بسمه تعالی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین‌های درس مخابرات دیجیتال – سری دوم

دانشگاه تهران | **پردیس دانشکده‌های فنی**

برخی سئوالات این مجموعه با کسب اجازه از جناب آقای دکتر سعید نادر اصفهانی از تمرین‌های درس مخابرات ۲ ایشان انتخاب شده‌اند. بدینوسیله از بذل محبت ایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

تحویل سوالات ستاره‌دار لازم نیست، اما حل آن‌ها جهت یادگیری بهتر مطالب اکیداً توصیه می شود.

۱) در جدول روبه‌رو تابع جرم احتمال توأم دو متغیر X و Y و توابع جرم احتمال حاشیه‌ای آن‌ها داده شده است. در این جدول

$$p_{ij} \triangleq \mathbb{P}\mathrm{r}\{Y=j|X=i\}, \quad i,j=1,2,3$$

احتمال‌های p_{ij} را به‌گونه‌ای تعیین کنید که آنتروپی توأم X و Y (یعنی $H(X,Y)$) ماکزیمم شود.

		Y: 1	2	3	$p_X[x]$
X	1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$1/2$
	2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$1/4$
	3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$1/4$
	$p_Y[y]$	$2/3$	$1/6$	$1/6$	

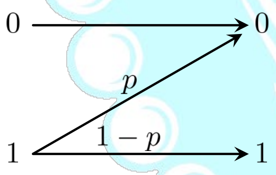
۲) منبعی بی‌حافظه سمبل‌های $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$ را به‌ترتیب با احتمال‌های $\{0.5,0.2,0.2,0.04,0.04,0.01,0.01\}$ تولید می‌کند.

الف) یک کد هافمن باینری برای این منبع طراحی کنید.

ب) آیا می‌توان کدی یافت که با استفاده از آن، خروجی این منبع با نرخ 2 بیت بر سمبل به‌صورت reliable قابل ارسال باشد؟

پ) آیا می‌توان با استفاده از کدِ بند (الف) خروجی این منبع را با نرخ 2 بیت بر سمبل به‌صورت reliable ارسال کرد؟

۳) نشان دهید کانال معادل با اتصال سری n کانال یکسان ولی مستقل (مطابق شکل) که دارای احتمال خطای p هستند ($p<0.5$)، یک کانال مشابه با کانال اصلی است و احتمال خطا در کانال معادل را بیابید. ظرفیت کانال معادل را در حالت حدی که $n\to\infty$ نیز حساب کنید

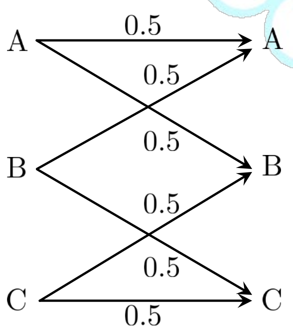


۴) *کانال ترناری (سه‌تایی) متقارن روبه‌رو را در نظر بگیرید.

الف) اگر سمبل‌های A، B و C به ترتیب با احتمال‌های 0.5، 0 و 0.5 تولید شوند، میزان اطلاعات ارسالی بر روی این کانال چند بیت بر سمبل است؟

ب) آیا می‌توان با تغییر توزیع احتمال ورودی میزان اطلاعات انتقالی را بر روی این کانال افزایش داد؟ در صورت منفی بودنِ پاسخ دلیل آن را ذکر و در صورت مثبت بودن، میزان افزایش را تعیین کنید.

پ) اگر دو طبقه از چنین کانالی به‌صورت سری با هم قرار گیرند ظرفیت کانال حاصل را بیابید و آن را با ظرفیت کانال اصلی مقایسه نمایید.



۵) *فرض کنید C نشان دهنده ظرفیت یک کانال گسسته بی‌حافظه با الفبای ورودی $\mathcal{I}=\{x_1,x_2,\dots x_M\}$ و الفبای خروجی $\mathcal{O}=\{y_1,y_2,\dots y_N\}$ باشد. نشان دهید: $C\le\min\{\log M,\log N\}$

۶) *فرض کنید $\mathcal{I}_n(n=2,3,\dots)$ مجموعه‌ای از بازه‌های حقیقیِ جدا از هم (بدون اشتراک) است به‌گونه‌ای که طول بازه $\mathcal{I}_n$ برابر $(n\log n)^{-2}$ می‌باشد و همچنین $K=\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}(\log n)^{-2}$. تعریف می‌کنیم:

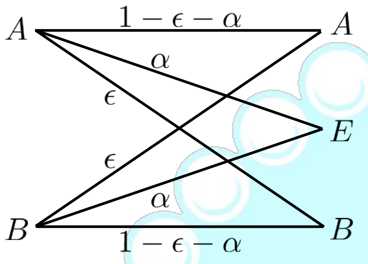
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{K}, & \text{if} \quad x\in\mathcal{I}_n\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

الف) ثابت کنید $K<\infty$.

ب) نشان دهید $p(x)$ یک توزیع احتمال برای متغیر تصادفی فرضی X است.

پ) نشان دهید $H(X)=-\infty$.

۷) الف) نشان دهید برای یک منبع بی‌حافظه‌ی سه‌تایی که احتمال تولید یکی از سمبل‌های آن ثابت و برابر p است، ماکزیمم آنتروپی برابر با $1-p+h_b(p)$ است و این ماکزیمم هنگامی به‌دست می‌آید که احتمال تولید دو سمبل دیگر منبع با یکدیگر برابر باشد (یادآوری می‌شود که: $h_b(p)\triangleq -p\log_2(p)-(1-p)\log_2(1-p)$).

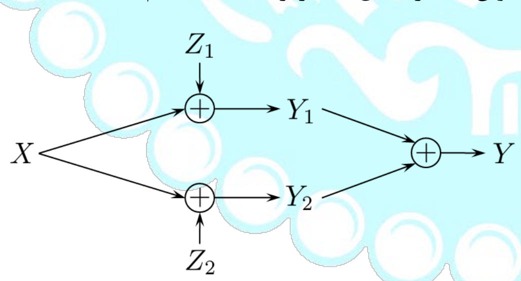


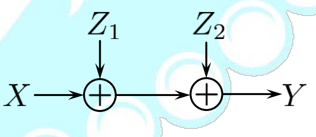
ب) با استفاده از نتیجه‌ی بند (الف) یا هر روش دیگر، ظرفیت کانال روبرو را برحسب ϵ، α و $h_b(\cdot)$ به‌دست آورید و توزیع ورودی که منجر به این ظرفیت می‌شود را نیز تعیین کنید.

پ) فرض کنید X منبعی پیوسته با تابع چگالی $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ باشد که براساس قانون $Y=\begin{cases}1, & X>1\\ 0, & X\le 1\end{cases}$ کوانتیزه (گسسته) می‌شود. فرض کنید در کانال فوق، $\alpha=0.05$ و $\epsilon=0$ باشند. آیا می‌توان سمبل‌های تولیدشده توسط منبع Y را بر روی این کانال به‌طور مطمئن (Reliable) ارسال نمود یا خیر؟ چرا؟

۸) *دو کانال گسسته‌ی بی‌حافظه به‌وسیله‌ی سه‌تایی‌های $(X_1,p(y_1|x_1),Y_1)$ و $(X_2,p(y_2|x_2),Y_2)$ توصیف می‌شوند و ظرفیت آن‌ها به‌ترتیب C_1 و C_2 است. کانال جدیدی به فرم $(X_1\times X_2,p(y_1,y_2|x_1,x_2),Y_1\times Y_2)$ تعریف می‌شود و حالتی را مدل می‌کند که $x_1\in X_1$ و $x_2\in X_2$ به طور هم‌زمان روی دو خط و بدون تداخل فرستاده می‌شوند. نشان دهید که اگر $p(y_1,y_2|x_1,x_2)=p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)$ ظرفیت کانال جدید، کوچک‌تر یا مساوی C_1+C_2 است.

۹) فرض کنید برای فرستادن سیگنالی با پهنای باند B و حداکثر توان P، از کانال‌های زیر استفاده کنیم:





الف) اگر Z_2 و Z_1 تواماً نرمال با میانگین صفر و ماتریس کواریانس $K=\begin{bmatrix}N & \rho N\\ \rho N & N\end{bmatrix}$ باشند، ظرفیت این کانال‌ها را بیابید.

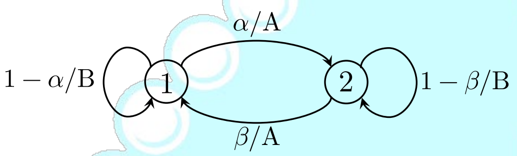
ب) برای مقادیر $\rho=0,1,-1$ این ظرفیت‌ها را به‌دست آورید و با هم مقایسه کنید.

تمرین کامپیوتری

۱۰) در نرم‌افزار MATLAB تابع entropy.m را به‌گونه‌ای بنویسید که با گرفتن ماتریس احتمالات گذار (transition_states) برای یک منبع و k، G_k (با تعریف داده‌شده در درس) را محاسبه نماید.

۱۱) در نرم‌افزار MATLAB تابع average_length.m را به‌گونه‌ای بنویسید که یک رشته سمبل (chain) و k را بگیرد و متوسط طول کد هافمن را برای حالتی که رشته را به صورت کلمات k تایی کد می‌کنیم به‌دست آورد. برای این کار می‌توانید از تابع huffmandict در MATLAB استفاده نمایید. توجه کنید که در این بخش نیازی به تولید کد هافمن نیست، اما توصیه می‌شود نحوه‌ی استفاده از توابع huffmanenco و huffmandeco را که به ترتیب برای encode و decode کردن سمبل‌های تولید شده توسط منبع استفاده می‌شوند، مطالعه کنید.

۱۲) منبع باحافظه روبرو را در نظر بگیرید. با فرض $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$ نرخ آنتروپی را برای این منبع به صورت تحلیلی محاسبه کنید. در نرم‌افزار MATLAB، تعداد 10,000,000 سمبلِ این منبع را تولید کرده و با استفاده از توابع بالا، متوسط طول کد هافمن و G_k را برای $k = 1, 2, \ldots, 10$ در یک نمودار برحسب k رسم کنید. بهره کدینگ را نیز برای $k = 1, 2, \ldots, 10$ پیدا کرده و آن را به همراه نرخ آنتروپی برحسب k رسم کنید.



۱۳) منبع بدون حافظه‌ی X با ۳ سمبل خروجی با احتمال‌های $(0.7, 0.29, 0.01)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از توابع فوق، متوسط طول کد هافمن و G_k را برای منابع X، X^2، X^3 به‌دست آورده و نمودارهای گفته‌شده در بند قبل را در این حالت نیز رسم کنید (منبع X^k منبعی است که هر پیام آن، شامل k سمبل متوالی از منبع X است).

۱۴) نتایج دو بند قبلی را تحلیل و با یکدیگر مقایسه نمایید.