l=0 \\ -\frac{1}{4} & l=1 \\ -\frac{1}{4} & l=-1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\longrightarrow G_{x_T}(f) = \frac{|P_T(f)|^2}{T}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{4}e^{j2\pi fT}\right)$$

$$\longrightarrow G_{x_T}(f) = \frac{|P_T(f)|^2}{2T}(1-\cos(2\pi fT)) \quad ,\quad P_T(f) = T\operatorname{sinc}(Tf)$$

$$\longrightarrow G_{x_T}(f) = \frac{T\operatorname{sinc}^2(Tf)}{2}(1-\cos(2\pi fT))$$

---

4 - الف)

$x(t) \longrightarrow$ دلخواه $\quad x(0)=1, \quad p(t) \triangleq x(t)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

$p(kT) = x(kT)\operatorname{sinc}(k) \quad k\in \mathbb{Z}$ با توجه به اینکه $k\in\mathbb{Z}$ است و انحرافات تابع sinc، $p(kT)=0$. $p(0)=1$ می‌شود شرط $k\neq 0$ که برقرار است پس پالس نایکوییست داریم.

ب) حال به حوزه فرکانس می‌رویم:

$P(f) = X(f) * T\Pi(Tf)$

$$= T\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(T\tau)X(f-\tau)\,d\tau = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(f-\tau)\,d\tau \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f+\frac{k}{T}\right) = T\,?$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f+\frac{k}{T}\right) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X\left(f+\frac{k}{T}-\tau\right)d\tau \xrightarrow[\text{تغییر متغیر داریم}]{f+\frac{k}{T}-\tau = v}$$

$$= T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{f+\frac{k}{T}-\frac{1}{2T}}^{f+\frac{k}{T}+\frac{1}{2T}} X(v)\,dv = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{f+\frac{k}{T}-\frac{1}{2T}}^{f+\frac{k}{T}+\frac{1}{2T}} X(v)\,dv = T\int_{-\infty}^{\infty} X(v)\,dv \stackrel{\uparrow}{=} T\,x(0) = T$$

پس در حوزه فرکانس هم نایکوییست داریم.

پ) $x(t) \longrightarrow X(f) \quad B.W = B_x \leq \frac{1}{2T} \qquad p(t) = x(t)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

$\rightarrow P(f) = X(f) * T\Pi(Tf) \qquad B.W\ X(f) : B_x \qquad B.W\ \Pi(Tf) = \frac{1}{2T}$

$\longrightarrow B.W\ P(f) : B_p = B_x + \frac{1}{2T} \leq \frac{1}{T} \qquad B_{P_{max}} = \frac{1}{T}$

| 3 | تاریخ تحویل: ۰۱/۱/۲۹ | نام درس: مخابرات دیجیتال<br>تکلیف سری سوم | سروش مس‌فروش مشهد<br>شماره دانشجویی: 810198472 |
|---|---|---|---|

۶ - الف)

N independent channels   Attenuation: $\alpha_i$ , $n_w \sim N(0, \sigma_i^2)$

$$Y_i(t_m) = \alpha_i A_m + n_i(t_m) \qquad A_m = \begin{cases} A & : 0 \\ -A & : 1 \end{cases} \qquad Pr\{A_m = A\} = Pr\{A_m = -A\} = 0.5$$

در گیرنده : $Y = \sum_{i=1}^{N} k_i Y_i$ → Diversity combining

در این قسمت می‌خواهیم احتمال خطای آشکارسازی را محاسبه کنیم.

$$P_e = Pr\{\hat{A}_m \neq A_m\} \rightarrow P_e = Pr\{Y(t_m) < \Delta \mid A_m = 1\}(1-p) + Pr\{Y(t_m) > \Delta \mid A_m = 0\} p$$

$$\xrightarrow{p = 1/2} P_e = \frac{1}{2}\left( Pr\{Y(t_m) < \Delta \mid A_m = 1\} + Pr\{Y(t_m) > \Delta \mid A_m = 0\}\right) \longrightarrow$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left( Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i(\alpha_i A_m + n_i(t_m)) < \Delta \mid A_m = 1\right\} + Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i(\alpha_i A_m + n_i(t_m)) > \Delta \mid A_m = 0\right\}\right)$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left( Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i(\alpha_i A + n_i(t_m)) < \Delta\right\} + Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i(\alpha_i A + n_i(t_m)) > \Delta\right\}\right)$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left( Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i n_i(t_m) < \Delta - \sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i A\right\} + Pr\left\{\sum_{i=1}^{N} k_i n_i(t_m) > \Delta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i k_i A\right\}\right)$$

اگر $\sum_{i=1}^{N} k_i n_i(t_m)$ را به عنوان یک متغیر تصادفی جدید معرفی کنیم با توجه به گاوسین بودن $n_i(t_m)$ می‌توانیم توزیع این متغیر تصادفی جدید را بیان می‌کنیم

$$X = \sum_{i=1}^{N} k_i n(t_m) \sim N\left(0, \sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2\right)$$

دقت شود که در قسمت محاسبه واریانس با توجه به i.i.d بودن، cov ها دو به دو صفر است پس برای همین واریانس معادل جمع واریانس‌ها ضرب در $k_i$ ها شد. پس در نهایت احتمال خطا به شکل زیر می‌شود.

$$P_e = \frac{1}{2}\left[ Q\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i A - \Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}}\right) + Q\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i A + \Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}}\right)\right] \xrightarrow{\Delta = 0}$$

$$P_e = Q\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i A}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}}\right)$$

ب)

Prove: $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{k_i \sigma_i^2}{k_j \sigma_j^2} \longrightarrow P_e$ minimum, if $\alpha_i = k_i \sigma_i^2 \rightarrow P_e = ?$

می‌توان از نامساوی کوشی - شوارتز به شکل زیر استفاده کرد یعنی:

$$\sum_{i=1}^{N} U_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} V_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{N} U_i V_i\right)^2 \xrightarrow[Q(x)]{\text{نزولی بودن تابع}} Q\left(\frac{A\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}}\right) \geq Q\left(\frac{A\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i}{\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i \alpha_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\alpha_i}{\sigma_i}\right)^2}}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی در صورتی}} \begin{array}{l} k_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \\ k_j^2 \sigma_j^2 = \frac{\alpha_j^2}{\sigma_j^2} \end{array} \longrightarrow \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{k_i \sigma_i^2}{k_j \sigma_j^2} \quad , \text{if } \alpha_i = k_i \sigma_i^2 \xrightarrow{\text{احتمال خطا}}$$

$$P_e = Q\left[\frac{A\sum_{i=1}^{N} k_i \cdot k_i \sigma_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}}\right] \rightarrow P_e = Q\left(A\sqrt{\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \sigma_i^2}\right)$$

---

7 – الف)

$$y(t_m) = A_m + Q + n(t_m) \qquad P_r\{Q=0\} = \tfrac{3}{4} \qquad P_r\{Q=q\} = P_r\{Q=-q\} = \tfrac{1}{8}$$

$$n(t_m) \sim N(0, N_0) \qquad A_m = \begin{cases} -A : 0 \\ +A : 1 \end{cases} \qquad P_e = ?$$

$$P_e = P_r\{y(t_m) < \Delta \mid A_m = 1\}\, P + P_r\{y(t_m) > \Delta \mid A_m = 0\}\,(1-P) \longrightarrow$$

$$P_e = \frac{1}{2}\Big[ P_r\{A_m + Q + n(t_m) < \Delta \mid A_m = +A\} + P_r\{A_m + Q + n(t_m) > \Delta \mid A_m = -A\}$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\Big[ P_r\{Q + n(t_m) < \Delta - A\} + P_r\{Q + n(t_m) > \Delta + A\}\Big] \xrightarrow{P = (1-P) \rightarrow \Delta = 0}$$

$$P_e = \frac{1}{2}\Big[ P_r\{Q + n(t_m) < -A\} + P_r\{Q + n(t_m) > A\}\Big] \longrightarrow$$

$$P_e = \frac{1}{2}\Big[ P_r\{n(t_m) + Q < -A \mid Q=0\} P_r\{Q=0\} + P_r\{n(t_m) + Q < -A \mid Q=q\} P_r\{Q=q\}$$

$$+ P_r\{n(t_m) + Q < -A \mid Q=-q\} P_r\{Q=-q\} + P_r\{n(t_m) + Q > A \mid Q=0\} P_r\{Q=0\} +$$

$$P_r\{n(t_m) + Q > A \mid Q=q\} P_r\{Q=q\} + P_r\{n(t_m) + Q > A \mid Q=-q\} P_r\{Q=-q\}\Big]$$

$$P_e = \frac{1}{2}\Big[ \frac{3}{4} P_r\{n(t_m) < -A\} + \frac{1}{8} P_r\{n(t_m) < -A - q\} + \frac{1}{8} P_r\{n(t_m) < -A + q\}$$

$$+ \frac{3}{4} P_r\{n(t_m) > A\} + \frac{1}{8} P_r\{n(t_m) > A - q\} + \frac{1}{8} P_r\{n(t_m) > A + q\}\Big]$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\Big[ \frac{3}{4} Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{8} Q\left(\frac{A+q}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{8} Q\left(\frac{A-q}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{3}{4} Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{8} Q\left(\frac{A+q}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$+ \frac{1}{8} Q\left(\frac{A-q}{\sqrt{N_0}}\right)\Big] \rightarrow P_e = \frac{3}{4} Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{8} Q\left(\frac{A+q}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{8} Q\left(\frac{A-q}{\sqrt{N_0}}\right)$$

ب)

$$\text{if } \frac{A}{\sqrt{N_0}} = 3,\ \frac{q}{A} = 0.1 \qquad A = 3\sqrt{N_0} \rightarrow \frac{q}{3\sqrt{N_0}} = 0.1 \rightarrow \frac{q}{\sqrt{N_0}} = 0.3$$

$$\rightarrow P_e = \frac{3}{4} Q(3) + \frac{1}{8} Q(3.3) + \frac{1}{8} Q(2.7) \overset{\text{با متلب}}{=} 1.5062275 \times 10^{-3}$$

$$\text{if } \frac{A}{\sqrt{N_0}} = 3 \quad \frac{q}{A} = 0.25 \quad A = 3\sqrt{N_0} \rightarrow \frac{q}{3\sqrt{N_0}} = 0.25 \rightarrow \frac{q}{\sqrt{N_0}} = 0.75$$

$$\rightarrow P_e = \frac{3}{4} Q(3) + \frac{1}{8} Q(3.75) + \frac{1}{8} Q(2.25) \overset{\text{با متلب}}{=} 2.55147125 \times 10^{-3}$$

| 5 | تاریخ تحویل: ۲۹ / ۱ / ۰۱ | نام درس: مخابرات دیجیتال<br>تکلیف سری سوم | سروش مس‌فروش مشهد<br>شماره دانشجویی: 810198472 |
|---|---|---|---|

ب)

$$\text{if } q=A \rightarrow P_e = \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{1}{8}Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{1}{8}Q(0)$$

$$\rightarrow P_e = \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{1}{8}Q\left(\frac{2A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{1}{16}$$

$$\text{if } \frac{A}{\sqrt{N_0}} \rightarrow \infty \rightarrow P_e = \frac{3}{4}\times Q(\infty)+\frac{1}{8}Q(\infty)+\frac{1}{8}Q(0) = \frac{1}{16}$$ (به ازای $q=A$)

8_

$$Y(t_m) = A_m + n(t_m) \qquad A_m = \begin{cases} A \\ -A \end{cases}, \quad P_r\{A_m=A\} = P_r\{A_m=-A\} = \frac{1}{2}$$

$$n(t_m) \sim N(0, N_0) \qquad P_e = \frac{1}{2}\Big[P_r\{A_m+n(t_m) > D \mid A_m=-A\}$$

$$+P_r\{A_m+n(t_m) < D \mid A_m=A\}\Big] \rightarrow P_e = \frac{1}{2}\Big[P_r\{n(t_m) > D+A\}+P_r\{n(t_m) < D-A\}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[P_r\{n(t_m) > D+A \mid D=0\}P_r\{D=0\} + P_r\{n(t_m) > D+A \mid D=2A\}P_r\{D=2A\}$$

$$+P_r\{n(t_m) < D-A \mid D=0\}P_r\{D=0\} + P_r\{n(t_m) < D-A \mid D=2A\}P_r\{D=2A\}\Big]$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left[(1-P)Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+PQ\left(\frac{3A}{\sqrt{N_0}}\right)+(1-P)Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+P\,Q\left(\frac{-A}{\sqrt{N_0}}\right)\right]$$

$$P_e = (1-P)Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{P}{2}Q\left(\frac{3A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{P}{2}\overbrace{\left(1-Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)\right)}^{Q\left(\frac{-A}{\sqrt{N_0}}\right)}$$ (توجه: $Q(x)+Q(-x)=1$)

$$P_e = \left(1-\frac{3P}{2}\right)Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)+P/2\,Q\left(\frac{3A}{\sqrt{N_0}}\right)+\frac{P}{2}$$

$$\text{if } \frac{A^2}{N_0} \rightarrow \infty \quad P_e = \frac{P}{2}$$

3_الف)

$$Y(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} A_K P_R(t-KT) + n(t) \qquad A_K = \begin{cases} A \\ -A \end{cases}$$ از هم مستقل، $P_R(t) = e^{-\lambda|t|}$

$$n(t) \sim N(0,\sigma^2) \qquad Y_m \triangleq Y(mT) \qquad Var(n(mT)) = \sigma^2$$

مستقل از $A_K$

$$Y_m = Y(mT) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} A_K P_R((m-K)T) + n(mT) = \underbrace{A_m P_R(0)}_{\text{مطلوب}}\overset{1}{} + \underbrace{\sum_{\substack{K=-\infty \\ K\neq m}} A_K P_R((m-K)T)}_{\text{ISI :نامطلوب}} + \underbrace{n(mT)}_{\text{نویز نامطلوب}}$$

$$\rightarrow Y_m = Y(mT) = A_m + ISI + n(mT) \xrightarrow{\text{بدون نویز}} Y_m = A_m + ISI$$

بسته به حالت‌های $A_m$:
$$\begin{cases} Y_m = A + ISI \\ Y_m = -A + ISI \end{cases}$$

در این مسئله با توجه به اینکه احتمال رخداد $A$ ، $-A$ یکسان و رابطه را است سپس می‌توان نتیجه گرفت که Threshold=0 یعنی $D=0$ است پس می‌توانیم بنویسیم.

به نفع $-A$ | به نفع $A$ ($0$)

if we send $A$: $Y_m > 0 \rightarrow A + ISI > 0 \rightarrow ISI > -A$
and receive $A$

if we send $-A$: $Y_m < 0 \rightarrow -A + ISI < 0 \rightarrow ISI < A$
and receive

$$\rightarrow |ISI| < A$$

کران بالای $ISI$ : $A$

| 6 | تاریخ تحویل: 01/1/29 | نام درس: مخابرات دیجیتال<br>تکالیف سری سوم | سروش مس‌فروش مشهد<br>شماره دانشجویی: 810198472 |
|---|---|---|---|

حال دنبال شرط کلی صفرسازی ISI برای سمپل m ام می گردیم. $ISI = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k P_R((m-k)T) = 0$ ?

می‌دانیم: $P_R(t) = e^{-\lambda|t|} \rightarrow \quad ISI = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-\lambda|(m-k)T|} = 0$

حال $k$ را به $2m-k$ بدل می‌کنیم. می‌توانیم عبارت ISI را به فرم زیر بنویسیم.

تبدیل کران سیگما

$$ISI = \sum_{k=\infty} A_{2m-k} e^{-\lambda|(m+k-2m)T|} = \sum_{k=\infty} A_{2m-k} e^{-\lambda|(k-m)T|}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2m-k} e^{-\lambda|(m-k)T|} \longrightarrow A_k = -A_{2m-k}$$

پ)

$ISI \longrightarrow Z$ متغیر تصادفی $\quad Z \sim (m, \sigma^2)$

$$m = E\{Z\} = E\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k P_R((m-k)T)\} \overset{\text{خطی بودن } E}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_k P_R((m-k)T)\}$$

$$= P_R((m-k)T) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_k\}}_{0} = 0 \longrightarrow \boxed{m = 0}$$

حال به محاسبه واریانس می‌پردازیم.

$$Var(Z) = E\{Z^2\} = E\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} A_k A_l P_R((m-k)T) P_R((m-l)T)\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{A_k A_l\} P_R((m-k)T) P_R((m-l)T)$$

با توجه به iid بودن $E\{A_k A_l\} = 0$ اگر $k \neq l$ باشد. فقط زمانی که $k = l$ باشد واریانس صفر نیست.

$$\rightarrow E\{Z^2\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_k^2\} (P_R((m-k)T))^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 (P_R((m-k)T))^2$$

حال برای محاسبه احتمال خطا E قسمت قبل را سازه کنیم. سپس محاسبه Var می‌پردازیم.

$E\{ISI + \text{نویز}\} = 0, \quad Var(ISI + n(t)) = Var(n(t)) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 (P_R((m-k)T))^2$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$\longrightarrow P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 (P_R((m-k)T))^2 + Var(n(t))}}\right) \qquad Var(n(t)) \triangleq \sigma^2$$