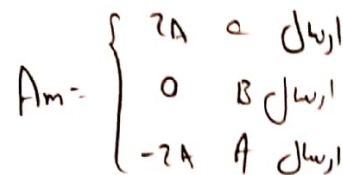


۱۵۰



با استفاده از الگوریتم MAP خواصم داشت: Δ بین P_A و P_B (y/13)

$$\rightarrow P_A e^{-\frac{|x|}{\sqrt{N\sigma_A^2}}} \xrightarrow{H_B} P_C e^{-\frac{|n-2A|}{\sqrt{N\sigma_C^2}}} \xrightarrow{H_C} P_B e^{-\frac{|x|}{\sqrt{N\sigma_B^2}}} \xrightarrow{H_D} P_A e^{-\frac{|n-2A|}{\sqrt{N\sigma_A^2}}}$$

$$\text{حالت های } \left\{ \begin{array}{l} \ln P_B - \frac{n}{\sqrt{N_0/2}} \geq \ln P_C - \frac{(n-2A)}{\sqrt{N_0/2}} \quad n \geq 2A \quad (1) \\ \ln P_B - \frac{n}{\sqrt{N_0/2}} \geq \ln P_C + \frac{(n-2A)}{\sqrt{N_0/2}} \quad 0 < n < 2A \quad (2) \\ \ln P_B + \frac{n}{\sqrt{N_0/2}} \geq \ln P_C - \frac{(n-2A)}{\sqrt{N_0/2}} \quad n < 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1) \rightarrow \ln \frac{P_B}{P_C} \geq \frac{2A}{\sqrt{N_0/2}} \rightarrow A \geq \frac{\sqrt{N_0/2}}{2} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right)$$

$$(2) \rightarrow \ln \frac{P_B}{P_C} \geq \frac{-2n-2A}{\sqrt{N_0/2}} \rightarrow n \leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right) + A \right]$$

$$(3) \rightarrow \ln \frac{P_B}{P_C} \geq \frac{2A}{\sqrt{N_0/2}} \rightarrow A \geq \frac{\sqrt{N_0/2}}{2} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right)$$

$$\rightarrow D_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right) + A \right]$$

نکته: D_1 و D_2 که در این رابطه آمده اند

$$P_e = P_A \cdot P_C + P_B \cdot P_C + P_C \cdot P_C \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow P_e = P_A \cdot P(y(t) > D_1 | A) + P_B \cdot P(y(t) > D_2 \text{ or } y(t) < -D_1 | B) + P_C \cdot P(y(t) < D_2 | C)$$

$$\rightarrow P_e = P_A \cdot P(n > D_1 + 2A) + P_B \cdot P(n < -D_1 \text{ or } n > D_2) + P_C \cdot P(n < D_2 - 2A)$$

$$\rightarrow P_e = P_A \int_{D_1+2A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2N_0}} e^{-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}} dn + P_B \left(\int_{-\infty}^{-D_1} \frac{1}{\sqrt{2N_0}} e^{-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}} dn + \int_{D_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2N_0}} e^{-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}} dn \right) + P_C \int_{-\infty}^{D_2-2A} \frac{1}{\sqrt{2N_0}} e^{-\frac{|n|}{\sqrt{N_0/2}}} dn$$

$$\rightarrow P_e = P_A \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{D_1+2A}{\sqrt{N_0/2}}} \right) + P_B \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{D_1}{\sqrt{N_0/2}}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{D_2}{\sqrt{N_0/2}}} \right) + P_C \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{D_2-2A}{\sqrt{N_0/2}}} \right)$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2} \left[P_A e^{-\frac{D_1+2A}{\sqrt{N_0/2}}} + P_B \left(e^{-\frac{D_1}{\sqrt{N_0/2}}} + e^{-\frac{D_2}{\sqrt{N_0/2}}} \right) + P_C e^{-\frac{D_2-2A}{\sqrt{N_0/2}}} \right]$$

که در فرمول بالا D_1, D_2 مقادیر حدی هستند و در رابطه هستند
(ج) برای این منظور باید هیچ interval بین D_1, D_2 وجود داشته باشد تا تداخلی نداشته باشند

$$D_1, D_2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right) - 2A \right] \text{ و } \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right) + 2A \right]$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right) - 2A \geq \sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_B}{P_C} \right) + 2A \rightarrow \sqrt{\frac{N_0}{2}} \ln \left(\frac{P_A P_C}{P_B^2} \right) \geq 4A$$

$$\rightarrow \ln \left(\frac{P_A P_C}{P_B^2} \right) \geq \frac{4A}{\sqrt{N_0/2}} \rightarrow \frac{P_A P_C}{P_B^2} \geq e^{\frac{4A}{\sqrt{N_0/2}}}, \quad P_A + P_B + P_C = 1$$

$W = 3 \text{ KHz}$ $P_{\max} \rightarrow (SNR)_{dB} = 30 \text{ dB}$ $P_e \times 10^{-6}$ bit rate = ? -3

نمودار آمار مپام: $P_e^{MPAM} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 P_T T_s}{(M^2-1) \eta}}\right)$ $E_s = P_T T_s$

$P_e^{MPAM} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 E_s}{(M^2-1) \eta}}\right)$ $SNR = \frac{P_T}{N} = \frac{2 P_T T_s}{\eta} = \frac{2 E_s}{\eta} = 30 \text{ dB}$

$\frac{2 E_s}{\eta} = 1000 \rightarrow \frac{E_s}{\eta} = 500$

با صرف نظر از ضریب $\frac{2(M-1)}{M}$ و $Q^{-1}(10^{-6}) = 4.753412$ $(M^2-1) \leq \frac{6 \times 500}{(4.753412)^2}$

مابقی به جزیره بجا می آید $Q^{-1}(10^{-6}) = 4.753412$ $(M^2-1) \leq \frac{6 \times 500}{(4.753412)^2}$

$M^2-1 \leq 132.7727274 \rightarrow M^2 \leq 133.7727274 \rightarrow M \leq 11.5660166$

$\rightarrow M = 8$ $W = 3 \text{ KHz} \rightarrow \frac{1}{2 T_s} = 3000 \rightarrow T_s = 6000 \frac{\text{Sec}}{s}$ $r_s = r_b \log_2 M$

$r_s = 3r_b = 18000 \text{ bps}$ $\text{channel capacity: } C = B \log_2 (1 + SNR)$ بیت / ثانیه

$C = 3000 \times \log_2 (1 + 1000) = 2991.67878$ 60.19778953% $\text{عملیاتی قابل استفاده می باشد}$

99 repeaters: $P_e = 10^{-5}$ -6

در این حالت با مقدار کشته ها از حدش فراتر رفته است. پس باید 99 تکرار کننده داریم.

$P_e^{MPAM} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \alpha P_T T_s}{K(M^2-1) \eta}}\right)$ $P_e^{MPAM} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \alpha P_T T_s}{99 \times \eta}}\right) = 10^{-5}$

$Q^{-1}\left(\sqrt{\frac{2 \alpha P_T T_s}{99 \eta}}\right) = Q^{-1}(10^{-5}) \rightarrow \sqrt{\frac{2 \alpha P_T T_s}{99 \eta}} = 4.26489 \rightarrow \frac{2 \alpha P_T T_s}{99 \eta} = 18.18928671$

$\frac{\alpha P_T T_s}{\eta} = 900.3596922$ $\text{Attenuation بین فرستنده و repeater اول}$ بابت به به افزایش

$\alpha_{\text{new}} = 10^{-0.3} \times 10^{-0.3} \times \alpha_{\text{old}} = 10^{-0.6} \alpha$ $\text{repeater دوم باید به حدی را برده کنیم}$

$\frac{\eta}{2} \text{ new} = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} + \dots + 2 \times 10^{-0.2} \frac{\eta}{2}$ $\text{محاسبه به حال جدید باید ارائه شود}$

$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2 \alpha_{\text{new}} P_T T_s}{972 \times 988 \eta}}\right) \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\alpha P_T T_s}{972 \times 988 \eta}}\right) = Q(4.1545228) = 1.96120 \times 10^{-6}$

(ب) در اینجا بازسازی را داریم.

$$P_{e, \text{MPSM}} = \frac{2K(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\alpha P_T T_s}{(M^2-1)\eta}}\right) \frac{\text{صرف نظر از}}{\text{نسبت}} K Q\left(\sqrt{\frac{6\alpha P_T T_s}{(M^2-1)\eta}}\right) = 10^{-5}$$

$$\rightarrow 99 Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha P_T T_s}{\eta}}\right) = 10^{-5} \quad Q^{-1}\left(\frac{10^{-5}}{99}\right) = 5.19747$$

$$\rightarrow \frac{\alpha P_T T_s}{\eta} = 13.5068472 \quad \gamma_{1/2} \text{ جدید، } \alpha \text{ جدید که قبلاً مدون کرده بودیم اینجا نیز اعتبار دارد.}$$

خود را حفظ می‌کنند. در اینجا که برای محاسبه P_e باید سیم بازسازی از قبل نیز در نظر بگیریم.

$$P_e \approx P_{e1} + P_{e2} + \dots + P_{ek} \rightarrow P_e \approx \sum_{i=1}^{99} P_{ei} \quad \text{استفاده از}$$

$$\rightarrow P_e = 97 Q\left(\sqrt{\frac{2P_T T_s \alpha}{\eta}}\right) + 2 Q\left(\sqrt{\frac{2P_T T_s 10^{-3} \alpha}{\eta}}\right)$$

$$\rightarrow P_e = 97 Q(5.19747) + 2 Q(3.679576976) = 97 \times 1.01010 \times 10^{-7} + 2 \times 1.16833 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow P_e = 2.4346397 \times 10^{-4}$$

(پ) در این حالت α را تماماً بپذیرد و به این ترتیب $\gamma_{1/2}$ جدید باید مدون کنیم.

$$\alpha_{\text{new}} = \alpha_{\text{old}} = \alpha, \quad \gamma_{1/2, \text{new}} = \underbrace{\gamma_{1/2} + \gamma_{1/2} + \dots + \gamma_{1/2}}_{\text{97 بار}} + 2 \times 10^{-3} \times \gamma_{1/2}$$

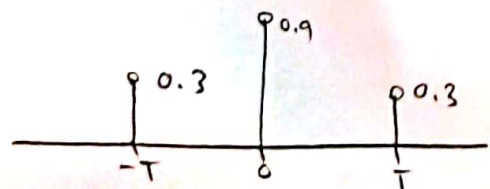
$$P_{e, \text{MPSM}} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_T T_s \alpha}{(M^2-1)\eta}}\right) \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2P_T T_s \alpha}{47\eta + 2 \times 10^{-3}\eta}}\right)$$

$$\rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{P_T T_s \alpha}{\eta} \cdot \frac{2}{47 + 2 \times 10^{-3}}}\right) = Q(4.222655308) = 1.20723 \times 10^{-5}$$

تعبیر: از اینجا به بعد داریم $\frac{P_T T_s \alpha}{\eta} = 100.3496972$

$$P_R(\pm T) = 0.3 \quad P_R(0) = 0.9 \quad P_R(kT) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0, \pm 1$$

(8 - الف)



$$ZF \text{ ساز } N=1 \rightarrow X \quad C = U \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0.9C_{-1} + 0.3C_0 = 0 & \rightarrow C_0 = -3C_{-1} \\ 0.3C_{-1} + 0.9C_0 + 0.3C_1 = 1 \\ 0.3C_0 + 0.9C_1 = 0 & \rightarrow C_1 = -1/3 C_0 = C_{-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow 0.3C_{-1} - 2.7C_{-1} + 0.3C_{-1} = 1 \rightarrow C_{-1} = \frac{1}{2.1}$$

$$C_1 = -1/2.1 \rightarrow C_0 = (1 + 6/2.1) \times 1/9 = \frac{30}{2.1}$$

$$C_0 = 10/7 \quad C_1 = C_{-1} = \frac{-10}{2.1}$$

5

تاریخ تحویل: 01 / 2 / 17

نام درس: محاسبات دیجیتال
تکلیف سری دومار 3

$$P_{eq}((N+1)T_s) = \sum_{n=-N}^N C_n P_R((n-N)T_s) \quad \xrightarrow{\quad} \quad P_{eq}((N+1)T_s) = \quad (ب)$$

$$C_{-1} P_R(3T_s) + C_0 P_R(2T_s) + C_1 P_R(T_s) = C_1 P_R(T_s) = -1/7$$

$$P_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^N C_n P_R(t - (n+1)T_s) \rightarrow P_{eq}(-(N+1)T_s) = \sum_{n=-N}^N C_n P_R(-T_s(2N+1+n))$$

$$P_{eq}(-(N+1)T_s) = C_{-1} P_R(-3T_s) + C_0 P_R(-4T_s) + C_1 P_R(-5T_s) = 0$$

به سبب طاقب به $N=2$ و با توجه به این که $P_{eq}(-(N+1)T_s) = P_{eq}(-3T_s)$ و $P_{eq}(3T_s) = 0$ می شود نتیجه بالا

$$P_{eq}((N+3)T_s) = C_{-1} P_R(4T_s) + C_0 P_R(5T_s) + C_1 P_R(6T_s) = 0 \quad (درست)$$

$$P_{eq}(-(N+3)T_s) = \sum_{n=-N}^N C_n P_R(-T_s(2N+1+n)) = C_{-1} P_R(-4T_s) + C_0 P_R(-5T_s) + C_1 P_R(-6T_s)$$

$$\begin{aligned} P_{eq}(-(N+3)T_s) = 0 \quad \rightarrow \quad & \begin{cases} P_{eq}((N+2)T_s) = -1/7 \\ P_{eq}(-(N+1)T_s) = 0 \\ P_{eq}((N+3)T_s) = 0 \\ P_{eq}(-(N+3)T_s) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

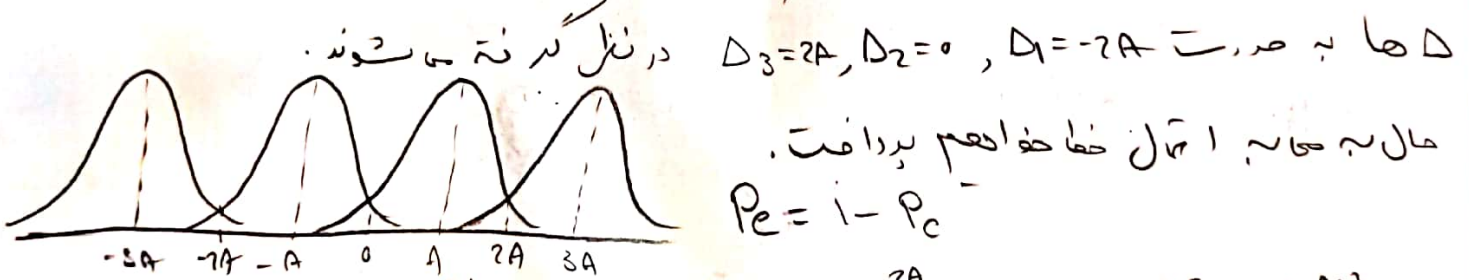
4- الف) $y_k = A_k + Q + n_k$ $\Pr\{A_k = 3A\} = \Pr\{A_k = -3A\} = \frac{1}{4}$ $\Pr\{A_k = 0\} = \frac{1}{2}$

سه تا متغیر تصادفی داریم که هر کدام دارای میانگین A و واریانس σ^2 هستند. $n_k \sim N(0, \sigma^2)$

$$f(y|3A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-3A)^2}{2\sigma^2}} \quad f(y|-3A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+3A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(y|A_k=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}}$$

حالا این جا داریم چهار سیگنال $3A, -3A, A, -A$ ارسال کنیم که احتمال هر کدام برابر $\frac{1}{4}$ در نظر بگیریم. (خوب) $\Pr\{A_k=0\} = \frac{1}{4}$ پس $\Pr\{A_k=A\} = \Pr\{A_k=-A\} = \frac{1}{4}$ با توجه به تساوی احتمال ها



$$\rightarrow P_e = 1 - \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{-2A} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+3A)^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-2A}^{2A} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[e^{-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}} \right] dy + \int_{2A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-3A)^2}{2\sigma^2}} dy \right]$$

$$\xrightarrow{\text{فکت}} P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{3A}{\sigma}\right)$$

(ب) بدین ترتیب Δ ها به $P_e = 0.1(3A + \Delta)^2 + 0.5(\Delta)^2 + 0.4(3A - \Delta)^2$ تغییر در فرمول سیگنال های تصادفی می دهیم.

$$\frac{\partial P_{new}}{\partial \Delta} = 0 \rightarrow 0.2(3A + \Delta) + \Delta + 0.8(-3A + \Delta) = 0 \rightarrow -1.8A + 2\Delta = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 0.9A$$

$$P_{old} = 0.1 \times 9A^2 + \frac{1}{4} \times 0 + 0.1 \times 9A^2 = 4.5A^2$$

$$P_{new} = 0.1 \times (3.9A)^2 + \frac{1}{2} (0.9A)^2 + 0.4 \times (-2.1A)^2 = 1.764A^2 + 0.405A^2 + 1.571A^2 = 3.69A^2$$

$$\rightarrow \text{کاهش درصدی} = \frac{P_{old} - P_{new}}{P_{old}} \times 100 = \frac{4.5A^2 - 3.69A^2}{4.5A^2} \times 100 = 18\%$$