



دانشکده فنی

بسمه تعالی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر  
تمرین‌های درس مخابرات دیجیتال - سری چهارم



دانشگاه تهران

برخی سؤالات این مجموعه با کسب اجازه از جناب آقای دکتر سعید نادر اصفهانی از تمرین‌های درس مخابرات ۲ ایشان انتخاب شده‌اند. بدینوسیله از بذل محبت ایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

تحویل سؤالات ستاره‌دار لازم نیست، اما حل آن‌ها جهت یادگیری بهتر مطالب اکیداً توصیه می‌شود.

- (۱) در یک سیستم PAM ترناری (سه‌تایی)، سمبل‌های A و B و C، به ترتیب با احتمال  $P_A$ ،  $P_B$  و  $P_C$  ارسال می‌شوند. سیگنال دریافتی پس از نمونه‌برداری به فرم  $Y(t_m) = A_m + n(t_m)$  است به گونه‌ای که:

$$A_m = \begin{cases} -2A, & \text{اگر A ارسال شده باشد} \\ 0, & \text{اگر B ارسال شده باشد} \\ 2A, & \text{اگر C ارسال شده باشد} \end{cases}$$

و  $n(t_m)$  نویز لاپلاسی با میانگین صفر و واریانس  $N_0$  است یعنی:  $f(n) = \frac{1}{\sqrt{2N_0}} \exp\left(-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}\right)$ .

الف) با استفاده از الگوریتم MAP سطوح آستانه‌ای تصمیم‌گیری را برای آشکارسازی بهینه سمبل‌های ارسالی بیابید.

ب) احتمال خطای آشکارسازی را تعیین کنید.

پ) تحت چه شرایطی در آشکارساز بهینه هیچ‌گاه به نفع سمبل B تصمیم‌گیری نمی‌شود؟

- (۲) \*در یک سیستم MPAM، داده‌ها با نرخ  $r_b = 1 \text{ Mbps}$  بر روی کانالی با پهنای باند 200 کیلوهرتز و نویز گوسی سفید ایستگاه با چگالی طیف توان  $10^{-4} \text{ W/Hz}$  توسط پالس‌های هم‌احتمال ارسال می‌شود. انرژی بیت ( $E_b$ ) لازم را برای دستیابی به احتمال خطایی کمتر یا مساوی  $10^{-6}$  به دست آورید.

- (۳) در یک کانال تلفن با پهنای باند 3 KHz و نویز گوسی سفید، هرگاه حداکثر توان مجاز به ورودی کانال اعمال شود، سیگنال به نویز خروجی برابر 30 dB می‌شود. در این کانال بیت‌ها را حداکثر با چه سرعتی می‌توان به صورت MPAM ارسال نمود به طوری که احتمال خطا از  $10^{-6}$  بزرگ‌تر نشود؟ این سرعت را با ظرفیت کانال مقایسه کنید.

- (۴) در یک سیستم 3PAM، نمونه‌ای دریافتی در بازه‌ی سمبل  $k$ ام برابر  $Y_k = A_k + Q + n_k$  است که در آن  $A_k$  یکی از مقادیر 3A، 0 و -3A را به ترتیب با احتمال‌های 0.25، 0.5 و 0.25 اختیار می‌کند و  $n_k$  نویز گوسی با میانگین صفر، واریانس  $\sigma^2$  و مستقل از  $A_k$  و  $Q$  است.

الف) فرض کنید  $Q$  هنگامی که  $A_k$  غیر صفر است برابر صفر و هنگامی که  $A_k$  صفر است با احتمال 0.5 مقدار  $A$  و با احتمال 0.5 مقدار  $-A$  را اختیار می‌کند. سطوح آستانه‌ای بهینه و احتمال خطای گیرنده را پیدا کنید.

ب) حال فرض کنید در سیستم فوق  $Q = 0$  و احتمال آن که  $A_k$  مقادیر 3A، 0 و -3A را اختیار کند به ترتیب برابر 0.1، 0.5 و 0.4 شود. نشان دهید که با شیف‌ت نقاط مدولاسیون به اندازه‌ی  $\Delta$  (که مقدار آن را تعیین می‌کنید) می‌توان بدون تغییر در احتمال خطای سیستم، توان فرستنده را کاهش داد. میزان این کاهش توان را نیز به دست آورید.

(۵) \*در یک سیستم PAM سه تایی، با پالس های هم احتمال و نویز گوسی سفید ایستان، احتمال خطا برابر  $10^{-5}$  است (فرض کنید دامنه ی پالس ها از نویز مستقل اند). در گیرنده این سیستم، مداری وجود دارد که در صورت تغییر دامنه ی سیگنال دریافتی، سطوح آستانه ی بهینه را تغییر می دهد. مثلاً اگر سطوح بهینه برای دامنه های  $2A$ ،  $0$  و  $-2A$  برابر  $A$  و  $-A$  باشند، در صورت سه برابر شدن دامنه ها، مدار فوق این سطوح را به  $3A$  و  $-3A$  تغییر می دهد. فرض کنید به دلیل بروز اشکال در گیرنده، این مدار از کار می افتد. در این صورت:

الف) اگر افت توان کانال دو برابر شود، احتمال خطای جدید گیرنده چه قدر خواهد شد؟

ب) کم ترین احتمال خطایی که می توان با افزایش نامحدود توان فرستنده به آن دست یافت، چه قدر است؟

(۶) فرض کنید یک سیستم PAM باینری متشکل از 99 تکرار کننده است و در آن کانال های قبل و بعد از هر تکرار کننده مشابه یکدیگرند. افت کانال را یکنواخت و نویز را گوسی و سفید در نظر بگیرید. در این سیستم احتمال خطای کل برابر  $10^{-5}$  اندازه گیری می شود. حال فرض کنید افت مسیر بین فرستنده و تکرار کننده اول و همچنین بین تکرار کننده های اول و دوم به اندازه ی 3 dB افزایش یابد. در هریک از حالات زیر احتمال خطای کل سیستم را به دست آورید.

الف) تمام تکرار کننده ها از نوع تقویت کننده باشند.

ب) تمام تکرار کننده ها از نوع بازساز باشند.

پ) تمام تکرار کننده ها از نوع تقویت کننده بوده و برای جبران افت مسیر، 3 dB به بهره ی تقویت هریک از تکرار کننده های اول و دوم اضافه کنیم.

(۷) \*اگر برای ارتباط بین دو نقطه به فاصله 200 کیلومتر از PAM باینری با نرخ  $r_b = 2 \text{ Mbps}$  با حداقل دو تکرار کننده استفاده شود، احتمال خطا کمتر از  $10^{-6}$  خواهد بود. اگر کانال ایده آل و افت آن متناسب با طول کانال و برابر 30 dB/Km، نویز گوسی و چگالی آن در ورودی تکرار کننده برابر  $\eta/2 = 10^{-13} \text{ W/Hz}$  و توان فرستنده برابر یک وات باشد:

الف) اگر از تکرار کننده از نوع تقویت کننده استفاده شود، چه تعداد تکرار کننده لازم است؟

ب) اگر تکرار کننده ها از نوع بازساز باشند، چه تعداد تکرار کننده لازم است؟

(۸) در یک سیستم PAM باینری پالس دریافتی ترمیم نشده در زمان های نمونه برداری به صورت زیر است:

$$p_R(\pm T) = 0.3, \quad p_R(0) = 0.9, \quad p_R(kT) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \pm 1$$

الف) یک همسان ساز از نوع ZF با سه درجه آزادی (3-Tap یا  $N = 1$ ) طراحی کنید.

ب) نمونه های  $p_{eq}(t)$  را در  $\pm(N+2)T$  و  $\pm(N+3)T$  بیابید.

پ) \*بندهای (الف) و (ب) را برای یک همسان ساز ZF با پنج درجه آزادی (5-Tap یا  $N = 2$ ) تکرار کنید.

(۹) \*در مسئله قبل فرض کنید سیگنال دریافتی به صورت  $Y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m p_R(t - mT) + n(t)$  باشد که در آن  $\{A_m\}$  دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس  $\mathbb{E}\{A_m^2\} = 1$  است. نویز را سفید و گوسی با چگالی  $\eta/2 = 0.1 \text{ W/Hz}$  و مستقل از دنباله ی داده فرض کنید (توجه کنید که در سیستم های عملی، مقدار  $\eta$  بسیار کوچک تر از این مقدار است و این عدد صرفاً جهت تعریف مسأله استفاده شده است).

الف) مقادیر  $R_Y(kT)$  و  $R_{AY}(kT)$  را بیابید.

ب) یک همسان ساز MMSE با سه درجه آزادی (3-Tap) برای سیگنال دریافتی طراحی کرده و MSE مربوطه (یعنی  $\mathbb{E}\{(Y(mT) - A_m)^2\}$ ) را بیابید.

## تمرین‌های کامپیوتری

در یک سیستم PAM سیگنال ارسالی به فرم  $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_s)$  است. چگالی طیف توان این سیگنال با فرض WSS و مستقل بودن دنباله‌ی  $\{a_k\}$  به‌طوری‌که در درس دیدیم برابر است با:

$$G_X(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left( \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right)$$

اگر  $m_a = 0$  باشد چگالی طیف توان به فرم زیر می‌شود:

$$G_X(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \mathbb{E}\{a_k^2\}$$

در این صورت می‌توانیم SNR را برحسب انرژی سمبل و به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\text{SNR} = \frac{E_s}{\eta}$$

در این تمرین برای ساده‌تر شدن مسئله احتمال سمبل‌ها طوری انتخاب شده‌اند که  $m_a = 0$  باشد.

### تولید و ارسال سمبل‌ها با استفاده از مدولاسیون 4-PAM

در ابتدا همانند تمرین کامپیوتری سری قبل، یک پالس raised-cosine برای  $\beta = 0$ ،  $T_s = 1$ ،  $Fs = 10$  در بازه‌ی  $[-6T, 6T]$  تولید کنید. حال می‌خواهیم با استفاده از مدولاسیون 4-PAM سمبل‌های A و B و C و D با احتمال‌های به ترتیب 0.1، 0.4، 0.4 و 0.1 ارسال کنیم به‌گونه‌ای که دامنه‌ی پالس برای هر سمبل مطابق زیر انتخاب شود:

$$A_m = \begin{cases} -3, & \text{اگر } A \text{ ارسال شده باشد} \\ -1, & \text{اگر } B \text{ ارسال شده باشد} \\ 1, & \text{اگر } C \text{ ارسال شده باشد} \\ 3, & \text{اگر } D \text{ ارسال شده باشد} \end{cases}$$

برای این کار ابتدا به کمک دستور rand برداری به طول  $N = 10^6$  تولید کنید. (خروجی دستور rand اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی  $(0, 1)$  می‌باشد). برای تولید سمبل‌ها می‌توانیم بازه‌ی  $(0, 1)$  را به بازه‌هایی که طول آن‌ها متناسب با احتمال ارسال سمبل‌ها است تقسیم کنیم و اعداد هر بازه را معادل یکی از سمبل‌ها در نظر بگیریم. مثلاً می‌توانیم اعداد در بازه‌ی  $(0, 0.1)$  را معادل سمبل A،  $(0.1, 0.5)$  معادل سمبل B،  $(0.5, 0.9)$  معادل سمبل C و  $(0.9, 1)$  را معادل سمبل D در نظر بگیریم. به این ترتیب بردار modulated\_symbols را تشکیل دهید.

در ادامه مطابق روش توضیح داده شده در تمرین کامپیوتری سری قبل بردار transmitted\_signal را به‌دست آورده، برای مقادیر  $\text{SNR\_dB} = 0, 1, \dots, 10$  نویز تولید کرده و با اضافه کردن نویز به transmitted\_signal بردار received\_signal را تشکیل دهید. دقت کنید که ابتدا باید انرژی صرف‌شده برای ارسال هر سمبل ( $E_s$ ) را محاسبه کنید و با استفاده از آن و مقدار SNR خطی توان نویز را محاسبه کنید. همچنین احتمال خطای محاسبه‌شده در اینجا، احتمال خطای سمبل است.

### آشکارسازی سمبل‌ها با استفاده از گیرنده‌های ML و MAP

ابتدا با نمونه‌برداری از `received_signal` بردار `samples` را تشکیل دهید. حال برای هر دو گیرنده MAP و ML از طریق محاسبات دستی سطوح آستانه تصمیم‌گیری را محاسبه کنید. برای هر حالت، بردار `detected_symbols` را از طریق مقایسه درایه‌های بردار `samples` با سطوح آستانه به‌دست آورید. برای هر گیرنده احتمال خطا را محاسبه کنید و نمودار احتمال خطا برحسب مقادیر `SNR_dB` رسم کرده و با یکدیگر مقایسه کنید.

