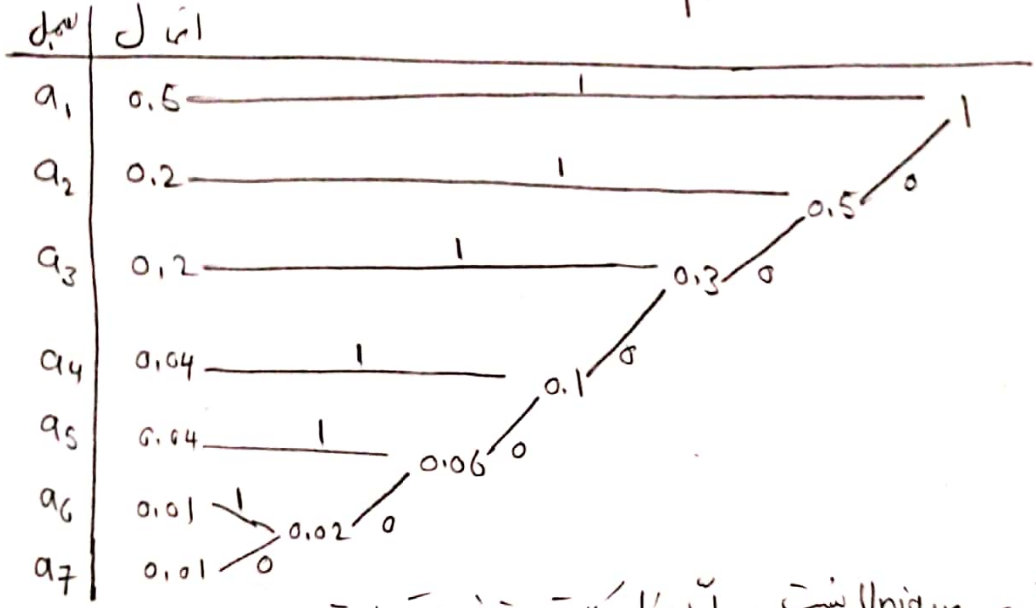
سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: مخابرات دیجیتال
تکلیف سری دوم

تاریخ تحویل: ۰۰/۱۲/۲۸

2. الف) مطابق الگوریتم که در کلاس ارائه شده داریم:



$a_1: 1$
$a_2: 01$
$a_3: 001$
$a_4: 0001$
$a_5: 00001$
$a_6: 000001$
$a_7: 000000$

دقت شود که کد حاصل Unique نیست. اما طول کلمات بهترین حالت است.

ب) برای حل این قسمت از نامساوی کرفت بهره می‌بریم. آنتروپی را حساب می‌کنیم

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i = -0.5\log_2 0.5 - 0.2\log_2 0.2 - 0.2\log_2 0.2 - 0.04\log_2 0.04 - 0.04\log_2 0.04$$

$$-0.01\log_2 0.01 - 0.01\log_2 0.01 \rightarrow H(x) = 1.9332$$ کرفت: $\bar{n} \geq H(x)$

$\longrightarrow \bar{n} = 2 \qquad 2 \geq 1.9332$ ✓

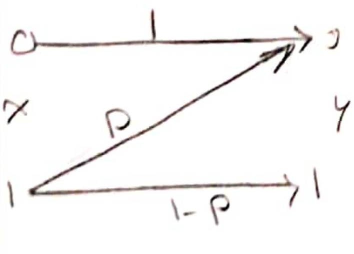
پس طبق نامساوی کرفت چنین چیزی ممکن می‌باشد.

پ) متوسط طول کلمات را $\bar{n}$ نامیده محاسبه می‌کنیم.

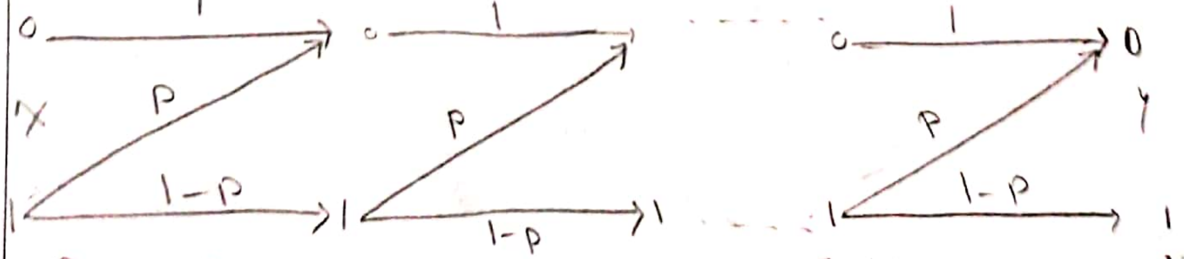
$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{7} p_i n_i = 1\times0.5 + 2\times0.2 + 3\times0.2 + 4\times0.04 + 5\times0.04 + 6\times0.01 + 6\times0.01$$

$\rightarrow \bar{n} = 1.98 \longrightarrow$ کرفت: $\begin{cases} \bar{n} \geq H(x) \rightarrow 1.98 \geq 1.9332 ✓ \\ 2 \geq 1.98 ✓ \end{cases} \Longrightarrow$ این کد بهینه است.

3. ابتدا شکل کانال داده شده در مسئله را رسم می‌کنیم.



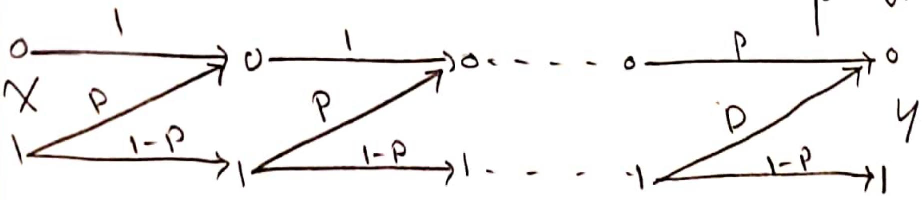
حال طبق بیان مسئله این کانال n بار به صورت سری به هم متصل می‌شود



ما خواهیم نشان دهیم این کانال مشابه کانال اول است. $P_{e(1)} = P_r\{X \neq Y\} = P$

سروش مس‌فروش مشهد | نام درس: مخابرات دیجیتال | تاریخ تحویل: 00/12/28 |
شماره دانشجویی: 810198472 | تکلیف سری دوم

در خواسته ۳ احتمال خطا را در کانال معادل بیابیم. اگر ورودی به کانال صفر باشد. یعنی $X=0$ قطعاً بدون هیچ شکی خروجی هم صفر است. یعنی $Y=0$ است:
$$X=0 \longrightarrow Y=0$$
اما اگر ورودی 1 باشد، از بابت خروجی قطعیت نداریم. ممکن است 0 یا 1 شود. یک بار دیگر دیاگرام کانال را رسم می‌کنیم:



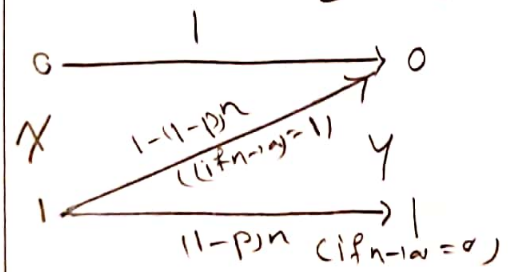
$$\text{if } X=0 \longrightarrow Y=0$$

$$\text{if } X=1 \longrightarrow Pr\{Y=1|X=1\} = \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{n \text{ تا}} = (1-p)^n$$

$$Pr\{Y=0|X=1\} = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots + p(1-p)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{سری هندسی}} Pr\{Y=0|X=1\} = p\cdot\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{p(1-(1-p)^n)}{p} = 1-(1-p)^n$$

البته رابطه بالا از روی $Pr\{Y=1|X=1\}$ و این نکته که $Pr\{Y=0|X=1\}+Pr\{Y=1|X=1\}=1$ نیز قابل به دست آمدن بود. پس کانال مورد نظر به صورت معادل به فرم زیر در می‌آید.



حال به محاسبه احتمال خطای آن می‌پردازیم.

$$P_e = Pr\{X \neq Y\} = 1-(1-p)^n$$

به وضوح از روی شکل مشخص است.

حال به محاسبه ظرفیت کانال در حالت حدی خواسته پرداخت یعنی وقتی $n \to \infty$

می‌دانیم: $C = \max_{P(X)} I(X;Y)$ $\quad I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$0:\ \alpha \quad 1:\ 1-\alpha \qquad H(Y|X) = \alpha H(Y|X=0) + (1-\alpha) H(Y|X=1)$

$$H(Y|X=0) = \sum_{i=0}^{1} -Pr\{Y=i|X=0\}\log Pr\{Y=i|X=0\} = -1\times\log 1 + 0 = 0$$

$$H(Y|X=1) = \sum_{i=0}^{1} -Pr\{Y=i|X=1\}\log Pr\{Y=i|X=1\} = -(1-p)^n\log(1-p)^n - (1-(1-p)^n)\log(1-(1-p)^n)$$

$$\rightarrow H(Y|X=1) = (1-p)^n\log\frac{1}{(1-p)^n} + (1-(1-p)^n)\log\frac{1}{1-(1-p)^n} \qquad n\to\infty \longrightarrow (1-p)^n = 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} H(Y|X=1) = 0 + \log 1 = 0 \qquad I(X;Y) = H(Y)$$

در حالت حدی با توجه به این که $(1-p)^n=0$ می‌شود هیچ ابهامی راجع به Y نداریم پس $H(Y)=0$ می‌باشد

$$I(X;Y) = 0 \longrightarrow C_{n\to\infty} = 0$$ ظرفیت کانال صفر است.

1- جدول داده های مسأله را یک بار دیگر رسم می‌کنیم.

		Y: 1	2	3	$P_X[x]$
X	1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	$\frac{1}{2}$
	2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	$\frac{1}{4}$
	3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	$\frac{1}{4}$
	$P_Y[y]$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

طبق صحبتی که در گروه درس صورت گرفت تعریف P_{ij} به صورت

$$P_{ij} = P_r\{Y=j|X=i\}\,P_r\{X=i\}$$

زیر اصلاح می‌گردد.

در مورد آنتروپی توأم از رابطه مقابل اطلاع داریم: $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$

حل این مسأله به کمک رابطه فوق بسیار دشوار خواهد بود. در حالت کلی برای اینکه $H(X,Y)$ ماکسیمم باشد، با توجه به اینکه Conditioning does not increase entropy اگر X, Y از هم مستقل باشند $H(X,Y)$ را می‌توان استنتاج نمود که ماکسیمم است.

X, Y مستقل $\to$ $P(x,y) = P(x)P(y)$

$\Rightarrow$ $P(x=1,y=1)=\frac{1}{3}$ $\quad P(x=1,y=2)=\frac{1}{12}$ $\quad P(x=1,y=3)=\frac{1}{12}$

$P(x=2,y=1)=\frac{1}{6}$ $\quad P(x=2,y=2)=\frac{1}{24}$ $\quad P(x=2,y=3)=\frac{1}{24}$

$P(x=3,y=1)=\frac{1}{6}$ $\quad P(x=3,y=2)=\frac{1}{24}$ $\quad P(x=3,y=3)=\frac{1}{24}$

مسلماً مجموع احتمالات بالا 1 خواهد بود.

حال به کمک تعریف ارائه شده P_{ij} ها را به دست می‌آوریم.

$$P_{ij}= P_r\{Y=j|X=i\}\,P_r\{X=i\} = P_r\{X,Y\}$$

پس نتیجه می‌شود که احتمالاتی که در بالا به دست آوردیم همان P_{ij} هاست.

$$\underset{\sim}{P_{ij}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

7- الف) منبعی داریم که سه سمبل تولید می‌کند مثلاً $\{a_i, a_j, a_k\}$ احتمال تولید یکی p است. ماکسیمم آنتروپی را به دست خواهیم آورد. فرض می‌کنیم احتمال تولید a_i برابر p، a_j برابر با α و a_k برابر با $1-p-\alpha$

$P(a_i)=p,\ P(a_j)=\alpha,\ P(a_k)=1-p-\alpha$ داریم: $H(X) = -\sum_{i=1}^{M} P_i \log_q P_i$

$\to H(X) = -p\log_q p - \alpha\log_q \alpha - (1-p-\alpha)\log_q(1-p-\alpha)$ برای ماکسیمم شدن از آن مشتق می‌گیریم

$$\to \frac{\partial H(X)}{\partial \alpha}=0 \to 0-\log_q\alpha - \frac{1}{\ln q} + \log_q(1-p-\alpha) + \frac{1}{\ln q} = 0$$

$\to \log_q \alpha = \log_q (1-\alpha-p) \Longrightarrow \alpha = 1-\alpha-p \to \alpha = \frac{1-p}{2}$

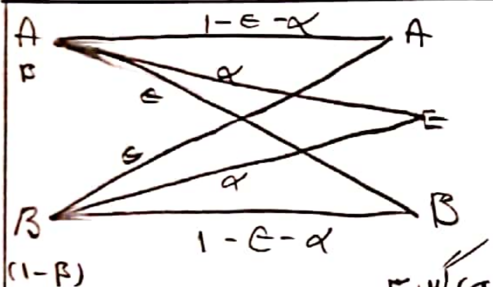
مشاهده می‌شود که احتمال تولید a_j که ... است: $\alpha = \frac{1-p}{2}$ پس احتمال تولید a_q به صورت $1-p-\alpha = \frac{1-p}{2}$ است. پس ما مشاهده می‌کنیم که برای ماکسیمم شدن آنتروپی باید $p(a_j') = p(a_q)$ شود. حال مقادیر بدست‌آمده را جاگذاری می‌کنیم.

$$\to H_{max}(X) = -p\log_q p - \frac{1-p}{2}\log_q\frac{1-p}{2} - \frac{1-p}{2}\log_q\frac{1-p}{2} \qquad \xrightarrow{q=2 \text{ در}}$$

$$H_{max}(X) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2\frac{1-p}{2} = \underbrace{-p\log_2 p - (1-p)\log_2 (1-p)}_{h_b(p)} + (1-p)$$

$$\longrightarrow H_{max}(X) = 1-p - h_b(p)$$

ب) کانال داده شده را رسم می‌کنیم. حال رابطه ظرفیت کانال را ارائه می‌کنیم.



$$C = \max_{P(x)} I(X;Y)$$

می‌دانیم: $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

توزیع ورودی‌ها مختلف را β، $1-\beta$ (به ترتیب برای A و B) در نظر می‌گیریم.

$$H(Y|X) = \beta H(Y|X=A) + (1-\beta) H(Y|X=B)$$

$$H(Y|X=A) = \sum_i -\Pr\{Y=i|X=A\}\log \Pr\{Y=i|X=A\}$$

$$\to H(Y|X=A) = -\alpha\log\alpha - \epsilon\log\epsilon - (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon)$$

با توجه به تقارن این دو احتمالات، $H(Y|X=A) = H(Y|X=B)$ پس داریم:

$$H(Y|X=B) = -\alpha\log\alpha - \epsilon\log\epsilon - (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon) \longrightarrow$$

$$H(Y|X) = -\alpha\log\alpha - \epsilon\log\epsilon - (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon)$$

حال به محاسبه $H(Y)$ می‌پردازیم.

$$H(Y) = -\Pr\{Y=A\}\log\Pr\{Y=A\} - \Pr\{Y=E\}\log\Pr\{Y=E\} - \Pr\{Y=B\}\log\Pr\{Y=B\}$$

$$\Rightarrow H(Y) = (-\beta(1-\epsilon-\alpha)-(1-\beta)\epsilon)\log \beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon - \alpha\beta - (1-\beta)\alpha \log \alpha\beta+(1-\beta)\alpha$$

$$-\beta\epsilon - (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)\log \beta\epsilon + (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)$$

$$\longrightarrow H(Y) = -\beta(1-\epsilon-\alpha) - (1-\beta)\epsilon \log \beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon - \alpha\log\alpha - \beta\epsilon - (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) \cdot$$

$$\log (1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) + \beta\epsilon$$

حال می‌توانیم $I(X;Y)$ را تشکیل دهیم.

5/8	تاریخ تحویل: 00/12/28	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$I(X;Y) = -\beta(1-\epsilon-\alpha)-(1-\beta)\epsilon \log \beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon - \alpha\log\alpha - \beta\epsilon-(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)\log(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)+\beta\epsilon$$

$$+\alpha\log\alpha + \epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon)$$

$$\longrightarrow I(X;Y) = -\beta(1-\epsilon-\alpha)-(1-\beta)\epsilon\log\beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon - \beta\epsilon-(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)\log\beta\epsilon+(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)$$

$$+\epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon)$$

برای ماکسیمم گیری از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial\beta} = 0 \longrightarrow (-(1-\epsilon-\alpha)+\epsilon)\log\beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon - \frac{(1-\epsilon-\alpha)+\epsilon}{\ln 2}$$

$$-\epsilon+(1-\epsilon-\alpha)\log\beta\epsilon+(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) + \frac{-\epsilon+(1-\epsilon-\alpha)}{\ln 2} + 0 + 0 = 0$$

$$\rightarrow (-(1-\epsilon-\alpha)+\epsilon)\log\beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon = (\epsilon-(1-\epsilon-\alpha))\log\beta\epsilon+(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha)$$

$$\rightarrow \log\beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon = \log\beta\epsilon+(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) \longrightarrow$$

$$\beta(1-\epsilon-\alpha)+(1-\beta)\epsilon = \beta\epsilon+(1-\beta)(1-\epsilon-\alpha) \rightarrow \beta-\beta\epsilon-\beta\alpha+\epsilon-\beta\epsilon$$

$$=\beta\epsilon+1-\epsilon-\alpha-\beta+\beta\epsilon+\beta\alpha \rightarrow 2\beta-4\beta\epsilon-2\beta\alpha+2\epsilon+\alpha-1=0$$

$$\longrightarrow \epsilon(2-4\beta)+\alpha(1-2\beta)+2\beta-1=0 \longrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

پس توزیع $\beta=1/2$ سبب حاصل شدن ماکسیمم $I(X;Y)$ می‌شود، نتیجتاً ظرفیت به صورت زیر عرضه می‌شود.

$$C = \left(-\frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha)-\frac{1}{2}\epsilon\right)\log\frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha)+\frac{1}{2}\epsilon + \left(-\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha)\right)\log\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}(1-\epsilon-\alpha)$$

$$+\epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\alpha-\epsilon)$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\log\frac{1}{2}(1-\alpha) + \left(-\frac{1}{2}(1-\alpha)\right)\log\frac{1}{2}(1-\alpha) + \epsilon\log\epsilon+(1-\epsilon-\alpha)\log(1-\epsilon-\alpha)$$

$$\rightarrow C = -(1-\alpha)\log\frac{(1-\alpha)}{2} + \epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\epsilon-\alpha)$$

پایه لگاریتم 2 باشد $\rightarrow C = -(1-\alpha)\log(1-\alpha) + \epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon-\alpha)\log(1-\epsilon-\alpha) + (1-\alpha)$

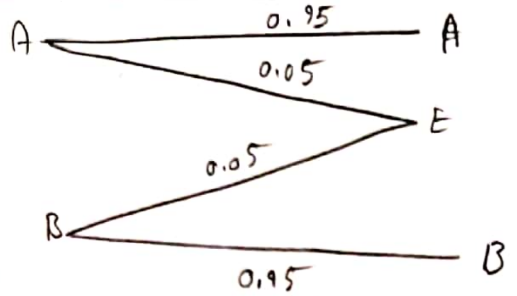
$C = (1-\alpha)\left(1-h_b\left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)\right)$ رابطه بالا را می‌توان به صورت بسیار شکیل به فرم مقابل خلاصه کرد.

برای صحت سنجی روابط به دست آمده، حالات خاص کانال‌های BSC, BEC را بررسی می‌کنیم.

if $\alpha=0 \longrightarrow C = 1-h_b(\epsilon)$ ظرفیت BSC را می‌دهد

if $\epsilon=0$: $C = 1-\alpha$ ظرفیت BEC را می‌دهد

6/8	تاریخ تحویل: 00/12/28	نام درس: مخابرات دیجیتال — تمرین سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد — شماره دانشجویی: 810198472



ب) شکل کانال دارای این حالت رسم می‌کنیم.

$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ — $\Pr\{X>1\}=\int_1^{\infty}\frac{1}{2}e^{-x}dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-x}\Big|_1^{\infty}=\frac{1}{2e}$

مشخص است: $\Pr\{X\le 1\}=\int_{-\infty}^{1}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2e}$

پس احتمال آن که سمبل تولید توسط Y، A شود برابر $\frac{1}{2e}$ و احتمال آن که B باشد برابر $1-\frac{1}{2e}$ است.

آنتروپی را باید محاسبه کنیم. $H(Y)=-\sum_{i=1}^{2}P_i\log P_i$

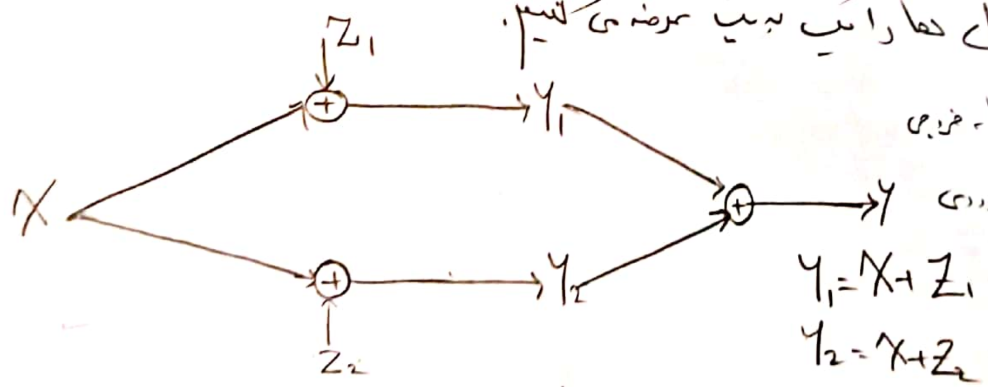
$\to H(Y)=-\frac{1}{2e}\log\frac{1}{2e}-\left(1-\frac{1}{2e}\right)\log_2\left(1-\frac{1}{2e}\right)\Rightarrow H(Y)=0.6886\ \frac{bit}{symbol}$

طبق قضیه شانون می‌دانیم اگر $H<C$ باشد می‌توان اطلاعات را بی‌خطا ارسال کرد. پس باید ظرفیت را حساب کنیم. کانال رسم شده یک کانال BEC است که طبق آنچه در ... به دست آوردیم به ازای $\epsilon=0$ ظرفیت آن تعیین می‌شود یعنی $\epsilon=0\to C=1-\alpha$

$C=1-0.05=0.95$ Shannon

پس $C>H\to 0.95>0.6886$ ✓ Reliable.

9 - الف) ظرفیت کانال‌ها را به ترتیب محاسبه می‌کنیم.



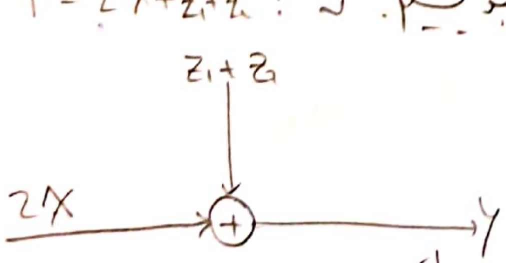
در اتصال موازی کانال‌ها خروجی هر کانال به صورت جمع ورودی و نویزات بیان می‌کنیم؛

$Y_1=X+Z_1$

$Y_2=X+Z_2$

از روی شکل نیز مشخص است که $Y=Y_1+Y_2$ پس می‌توانیم بنویسیم که: $Y=2X+Z_1+Z_2$

و کانال معادل به صورت مقابل معرفی می‌شود.



$X\longrightarrow P,\ B$ $\quad 2X\longrightarrow 4P,\ B$

(می‌دانیم که توان سیگنال با مجذور سیگنال ارتباط دارد)

از درس آمار و احتمال به خاطر داریم که میانگین ترکیب خطی متغیرهای تصادفی مجموع میانگین آن‌هاست بنابراین داریم:

$Z_1\sim N(0,N)$

$Z_2\sim N(0,N)$ $\quad E\{Z_1+Z_2\}=0$

می‌دانیم: $Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$

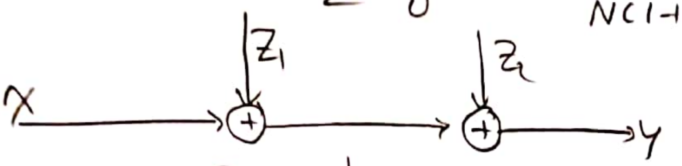
$\rightarrow Var(Z_1+Z_2) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2\,Cov(Z_1,Z_2) = N+N+2N\rho = 2N(1+\rho)$

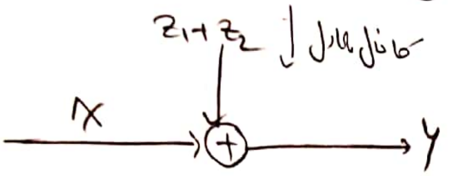
حال به راحتی می‌توانیم ظرفیت کانال را حساب کنیم. می‌دانیم: $C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_{sig}}{n_{noise}}\right)$

$Z_1+Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 2N(1+\rho)) \rightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4P}{2N(1+\rho)}\right)$

$\longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2P}{N(1+\rho)}\right)$

برای کانال بعدی نیز داریم:





می‌دانیم: $Z_1+Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 2N(1+\rho))$

$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_{sig}}{n_{noise}}\right)$

$\longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{2N(1+\rho)}\right)$

ظرفیت این کانال نیز به سادگی گرفته شد.

ب) برای کانال اول داریم

$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2P}{N(1+\rho)}\right)$

if: $\rho = 1 \longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$

if: $\rho = 0 \longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2P}{N}\right)$

if: $\rho = -1 \longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\infty = \infty$

می‌بینیم که به ازای $\rho=1$ کمترین ظرفیت و به ازای $\rho=-1$ بیشترین ظرفیت که ∞ است را داریم، عملاً وقتی $\rho=-1$ کانال ایده‌آل رفتار می‌کند که در عمل رخ نمی‌دهد.

برای کانال دوم داریم:

$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{2N(1+\rho)}\right)$

if $\rho = 1 \rightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{4N}\right)$

if $\rho = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{2N}\right)$

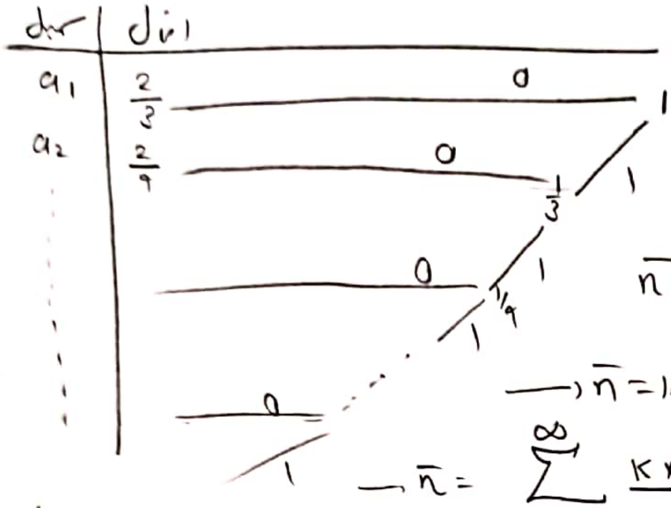
if $\rho = -1 \longrightarrow C = \frac{1}{2}\log\infty = \infty$

می‌بینیم که به ازای $\rho=1$ کمترین ظرفیت و به ازای $\rho=-1$ بیشترین ظرفیت که ∞ است را داریم. عملاً وقتی $\rho=-1$ کانال به صورت ایده‌آل رفتار می‌کند که در عمل رخ نمی‌دهد.

8/8	تاریخ تحویل: 00/12/28	نام درس: مخابرات دیجیتال — تمرین سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

8_ در میانه از کلیپ اول که باید پاسخ آن تحویل داده شود

$$P_k=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},\quad k=1,2,\dots \longrightarrow P_1=\frac{2}{3},\ P_2=\frac{2}{9},\ P_3=\frac{2}{27},\dots$$



کد هافمن $a_1: 0,\ a_2: 10,\ a_3: 110,\ a_4: 1110 \dots$ $a_n: \underbrace{111\dots1}_{n-1}0$

مطابق شکلی که رسم کردیم، طول a_i ها i است پس برای محاسبه متوسط طول کلمات داریم:

$$\bar{n}=\sum_{i=1}^{M} n_i p_i$$

$$\longrightarrow \bar{n}=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{27}+\dots+k\times\frac{2}{3^k}$$

$$\longrightarrow \bar{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\times 2}{3^k}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$$

برای محاسبه حاصل جمع فوق داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x^0}{1-x}=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{\text{D/dx}}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow{\times x}\sum_{n=0}^{\infty}n x^n=\frac{x}{(1-x)^2}\xrightarrow{\text{if } n=0\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}n x^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\longrightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=2\times\frac{\frac{1}{3}}{(1-1/3)^2}=2\times\frac{\frac{1}{3}}{4/9}=2\times\frac{9}{12}=\frac{18}{12}=3/2$$

متوسط طول کلمات.

برای به دست آوردن Redundancy نیاز به محاسبه آنتروپی هست.

$$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log P_i=-\frac{2}{3}\log P_1-\frac{2}{9}\log 2/9-\frac{2}{27}\log\frac{2}{27}-\dots$$

$$\longrightarrow H(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\log\frac{2}{3^k}=-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\log_2 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\log 3^k\right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\log_2 2=2\log_2 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{\frac{1}{3}}{2/3}\times 2=1$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\log_2 3^k=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\log_2\frac{1}{3^k}=\frac{2}{\log_3 2}\sum_{k=1}^{\infty}-\left(\frac{1}{3}\right)^k k.$$

$$=\frac{-2}{\log_3 2}\ \frac{\frac{1}{3}}{(1-1/3)^2}=\frac{-18}{12\log_3 2}=\frac{-3}{2\log_3 2}\longrightarrow H(x)=\frac{3}{2\log_3 2}-1$$

$$\longrightarrow \text{Redundancy}=\bar{n}-H(x)=\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2\log_3 2}-1\right)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2\log_3 2}=0.122556$$