۱- الف) داده های مسأله را یک بار می نویسیم.

ارقام: $\{2, 3, \ldots, 9\}$

حروف: $\{x_1, x_2, \ldots, x_{16}\}$

کد دهی: حرف, عدد (رقم): بلاک

این که ب وسط باشد یک چیز معلوم است

رقم ___ رقم ___ رقم ___ ب ___ رقم ___ رقم ___ —

پیشامد حالت الف را x_1 می نامیم به سادگی داریم:

$$P(x_1) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 1 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2^{15}} = 2^{-15} \to I(x_1) = \log_2 2^{15} = 15\,\text{bit}$$

حال اگر ندانیم ب داریم اطلاعات را بیابیم و x_2 بنامیم:

$$P(x_2) = \frac{P(x_1)}{15} \Rightarrow I(x_2) = \log_2 2^{19} = 19$$

حال ما اطلاعات این که بدانیم حرف وسط ب است را می خواهیم از

$$I(\text{حرف وسط ب}) = I(x_2) - I(x_1) = 4\,\text{bit}$$

ب) در این قسمت هم اطلاعات هر بلاک را در نظر می گیریم، این پیشامد را x_3 می نامیم.

رقم ___ رقم ___ رقم ___ حرف ___ رقم ___ رقم

$$P(x_3) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2^{15}} \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^{19}} \qquad I(x_3) = \log_2 2^{19} = 19\,\text{bit}$$

پ) این قسمت را x_4 می نامیم.

$\underbrace{\text{رقم \_\_\_ رقم \_\_\_ رقم}}_{\text{تکراری}}$ ___ حرف ___ رقم ___ رقم

$$P(x_4) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2^{13}} \Rightarrow I(x_4) = \log_2 2^{13} = 13\,\text{bit}$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری اول	تاریخ تحویل: ۰۰ / 12 / 14	$\frac{5}{7}$

2 ـ الف) ابتدا جهت مرتب کردن مسأله، اطلاعات را یک بار می‌نویسیم.

منبع اول:

سمبل	احتمال تولید
a	p
b	1-p

منبع دوم:

سمبل	احتمال تولید
a	q
c	1-q

منبع سوم: با احتمال r منبع اول را انتخاب می‌کند. (متقابلاً با احتمال 1-r منبع دوم) و حرف تولید شده را می‌فرستد.

$$P\{a\} = rp + (1-r)q = r(p-q) + q$$

$$P\{b\} = r(1-p) + (1-r)0 = r(1-p) \qquad P\{c\} = r\times 0 + (1-r)(1-q) = (1-r)(1-q)$$

پس احتمال تولید هر سمبل توسط منبع سوم به صورت مقابل است: $P\{a\} = r(p-q)+q$, $P\{b\} = r(1-p)$

$P\{c\} = (1-r)(1-q)$

ب) مطابق آموخته‌های درس، آنتروپی زمانی ماکسیمم می‌شود که: $P_a = P_b = P_c$

درنتیجه خواهیم داشت: $P_a + P_b + P_c = 1 \Rightarrow 3P_a = 1 \rightarrow P_a = 1/3 \Rightarrow P_a = P_b = P_c = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} P\{a\} = r(p-q)+q = \frac{1}{3} \\ P\{b\} = r(1-p) = 1/3 \longrightarrow p = 1 - \frac{1}{3r} \\ P\{c\} = (1-r)(1-q) = \frac{1}{3} \longrightarrow q = 1 - \frac{1}{3(1-r)} \end{cases} \longrightarrow \quad p = \frac{3r-1}{3r}, \quad q = \frac{2-3r}{3(1-r)}$$

پ) برای ماکسیمم شدن آنتروپی هر سه منبع، علاوه بر شرایطی که بالا برای منبع سوم ارائه شد باید $q=\frac{1}{2}$ و $p=\frac{1}{2}$ هم برقرار باشد. پس:

$$p = \frac{1}{2} = \frac{3r-1}{3r} \rightarrow 3r = 6r-2 \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2-3r}{3-3r} = \frac{1}{2} \rightarrow 4-6r = 3-3r \rightarrow r = 1/3$$

دو مقدار مختلف برای r به دست آمد که این قابل قبول نیست و ما اگر بخواهیم آنتروپی دو منبع را ماکسیمم نگه داریم و سه منبع هم‌زمان ممکن نمی‌باشد.

3 - الف) آنتروپی منابع را در دو حالت داده شده از هم کم می کنیم .

$$H_1 = -\sum_{n=1}^{M} P_n \log P_n \qquad H_2 = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i,j,k}}^{M} P_n \log P_n \longrightarrow H_1 - H_2 = -P_i \log P_i - P_j \log P_j$$

$$- P_k \log P_k + P_b \log P_b \longrightarrow H_1 - H_2 = P_i(\log P_i+P_j+P_k - \log P_i) + P_j(\log P_i+P_j+P_k - \log P_j)$$

$$+ P_k(\log P_i+P_j+P_k) \Rightarrow H_1 - H_2 = P_i \log \frac{P_i+P_j+P_k}{P_i} + P_j \log \frac{P_i+P_j+P_k}{P_j} + P_k \log \frac{P_i+P_j+P_k}{P_k}$$

$$\xrightarrow{P_i,\, P_j,\, P_k > 0} H_1 - H_2 > 0 \longrightarrow H_1 > H_2$$

پس آنتروپی منبع کاهش می یابد.

6/7	تاریخ تحویل: ۰۰ / ۱۲ / ۱۴	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری اول	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب) اگر مانند قسمت الف با کم کردن آنتروپی ها پیش برویم، راه به جایی نخواهیم برد.

سعی می کنیم به طریقی از نامساوی واگرایی استفاده کنیم.

$$-\sum_{i=1}^{M} P_i \log P_i \leq -\sum_{i=1}^{M} P_i \log q_i$$

$$H_1 = -\sum_{n=1}^{M} P_n \log P_n \qquad H_2 = -\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq i,j,k}}^{M} P_n \log P_n - 3\times\left(\frac{P_i+P_j+P_k}{3}\right)\log\frac{P_i+P_j+P_k}{3}$$

$$\Rightarrow H_2 = -\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq i,j,k}}^{M} P_n \log P_n - P_i \log\frac{P_i+P_j+P_k}{3} - P_j \log\frac{P_i+P_j+P_k}{3} - P_k \log\frac{P_i+P_j+P_k}{3}$$

حال می خواهیم سعی کنیم. H_2 را به فرم $\sum P_i \log q_i$ بنویسیم برای این منظور:

$$q_i = q_j = q_k = \frac{P_i+P_j+P_k}{3} \rightarrow H_2 = -\sum_{n=1}^{M} P_n \log P_n$$

$$\xrightarrow{\text{نامساوی واگرایی}} -\sum_{n=1}^{M} P_n \log P_n \leq -\sum_{n=1}^{M} P_n \log q_n \rightarrow H_1 \leq H_2$$

آنتروپی زیاد می‌شود.

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری اول	تاریخ تحویل: ۰۰ / 12 / 14	$\frac{7}{7}$

5- الف) حل دستی: می‌خواهیم اثبات کنیم که: $H(Y,Z|X) \leq H(Y|X) + H(Z|X)$

فرم تحلیلی ما بیا را می‌نویسیم.

$$H(Y,Z|X) = -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\log p(y,z|x)$$

$$= -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\log \frac{p(x,y,z)}{p(x,y)}\cdot\frac{p(x,y)}{p(x)}$$

$$= -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\log p(z|x,y)\,p(y|x)$$

به لحاظ منطقی با افزودن یک شرط در احتمال، احتمال افزایش نمی‌یابد. یعنی: $p(z|x,y) \leq p(z|x)$

$$\rightarrow H(Y,Z|X) \leq -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\log p(z|x)\,p(y|x)$$

$$= \sum_{-z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\log p(z|x) - \sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z)\,p(y|x)$$

$$\Rightarrow H(Y,Z|X) \leq H(Z|X) + H(Y|X) \qquad \text{QED}$$

شرط تساوی این است که باید X، Y به صورت شرطی از Z مستقل بوده باشند: $p(y,z|x) = p(y|x)\,p(z|x)$

5- ب) می خواهیم اثبات کنیم که: $H(Y,Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X,Y)$

اهمیت ندارد نوشتار، نمایش داده می‌کند.

روش اول: $H(Y,Z|X) = \sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{X,Y,Z}(x,y,z) \log P(y,z|x)$

می‌دانیم: $p(a,b|c) = \frac{p(a,b,c)}{p(c)} = \frac{p(a,b,c)}{p(a,c)} \cdot \frac{p(a,c)}{p(c)}$

$\rightarrow H(Y,Z|X) = -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z) \log \frac{P(x,y,z)}{P(x,y)} \cdot \frac{P(x,y)}{P(x)}$ جایگذاری در رابطه‌ها (قبل)

$\rightarrow H(Y,Z|X) = -\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z) \log P(z|x,y)\, p(y|x)$ خواص لگاریتم

$$H(Y,Z|X) = \underbrace{-\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z) \log P(z|x,y)}_{H(X,Y|Z)} \underbrace{-\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} P_{XYZ}(x,y,z) \log P(y|x)}_{H(Y|X)}$$

$\rightarrow H(Y,Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X,Y)$ QED

روش دوم: در اینجا میخواهیم روش خلاقانه تر و ساده‌سازی کردن قاعده زنجیره‌ای که به فرم زیر بیان می‌شود

chain rule: $H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$ ساده‌سازی می‌کنیم

$H(Y,Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X,Y)$ از طرف راست ساده‌سازی شروع می‌کنیم

$H(Z|X,Y) + H(Y|X) = H(Z,X,Y) - H(X,Y) + H(Y,X) - H(X)$

$= H(Z,X,Y) - H(X) = H(Y,Z|X)$, ⟶ QED از طرف راست به چپ رسیدیم

الف) از آنجا که اول ب را اثبات کردیم از آن استفاده می‌کنیم

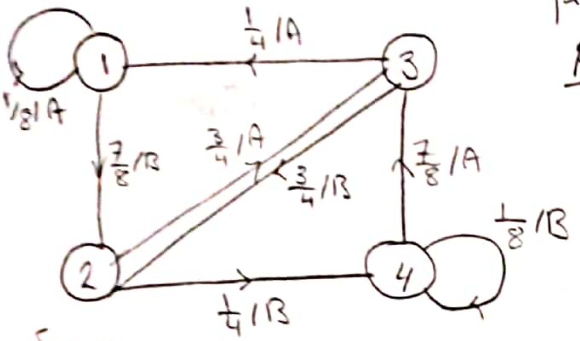
$H(Y,Z|X) \leq H(Y|X) + H(Z|X) \rightarrow H(Y|X) + H(Z|X,Y) \leq H(Y|X) + H(Z|X)$

$\Rightarrow$ We must prove: $H(Z|X,Y) \leq H(Z|X)$

در تئوری اطلاعات چیزی وجود دارد به نام اطلاعات متقابل شرطی که به فرم مقابل بیان می‌شود $I(Z,Y|X) = H(Z|X) - H(Z|X,Y)$ ، با توجه به اینکه های اطلاعات می‌دانیم که $I(m;n) \geq 0$ پس $I(Z,Y,X) \geq 0$ لذا باید $H(Z|X) \geq H(Z|X,Y)$ باشد QED

همچنین برای برقراری تساوی باید X, Y به صورت شرطی از Z مستقل بوده یا: $P(y,z|x) = p(y|x)\, p(z|x)$

6 - الف) ابتدا مجدد دیاگرام حالت را رسم می‌کنیم.



با توجه به استیشنری منبع می‌توانیم بنویسیم.

$$\underline{P} = \underset{\sim}{\Phi}^T \underline{P}$$

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/8 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

برای تعیین بردار حالت اولیه داریم:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \\ P_1+P_2+P_3+P_4=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{P_1}{8} + \frac{P_3}{4} \\ P_2 = \frac{7}{8}P_1 + \frac{3}{4}P_3 \\ P_3 = \frac{3}{4}P_2 + 7/8 P_4 \\ P_4 = \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{8}P_4 \\ P_1+P_2+P_3+P_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7P_1 = 2P_3 \\ 8P_2 = 7P_1 + 6P_3 \Rightarrow P_2 = P_3 \\ 8P_3 - 6P_2 + 7P_4 \Rightarrow 2P_3 = 7P_4 \\ 8P_4 = 2P_2 + P_4 \rightarrow 7P_4 = 2P_2 \\ P_1+P_2+P_3+P_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}P_2 + P_2 + P_2 + \frac{2}{7}P_2 = 1 \quad \frac{18}{7}P_2 = 1 \rightarrow P_2 = \frac{7}{18}, \ P_3 = \frac{7}{18}$$

$$P_1 = P_4 = \frac{2}{18} \quad \Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب) در این قسمت به محاسبه H_i ها می‌پردازیم.

$$H_i = -\sum_{j=1}^{n} P_{ij} \log_2 P_{ij}$$

$$H_1 = -(1/8 \log_2 1/8 + 7/8 \log_2 7/8)$$

می‌دانیم: $h_b(P) = -P\log_2 P - (1-P)\log_2(1-P)$

$$\rightarrow H_1 = h_b(1/8), \quad H_2 = -(\tfrac{3}{4}\log_2 3/4 + \tfrac{1}{4}\log_2 \tfrac{1}{4}) = h_b(\tfrac{1}{4})$$

واضح است که $H_1 = H_4$ ، $H_2 = H_3$ پس در نهایت: $H_1 = H_4 = h_b(1/8)$, $H_3 = H_2 = h_b(\frac{1}{4})$

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i = \frac{2}{18}(H_1 + H_4) + \frac{7}{18}(H_2 + H_3) = \frac{2}{9}H_1 + \frac{7}{9}H_2$$

$$= \frac{1}{9}(2h_b(1/8) + 7h_b(\tfrac{1}{4})) = 0.7518 \ \frac{\text{bit}}{\text{sym}}$$

پ) بنا به تعریفی که آمده است داریم:

$$G_K \triangleq \frac{H(X_1, \ldots, X_K)}{K}, \rightarrow G_1 = \frac{H(X_1)}{1} = H(X_1)$$

یک سری محاسبات می‌کنیم و احتمال تولید هر کدام از سمبل‌ها را بدست می‌آوریم.

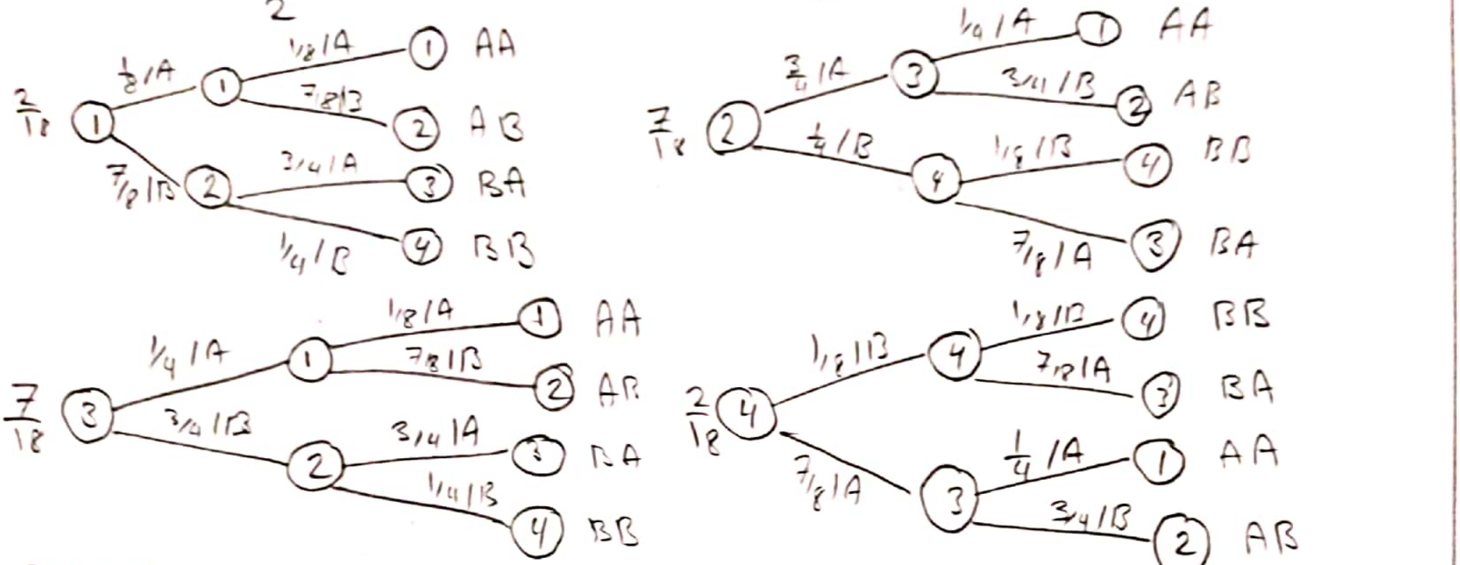
$$P_r\{A\} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{18} + \frac{7}{18} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{18} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{18} \times \frac{7}{8} = \frac{1+21+7+7}{72} = 0.5$$

$$P_r\{B\} + P_r\{A\} = 1 \Rightarrow P_r\{B\} = 0.5 \Rightarrow H(X_1) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow H(X_1) = -\log_2 1/2 = \log_2 2 = 1 \rightarrow G_1 = 1$$

$$G_2 = \frac{H(X_1, X_2)}{2}$$

برای محاسبه G_2 از نمودار درختی استفاده می‌کنیم.



$$Pr\{AA\} = \frac{2}{18}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8} + \frac{7}{18}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{7}{18}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8} + \frac{2}{18}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Pr\{AA\} = \frac{2}{1152} + \frac{21}{288} + \frac{7}{576} + \frac{14}{576} = \frac{28+14+84+2}{1152}$$

$$= \frac{128}{1152} = 1/9$$

$$Pr\{AB\} = \frac{2}{18}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8} + \frac{7}{18}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{7}{18}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{8} + \frac{2}{18}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}$$

$$= \frac{14}{1152} + \frac{63}{288} + \frac{49}{576} + \frac{42}{576} = \frac{84+98+252+14}{1152} = \frac{448}{1152} = \frac{7}{18}$$

$$Pr\{BA\} = \frac{2}{18}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{4} + \frac{7}{18}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{8} + \frac{7}{18}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{2}{18}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}$$

$$= \frac{42}{576} + \frac{49}{576} + \frac{63}{288} + \frac{14}{1152} = \frac{448}{1152} = 7/18$$

$$Pr\{BB\} = \frac{2}{18}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{4} + \frac{7}{18}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8} + \frac{7}{18}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{18}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow Pr\{BB\} = \frac{14}{576} + \frac{7}{576} + \frac{21}{288} + \frac{2}{1152} = \frac{128}{1152} = 1/9$$

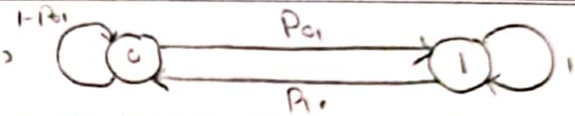
برای چک کردن صحت محاسبات، احتمالات به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم.

$$Pr\{AA\} + Pr\{AB\} + Pr\{BA\} + Pr\{BB\} = \frac{2}{18} + \frac{7}{18} + \frac{7}{18} + \frac{2}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

$$G_2 = \frac{1}{2} H(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\times\left[-\frac{2}{9}\log_2 1/9 - \frac{14}{18}\log_2 7/18\right] = 0.8821 \ \frac{bit}{sym}$$

۷ - الف)

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{pmatrix} 1-P_{01} & P_{01} \\ P_{10} & 1-P_{10} \end{pmatrix} \longrightarrow$$



می‌خواهیم نرخ آنتروپی را بیابیم. می‌دانیم: $\underline{P} = \underset{\sim}{\Phi}^T \underline{P} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-P_{01} & P_{10} \\ P_{01} & 1-P_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = (1-P_{01})P_1 + P_{10}P_2 \\ P_2 = P_{01}P_1 + (1-P_{10})P_2 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل معادله}} P_1 = \frac{P_{10}}{P_{01}+P_{10}} \quad P_2 = \frac{P_{01}}{P_{01}+P_{10}}$$

$$H_1 = -\left(1-P_{01} \log_2(1-P_{01}) + P_{01}\log_2 P_{01} \right) = h_b(P_{01})$$

$$H_2 = -\left(1-P_{10} \log_2(1-P_{10}) + P_{10}\log_2 P_{10} \right) = h_b(P_{10})$$

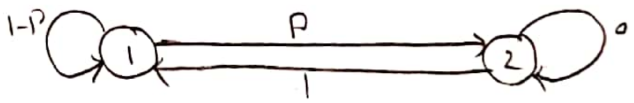
$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i H_i = \frac{P_{10}}{P_{01}+P_{10}} h_b(P_{01}) + \frac{P_{01}}{P_{01}+P_{10}} h_b(P_{10})$$

در صورتی که قرار دهیم $P_{01}=P_{10}=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت: $H(X) = \frac{1}{2}h_b(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}h_b(1/2)$

$= h_b(1/2) = -\frac{1}{2}\log_2 1/2 - 1/2 \log_2 1/2 = \log_2 2 = 1 \longrightarrow$ ماکسیمم مقدار آنتروپی

ب)

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{bmatrix} 1-P & P \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



به سادگی قابل فهم است که این حالت خاصی از بند الف است که در آن $P_{01}=P$ و $P_{10}=1$ است.

لذا نیاز به محاسبات اضافی نداریم، پس: $H(X) = \frac{1}{1+P} h_b(P) + \frac{P}{1+P} h_b(1)$

$$\longrightarrow H(X) = \frac{h_b(P)}{1+P}$$

برای اینکه ماکسیمم نرخ آنتروپی را بدست آوریم از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial H(X)}{\partial P} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial P}\frac{h_b(P)}{1+P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{-P\log_2 P + (P-1)\log_2(1-P)}{1+P} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (1+P)\frac{\partial}{\partial P}\left(-P\log_2 P + (P-1)\log_2(1-P)\right) + P\log_2 P + (1-P)\log_2(1-P) = 0$$

$$\longrightarrow (1+P)\left(-\log_2 P - \frac{1}{\ln 2} + \log_2 1-P - \frac{P}{(1-P)\ln 2} + \frac{1}{(1-P)\ln 2} \right) = -P\log_2 P + (1-P)\log_2 1-P$$

$$\xrightarrow[\text{MATLAB}]{\text{Solve with}} P = 0.381966 \Rightarrow H(X) = \frac{h_b(0.381966)}{1+0.381966} = 0.69424$$