سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: مخابرات دیجیتال
تکلیف سری پنجم

تاریخ تحویل: 01 / 3 / 4

1

۱ - الف)

$$S_1(t) = \begin{cases} -A & 0\leq t \leq T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad S_2(t) = -S_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(در هر صورت)

در این حالت کلا فیلتر نداریم. V سیگنال مانند اثر نقطه هستیم. مثل BPAM تحلیل کنیم.

$$P_e = P_r\{\hat{b}_k = 1 \mid b_k = 0\} P_r\{b_k = 0\} + P_r\{\hat{b}_k = 0 \mid b_k = 1\} P_r\{b_k = 1\}$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left[P_r\{\hat{b}_k = 1 \mid b_k = 0\} + P_r\{\hat{b}_k = 0 \mid b_k = 1\}\right]$$

$$b_k = 0 \quad V_0 = S_{01} + n_0(kT_b)$$
$$b_k = 1 \quad V_0 = S_{02} + n_0(kT_b)$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left[P_r\{V_0(kT_b) > \Delta \mid b_k = 0\} + P_r\{V_0(kT_b) < \Delta \mid b_k = 1\}\right]$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[P_r\{n_0(kT_b) > \Delta - S_{01} \mid b_k = 0\} + P_r\{n_0(kT_b) < \Delta - S_{02} \mid b_k = 1\}\right]$$

داریم $n_0(kT_b) \sim N(0, N_0) \rightarrow P_e = \frac{1}{2}\int_{\Delta - S_{01}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\Delta - S_{02}} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{\Delta - S_{01}}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{S_{02} - \Delta}{\sqrt{N_0}}\right) \qquad \Delta_{opt} = \frac{S_{01} + S_{02}}{2} = 0$$

$$P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{-S_{01}}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{S_{02}}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)$$

ب) در این قسمت در خروجی از فیلتر منطبق بهینه استفاده می‌کنیم. چون کانال AWGN است عملا حاصل نسبت معلق طرف هستیم.

$$H(f) = P^*(f) e^{-j2\pi f T_b}, \quad h(t) = p^*(T_b - t) = p(T_b - t)$$

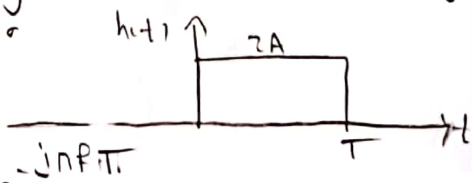
که داریم $p(t) = S_2(t) - S_1(t) \rightarrow h(t) = S_2(T_b - t) - S_1(T_b - t)$

$$\rightarrow h(t) = \begin{cases} 2A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

حال سراغ احتمال خطا می‌رویم.

$$P_e^{max} = Q\left(\frac{\sigma_{max}}{2}\right) \qquad \sigma^2_{max} = \frac{(S_{02} - S_{01})^2}{N_0}$$

$$S_{02} = \int_0^{T_b} \underbrace{S_1(u)}_{A} \underbrace{h(t_b - u)}_{2A} du = 2A^2 T_b \qquad S_{02} = \int_0^{T_b} S_2(u)\, h_b(T_b - u) du = -2A^2 T_b$$



$$Var(n_0(kT_b)) = N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H_f|^2 df \qquad H(f) = ?$$

$$h(t) = 2A\, rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = 2AT\, Sinc(Tf) e^{-j\pi f T}$$

$$\rightarrow N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} 4A^2T^2\, Sinc^2(Tf) df = \frac{\eta}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} 4A^2T^2\, Sinc^2(Tf) df}_{4A^2T} = 2\eta A^2 T$$

$$\rightarrow \sigma^2_{max} = \frac{16A^4 T_b^2}{2\eta A^2 T} = \frac{8A^2 T_b}{\eta} \qquad P_e = Q\left(\frac{\sigma_{max}}{2}\right) = Q\left(\frac{A\sqrt{2T_b}}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$\rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T_b}{\eta}}\right)$$

پ) در این قسمت نویز رنگی است. پس داریم: $G_n(f) = e^2 f^2 \quad |f| < 1/T$

S_{01}, S_{02} همان تبدیل‌ها هستند. $S_{02} = -2A^2T \quad , \quad S_{01} = 2A^2T$

$$\mathrm{Var}(n(kT_b)) = N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)\,|H(f)|^2 = \int_{-1/T}^{1/T} \frac{1}{4A^2e^2 f^2} \cdot T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi T f)\,df$$

We know: $\operatorname{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \longrightarrow N_0 = \int_{-1/T}^{1/T} \frac{1}{4A^2e^2 f^2}\, T^2 \frac{\sin^2(\pi T f)}{\pi^2 T^2 f^2}\,df$

$$\longrightarrow N_0 = \frac{4A^2e^2}{\pi^2} \int_{-1/T}^{1/T} \sin^2(\pi T f)\,df = \frac{4A^2e^2}{\pi^2} \int_{-1/T}^{1/T} \frac{1-\cos(2\pi T f)}{2}\,df = \frac{4A^2e^2}{T\pi^2}$$

$$P_e = Q\left(\frac{\sigma_{max}}{2}\right) \quad , \quad \sigma^2_{max} = \frac{(S_{02}-S_{01})^2}{N_0} = \frac{16A^4T^2}{4A^2e^2/T\pi^2} = \frac{16A^4\pi^2T^3}{4A^2e^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{2A\pi T\sqrt{T}}{e} \longrightarrow P_e = Q\left(\frac{A\pi T\sqrt{T}}{e}\right)$$

ت) دنبال فیلتر بهینه برای بند ب هستیم. این اتفاق ممکن نیست رخ دهد، می‌دانیم:

$$H_{\text{بهینه}}(f) = \frac{k\,P^*(f)\,e^{-j2\pi f T_b}}{G_n(f)} \qquad G_n(f) = e^2 f^2 \quad |f| < 1/T$$

به ازای $f=0$ عبارت $H(f)$ صفر می‌شود پس invertible نیست ← فیلتر بهینه نداریم.

---

2. الف)

$y_1 = s + n_1 \qquad y_2 = s + n_1 + n_2 \qquad \underset{\text{سیگنال ارسالی}}{s} = \begin{cases} A & \Pr\{A\} = 1/2 \\ -A & \Pr\{-A\} = 1/2 \end{cases}$

$n_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ مستقل از هم n_1, n_2, s

$n_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$

از الگوریتم Maximum Aposteriori استفاده خواهیم کرد.

$$f(y_1, y_2 \mid \overbrace{s=A}^{s_0}) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(y_1, y_2 \mid \overbrace{s=-A}^{s_1})$$

از قبل داریم: $f(x,y \mid z) = f(x \mid y,z)\, f(y \mid z)$

$$\longrightarrow f(y_2 \mid y_1, s_0)\, f(y_1 \mid s_0) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(y_2 \mid y_1, s_1)\, f(y_1 \mid s_1)$$

با توجه به پیچیده شدن این روش آن شرطی کردیم. یعنی مثلا y_2 را با فرض دانستن y_1, s_0, s_1 در نظر گرفتیم، را معلوم.

$$y_2 = \overbrace{s + n_1}^{y_1} + n_2 = y_1 + n_2 \longrightarrow n_2 = y_2 - y_1 \quad \Longrightarrow \text{پس مقدار Deterministic}$$

پس می‌توانیم از شرط y_2 خلاص شویم

$$\longrightarrow f(y_1 \mid s_0) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(y_1 \mid s_1)$$

$$\underset{\longrightarrow}{\text{MAP}}\ f(y_1 \mid s=A) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(y_1 \mid s=-A) \qquad y_1 = s + n_1 \ \longrightarrow\ y \sim N(s, \sigma^2)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}} \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}} \longrightarrow -(y-A)^2 \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} -(y+A)^2$$

$$\longrightarrow -y^2 + 2Ay - A^2 \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} -y^2 - 2Ay - A^2 \longrightarrow y \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} 0 \qquad P_e = \frac{1}{2}\left[\Pr\{n_1 < -A \mid s=A\}\right.$$

$$\left. + \Pr\{n_1 > A \mid s=-A\}\right] = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}\,dn + \int_{A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}\,dn\right]$$

$$\longrightarrow P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q(A/\sigma)$$

3	تاریخ تحویل: 01/3/14	نام درس: مخابرات دیجیتال — تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب) گیرنده فقط $y = y_1 + y_2$ می‌بیند. دوباره با MAP حل می‌کنیم.

$$f(y_1|S_0) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(y_1|S_1) \xrightarrow{y_1 \to y_1+y_2} f(\underbrace{y_1+y_2}_{X}|S_0) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} f(\underbrace{y_1+y_2}_{X}|S_1)$$

$$X = y_1 + y_2 = 2S + 2n_1 + n_2 \to X \sim N(2S, Var(N)) \qquad Var(N) = \sigma^2 + 4\sigma^2 = 5\sigma^2$$

$$X \sim N(2S, 5\sigma^2) \xrightarrow{MAP} \frac{1}{\sqrt{2\pi 5\sigma^2}} e^{-\frac{(X-2A)^2}{2\sigma^2}} \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} \frac{1}{\sqrt{2\pi 5\sigma^2}} e^{-\frac{(X+2A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\to -(X-2A)^2 \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} -(X+2A)^2 \to -X^2 + 4XA - 4A^2 \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} -X^2 - 4AX - 4A^2 \to X \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} 0$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[Pr\{X > 0 | S = -A\} + Pr\{X < 0 | S = A\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5\sigma^2}} e^{\frac{-Y^2}{2 \cdot 5\sigma^2}} dX + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5\sigma^2}} e^{\frac{-Y^2}{2 \cdot 5\sigma^2}} dX \right] = \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{2A}{\sigma\sqrt{5}}\right) + Q\left(\frac{2A}{\sigma\sqrt{5}}\right) \right]$$

$$\to P_e = Q\left(\frac{2A}{\sigma\sqrt{5}}\right)$$

برای یافتن افت توان، P_eها را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$P_{e_1} = Q(\sqrt{SNR}) \qquad P_{e_2} = Q(\sqrt{SNR \times 0.8})$$

افت توان $= 0.8 \to 10\log_{10} 0.8 = -0.969100$ dB دسی‌بل.

5_ الف) OOK → آشکارساز بهینه $\quad P_e = 10^{-6} \quad$ Attenuation increases 6dB. گیرنده همدوس

$$P_e^{BASK} = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{4\eta}}\right) \to P_e = 10^{-6} \to Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{4\eta}}\right) = 10^{-6} \xrightarrow{Q^{-1}}$$

$$\sqrt{\frac{A^2 T_b}{4\eta}} \approx 4.75342 \to \frac{A^2 T_b}{4\eta} = 22.5950017 \qquad P_{av} = \frac{A^2}{4}$$

$$\to 10^{-0.6} \approx 0.25$$ → توان ولتاژ $\frac{1}{2}$ می‌شود ← دامنه توان

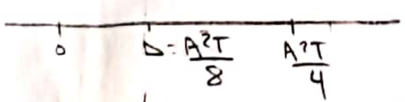
حال در این حالت:

$$S_{1_2} = 0, \qquad S_{2_2} = \frac{1}{2} A\cos w_c t \qquad S_{o1_1} = 0$$

$$S_{o2_2} = \int_0^{T_b} S_2(u)\, h(T_b - u)\, du = \int_0^{T_b} \frac{A}{2}\cos w_c u\, [S_1(u) - S(u)] = \frac{A^2}{4}\int_0^{T_b} \cos^2 w_c u\, du$$

$$= \frac{A^2}{2} \cdot \frac{T_b}{2} = \frac{A^2 T_b}{4}$$ مطابق انتظار هم در این مورد. $\quad \Delta^{opt}_{\text{قدیم}} = \frac{A^2 T_b}{4}$

$$\Delta^{opt}_{new} = \frac{S_{o1_1} + S_{o2_2}}{2} = \frac{A^2 T_b}{8}$$



حال به محاسبه احتمال خطا خواهیم پرداخت.

$$P_e = \frac{1}{2} Pr\{S_{o2_2} + n < \Delta^{opt}_{new}\} + \frac{1}{2} Pr\{\cancel{S_{o1_1}} + n > \Delta^{opt}_{new}\}$$

$$\to P_e = \frac{1}{2} Pr\left\{ n < \frac{A^2 T_b}{8} - \frac{A^2 T_b}{4} \right\} + \frac{1}{2} Pr\left\{ n > \frac{A^2 T_b}{8} \right\} = Q\left(\frac{A^2 T_b}{8\sqrt{N_0}} \right)$$

فرض شده نویز نویز تغییر نکرده است. $\quad N_0 = \frac{A^2 T_b \eta}{4} \to P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{16\eta}}\right) = Q\left(\frac{1}{2} \times 4.75342\right) = 0.0087339$

4	تاریخ تحویل: 01/3/4	نام درس: مخابرات دیجیتال – تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب) در این شرایط مدار برای تصمیم اقدام کند حد آستانه را داریم یعنی مرز در صفر و $\frac{A^2T_b}{4}$ باقی می‌ماند.

$$P_e = \frac{1}{2}\left[\Pr\{s_{0,1}+n < \Delta_{0/1}\} + \Pr\{s_{0,1}+n > \Delta_{0/1}\}\right] = \frac{1}{2}\left[\Pr\{n<0\} + \Pr\{n > \tfrac{A^2T_b}{4}\}\right]$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left[Q(0) + Q\left(\frac{A^2T_b}{4\sqrt{N_0}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[0.6 + 10^{-6}\right] = 0.2500005$$

6- الف) $s_1(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} & 0\le t\le T \\ 0 & o.w \end{cases}$ $\quad s_2(t) = \begin{cases} A & 0\le t\le T \\ 0 & o.w \end{cases}$ $\quad r_i(t) = s_i(t)+n(t)$ سیگنال دریافتی $i=1,2$

$n(t)$ نویز گاوسی $\quad G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ $\quad$ توان s_1، s_2؟ $\quad$ همبستگی s_1 و s_2

$$P_{s_1(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2t^2}{T^2}\,dt = \frac{A^2}{3} \qquad P_{s_2(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\,dt = A^2$$

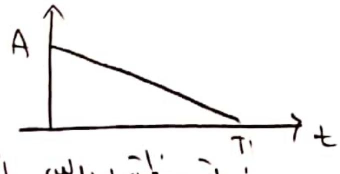
$$\langle s_1(t), s_2(t)\rangle = \int_0^T s_1(t)s_2(t)\,dt = \int_0^T \frac{A^2}{T}t\,dt = \frac{A^2T}{2}$$

ب) می‌دانیم:

$$h(t) = s_2(T_b-t) - s_1(T_b-t)$$

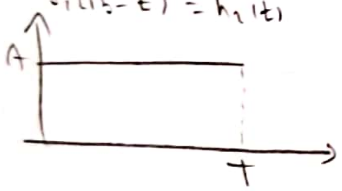
فیلتر منطبق با s_2 $\qquad$ فیلتر منطبق بر s_1

$s_1(T_b-t) = h_1(t)$



فیلتر منطبق بر s_1

$s_2(T_b-t) = h_2(t)$



فیلتر منطبق بر s_2

پ) $y_1(t) = s_2(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)s_2(t-\tau)\,d\tau$ ← باید بازه بندی کنیم.

$$0\le t\le T \rightarrow y_1(t) = \int_0^t A\left(A - \tfrac{A}{T}\tau\right)d\tau = A^2t - \frac{A^2t^2}{2T}$$

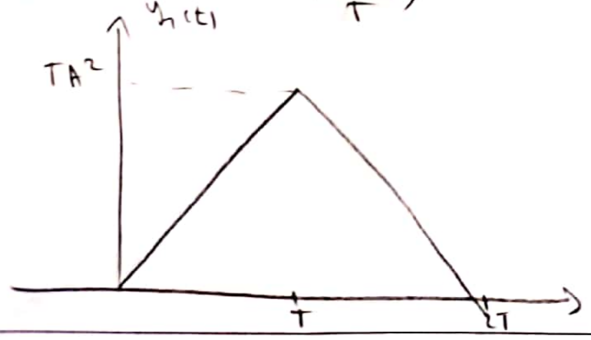
$$T\le t\le 2T \rightarrow y_1(t) = \int_{t-T}^{T} A\left(A - \tfrac{A}{T}\tau\right)d\tau = A^2(-t+2T) - \frac{A^2}{2T}\left(T^2-(t-T)^2\right)$$

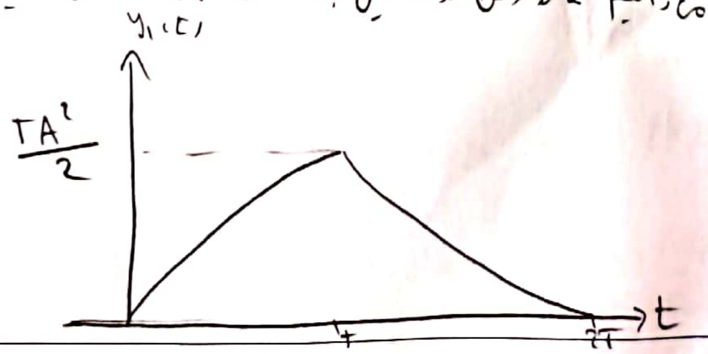
$$\rightarrow y_1(t) = \begin{cases} A^2t - \frac{A^2t^2}{2T} & 0\le t\le T \\ A^2(2T-t) - \frac{A^2}{2T}\left(T^2-(t-T)^2\right) & T\le t\le 2T \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$y_2(t) = s_2(t) * h_2(t) = A\,\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * A\,\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

می‌دانیم که کانولوشن دو مستطیل به ما مثلث می‌دهد پس داریم:

$$y_2(t) = TA^2\,\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)$$



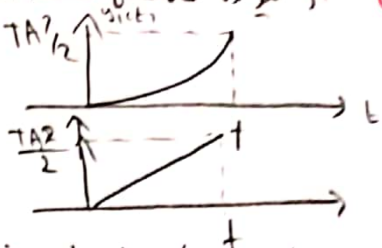


5	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۳ / ۴	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

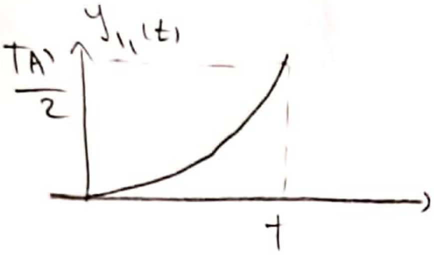
ث) از کیرنل همبستگی استفاده می‌کنیم:

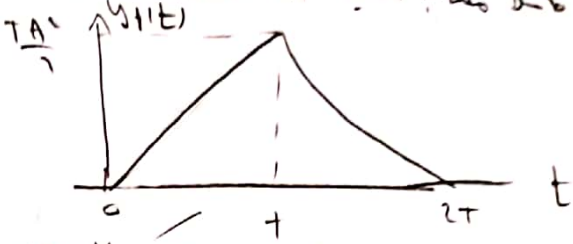
$$y_{1,1}(t) = \int_0^t s_2(\tau)s_1(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{A^2\tau}{T}d\tau = \frac{A^2t^2}{2T}$$

$$y_{1,1}(t) = \int_0^t s_1(\tau)s_1(\tau)d\tau = \int_0^t A^2 d\tau = A^2\tau$$

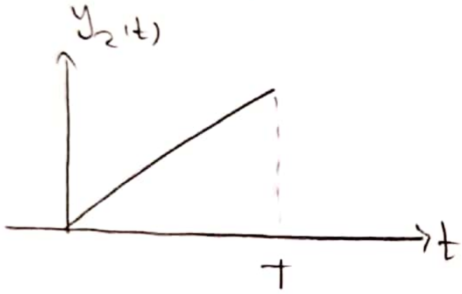


ج) این شکل‌ها کاملا مشابه نیستند اما در برخی موارد مشابه هستند.





در نقاط 0، T، 2T مقادیر این دو باهم یکسان هست.



برای 0T، T، 2T یکسان می‌باشند.

---

7 _ الف)

$P_0\{\text{ارسال صفر}\} = P_0$ $\quad \frac{E_b}{\eta}$ سیگنال‌دهنده $= 4$ $\quad P\{\text{ارسال یک}\} = 1-P$

$s_1(t) = -A\cos(2\pi f_c t)$ $\quad s_2(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ $\quad$ طبق آنچه در درس دیدیم داریم:

آشکارسازی همدوس: $p(t) = 2A\cos(2\pi f_c t) \longrightarrow s_{o1} = \int_0^T -A\cos(2\pi f_c t)2A\cos(2\pi f_c t)dt$

$= -2A^2\int_0^T \cos^2(2\pi f_c t)dt = -A^2T \qquad s_{o2} = \int_0^T A\cos(2\pi f_c t)2A\cos(2\pi f_c t)dt$

مشابه: $s_{o2} = A^2T$ $\quad$ برای نویز: $n_o(t) = \int_0^T n(t).2A\cos(2\pi f_c t)dt$

$$E\{n_o(t)\} = E\left\{\int_0^T n(t)2A\cos(2\pi f_c t)\right\} = \int_0^T E\{n(t)\}2A\cos(2\pi f_c t)dt = 0$$

$$Var(n_o(t)) = E\{n_o^2(t)\} = E\left\{\int_0^T n(t)p(t)dt\int_0^T n(\tau)p(\tau)d\tau\right\} = E\left\{\int_0^T\int_0^T n(t)n(\tau)p(t)p(\tau)dtd\tau\right\}$$

$$= \int_0^T\int_0^T \underbrace{E\{n(t)n(\tau)\}}_{\eta/2\,\delta(t-\tau)}p(t)p(\tau)dtd\tau = \frac{\eta}{2}\int_0^T p^2(t)dt = \frac{\eta}{2}\int_0^T 4A^2\cos^2(2\pi f_c t) = T\eta A^2$$

$$\longrightarrow n_o(t) \sim N(0, T\eta A^2) \qquad P_e = P_r\{\hat b_k=1|b_k=0\}P_r\{b_k=0\} + P_r\{\hat b_k=0|b_k=1\}P_r\{b_k=1\}$$

$$P_e = P_r\{V_o(t)>0|b_k=0\}.P + P_r\{V_o(t)<0|b_k=1\}(1-P)$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری پنجم	تاریخ تحویل: 01/3/14	6

$$P_e = P\, P_r\{n - A^2T > \Delta\} + (1-P) P_r\{n + A^2T < \Delta\} = P \int_{\Delta + A^2T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn$$

$$+ (1-P) \int_{-\infty}^{\Delta - A^2T} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn \rightarrow P_e = P\, Q\left(\frac{\Delta + A^2T}{\sqrt{N_0}}\right) + (1-P)\, Q\left(\frac{A^2T - \Delta}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$(N_0 = T\eta A^2)$

حال باید بر حسب Δ^{opt} بدست آوریم.

$$\frac{\partial P_e}{\partial \Delta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Delta} Q\left(\frac{A^2T + \Delta}{\sqrt{N_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial \Delta} \int_{\Delta + A^2T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{(\Delta + A^2T)^2}{2N_0}} \qquad \frac{\partial}{\partial \Delta} Q\left(\frac{A^2T - \Delta}{\sqrt{N_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial \Delta} \int_{-\infty}^{\Delta - A^2T} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}} dn$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{(A^2T - \Delta)^2}{2N_0}} \rightarrow \frac{+1}{\sqrt{2\pi N_0}} \left(-P e^{-\frac{(\Delta + A^2T)^2}{2N_0}} + (1-P) e^{-\frac{(A^2T - \Delta)^2}{2N_0}}\right) = 0$$

$$\rightarrow (1-P) e^{-\frac{(A^2T - \Delta)^2}{2N_0}} = P e^{-\frac{(\Delta + A^2T)^2}{2N_0}} \longrightarrow \frac{-(A^2T - \Delta)^2}{2N_0} = \ln\frac{P}{1-P} + \frac{-(\Delta + A^2T)^2}{2N_0}$$

$$-A^4T^2 - \Delta^2 + 2A^2T\Delta = 2N_0 \ln\frac{P}{1-P} - \Delta^2 - 2\Delta A^2T - A^4T^2$$

$$\rightarrow 4A^2T\Delta = 2N_0 \ln\frac{P}{1-P} \rightarrow \Delta = \frac{2N_0}{4A^2T} \ln\frac{P}{1-P} = \frac{N_0}{2A^2T} \ln\frac{P}{1-P} \xrightarrow{N_0 = T\eta A^2}$$

$$\rightarrow \Delta^{opt} = \frac{\eta}{2} \ln\frac{P}{1-P}$$

حال عبارت ساده شده احتمال خطا را عرضه می کنیم.

$$P_e = P\, Q\left(\frac{A^2T + \frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{N_0}}\right) + (1-P)\, Q\left(\frac{A^2T - \frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{N_0}}\right)$$

می دانیم $E_b = P_{av} T_b$ $\qquad P_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} G_Z(f)\, df = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} G_b(f - f_c) + G_b(f + f_c)$

$$= A^2/4 \int_{-\infty}^{\infty} T_b \operatorname{Sinc}^2(T_b(f - f_c)) + T_b \operatorname{Sinc}^2(T_b(f + f_c))\, df = A^2/2$$

$$E_b = \frac{A^2T_b}{2}, \quad \frac{E_b}{\eta} = 4 \rightarrow \frac{A^2T_b}{2\eta} = 4 \rightarrow \frac{A^2T_b}{\eta} = 8$$

$$P_e = P\, Q\left(\frac{A^2T + \eta/2 \ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{\eta T A^2}}\right) + (1-P)\, Q\left(\frac{A^2T - \frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{\eta T A^2}}\right)$$

$$\rightarrow P_e = P\, Q\left(\underbrace{\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}}_{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{TA^2\eta}}\right) + (1-P)\, Q\left(\underbrace{\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}}_{2\sqrt{2}} - \frac{\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{1-P}}{\sqrt{TA^2\eta}}\right)$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{TA^2\eta}} = \sqrt{\frac{\eta}{TA^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow P_e = P\, Q\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\frac{P}{1-P}\right) + (1-P)\, Q\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\frac{P}{1-P}\right)$$

حال به کمک نرم افزار، به ازای P های مختلف احتمال خطا را حساب می کنیم

7	تاریخ تحویل: ۰۱/۳/۱۴	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$P=0.4 \to P_e = 0.4\, Q\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.4}{0.6}\right) + 0.6\, Q\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.4}{0.6}\right) = 0.002287$

$P=0.5 \to P_e = 0.5\, Q\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.5}{0.5}\right) + 0.5\, Q\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.5}{0.5}\right) = 0.0023389$

$P=0.6 \to P_e = 0.6\, Q\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.6}{0.4}\right) + 0.4\, Q\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.6}{0.4}\right) = 0.002287$

$P=0.7 \to P_e = 0.7\, Q\left(2\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.7}{0.3}\right) + 0.3\, Q\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{0.7}{0.3}\right) = 0.00212359$

$P_e(0.5) > P_e(0.6) = P_e(0.4) > P_e(0.7)$ مشاهده می‌کنیم که رابطه مقابل برای احتمال‌های خطا برقرار است.

ب) احتمال خطا در این حالت به صورت زیر است:

$$P_e = P\, Q\left(\frac{A^2T}{\sqrt{N_0}}\right) + (1-P)\, Q\left(\frac{A^2T}{\sqrt{N_0}}\right) = PQ\left(\frac{A^2T}{\sqrt{A^2T\eta}}\right) + (1-P)\, Q\left(\frac{A^2T}{\sqrt{A^2T\eta}}\right)$$

$$\to P_e = Q\left(\frac{A^2T}{\sqrt{A^2T\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}\right) = Q(2\sqrt{2}) = 0.0023386749$$

در این حالت P_e ربطی به P ندارد و مقدار ثابتی را اختیار می‌کند.

---

8 - الف)

BPSK همدوس $\quad \underbrace{S_1(t) = -A\cos(\omega_c t) \quad S_2(t) = A\cos(\omega_c t)}_{\text{با هم متقابل هستند.}}$

مشخصات سیگنال‌ها $\quad x_1(t) = -A\cos(\omega_c t + \theta) \quad x_2(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) \quad n \sim N(0, \eta/2)$

$$P(t) = 2A\cos(\omega_c t + \theta) \to S_{o1} = \int_0^{T_b} -A\cos(\omega_c t) \cdot 2A\cos(\omega_c t + \theta)\, dt$$

$$\to S_{o1} = \frac{-2A^2}{2} \int_0^{T_b} \cos(2\omega_c t + \theta) + \cos\theta\, dt = -A^2 \left(\frac{1}{2\omega_c} \sin(2\omega_c t + \theta) \Big|_0^{T_b} + T_b \cos\theta \right)$$

$$\to S_{o1} = -A^2 T_b \cos\theta \qquad S_{o2} = \int_0^{T_b} A\cos(\omega_c t)\, 2A\cos(\omega_c t + \theta)\, dt \xrightarrow{\text{مشابه}} S_{o2} = A^2 T_b \cos\theta$$

$$n_o(t) = \int_0^{T_b} n(t)\, P(t)\, dt \qquad E\{n_o(t)\} = 0 \qquad Var(n_o(t)) = E(n_o^2(t)) \to$$

$$= E\left\{ \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} n(t)\, n(\tau)\, P(t) P(\tau)\, dt\, d\tau \right\} = \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \underbrace{E\{n(t)\, n(\tau)\}}_{\frac{\eta}{2}\delta(t-\tau)} P(t) P(\tau)\, dt\, d\tau = \frac{\eta}{2} \int_0^{T_b} P^2(t)\, dt$$

$$= \frac{\eta}{2} \int_0^{T_b} 4A^2 \cos^2(\omega_c t + \theta) = A^2 T \eta \qquad n_o \sim N(0, A^2 T\eta)$$

$$\to P_e = \frac{1}{2} P_r\{n_o + S_{o1} > \Delta\} + \frac{1}{2} P_r\{n_o + S_{o2} < \Delta\} \qquad \Delta = 0$$

$$\to P_e = \frac{1}{2}\left[P_r\{n > A^2T_b\cos\theta\} + P_r\{n < -A^2T_b\cos\theta\} \right]$$

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{A^2T_b\cos\theta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}}\, dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-A^2T_b\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{2N_0}}$$

$$\to P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{A^2T_b\cos\theta}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A^2T_b\cos\theta}{\sqrt{N_0}}\right) \longrightarrow P_e = Q\left(\frac{A^2T_b}{\sqrt{N_0}}\cos\theta\right)$$

$P_e = Q\left(\frac{A^2T_b}{\sqrt{A^2T_b\eta}}\cos\theta\right)$ $E_b = P_{av}.T_b$ $P_{av} = \frac{A^2}{2}$ $E_b = \frac{A^2T_b}{2}$

$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T_b}{\eta}}\cos\theta\right) \to P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\cos\theta\right)$

ب)

$\theta = 0 \to Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = 10^{-5} \xrightarrow{Q^{-1}} \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} = 4.2649$

$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\cos\theta\right) = 10^{-4} \xrightarrow{Q^{-1}} \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\cos\theta = 3.7190 \to \cos\theta = 0.87200$

$\xrightarrow{\arccos} \theta = 29.3081^\circ$

پ) می‌دانیم که در DPSK احتمال خطا به صورت زیر است

$P_e = \frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{\eta}}$

$\frac{E_b}{\eta}_{min} = 10dB \to \frac{E_b}{\eta}_{min} = 10$ $P_e^{BPSK} = P_e^{DPSK}$

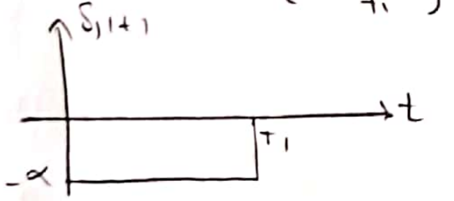
$\to Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\cos\theta\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{\eta}} \to Q(\sqrt{20}\cos\theta) = \frac{1}{2}e^{-10} \xrightarrow{Q^{-1}}$

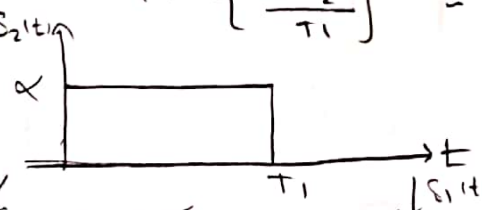
$\to \sqrt{20}\cos\theta = 4.0781 \to \cos\theta = 0.9118908819 \xrightarrow{\arccos}$

$\theta = 24.2320^\circ$

3- الف) برای یک: $s_2(t) = \alpha\, rect\left[\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right]$ برای صفر: $s_1(t) = -\alpha\, rect\left[\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right]$

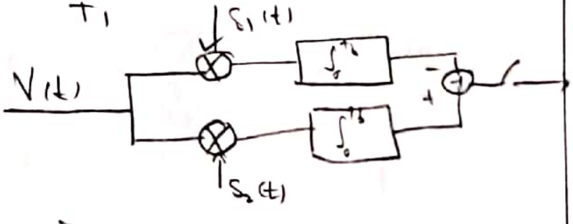
$T > T_1$ بازه ارسال هر بیت.



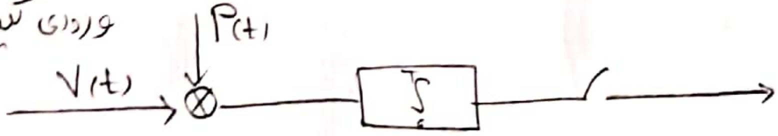


$V(t) = Z(t) + n(t)$ $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ گیرنده همبسته

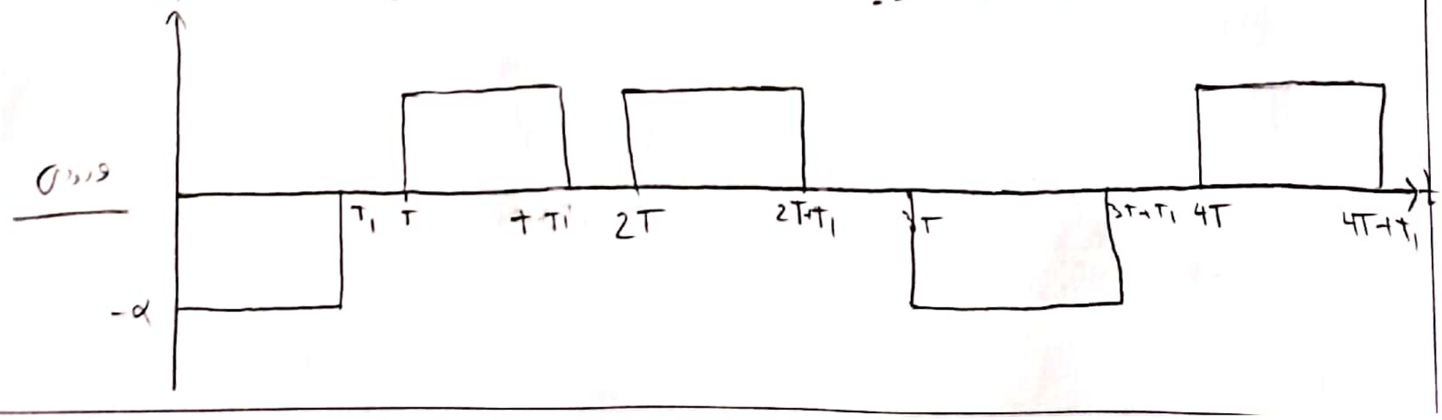
ورودی گیرنده



فرم دیگر:



دنباله 01101 را در نظر می‌گیریم، با فرض $T > T_1$ خواهیم داشت: $V(t)$



9	تاریخ تحویل: 01/3/14	نام درس: مخابرات دیجیتال تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

حال می‌خواهیم سوال مربوط به همان $V_o(t)$ را رسم، با توجه به فرستنده گیرنده رسم کنیم.

ارسال 0 $\rightarrow S_1(t) = -\alpha\, rect\left[\frac{t-T_1/2}{T_1}\right]$ $\quad V_o(t) = \int_0^t S_1(t)\,(S_2(t)-S_1(t))\,dt$

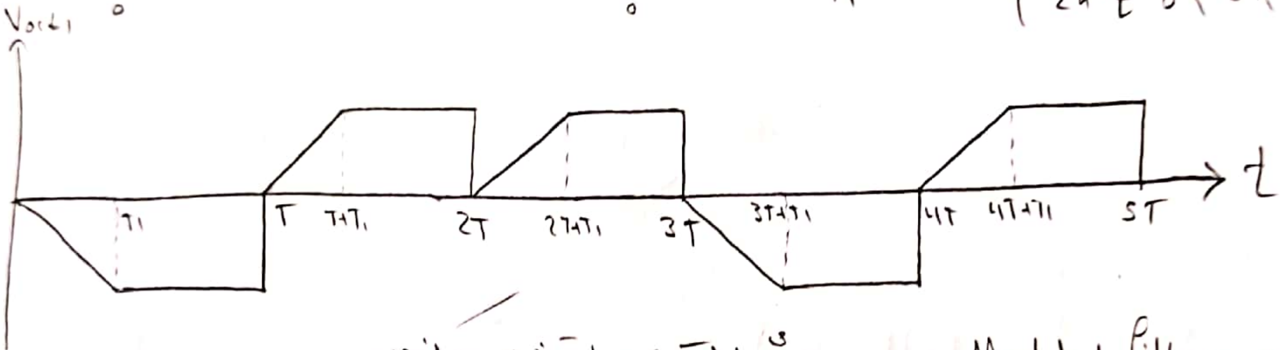
$$= \int_0^t -\alpha\, rect\left[\frac{t-T_1/2}{T_1}\right]\left(2\alpha\, rect\left[\frac{t-T_1/2}{T_1}\right]\right) = -2\alpha^2\int_0^t rect\left[\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right]$$

با توجه به بازه‌ای که t در آن قرار می‌گیرد پاسخ‌ها متفاوت خواهد شد. پس داریم:

$$V_o(t) = \begin{cases} -2\alpha^2 T_1 & T_1 < t < T \\ -2\alpha^2 t & 0 < t < T_1 \end{cases}$$

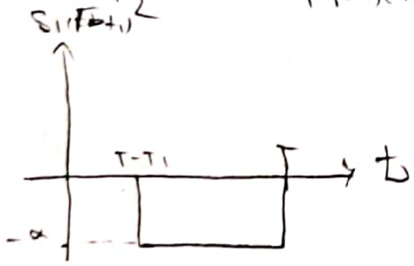
ارسال 1 : $S_2(t) = \alpha\, rect\left[\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right]$

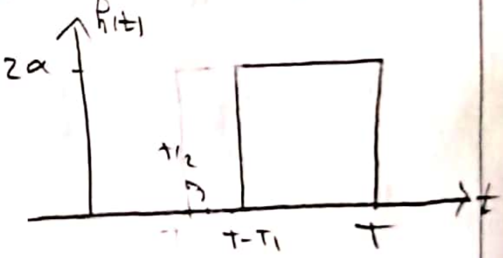
$$\rightarrow V_o(t) = \int_0^t S_2(t)\,(S_2(t)-S_1(t))\,dt = 2\alpha^2\int_0^t rect\left[\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right] = \begin{cases} 2\alpha^2 T_1 & T_1 < t < T \\ 2\alpha^2 t & 0 < t < T_1 \end{cases}$$



ب) از Matched-filter برای حالت‌ها خواسته شده استفاده می‌کنیم.

$T_1 < T/2$ $\qquad$ Matched - filter: $h(t) = p(T-t) = S_2(T-t) - S_1(T-t)$





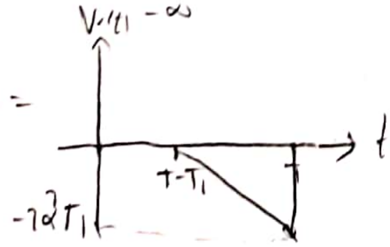
چون $T/2 > T_1$

$h(t) = 2\alpha\, rect\left[\frac{T-t-T_1/2}{T_1}\right]$ $\qquad$ ارسال 0 : $V(t) = S_1(t)$

$$\rightarrow V_o(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\alpha)\,S_1(t-\alpha)\,d\alpha = \int_{T-T_1}^{t} -2\alpha^2\,d\alpha \rightarrow V_o(t) = -2\alpha^2 t + (T_1-T)(-2\alpha^2)$$

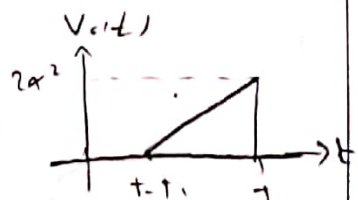
(انتگرال با در نظر گرفتن ضرایب) با در نظر گرفتن این بازه $T-T_1 < t < T$

$\rightarrow V_o(t) =$



ارسال 1 : $V(t) = S_1(t) \rightarrow V_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\,S_2(t-\alpha)\,d\alpha$

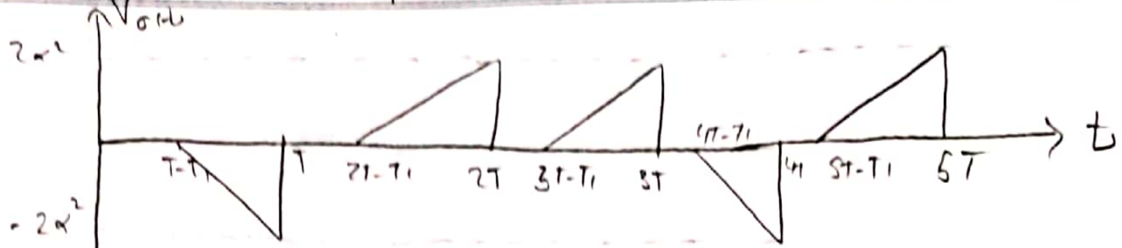
$$\rightarrow V_o(t) = \int_{T-T_1}^{t} 2\alpha^2\,d\alpha = 2\alpha^2 t - 2\alpha^2(T-T_1) \rightarrow V_o(t) =$$



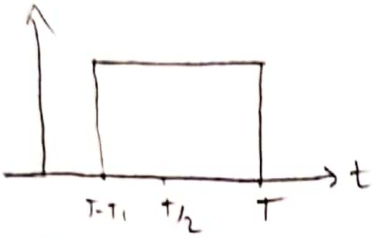
سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: مخابرات دیجیتال — تکلیف سری پنجم

تاریخ تحویل: ۰۱ / ۳ / ۴



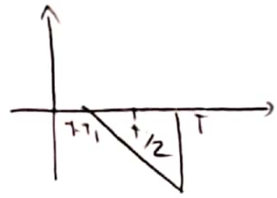
$h(t)$

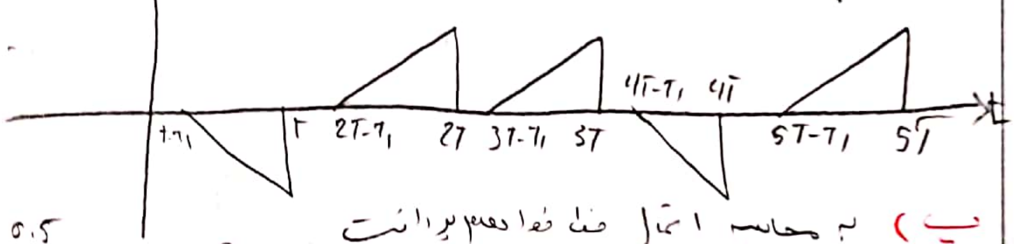


حال با فرض $\frac{T}{2} < T_1 < T$ طبق مراحل در این صورت داریم:

$$h(t) = 2\alpha \, rect\left[\frac{T-t-T_1/2}{T_1}\right]$$

مثلاً به ازای مثبت : ارسال ۰ $V_o(t_s) \rightarrow$





$P\{0 \text{ ارسال}\} = P\{1 \text{ ارسال}\} = 0.5$

ب) به محاسبه احتمال خطا تصمیم می‌پردازیم.

داریم: $N_o = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)\,|H(f)|^2 df \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2}\int_{T-T_1}^{T} 4a^2 dt$

$\rightarrow N_o = 2a^2 T_1 \eta$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[\Pr\{\hat{b}_k = 1 \mid b_k = 0\} + \Pr\{\hat{b}_k = 0 \mid b_k = 1\} \right]$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left[\Pr\{V_o < \Delta \mid S_2\} + \Pr\{V_o > \Delta \mid S_1\} \right]$$

منطق سازه ساده S_{o1} ، S_{o2} داریم.

$$S_{o1} = \int_0^{T_1} S_1(u)\, h(T_1-u)\, du = \int_0^{T_1} -2\alpha^2 dt = -2\alpha^2 T_1$$

$$S_{o2} = \int_0^{T_1} S_2(u)\, h(T_1-u)\, du = \int_0^{T_1} 2\alpha^2 dt = 2\alpha^2 T_1$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\left(\Pr\{n < \Delta - 2\alpha^2 T_1\} + \Pr\{n > \Delta + 2\alpha^2 T_1\}\right) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{2\alpha^2 T_1 - \Delta}{\sqrt{N_o}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{2\alpha^2 T_1 + \Delta}{\sqrt{N_o}}\right)$$

$\underline{\Delta = 0}$: $P_e = Q\left(\frac{2\alpha^2 T_1}{\sqrt{N_o}}\right) = Q\left(\frac{2\alpha^2 T_1}{\sqrt{2\alpha^2 T_1 \eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 T_1}{\eta}}\right)$

نمره کامل

ت) نمونه برداری در $t = (k-1)T + T_2$ اگر باشد: ارسال ۱: $V_o(t) = \begin{cases} 2\alpha^2 T_1 & T_1 < t < T \\ 2\alpha^2 t & 0 < t < T_1 \end{cases}$ ، ارسال ۰: $V_o(t) = \begin{cases} -2\alpha^2 T_1 & T_1 < t < T \\ -2\alpha^2 t & 0 < t < T_1 \end{cases}$

$\underline{\text{حالت ۱:}}$ $T_2 > T_1 \rightarrow S_{o1}, S_{o2} \rightarrow \text{Stable} \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 T_1}{\eta}}\right)$

حالت ۲: $T_1 > T_2 \rightarrow S_{o1} = \int_0^{T_2} S_1(v)\, h(T_2 - v)\, dv = -2\alpha^2 T_2$ مشابه: $S_{o2} = 2\alpha^2 T_2$

$$P_e = \frac{1}{2}\left[\Pr\{n < \Delta - 2\alpha^2 T_2\} + \Pr\{n > \Delta + 2\alpha^2 T_2\}\right] = \frac{1}{2} Q\left(\frac{2\alpha^2 T_2 - \Delta}{\sqrt{N_o}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{2\alpha^2 T_2 + \Delta}{\sqrt{N_o}}\right)$$

$\underline{\Delta = 0}$: $P_e = Q\left(\frac{2\alpha^2 T_2}{\sqrt{N_o}}\right) = Q\left(\frac{2\alpha^2 T_2}{\sqrt{2\alpha^2 T_1 \eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 T_2^2}{\eta T_1}}\right)$