1	تاریخ تحویل: 01 / 2 / 26	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال تکلیف سری اول	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسأله ۱

(a) $y[n] = \begin{cases} n\,x[n] & x[n] \geq 1 \\ x[n] & x[n] \leq 1 \end{cases}$

بررسی خطی بودن: پاسخ سیستم به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را به ترتیب $y_1[n]$, $y_2[n]$ می‌نامیم.

$$y_1[n] = \begin{cases} n\,x_1[n] & x_1[n] \geq 1 \\ x_1[n] & x_1[n] \leq 1 \end{cases} \quad , \quad y_2[n] = \begin{cases} n\,x_2[n] & x_2[n] \geq 1 \\ x_2[n] & x_2[n] \leq 1 \end{cases}$$

باید نشان دهیم که $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \to \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$. مشخصاً چنین چیزی ممکن نیست چون در دو سیگنال $y_1[n]$, $y_2[n]$ شرط های ما شامل $1 \leq x_1[n]$ و ... وجود ندارد و این موضوع باعث می‌شود سیستم غیرخطی باشد.

بررسی پایداری: باید ببینیم که آیا ورودی کراندار به سیستم همواره پاسخ کراندار می‌دهد یا خیر. به عنوان ضریب n نسبت $x[n]$ مشکل‌ساز است، چون فرض کنید که در ∞ یک سیگنال کراندار به عنوان ورودی بدهیم مثلا $x[n]=4$ اما در پاسخ ما کراندار نیست، پس سیستم پایدار نیست.
نتیجه نهایی: غیرخطی و ناپایدار.

(b) $y[n] = x[n \bmod 3]$

خطی بودن: $x_1[n] \to y_1[n]$, $x_2[n] \to y_2[n]$

$\Longrightarrow \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] = \alpha_1 x_1[n \bmod 3] + \alpha_2 x_2[n \bmod 3] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] \to$ خطی است

پایداری: مشخصاً اگر $x[n]$ کراندار به سیستم بدهیم، خروجی نیز کراندار است، پس سیستم پایدار است.

علیت: سیستم به آینده وابسته است، علی نیست، به عنوان مثال برای $n=-1$: $y[-1] = x[-1 \bmod 3] = x[2]$

معکوس‌پذیری: باید ببینیم که با داشتن خروجی، آیا ورودی به صورت یکتا قابل تعیین است یا خیر. یا به تعبیری دیگر به ورودی های متمایز خروجی متمایز دهد. فرض کنید که یک $y[n]$ داشته باشیم که مقدارش $x[2]$ باشد. حالت های بسیار زیادی وجود دارد که $n \bmod 3 = 2$ شود پس سیستم معکوس‌پذیر هم نیست.
نتیجه نهایی: خطی، پایدار، غیرعلی، معکوس‌ناپذیر.

(c) $y[n] = \sum_{k=n-1}^{x[n]+2n+2} x[k]\,\delta[n-k+2]$

تغییرپذیری با زمان: به سیستم ورودی $x[n-n_0]$ می‌دهیم و آن را با $y[n-n_0]$ مقایسه می‌کنیم.

$$x[n-n_0] \to y_1[n] = \sum_{k=n-1}^{x[n-n_0]+2n+2-n_0} x[k]\,\delta[n-k+2]$$

$$y_2[n] = y[n-n_0] = \sum_{k=n-n_0-1}^{x[n-n_0]+2n+2-2n_0} x[k]\,\delta[n-k+2-n_0]$$

$\Longrightarrow y_1[n] \neq y_2[n] \to$ تغییرپذیر با زمان (TV) است.

وارون‌پذیری: باید سیستم به ورودی های متمایز خروجی متمایز بدهد. سعی می‌کنیم ورودی را طوری دهیم که کران های سیگنال طوری شود که آرگومان دلتا هرگز صفر نشود تا به ازای حداقل دو ورودی مختلف بتوانیم خروجی یکسان صفر بدهیم.

$x_1[n] = -n-2 \to y_1[n] = \sum_{k=n-1}^{n} x[k]\,\delta[n-k+2] = x[n-1]\,\delta[3] + x[n]\,\delta[2] = 0$

$x_2[n] = -n-3 \to y_2[n] = \sum_{k=n-1}^{n-1} x[k]\,\delta[n-k+2] = 0 \to$ وارون‌ناپذیر است.

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال
تکلیف سری اول

تاریخ تحویل: ۹۹/12/26

d) $y[n] = \begin{cases} n & n \leq x[n] \\ x[n] & n > x[n] \end{cases}$

علیت: مشخصا سیستم به آینده وابستگی ندارد. پس علی است.

پایداری: ممکن است یک ورودی کراندار به سیستم داده شود. اما در $n = \infty$ خروجی سیستم ما ∞ می‌شود. پس به طور کلی سیستم ناپایدار است.

نتیجه نهایی: علی است، پایدار نیست.

e) $y[n] = \dfrac{x[n-1]}{x[1]}$

خطی بودن: $x_1[n] \to y_1[n]$, $x_2[n] \to y_2[n]$

$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \Rightarrow \dfrac{\alpha_1 x_1[n-1] + \alpha_2 x_2[n-1]}{\alpha_1 x_1[1] + \alpha_2 x_2[1]} \neq \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$ غیرخطی است.

تغییر پذیری با زمان: $x[n-n_0] \to y_1[n] = \dfrac{x[n-n_0-1]}{x_1[1]}$ $\quad y_2[n] = y[n-n_0] = \dfrac{x[n-n_0-1]}{x_2[1]}$

در واقع ممکن است $x[1]$ های در دو حالت متفاوت شوند و TI نبود. سیستم TV است. $\to y_1[n] \neq y_2[n] \to$

معکوس پذیری: در صورتی که $n = 2$ باشد آنگاه $y[2] = 1$، حال ممکن است به ازای یک ورودی دیگری نیز خروجی 1 شود. پس به ازای ورودی های متمایز خروجی متمایز نگرفتیم. سیستم معکوس‌ناپذیر است.

f) $y[n] = \sum_{k=n}^{2n} x[k]$

تغییرپذیری با زمان:

$x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n] = \sum_{k=n}^{2n} x[k]$, $y_2[n] = y[n-n_0] = \sum_{k=n-n_0}^{2n-2n_0} x[k]$

مسلماً $y_1[n] \neq y_2[n]$ لذا سیستم تغییر پذیر با زمان (TV) است.

علیت: سیستم به آینده وابسته است پس علی نیست. مثلاً اگر $n=2$
$y[2] = \sum_{k=2}^{4} x[k] = x[2] + x[3] + x[4]$

نتیجه نهایی: غیرعلی، تغییر پذیر با زمان (TV)

g) $y[n] = \cos(x[n])$

خطی بودن: $x_1[n] \to y_1[n]$, $x_2[n] \to y_2[n]$

$\Rightarrow \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] = \cos(\alpha_1 x_1[n]) + \cos(\alpha_2 x_2[n]) \neq \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] = \alpha_1 \cos(x_1[n])$
$+ \alpha_2 \cos(x_2[n]) \longrightarrow$ غیرخطی است.

تغییر پذیری با زمان:

$x[n-n_0] \to y_1[n] = \cos(x[n-n_0])$
$y_2[n] = y[n-n_0] = \cos(x[n-n_0])$ $\Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \to$ TI است (تغییر ناپذیر با زمان)

حافظه‌دار بودن: خروجی در لحظه n صرفا به ورودی در همان لحظه ربط دارد، وابستگی به آینده و گذشته ندارد.
پس سیستم بی حافظه است.

علیت: به دلیل بی حافظه بودن علیت نیز نتیجه می‌شود. (به آینده وابستگی ندارد.)

پایداری: می‌دانیم به ازای هر α $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ است. x هرچه که باشد، خروجی سیستم ما کراندار است.
پس پایداری برقرار است.

نتیجه نهایی: غیرخطی، تغییر ناپذیر با زمان، بی حافظه
علی، پایدار.

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری اول	تاریخ تحویل: 00 / 12 / 26	3

h) $x[n] = \cos[\frac{n\pi}{10}]$, $y[n] = 1 + \cos[\frac{n\pi}{5}]$

باید فرمت معادله‌ای برای نوشتن خروجی برحسب ورودی پیدا کنیم،

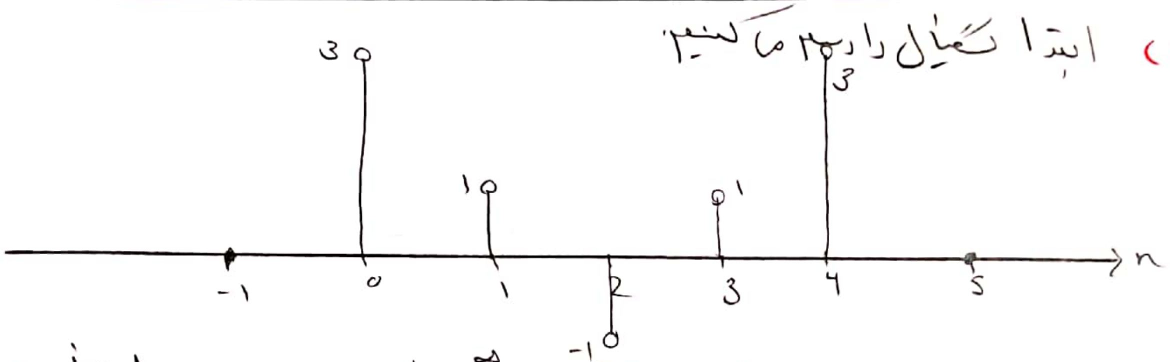
$y[n] = 1 + x[2n]$ $\xrightarrow[\text{?}]{\text{بررسی خطی}}$, $x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$ $x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$

$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] = 1 + \alpha_1 x_1[2n] + 1 + \alpha_2 x_2[2n] \neq \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$ غیرخطی است.

$y[n] = 1 + \cos(\frac{n\pi}{5}) \xrightarrow{\frac{\cos(2\alpha)+1}{2} = \cos^2\alpha} y[n] = 2\cos^2[\frac{n\pi}{10}]$

$\longrightarrow y[n] = 2x^2[n] \longrightarrow$ سیستم بی حافظه است.

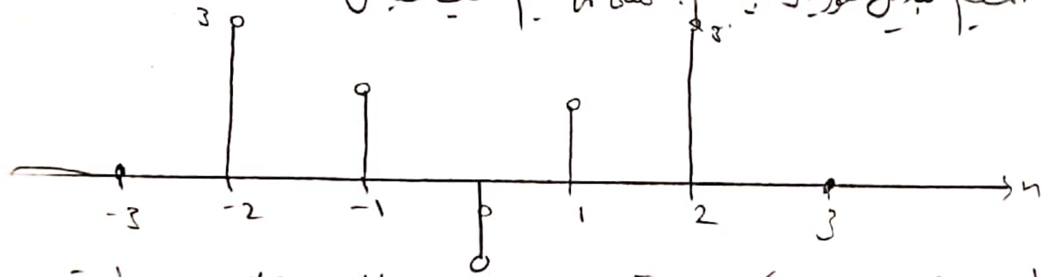
مسئله 2 ـ الف) ابتدا سیگنال را رسم می‌کنیم:



a) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = ?$ ابتدا تعریف تبدیل فوریه گسسته را ارائه می‌کنیم $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

$\longrightarrow X(e^{j\omega})|_{\omega=0} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[-1] + x[0] + \dots + x[5] = 0+3+1-1+1+3 = 7$

b) $\measuredangle X(e^{j\omega}) = ?$ با توجه به اینکه مجاز نیستیم مستقیم تبدیل فوریه را بیابیم. سعی می‌کنیم یک سیگنال زوج و حقیقی بسازیم.



مشاهده می‌کنیم که سیگنال رسم شده زوج است که در واقع 2 واحد شیفت یافته $x[n]$ به چپ است.

$y[n] = x[n+2]$ آن را $y[n]$ می‌نامیم. می‌دانیم که تبدیل فوریه تابع زوج، حقیقی است

$\measuredangle Y(e^{j\omega}) = 0$ می‌دانیم $x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ پس داریم:

$\longrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{j2\omega} X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\measuredangle} \underbrace{\measuredangle Y(e^{j\omega})}_{0} = 2\omega + \measuredangle X(e^{j\omega})$

$\longrightarrow \measuredangle X(e^{j\omega}) = -2\omega$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = ?$ می‌دانیم: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

$\xrightarrow{n=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = x[0] \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 6\pi$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

d) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = ?$, $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \rightarrow X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\pi n}$

$\underline{e^{-j\pi n} = (-1)^n}$ $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = 0 + 3 - 1 - 1 - 1 + 3 + 0 = 3$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = ?$, Parseval: $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi(0+9+1+1+1+9+0) = 42\pi$

(ب

a) $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ می‌دانیم: $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

باید به طریقی از شر سیگما خلاص شویم. با کمی دقت داریم: $x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

می‌دانیم: $x[n] * y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \rightarrow x[n] * u[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) U(e^{j\omega})$

$U(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi n) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \left[\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi n) \right]$

(طبق جدول صفحه 128)

در حالت M

b) $y[n] = x[2n]$ مقیاس زمانی را تغییر داده‌ایم، Decimation انجام داده‌ایم. در واقع نامه نمونه‌های سیگنال را $\frac{1}{2}$ برابر کرده‌ایم. یک سیگنال کمکی $S(n)$ تعریف می‌کنیم مثل بهروزی سیگنال ضربه قطار (کتاب دکتر رسی)

$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] S[n] e^{-\frac{j\omega n}{2}}$, $S[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$

$\underline{\text{بسط فوریه}}$, $S[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2} e^{j\pi k n} \rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{1} e^{j\pi n k} \right] x[n] e^{-\frac{j\omega n}{2}}$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn(\omega/2 - \pi k)} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} X(e^{j(\frac{\omega}{2} - \pi k)})$

$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2} X(e^{j\omega/2 - j\pi k})$

c) $x_{(2)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n \in E \\ 0 & n \in O \end{cases}$ در این حالت داریم UP Sampling انجام داده‌ایم.

$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(2)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[\frac{n}{2}] e^{-j\omega n}$ $\underline{\text{n باید مضرب از 2}}$ یا باید تعمیم زوج باشد.

$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(2)}[2k] e^{-j\omega 2k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega 2k} = X(e^{j2\omega})$

$\rightarrow X_2(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$

5	00 / 12 / 26 :تاریخ تحویل	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال تکلیف سری اول	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 3.

$h[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] \quad , \quad h[n] - A h[n-1] = \delta[n]$

$\Rightarrow (\frac{1}{3})^n u[n] - A(\frac{1}{3})^{n-1} u[n-1] = \delta[n]$ برای حل این معادله از Z-transform استفاده می کنیم.

می دانیم $a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$ ROC: $|a| < |z|$

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad , \quad \delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$ ROC: all z-plane

$\Longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{Az^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = 1 \longrightarrow 1 - Az^{-1} = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \longrightarrow A = \frac{1}{3}$

مسئله ۲ پاسخ ضربه سیستم وارون را می خواهد. بنابراین خواهیم داشت:

روش 1

$h[n] * (\delta[n] - A\delta[n-1]) = \delta[n]$ می دانیم: $h[n] * h_{inv}[n] = 1$

$\Rightarrow h_{inv}[n] = \delta[n] - A\delta[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]$

روش 2

$h[n] * h_{inv}[n] \xleftrightarrow{Z} H(z) H_{inv}(z)$ با استفاده از تبدیل Z کمی حل را راحت تر برای خود می کنیم.

$\rightarrow H(z) H_{inv}(z) = 1 \Rightarrow H_{inv}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{Z[(\frac{1}{3})^n u[n]]} = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$

$\xrightarrow{Z^{-1}} h_{inv}[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]$

مسئله 4.

$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI System \# 1}} \xrightarrow{w[n]} \boxed{\text{LTI System \# 2}} \longrightarrow y[n]$

$S_1: w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$

$S_2: y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$

$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$

$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n] \xrightarrow{Z} W(z) = \frac{1}{2}z^{-1}W(z) + X(z)$

$\rightarrow H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$,

$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n] \xrightarrow{Z} Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + \beta W(z)$ $\quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$

$\longrightarrow H_2(z) = \frac{\beta}{1-\alpha z^{-1}} \quad , \quad y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$

$\xrightarrow{Z} Y(z) = -\frac{1}{8}z^{-2}Y(z) + \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + X(z) \rightarrow H_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$\Rightarrow H_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \qquad H_3(z) = H_1(z) H_2(z) = \frac{\beta}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$

$\longrightarrow H_3(z) = \frac{\beta}{1 - (\frac{1}{2}+\alpha)z^{-1} + \frac{\alpha}{2}z^{-2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{4}, \ \beta = 1$

مسأله 5. با توجه به زوجیت و حقیقی بودن سیگنال، تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج باید باشد. $(C=0)$ و

$N=10$: پریود، a_k : ضرایب فوریه، $a_{11}=5$

$$\frac{1}{10}\sum_{n=0}|x[n]|^2=50$$

می خواهیم نشان دهیم که $x[n]=A\cos(Bn+C)$

از درس سیگنال ها و سیستم ها معادلات سنتز و آنالیز را برای سیگنال پریودیک با پریود N به خاطر داریم:

$$x[n]=\sum_{k\,\langle N\rangle}a_k e^{j\omega_0 kn}$$ معادله سنتز $$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n\,\langle N\rangle}x[n]e^{-j\omega_0 kn}$$

همچنین از قضیه پارسوال استفاده خواهیم کرد.

$$P_x=\frac{1}{N}\sum_{n\,\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k\,\langle N\rangle}|a_k|^2$$

$$N=10 \rightarrow \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50 \Longrightarrow \sum_{k\,\langle N\rangle}|a_k|^2$$

می دانیم که ضرایب سری فوریه سیگنال نیز با پریود سیگنال، پریودیک هستند بنابراین $a_{k+10}=a_k$، در سیگما هایی که نوشتیم لازم است توجه کنیم که نماد $\langle N\rangle$ به معنی جمع روی N نمونه متوالی صورت بگیرد.

$$\longrightarrow |a_{-5}|^2+|a_{-4}|^2+|a_{-3}|^2+|a_{-2}|^2+|a_{-1}|^2+|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_4|^2=50$$

$$\xrightarrow[a_k=a_{-k}\ :\ \text{زوج}]{a_1=a_{11}=5} |a_0|^2+2|a_1|^2+2|a_2|^2+2|a_3|^2+2|a_4|^2+|a_5|^2=50$$

$$\Rightarrow |a_0|^2+2|a_2|^2+2|a_3|^2+2|a_4|^2+2|a_5|^2=0$$

$$\longrightarrow a_{0\ \text{to}\ 5}=0,$$ معادله سنتز: $$x[n]=\sum_{k\,\langle 10\rangle}a_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$\longrightarrow x[n]=a_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{10}n}+a_1 e^{j\frac{2\pi}{10}n}=a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{5}n}+a_1 e^{j\frac{\pi}{5}n}$$

$$=5\left(e^{-j\frac{\pi}{5}n}+e^{j\frac{\pi}{5}n}\right)=10\cos\left[\frac{n\pi}{5}\right]=A\cos[Bn+C]$$

$$\longrightarrow A=10,\quad B=\frac{\pi}{5}\quad C=0$$

مسأله 6. $y[n]=je^{j\frac{2\pi}{3}n}$ ، $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-3k]$

$$h[n]\xleftrightarrow{DTFT}H(e^{j\omega})$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}(h[n])e^{j\frac{2\pi}{3}n}=?$$

$$x[n]\xrightarrow{DTFT}X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{3}\right)$$

$$y[n]=je^{j\frac{2\pi}{3}n}$$ می دانیم: $$e^{j\omega_0 n}\xleftrightarrow{DTFT}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

$$\longrightarrow e^{j\frac{2\pi}{3}n}\xleftrightarrow{DTFT}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)\longrightarrow Y(e^{j\omega})=j2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)$$

می دانیم: $$\mathrm{Im}(x[n])=\frac{1}{2j}(x[n]-x^*[n])\longrightarrow \mathrm{Im}(h[n])=\frac{h[n]-h^*[n]}{2j}$$

همچنین تعاریف تبدیل ورودی را نیز مشخص می کنیم:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

7	تاریخ تحویل: 00/12/26	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری اول	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{j3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}-2\pi k)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{3})} , \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} Im(h[n]) e^{j\frac{2\pi n}{3}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h(n)}{2j}e^{\frac{j2\pi n}{3}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h^*[n]}{2j}e^{j\frac{2\pi n}{3}} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h[n]}{2j}e^{\frac{j2\pi n}{3}} = \frac{H(e^{j\omega})}{2j}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{3}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h^*[n]}{2j}e^{\frac{j2\pi n}{3}} = \frac{1}{2j}H^*(e^{-j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{2\pi}{3}} \qquad H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{3}} = j3$$

$$H^*(e^{-j\omega})\Big|_{\omega=-\frac{2\pi}{3}} = -j3 \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} Im(h[n])e^{\frac{j2\pi n}{3}} = \frac{j3}{2j} + \frac{j3}{2j} = 3$$

سوال 7.

a) $x[n] = \delta[n] + (\frac{1}{5})^{n-1}u[n] - 3(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

$$\longrightarrow x[n] = \delta[n] + 5(\frac{1}{5})^n u[n] - 3(\frac{1}{2})^n u[-n-1] \xrightarrow{\;Z\;}$$

$$X(z) = \underbrace{1}_{\substack{ROC = all\\ z\text{-plane}}} + \underbrace{\frac{5}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}}_{ROC: |z|>\frac{1}{5}} + \underbrace{\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{ROC: |z|<\frac{1}{2}} \longrightarrow ROC: \frac{1}{5}<|z|<\frac{1}{2}$$

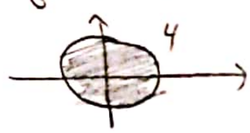
b) $x[n] = (2)^{1-n}u[n] - (5)^{-1-n}u[-n-1] \longrightarrow x[n] = 2(\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^n u[-n-1]$

$$\xrightarrow{\;Z\;} X(z) = \underbrace{\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{ROC: |z|>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}}_{ROC: |z|<\frac{1}{5}} \longrightarrow ROC: \emptyset \longrightarrow$$ تبدیل Z ندارد.

c) $x[n] = 4^n\cos[\frac{n\pi}{3}]u[-n-1]$ می‌دانیم: $a^n\cos[\omega_0 n]u[-n-1] \xleftarrow{\;Z\;}$

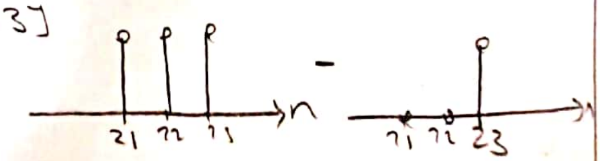
$$\frac{-1+az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}} \quad ROC: |z|<|a| \longrightarrow X(z) = \frac{-1+4z^{-1}\cos(\frac{\pi}{3})}{1-8z^{-1}\cos(\frac{\pi}{3})+16z^{-2}}$$

$$\longrightarrow X(z) = \frac{-1+2z^{-1}}{1-4z^{-1}+16z^{-2}} \qquad ROC: |z|<4$$



d) $x[n] = 2^n n^2 u[n-21] - 2^n n^2 u[n-23]$

$$\longrightarrow x[n] = 2^n n^2 (u[n-21] - u[n-23])$$



$$\longrightarrow x[n] = 2^n n^2(\delta[n-21]+\delta[n-22]) = 2^n n^2\delta[n-21] + 2^n n^2\delta[n-22]$$

$$\xrightarrow[\text{property}]{\text{sifting}} 2^{21}\times 21^2\,\delta(n-21) + 2^{22}\times 22^2\,\delta[n-22]$$ حال به سادگی می‌توان تبدیل Z گرفت.

$$\longrightarrow X(z) = 2^{21}\times 21^2 z^{-21} + 2^{22}\times 22^2 z^{-22} \qquad ROC: \text{All z-plane except } 0$$

Scanned by CamScanner

e) $x[n] = |n| \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ می‌دانیم: $|n|(a)^{|n|} = n a^n u[n] - n a^{-n} u[-n]$

$\longrightarrow x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n]$ می‌دانیم: $\begin{cases} n a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2} & \text{Roc: } |z|>|a| \\ x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^{-1}) & \text{Roc: } \frac{1}{R_x} \end{cases}$

$\longrightarrow X(z) = \underbrace{\frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}}_{\text{Roc: } |z|>1/2} + \underbrace{\frac{2z}{(1-2z)^2}}_{\text{Roc: } |z|<2}$ Roc: $1/2 < |z| < 2$

f) $y[n] = x_1[n+3] + x_2[-n+3] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} u[n+3] + \left(\frac{1}{3}\right)^{3-n} u[3-n]$

$Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$, تک به تک به محاسبه تبدیل Z ها می‌پردازیم.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} u[n+3] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z) = \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ Roc: $|z| > \frac{1}{2}$

توجه: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z)$ Roc: same as before

می‌دانیم: $\begin{cases} x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^{-1}) \\ x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z) \end{cases} \xrightarrow{\text{Combined}} z^{n_0} X(z^{-1})$

$\longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3-n} u[3-n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z) = \frac{z^{-3}}{1-1/3\, z}$ Roc: $|z| < 3$

$\longrightarrow Y(z) = \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1-1/3\, z}$ Roc: $\frac{1}{2} < |z| < 3$

سوال 8.

a) $\ln(1+2z^{-1})$ Roc: $|z|>2$

برای حل این قسمت سری تیلور توابع داده شده را می‌نویسیم.

می‌دانیم: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \longrightarrow \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$

$\longrightarrow \ln(1+2z^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1)^{n+1} z^{-n}}{n} = 2z^{-1} - 2z^{-2} + 8/3\, z^{-3} + \dots$

حال دستور کار ما بهتر می‌شود

تعریف تبدیل Z: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ $\quad z \triangleq re^{j\omega}$

$\longrightarrow X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1)^{n+1}}{n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \longrightarrow x[n] = \frac{2^n (-1)^{n+1}}{n} u[n-1]$

b) $X(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-3})^2}$ $x[n]$: ؟

با توجه به این که $x(n)$ سمت راستی است Roc بین را داده و به فرم $|z|>\frac{1}{2}$ Roc: است. مشاهده می‌کنیم که در تبدیل Z در صورت آن z^{-3} داریم پس احتمال تغییر مقیاس زمانی را داریم.

می‌دانیم: $x_L[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & \frac{n}{L} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \frac{n}{L} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^L)$

$L = 3 \longrightarrow x[n] = x_3[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = X_{(3)}(z^3)$

پس به دنبال سیگنالی می‌گردیم که تبدیل Z آن $\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$ باشد. در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها آموختیم که:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(1-p_i z^{-1})^m}\right] = \begin{cases} \frac{(n+1)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!} p_i^n u[n] & |z|>|p_i| \\ -\frac{(n+1)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!} p_i^n u[-n-1] & |z|<p_i \end{cases}$$

حال مبنا سیگنال را راحت درست داریم:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\right] = (-\tfrac{1}{2})^n (n+1)\, u[n]$$

$$\rightarrow x[n] = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}} (\frac{n}{3}+1)\, u[n] & \frac{n}{3} \in \mathbb{Z} \\ 0 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

c) $X(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{z^{-1}(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+3z^{-1})}$ ROC: $3 < |z| < \infty$

بهترین روش برای حل، استفاده از تکنیک تجزیه کسر است.

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+3z^{-1})} = \frac{A_1}{z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{A_3}{1+3z^{-1}}$$

$$\rightarrow A_1(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})(1+3z^{-1}) + A_2(z^{-1}(1+3z^{-1})) + A_3(z^{-1}(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})) = 1-z^{-1}$$

$z \rightarrow \infty \rightarrow A_1 = 1$, $z = \frac{1}{3} \rightarrow A_2(3\times 10) = -2 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{15}$

$z = -3 \rightarrow A_3(-\frac{1}{3})(\frac{10}{9}) = \frac{4}{3} \rightarrow -\frac{10A_3}{27} = \frac{4}{3} \Rightarrow A_3 = -\frac{18}{5}$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{z^{-1}} - \frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{\frac{18}{5}}{1+3z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}}$$

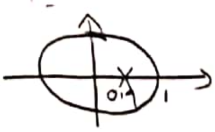
$$x[n] = \delta[n+1] - (\tfrac{1}{15})(\tfrac{1}{3})^n u[n] - (\tfrac{18}{5})(-3)^n u[n]$$

مسئله ۹.

$$S_1:\ y_1[n] = 0.9\,y_1[n-1] + 0.1\,x_1[n] \xrightarrow{Z} Y_1(z) = 0.9 z^{-1} Y_1(z) + 0.1 X_1(z)$$

$$\rightarrow H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{0.1}{1-0.9z^{-1}} \longrightarrow$$ قطب‌ها: $1-0.9z^{-1}=0 \rightarrow z=0.9$

پس قطب در 0.9 است،

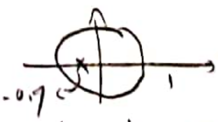


مطابق آنچه آموختیم چنین دیاگرامی برای صفحه Z معرف یک فیلتر پایین‌گذر است. در واقع قطب $z=0.9$ باعث تقویت فرکانس‌های کم می‌شود.

$$S_2:\ y_1[n] = -0.9\,y_1[n-1] + 0.1\,x_2[n] \xrightarrow{Z} Y_2(z) = -0.9 z^{-1} Y_2(z) + 0.1 X_2(z)$$

$$\rightarrow H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X_2(z)} = \frac{0.1}{1+0.9z^{-1}} \longrightarrow$$ قطب‌ها: $1+0.9z^{-1}=0 \rightarrow z=-0.9$

پس قطب در -0.9 است.



مطابق آنچه آموختیم چنین دیاگرامی برای صفحه Z معرف فیلتر بالاگذر است. در واقع قطب $z=-0.9$ باعث تقویت فرکانس‌های بالا می‌شود.

توجه: نکات مورد استفاده در این سوال در جلسه رفع اشکال توسط استاد تأیید شد.

مسئله ۱۰:

$H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\quad x[n]=\begin{cases}3 & n\geq 0\\ 2 & n<0\end{cases} \rightarrow x[n]=3u[n]+2u[-n-1]$

or $x[n]=u[n]+2$

ROC: $|z|<\frac{1}{2}$

با توجه به اینکه بیان شده سیستم تحقق‌پذیر باشد پس خواهیم داشت:

داخل دایره به شعاع $\frac{1}{2}$

$X(z)=\underbrace{\dfrac{3}{1-z^{-1}}}_{ROC:\ |z|>1}-\underbrace{\dfrac{2}{1-z^{-1}}}_{ROC:\ |z|<1}$ $\quad$ ROC: $\varnothing$

عملاً سیگنال $x(n)$ به فرم z نمی‌توانیم نوشت

پس آن را باید با کانولوشن حل کنیم $h(n)=-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[n-k]x[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-(\tfrac{1}{2})^{n-k}u[-n+k-1]\right)\left(u[k]+2\right)$

$\Rightarrow y[n]=-(\frac{1}{2})^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{(\tfrac{1}{2})^{-k-1}}_{2^{k+1}}u[-n+k-1]-(\frac{1}{2})^n\sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot u[-n+k-1]$

$y(n)$ واگرا می‌شود. پس پاسخ سیستم به ورودی داده شده ∞ خواهد شد که بی‌کران است.

مسئله ۱۱.

$x[n]=3^n u[n-1]$, $\quad y[1]=-1,\quad y[2]=1,\quad h[1]=?$

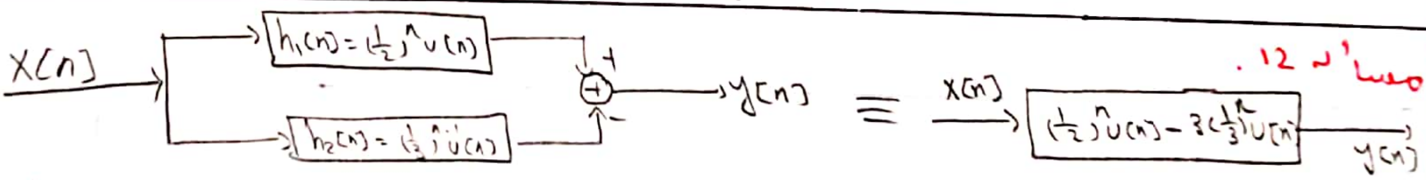
$Y(z)=X(z)H(z)$ $\quad x[n]=3\times(3)^{n-1}u[n-1]$ $\quad$ می‌دانیم $\quad x(n-n_0)\xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z)$

$\rightarrow X(z)=\dfrac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}$ $\quad |z|>3$, $\quad H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-3z^{-1}}{3z^{-1}}Y(z)$

$\rightarrow H(z)=Y(z)\dfrac{z}{3}-Y(z)\xrightarrow{Z^{-1}}h[n]=\frac{1}{3}y[n+1]-y[n]$

$h[1]=\frac{1}{3}y[2]-y[1]=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

مسئله ۱۲.



$\xrightarrow{Z} Y(z)=H(z)X(z)$, $\quad H(z)=Z\left((\tfrac{1}{2})^n u[n]-3(\tfrac{1}{3})^n u[n]\right)$

$\rightarrow H(z)=\underbrace{\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{ROC:\ |z|>1/2}-\underbrace{\dfrac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{ROC:\ |z|>1/3}$ $\quad$ ROC: $|z|>1/3$

$x[n]=u[n]=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad$ ROC: $|z|>1$ $\quad Y(z)=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}-\dfrac{3}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})}$

$=\dfrac{A_1}{1-z^{-1}}+\dfrac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{A_3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\rightarrow A_1(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})+A_2(1-z^{-1})(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})$

$+A_3(1-z^{-1})(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})=(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})-3(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})$ $\quad z=1\rightarrow A_1=-\frac{5}{2}$, $\quad z=\frac{1}{2}\rightarrow A_2=-1$

$z=\frac{1}{3}\rightarrow A_3=\frac{3}{2}$, $\quad Y(z)=\dfrac{-\frac{5}{2}}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\xrightarrow{Z^{-1}}$

$y[n]=-\frac{5}{2}u[n]-(\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{3}{2}(\frac{1}{3})^n u[n]$