1	تاریخ تحویل: ۰۱/۲/۱	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال تمرین سری سوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله ۱: الف) برای به دست آوردن $H_{min}(z)$ کافی است با $H(z) = \dfrac{1+z^{-1}-6z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$

قطب های $H(z)$ نداریم. نیازی نیست به صورت دست بزنیم. صرفا باید کاری کنیم صفرهای بیرون دایره واحد به داخل بیایند. برای این منظور به قضیه زیر توجه می‌کنیم.

We can form a min-phase system from a non min-phase system by reflecting all the zeros lying outside the unit circle to their conjugate reciprocal locations inside.

$(1+z^{-1}-6z^{-2}) = (1+3z^{-1})(1-2z^{-1})$ اعمال قضیه

$6(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}) = -z^{-2}-z^{-1}+6$, $H_{min}(z) = \dfrac{6-z^{-1}-z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$

مشخصا $|H_{min}(z)| = |H(z)|$.

ب) سیستم اگر بخواهد مینیمم فاز باشد باید همگی صفر، قطب‌های آن داخل دایره یک باشد.

$H(z) = \dfrac{1+z^{-1}-6z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \dfrac{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$ → صفرها: $z=-3$, $z=2$

قطب ها: $z=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{4}$

چون صفرها داخل دایره یک نیستند پس سیستم فاز نیست، پس $H(z)$ یک سیستم فاز است.

ج) سیستم ما سیستم فاز دارای صفرهای خارج از دایره یک است.

مسئله ۳.

$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + 2^n u[-n-1]$ $\quad y[n] = 6(\frac{1}{2})^n u[n] + 6(\frac{3}{4})^n u[n]$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$. $\quad H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \dfrac{1}{1-2z^{-1}}$ $\quad$ ROC: $\frac{1}{2} < |z| < 2$. $\quad X(z) = \dfrac{-1.5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$

$Y(z) = \dfrac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{6}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$ $\quad$ ROC: $|z| > \frac{3}{4}$. $\quad Y(z) = \dfrac{6(2-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}$

$\rightarrow H(z) = \dfrac{\dfrac{6(2-\frac{5}{4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}}{\dfrac{-1.5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}}$ $\longrightarrow H(z) = \dfrac{-4(2-\frac{5}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})\,z^{-1}}$

ROC: $\frac{3}{4} < |z| < 2$

$\rightarrow H(z) = \dfrac{-10z^{-2}+21z^{-1}-8}{-\frac{3}{4}z^{-2}+z^{-1}}$ $\longrightarrow H(z) = \dfrac{-40z^{-2}+84z^{-1}-32}{-3z^{-2}+4z^{-1}}$ $\quad \frac{3}{4} < |z| < 2$

ب) ما توجه داریم که ROC تابع تبدیل شامل دایره واحد است سیستم پایدار است. اما سیستم نمی تواند علّی باشد زیرا ROC آن حلقه است و راست دستی نیست.

پ) $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{-40z^{-2}+84z^{-1}-32}{-3z^{-2}+4z^{-1}}\rightarrow Y(z)(-3z^{-2}+4z^{-1})$

$=X(z)(-40z^{-2}+84z^{-1}-32)\rightarrow -3y[n-2]+4y[n-1]=-40x[n-2]$

$+84x[n-1]-32x[n]$

پرسش ۴.

الف) $H(z)=\frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)}\rightarrow Y(z)(1-az^{-1})=X(z)(1-a^{-1}z^{-1})$

$\rightarrow y[n]-a\,y[n-1]=x[n]-\frac{1}{a}x[n-1]$

ب) $H(z)=\frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}$ ROC: $|z|>a$ برای پایداری باید ROC شامل دایره واحد باشد.

پس با توجه به ROC تابع تبدیل باید $|a|<1$ باشد.

ج) $a=2\rightarrow H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}$

$|z|>1/2$

د) $H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}$ ROC: $|z|>a$

می‌دانیم: $x[n-n_0]\xleftrightarrow{Z}z^{-n_0}X(z)\rightarrow h[n]=Z^{-1}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right]$

$-a^{-1}Z^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}\right]\rightarrow h[n]=a^{n}u[n]-\frac{1}{a}(a^{n-1}u[n-1])$

$\rightarrow h[n]=a^{n}u[n]-a^{n-2}u[n-1]$

ذ) می‌دانیم یک فیلتر تمام گذر پاسخ فرکانسی با اندازه ثابت دارد. $|H(e^{j\omega})|=1$ همچنین می‌دانیم ترکیب یک فیلتر تمام گذر مرتبه یک به صورت $H(z)=\frac{z^{-1}-\alpha^*}{1-\alpha z^{-1}}$ است که با $H(z)$ در این مسئله تفاوت دارد. حال ثابت اندازه را می‌خواهیم.

$H(z)=\frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}\xrightarrow{z=e^{j\omega}}H(e^{j\omega})=\frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$

$=\frac{1-a^{-1}\cos\omega+a^{-1}j\sin\omega}{1-a\cos\omega+aj\sin\omega}\rightarrow|H(e^{j\omega})|=\frac{\sqrt{(1-a^{-1}\cos\omega)^2+a^{-2}\sin^2\omega}}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2+a^2\sin^2\omega}}$

$\rightarrow|H(e^{j\omega})|=\sqrt{\frac{1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}}=\sqrt{\frac{1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega}{a^2(1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega)}}\rightarrow|H(e^{j\omega})|=1/a$

مسئله 5. الف) سیستم پایدار است یعنی ROC شامل دایره واحد است، همچنین می‌دانیم ROC سیستم دوطرفه است.

$$H(z)=\frac{21}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}$$

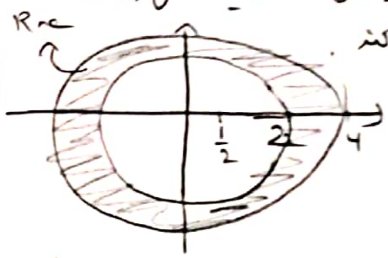
$$=\frac{A}{(1-0.5z^{-1})}+\frac{B}{(1-2z^{-1})}+\frac{C}{(1-4z^{-1})}\rightarrow A(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})+B(1-0.5z^{-1})(1-4z^{-1})$$

$$+C(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})=21,\quad \begin{cases} z=1/2\rightarrow 21A=21\rightarrow A=1\\ z=2\rightarrow B(3/4)(-1)=21\rightarrow B=-28\\ z=4\rightarrow C(7/8)(1/2)=21\rightarrow C=48\end{cases}$$

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}-\frac{28}{(1-2z^{-1})}+\frac{48}{(1-4z^{-1})}\qquad \text{ROC: } 2<|z|<4$$

که تنها حالتی که شرایط سوال را ارضا می‌کند

$$\rightarrow h[n]=(1/2)^n u[n]-28(2^n)u[n]-48(4^n)u[-n-1]$$



ب) با توجه به پاسخ ضربه‌ای که حساب کردیم. به سادگی می‌توان آن را به دو بخش علی و غیرعلی تقسیم نمود یعنی:

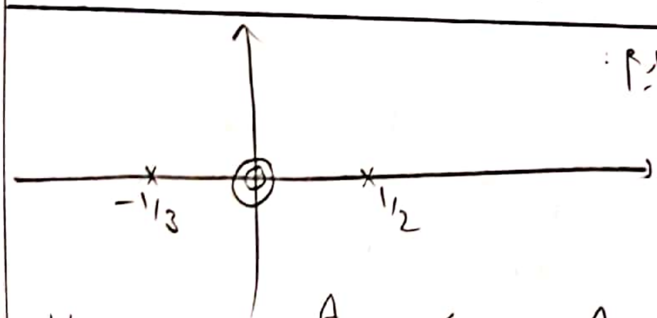
$$h[n]=\underbrace{(\tfrac{1}{2})^n u[n]-28(2)^n u[n]}_{h_1[n]}\ \underbrace{-48(4^n)u[-n-1]}_{h_2[n]}$$

با توجه به راست دست بودن ROC تبدیل Z آن علی است. (u[n] خودش نشان علیت است) با توجه به وجود u[-n-1] همچنین ROC تبدیل Z آن غیرعلی است.

$$H_1(z)=Z[h_1[n]]=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}-\frac{28}{1-2z^{-1}}$$

$$H_2(z)=Z[h_2[n]]=\frac{48}{(1-4z^{-1})}$$

مسئله 6. ابتدا به دنبال H(z) می‌رویم. چون سیستم علی است داریم:



$$H(z)=\frac{Az^2}{(z-1/2)(z+1/3)}\qquad |z|>1/2$$

$$H(1)=6\rightarrow \frac{A}{1/2\times 4/3}=6\rightarrow A=4\rightarrow H(z)=\frac{4z^2}{(z-1/2)(z+1/3)}$$

صورت و مخرج ضرب در z^{-2}

$$H(z)=\frac{4}{(1-1/2z^{-1})(1+1/3z^{-1})}\qquad \text{Roc: } |z|>1/2,\quad H(e^{j\omega})=\frac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$x(t)=2+3\cos(20\pi t)+4\cos(40\pi t)\qquad \Omega_s=80\pi\rightarrow f_s=40,\ T=\frac{1}{40}$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری سوم	تاریخ تحویل: 01 / 2 /	4

حال سیگنال نمونه برداری می شود. می دانیم:
$x[n] = x_c(nT) = x_c\left(\frac{n}{4\omega}\right)$

$\rightarrow x[n] = 2 + 3\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] + 4\cos[n\pi] = 2 + \frac{3}{2}e^{\frac{jn\pi}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{jn\pi}{2}} + 2e^{jn\pi} + 2e^{-jn\pi}$

قضیه: می دانیم اگر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ با ورودی $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ تحریک شود، خروجی به صورت $y[n] = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega n})\Big|_{\omega=\omega_0}$ خواهد بود. پس می توانیم بنویسیم:

$H(e^{j\omega}) = \dfrac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$ $\quad H(e^{j0}) = 6,\quad H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})(1+\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}})}$

$\rightarrow H(e^{j\pi/2}) = \dfrac{4}{(1+j\frac{1}{2})(1-j\frac{1}{3})} = 3.36 - j0.48$

$H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}})(1+\frac{1}{3}e^{j\pi/2})} = 3.36 + j0.48 \qquad H(e^{j\pi}) = 4$

$H(e^{-j\pi}) = 4 \rightarrow y[n] = 12 + \frac{3}{2}(3.36 - j0.48)e^{\frac{jn\pi}{2}} + \frac{3}{2}(3.36 + j0.48)e^{-\frac{jn\pi}{2}}$
$+ 8e^{jn\pi} + 8e^{-jn\pi} \rightarrow y[n] = 12 + 5.04\left(e^{\frac{jn\pi}{2}} + e^{-\frac{jn\pi}{2}}\right) + j0.72\left(e^{-\frac{jn\pi}{2}} - e^{\frac{jn\pi}{2}}\right)$
$+ 8\left(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}\right) \rightarrow y[n] = 12 + 10.08\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] + 1.44\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] + 16\cos[n\pi]$

مسأله 2. طبق صورت سوال ROC شامل دایره یکه است.

$H(z) = \dfrac{(1-0.75z^{-1})(1-2z^{-1})}{z^{-1}(1-0.5z^{-1})}$

می خواهیم عبارت $H(z) = H_{min}(z)\, H_{ap}(z)$ را برای $H(z)$ داده شده، بیابیم. ابتدا صفر و قطب های $H(z)$ را بدست می آوریم.

صفرها: $z = 3/4,\ z = 2$

قطب ها: $z = \infty,\ z = 0.5$

سیستم مینیمم فاز دارای صفر و قطب داخل دایره یکه است. پس می توانیم بنویسیم:

$H(z) = (1-0.75z^{-1}) \dfrac{(1-2z^{-1})}{z^{-1}.(1-0.5z^{-1})}$

قسمت اول را بخش مینیمم فاز و قسمت دوم را بخش تمام گذر در نظر می گیریم.

$H_{min}(z) = (1-0.75z^{-1}) \qquad H_{ap}(z) = \dfrac{(1-2z^{-1})}{z^{-1}(1-0.5z^{-1})}$

دقت شود که برای رعایت فرمت عبارت تمام گذر ناگزیر به قرار دادن $(1-0.5z^{-1})$ در مخرج $(1-2z^{-1})$ بودیم. می توانیم مثلاً بیاییم و به H_{min} به تعداد دلخواه صفر و قطب در مبدأ اضافه کنیم و به همان تعداد قطب یا صفر در مبدأ در H_{ap} قرار دهیم. اما این کار، آنچنان منطقی نیست و چون در حل این سوال فرض یکتایی را در نظر می گیریم پاسخ یکتا خواهد بود.