بسمه تعالی

دانشگاه تهران

دانشکدگان فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین‌های درس مخابرات دیجیتال – سری سوم

برخی سئوالات این مجموعه با کسب اجازه از جناب آقای دکتر سعید نادر اصفهانی از تمرین‌های درس مخابرات ۲ ایشان انتخاب شده‌اند. بدینوسیله از بذل محبت ایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

تحویل سوالات ستاره‌دار لازم نیست، اما حل آن‌ها جهت یادگیری بهتر مطالب اکیداً توصیه می شود.

۱) در یک سیستم PAM باینری سیگنال ارسالی به فرم $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\ p(t-kT)$ است. فرض کنید $p(t)$ پالسی مربعی است و $b_k=a_k-a_{k-1}$ که در آن a_kها توأماً مستقل بوده و یکی از مقادیر -1 یا 1 را با احتمال 0.5 اختیار می‌کنند.

الف) تابع خودهمبستگی دنباله‌ی $\{b_k\}$ را بیابید.

ب) طیف توان سیگنال $X(t)$ را به‌دست آورید.

پ) بند های (الف) و (ب) را در حالتی که a_k ها با احتمال 0.5 یکی از مقادیر 0 یا 1 را دارا هستند تکرار کنید.

۲) *یک سیگنال PAM باینری متشکل از $2N+1$ پالس به شکل $\mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$ با دامنه‌های ±1 و با احتمال برابر است و پالس‌های مجاور به فاصله‌ی T ثانیه از یکدیگر واقعند. نمونه‌برداری به‌منظور تشخیص دامنه پالس وسطی (پالس $N+1$ام) با خطای زمانی $0.1T$ صورت می‌گیرد.

الف) حداکثر مقدار تداخل (ISI) از پالس‌های کناری چه‌قدر است؟ احتمال وقوع این مقدار ISI چه‌قدر است؟

ب) بند (الف) را برای حالتی که به‌جای $\mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$ از پالس $\sqrt{\frac{3}{2}}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{t}{T})$ استفاده شود تکرار کنید.

پ) حداکثر مقدار تداخل در کدام یک از قسمت های (الف) یا (ب) بیشتر است؟

۳) در یک سیستم PAM باینری، سیگنال دریافتی در گیرنده به فرم

$$Y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, p_R(t-kT)+n(t)$$

است که در آن A_kها، مستقل از یکدیگر، مقادیر A و $-A$ را با احتمال برابر اختیار می‌کنند. همچنین $\lambda>0$, $p_R(t)=e^{-\lambda|t|}$ و $n(t)$ نویز گوسی جمع‌شونده با میانگین صفر و مستقل از A_kها است. تصمیم‌گیری درباره‌ی سمبل mام براساس علامتِ نمونه‌ی $Y_m \triangleq Y(mT)$ انجام می‌شود. فرض کنید واریانسِ $n(mT)$ برابر σ^2 است.

الف) <u>در غیاب نویز</u>، برای آن‌که بتوان A_m را بدون خطا آشکار کرد یک حد بالا برای قدرمطلق ISI برحسب A پیدا کنید (به مرز تصمیم‌گیری توجه کنید). تحت چه شرط کلی بر حسب A_kها مقدار ISI برای سمبل mام دقیقاً برابر صفر است؟

در بندهای زیر فرض کنید حداکثر ISI قابل‌تحمل برابر با 50% حدبالای به‌دست‌آمده در بند (الف) است و نویز در سیستم حضور دارد.

ب) بیشترین نرخ ارسال سمبل‌ها بر روی این کانال چه‌قدر است؟

پ) طبق قضیه‌ی حد مرکزی (CLT) در احتمال، ISI را در سیستم فوق می‌توان تقریباً یک متغیر تصادفی نرمال فرض کرد که آن را Z می‌نامیم. میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را پیدا کنید و با توجه به توزیع Z، احتمال خطای گیرنده را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید.

۴) فرض کنید $x(t)$ سیگنالی دلخواه باشد که برای آن $x(0)=1$ است. تعریف می‌کنیم $p(t) \triangleq x(t)\ \mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$.

الف) بدون محاسبه‌ی نمایش حوزه‌ی فرکانس $p(t)$، نشان دهید این پالس، یک پالس نایکوئیست است.

ب) نمایش حوزه‌ی فرکانس $p(t)$ را یافته و نشان دهید که در حوزه‌ی فرکانس نیز معیار نایکوئیست را برآورده می‌کند.

پ) اگر $x(t)$ دارای پهنای باند $B_x \leq \frac{1}{2T}$ باشد، پهنای باند $p(t)$ چه‌قدر خواهد شد؟

۵) *یک سیگنال PAM باینری در نظر بگیرید. نمونه‌های این سیگنال در مرکز پالس‌ها (یعنی $Y(t_m)$ها) از مجموع دو بخش تشکیل شده‌اند. یک بخش مربوط به دامنه‌ی پالس است که با احتمال p مقدار A_1 و با احتمال $1-p$ مقدار A_2 را اختیار می‌کند. بخش دیگر مربوط به نویز است که یک متغیر تصادفی لاپلاس با چگالی $f(n)=\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\exp\left(-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}\right)$ فرض می‌شود. آستانه‌ی تصمیم‌گیری برای آشکارسازی سمبل ارسالی Δ است و می‌دانیم $A_1<\Delta<A_2$.

الف) احتمال خطای آشکارسازی را برای این سیستم به‌دست آورید.

ب) مقدار Δ را به گونه‌ای بیابید که احتمال خطا مینیمم شود.

پ) احتمال خطای مینیمم را برای دو حالت $A_1=A_2-1=-1/2$ و $A_1=A_2-1=1/2$ به‌دست آورده و مقایسه کنید. از این مقایسه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶) فرض کنید برای فرستادن یک سیگنال PAM باینری از N کانال مستقل، هر یک با تضعیف α_i $(\alpha_i>0)$ و نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس σ_i^2 استفاده کنیم. فرض کنید سیگنال دریافتیِ نمونه‌برداری‌شده در mامین بازه زمانی و در کانال iام به صورت $Y_i(t_m)=\alpha_i A_m+n_i(t_m)$ است که در آن A_m برای ارسال 0 و 1 با احتمال 0.5 به‌ترتیب برابر A و $-A$ فرض می‌شود.. ترم‌های مربوط به نویز، داده و تضعیف کانال‌ها توأماً مستقل‌اند. در گیرنده برای بهبود عملکردِ آشکارسازی، سیگنال‌های دریافتی را به صورت $Y=\sum_{i=1}^{N}K_iY_i$ $(K_i>0)$ ترکیب کرده و از Y برای آشکارسازی سمبل ارسالی استفاده می‌کنیم (به این عمل اصطلاحاً Diversity Combining گفته می‌شود).

الف) احتمال خطای آشکارسازی را برای این سیستم به‌دست آورید.

ب) ثابت کنید برای داشتن احتمال خطای مینیمم، باید رابطه‌ی $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=\frac{K_i\,\sigma_i^2}{K_j\,\sigma_j^2}$ $(i,j=1,\ldots,N)$ برقرار باشد و احتمال خطا را در حالت $\alpha_i=K_i\,\sigma_i^2$ به‌دست آورید.

۷) در یک سیستم PAM باینری، نمونه‌های دریافتی علاوه بر نویز دارای ISI نیز هستند. به عبارت دیگر سیگنال دریافتی به‌فرم

$$Y(t_m)=A_m+Q+n(t_m)$$

است که در آن ترم Q نشان‌دهنده‌ی ISI در سیگنال دریافتی است و به‌صورت یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $\Pr\{Q=q\}=\Pr\{Q=-q\}=1/8$ و $\Pr\{Q=0\}=3/4$ مدل می‌شود.

الف) اگر $n(t_m)$ گوسی با میانگین صفر و واریانس N_0، و A_m برای ارسال 0 و 1 با احتمال 0.5 به‌ترتیب برابر $-A$ و A باشد، احتمال خطای آشکارسازی را بیابید.

ب) فرض کنید $\frac{A}{\sqrt{N_0}}=3$ و احتمال خطای آشکارسازی را برای $\frac{q}{A}=0.1$ و $\frac{q}{A}=0.25$ به‌دست آورید.

پ) احتمال خطای آشکارسازی را برای $q=A$ بیابید. اگر $\frac{A}{\sqrt{N_0}}\to\infty$ احتمال خطا چه‌قدر خواهد شد؟

۸) در یک سیستم PAM باینری نمونه‌های سیگنال دریافتی به‌فرم $Y(t_m)=A_m+n(t_m)$ هستند که در آن A_m مقادیر A و $-A$ را با احتمال برابر اختیار می‌کند و $n(t_m)$ نویز گوسی با میانگین صفر و واریانس N_0 است. فرض کنید مدار تنظیم‌کننده‌ی سطح آستانه دارای اشکال است به‌گونه‌ای که سطح آستانه‌ی بهینه را با احتمال p (به‌اشتباه) $2A$ و با احتمال

$1-p$ (به‌درستی) 0 فرض می‌کند. احتمال خطای گیرنده را به‌دست آورید. هنگامی‌که نسبت A^2/N_0 به بی‌نهایت میل می‌کند، احتمال خطای گیرنده چه‌قدر خواهد شد؟

۹) *در یک سیستم PAM باینری سیگنال دریافتی به فرم $Y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, p(t-t_d-kT)+n(t)$ است که در آن نمونه‌های $n(t)$ گوسی با میانگین صفر و واریانس N_0، A_k با احتمال 0.5 مقادیر A و $-A$ را اختیار می‌کند و

$$p_R(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(\frac{2\pi t}{T})}{1-(\frac{4t}{T})^2}\right).$$

الف) برای آشکارسازی یک سمبل با کمترین مقدار ISI، زمان نمونه‌برداری t_m را بیابید.

ب) برای زمان نمونه‌برداری بدست‌آمده در قسمت (الف) مقادیر $Y(t_m)$ را در بدون در نظر گرفتن نویز مشخص کنید.

پ) با توجه به مقادیر ایده‌آل $Y(t_m)$ سطوح آستانه‌ی بهینه را برای آشکار سازی سمبل‌ها با کمترین احتمال خطا مشخص کنید و احتمال خطا را در این حالت محاسبه کنید.

۱۰) *سمبل‌های باینری $\{d_i\}$ را به طور هم‌زمان در سه کانال مستقل از هم با استفاده از سیگنالینگ PAM باینری ارسال می‌کنیم. فرض کنید در کانال‌های اول تا سوم نمونه‌هایی به صورت:

$$Y_i=\begin{cases}A_i+n_i, & d_i=1\\ -A_i+n_i, & d_i=0\end{cases}\qquad i=1,2,3$$

دریافت می‌شوند که در آن n_iها مستقل از هم با میانگین صفر و واریانس σ_i^2 بوده و A_iها یقینی (Deterministic) هستند.

الف) اگر تشخیص سمبل‌های باینری به‌صورت جداگانه برای هر کانال انجام شود و سپس تصمیم‌گیری براساس قانون اکثریت (Majority Rule) صورت گیرد. احتمال خطا بر حسب σ_i^2 و A_i چگونه خواهد بود؟

ب) اگر تصمیم‌گیری بر اساس یک ترکیب خطی به فرم $Y=k_1Y_1+k_2Y_2+k_3Y_3$ انجام شود، رابطه احتمال خطا را برحسب σ_i^2 و A_i و k_i بدست آورید.

تمرین کامپیوتری

تولید پالس Raised-Cosine

در ابتدا می‌خواهیم پالس Raised-Cosine را برای $\beta = 0.5$ و $T = 1$ در بازه‌ای به طول $12T$ ($[-6T, 6T]$) و با فواصل زمانی $\Delta t = \frac{T}{F_s}$ محاسبه کنیم که در آن $F_s = 10$ است. برای مشخص شدن تأثیر خطای زمان نمونه‌برداری بر احتمال خطا، پالس را در سه سناریوی مختلف تولید می‌کنیم. در سناریوی اول زمان پالس را به صورت ایده‌آل و در بازه‌ی $[-6T, 6T]$، در سناریوی دوم پالس را با خطای $\epsilon = 0.1T$ و در بازه‌ی $[-6.1T, 5.9T]$ و در سناریوی سوم با خطای $\epsilon = 0.2T$ و در بازه‌ی $[-6.2T, 5.8T]$ در نظر می‌گیریم. دقت کنید که مقادیر پالس در لحظات $t = \pm\frac{T}{2\beta}$ برابر $\frac{\pi}{4}\text{sinc}(\frac{1}{2\beta})$ است که باید به‌صورت جداگانه تعریف شود. همچنین از آن‌جا که نمونه برداری در لحظات $kT - \epsilon$ ($k \in \mathbb{Z}$) صورت می‌گیرد، در صورتی‌که $\epsilon \neq 0$ باشد ISI خواهیم داشت. شکل پالس‌های تولید شده را رسم کنید.

راهنمایی: برای تولید مقادیر زمان می‌توانید مطابق کد زیر عمل کنید:

```
t = (-6*L:6*L)/Fs-sampling_error;
```

که در آن `sampling_error` یکی از مقادیر 0، $0.1T$ یا $0.2T$ را دارا است.

تولید سیگنال ارسالی

به کمک دستور `randi` برداری به طول $N = 10^5$ از صفر و یک‌ها تولید کنید و آن را `bits` بنامید. در ادامه با توجه به بردار `bits`، بردار `modulated_symbols` را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که به‌ازای هر صفر در بردار `bits` عدد -1، و به ازای هر یک در بردار `bits`، عدد 1 در بردار `modulated_symbols` قرار گیرد.

در ادامه می‌خواهیم سیگنال ارسالی را با استفاده از پالس raised-cosine و سمبل‌های مدوله‌شده تولید کنیم. برای این کار ابتدا باید بین هر دو سمبل متوالی در بردار `modulated_symbols` به تعداد $L - 1$ (که $L = T \times F_s$ است) صفر اضافه کنیم. سپس باید بردار جدید را با pulse کانولو (convolve) کنیم. به این ترتیب سیگنال ارسالی (`transmitted_signal`) حاصل می‌شود.

راهنمایی: برای اضافه کردن صفر بین سمبل‌های متوالیِ `modulated_symbols` می‌توانید از قطعه کد زیر استفاده کنید:

```
temp0 = upsample(modulated_symbols,L);
temp0 = temp0(1:end-(L-1));
```

مدل‌سازی کانال AWGN

در این مرحله می‌خواهیم احتمال خطای آشکارسازی مدولاسیون PAM باینری را در یک کانال AWGN برای مقادیر $\text{SNR\_dB} = 0, 1, \ldots, 10$ dB با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری به‌دست آوریم. برای هر درایه از بردار `SNR_dB`، ابتدا باید توان نویز را محاسبه کنیم. به این منظور فرض می‌کنیم که انرژی مصرفی به‌ازای هر بیت (یعنی E_b) برابر یک ژول باشد. در این‌صورت $\text{SNR} = \frac{E_b}{\eta} = \frac{1}{\eta}$ است که در آن، مقدار SNR قرار داده شده دررابطه فوق خطی است (بر حسب dB نیست).

برای تولید نویز از دستور `randn` استفاده کنید (طول بردار نویز باید برابر طول `transmitted_signal` باشد). خروجی این دستور نمونه‌های متغیر تصادفی نرمال استاندارد است ($\mathcal{N}(0,1)$). پس برای تولید نویز با توان مورد نظر، باید بردار نویز تولیدشده توسط دستور `randn` را در $\sqrt{\eta/2}$ ضرب کنیم. سپس نویز تولیدی را با `transmitted_signal` جمع کرده و حاصل را `received_signal` بنامید.

آشکارسازی سمبل‌ها

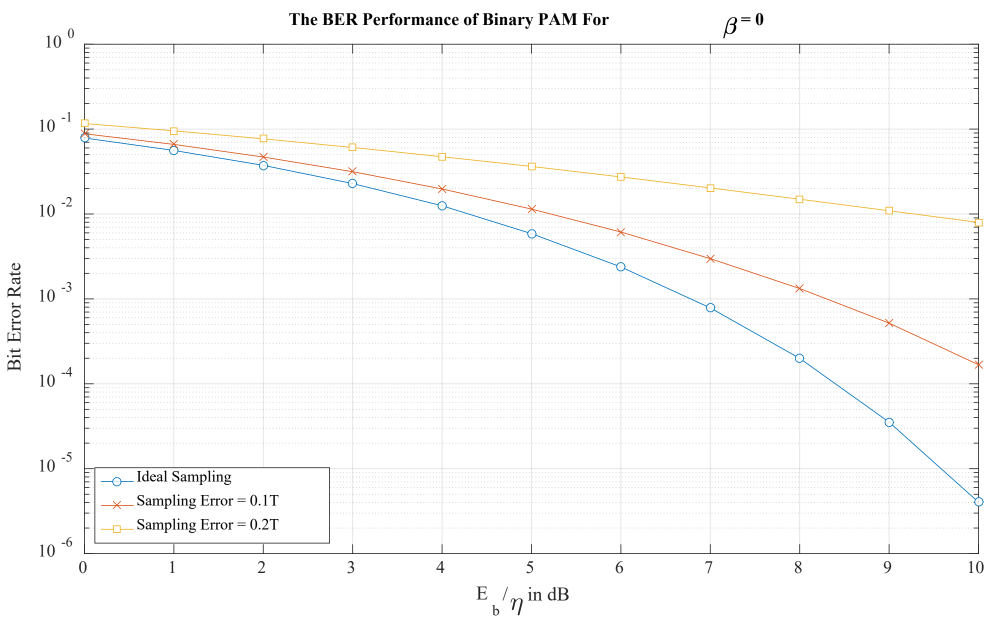
حال می‌خواهیم سمبل‌های ارسالی را با توجه به سیگنال دریافتی آشکار کنیم. برای این کار باید از سیگنال دریافتی در زمان‌های مشخص نمونه‌برداری کنیم:

```
T_sampling = 6*L+1:L:(N+6-1)*L+1;
```

received_signal را در لحظات T_sampling محاسبه کنید و بردار تولیدی را samples بنامید. در این مرحله باید با توجه به مقادیر موجود در بردار samples مشخص کنیم که آیا سمبل ارسال شده -1 یا 1 بوده است. برای این کار باید تک‌تک درایه‌های بردار samples، را با آستانه‌ی بهینه مقایسه کرده و بردار detected_symbols را که حاوی مقادیر آشکارشده است، به‌دست آوریم.

محاسبه احتمال خطا

برای محاسبه احتمال خطا باید مقادیر detected_symbols و modulated_symbols با هم مقایسه شوند و احتمال خطا از رابطه‌ی $P_e = \frac{\text{number of errors}}{\text{total number of symbols } (N)}$ محاسبه شود. احتمال خطا را برای مقادیر مختلف SNR_dB و مقادیر مختلف خطای نمونه‌برداری مانند شکل زیر در یک نمودار رسم کنید و تأثیر ISIی ناشی از نمونه‌برداری غیرایده‌آل را بر احتمال خطا توضیح دهید. برای رسم احتمال خطا در مقیاس لگاریتمی می‌توانید از دستور semilogy استفاده کنید.



تمامی مراحل بالا را برای $\beta = 0$ و $\beta = 1$ تکرار کنید و نتایج را با یکدیگر مقایسه کنید. به‌ازای کدام مقدار β حساسیت به خطای نمونه‌برداری کمتر است؟