



بسمه تعالی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تمرین‌های درس مخابرات دیجیتال-سری اول

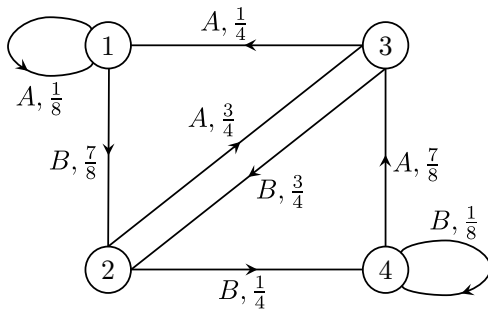


دانشگاه تهران

برخی سئوالات این مجموعه با کسب اجازه از جناب آقای دکتر سعید نادر اصفهانی از تمرین‌های درس مخابرات ۲ ایشان انتخاب شده‌اند. بدینوسیله از بذل محبت ایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

تحویل سئوالات ستاره‌دار الزامی نیست، اما حل آن‌ها جهت یادگیری بهتر مطالب اکیداً توصیه می‌شود.

- (۱) فرض کنید پلاک هر خودرو شامل عددی دورقمی در سمت چپ، یک حرف در وسط و یک عدد سه رقمی در سمت راست باشد. بنابه دلایلی، در این سیستم رقم‌های صفر و یک مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. همچنین تعداد حروف مورد استفاده ۱۶ حرف است. اعداد و حروف مستقل از یکدیگر و با احتمال یکسان انتخاب می‌شوند.
الف) دانستن این که «حرف وسط ب است» چند بیت اطلاعات دارد؟
ب) هر پلاک حاوی چند بیت اطلاعات است؟
پ) اگر بدانیم در پلاکی هر سه رقم سمت راست یکسان هستند، این پلاک چند بیت اطلاعات دارد؟
- (۲) دو منبع مستقل از هم را در نظر بگیرید که اولی دارای الفبای $\{a, b\}$ و احتمال صدور a در آن برابر p است. منبع دوم دارای الفبای $\{a, c\}$ و احتمال صدور a در آن، برابر q است. منبع سومی نیز وجود دارد که در هر بازه‌ی زمانی مشخص، یکی از دو منبع بالا را به‌طور تصادفی انتخاب کرده و حرف تولیدشده توسط آن را ارسال می‌کند. فرض کنید احتمال انتخاب منبع اول توسط منبع سوم برابر با r باشد.
الف) احتمال تولید هر کدام از حروف $\{a, b, c\}$ توسط منبع سوم را تعیین کنید.
ب) p و q را بر حسب r به گونه‌ای تعیین کنید که آنتروپی منبع سوم ماکزیمم شود.
پ) آیا مقداری برای r وجود دارد که به‌ازای آن، هر سه منبع ماکزیمم آنتروپی را اختیار کنند؟
- (۳) فرض کنید الفبای یک منبع بی‌حافظه‌ی M تایی به فرم $\{a_1, \dots, a_M\}$ و احتمال تولید a_i برابر p_i ($i = 1, \dots, M$) باشد.
الف) اگر سه حرف از حروف این منبع با هم ادغام شوند به این معنی که a_i ، a_j و a_k را از حروف منبع حذف کنیم و حرف b را به حروف الفبا اضافه کنیم به نحوی که احتمال تولید آن برابر $p_i + p_j + p_k$ باشد، انتظار دارید آنتروپی منبع جدید افزایش یابد یا کاهش؟ ادعای خود را اثبات کنید.
ب) حال فرض کنید احتمال صدور هر کدام از سمبل‌های a_i ، a_j و a_k را با $\frac{p_i + p_j + p_k}{3}$ جایگزین کنیم. آنتروپی منبع جدید افزایش می‌یابد یا کاهش؟ ادعای خود را اثبات کنید.
- (۴) *احتمال گرفتن شیر در یک سکه برابر p است. این سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر به‌دست آید. فرض کنید X تعداد پرتاب‌های لازم را نشان دهد. $H(X)$ را بر حسب p بیابید و نشان دهید در بین کلیه متغیرهای تصادفی گسسته‌ای که مانند X مقادیر $1, 2, \dots$ را اختیار می‌کنند و میانگین همه‌ی آن‌ها برابر $\frac{1}{p}$ است، X بیشترین آنتروپی را دارد.
- (۵) فرض کنید X ، Y و Z سه متغیر تصادفی باشند. نشان دهید:
الف) $H(Y, Z|X) \leq H(Y|X) + H(Z|X)$ و شرایطی که منجر به تساوی می‌شود را نیز تعیین کنید.
ب) $H(Y, Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X, Y)$



- (۶) دیاگرام حالت یک منبع مارکوف ایستان در شکل روبرو داده شده است.
 الف) با توجه به خاصیت ایستانی منبع، بردار حالت اولیه را برای آن به دست آورید.
 ب) آنتروپی هر کدام از ۴ حالت این منبع (یعنی $H_i, i = 1, \dots, 4$) و نرخ آنتروپی آن $(H(X))$ را محاسبه کنید.
 پ) با فرض $G_k \triangleq \frac{H(X_1, \dots, X_k)}{k}$ و G_1 و G_2 را به دست آورید.

- (۷) یک منبع مارکوف ایستان دو حالتی با ماتریس احتمالات گذار $\Phi = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1 - p_{10} \end{pmatrix}$ مفروض است.
 الف) نرخ آنتروپی را برای این منبع پیدا کنید. p_{01} و p_{10} را به گونه ای بیابید که نرخ آنتروپی ماکزیمم شود.
 ب) نرخ آنتروپی را برای یک منبع مارکوف ایستان دو حالتی با ماتریس احتمالات گذار $\Phi = \begin{pmatrix} 1 - p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ به دست آورید. مقدار ماکزیمم نرخ آنتروپی را نیز به دست آورید.

- (۸) منبع بی حافظه ی X با تعداد نامحدودی سمبل با احتمال های $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ مفروض است. فرض کنید p_k احتمال تولید k امین سمبل به صورت $p_k = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}, k = 1, 2, \dots$ تعریف شود. یک کد هافمن برای این منبع پیدا کنید. متوسط طول کلمات این کد و میزان افزونگی (Redundancy) آن را به دست آورید.

- (۹) *فرض کنید کد بهینه نسبت داده شده به منبع X دارای طول متوسط L_1 ، کد بهینه نسبت داده شده به منبع X^2 دارای طول متوسط L_2 و کد بهینه نسبت داده شده به منبع X^3 دارای طول متوسط L_3 باشند. X^ℓ منبعی است که هر سمبل آن، ℓ سمبل متوالی از منبع X است. ثابت کنید: $L_3 \leq L_2 + L_1$. [راهنمایی: نیازی به محاسبات پیچیده ریاضی ندارید.]

- (۱۰) *فرض کنید منبعی الفبایی به طول $M + 1$ داشته باشد به نحوی که $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_M > 0$ و $p_{M+1} \approx 0$.
 الف) طول متوسط کد هافمن برای این منبع را زمانی که سمبل $M + 1$ ام را دارد بر حسب طول متوسط کد هافمن برای این منبع زمانی که سمبل $M + 1$ ام را ندارد، به دست آورید.
 ب) حال فرض کنید به جای یک سمبل با احتمال صدور نزدیک به صفر، n سمبل با چنین خاصیتی وجود داشته باشند. بند الف) را برای این حالت نیز تکرار کنید.