1	تاریخ تحویل: ۴ / ۱ / ۲۰	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله ۱ . الف)

$X_c(t)$. $B.W = 15\,KHz$ $\longrightarrow$ $X_c(j\Omega)$ $|\Omega| \leqslant 2\pi \times 15000$

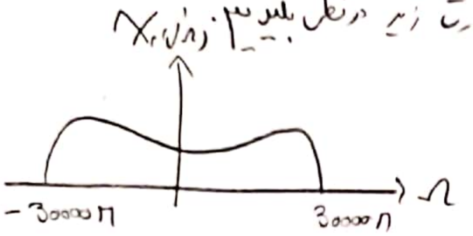
می خواهیم که فرکانس های بالای 10KHz حذف شوند . اگر $X_c(j\Omega)$ را به صورت زیر در نظر بگیریم $X_c(j\Omega)$

و پس از سیگنال حذف شده ، مشتق بگیریم.

$x[n] = X_c(nT)$

پردازش با $H(e^{j\omega})$

(T زمان) $\boxed{D/C}$



$X_c(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sampling}} \xrightarrow{X_c(nT)} \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow \boxed{D/C} \longrightarrow$ Back to Analog

(T_s به D/C)

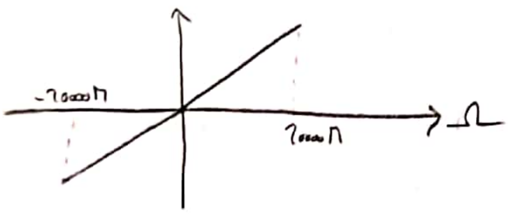
$\Omega_1 = 30000\pi \xrightarrow{\text{Sampling}} \omega = 30000\pi T \xrightarrow{T_{Max}} \frac{2\pi}{T} - 2\pi \times 15000 = 2\pi \times 10000$

$\longrightarrow 25000\,T = 1 \longrightarrow T_{Max} = \frac{1}{25000} \frac{\text{Sym}}{\text{Sec}}$

$T = 40000 \frac{\text{Sym}}{\text{Sec}}$,

ب) می خواهیم $H(e^{j\omega})$, $h[n]$ را بیابیم.

می دانیم که مشتق گیر مرجع به صورت زیر دارد :



$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega & |\Omega| \leqslant 20000\pi \\ 0 & \text{O.W} \end{cases} \xrightarrow[\Omega = \omega/T]{\text{بدین گونه}}$$

$$\longrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\frac{\omega}{T} & |\frac{\omega}{T}| \leqslant 20000\pi \\ 0 & 20000\pi \leqslant |\frac{\omega}{T}| \leqslant \frac{\pi}{T} \end{cases} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j40000\omega & |\omega| \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

متناوب با دوره 2π

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} j40000\omega\, e^{j\omega n} d\omega = \frac{j20000}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega e^{j\omega n}$$

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{j20000}{\pi}\left(\frac{-j\omega e^{j\omega n}}{n} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{je^{j\omega n}}{n} d\omega\right) \xrightarrow{\text{محاسبات}} h[n] = \frac{20000}{n}\left(\frac{e^{\frac{jn\pi}{2}} + e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{2}\right)$$

$$+ \frac{40000}{\pi n^2}\left(\frac{-e^{+\frac{jn\pi}{2}} + e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{2j}\right) \longrightarrow h[n] = \frac{2\times10^4 \cos(\frac{n\pi}{2})}{n} - \frac{4\times10^4 \sin(\frac{n\pi}{2})}{\pi n^2}$$

مسئله 2 . الف) مشخصا بلوک‌ها خطی هستند. منطقا سری آن‌ها

$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \xrightarrow{x_1[n]} \boxed{H(e^{j\omega})} \xrightarrow{x_2[n]} \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow y[n]$

وصل کردن آن‌ها نیز خطی خواهد بود.

ب) با توجه به خطی بودن سیستم، اگر اثبات کنیم که سیستم LTI است، کار تمام خواهد بود. به سیستم $x[n] = \delta[n]$ می دهیم.

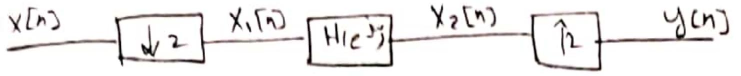
$x[n] = \delta[n] \longrightarrow x_1[n] = \delta[\frac{n}{2}] \xrightarrow{\delta[\frac{n}{2}] = \delta[n]} x_1[n] = \delta[n]$

$x_2[n] = x_1[n] * h[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$, $y[n] = x_2[2n] = h[2n]$

$x[n] \longrightarrow x[n-n_0] \longrightarrow x[n] = \delta[n-n_0]$, $x_1[n] = \delta[n-2n_0]$, $x_2[n] = h[n-2n_0]$

$\longrightarrow y[n] = x_2[2n] = h[2n-2n_0]$, $y[n] \longrightarrow y[n-n_0] = h[2n-2n_0]$ ✓ LTI

Scanned by CamScanner



ج) با استدلال مشابه به بخش قبل چون بدون صفرها خطی اند باز هم سیستم خطی است.

د) وجود مانند شیفت سیستم را بررسی می‌کنیم

$x[n]=\delta[n]\ ,\ x_1[n]=x[2n]=\delta[2n]=\delta[n]$

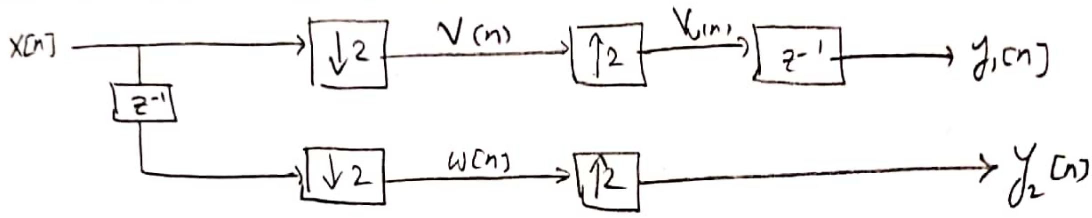
$x_2[n]=x_1[n]*h[n]=\delta[n]*h[n]=h[n]$

$y[n]=x_2[\frac{n}{2}],\quad y[n]=h[\frac{n}{2}]\quad n=2k$

$x[n]\rightarrow x[n-n_0]\rightarrow x_1[n]=x[n-\frac{n_0}{2}]\xrightarrow{if\ n_0=2k+1} x_1[n]=0\rightarrow y_2[n]=0\rightarrow y[n]=0$

$0\neq y[n-n_0]$. TV است.

مسئله 8.



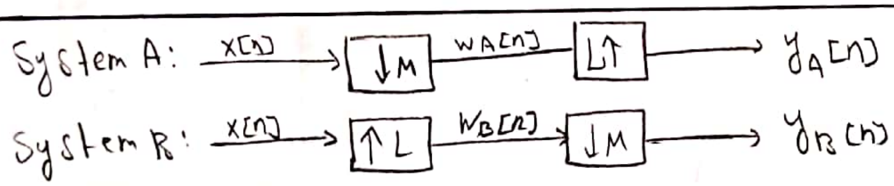
$V[n]=x[2n]$ می‌دانیم $x[nM]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{\frac{-j2\pi k}{M}}z^{\frac{1}{M}})$ $ROC: R_x^M$

$M=2\rightarrow x[2n]\xrightarrow{Z} V(z)=\frac{X(\sqrt{z})+X(-\sqrt{z})}{2}$ $\quad V_u[n]=V[\frac{n}{2}]\quad n=2k$

می‌دانیم: $x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[\frac{n}{k}] & \frac{n}{k}\in\mathbb{Z}\\ 0 & o.w\end{cases}\xleftrightarrow{Z}X(z^k)$, $V_u[n]\xleftrightarrow{Z}V(z^2)$

$=\frac{(X(z)+X(-z))}{2}$, $Y_1(z)=z^{-1}V_u(z)=\frac{z^{-1}(X(z)+X(-z))}{2}$

مسئله 10.



بررسی سیستم A : $w_A[n]=x[nM]$, $y_A[n]=w_A[\frac{n}{L}]\rightarrow y_A[n]=\begin{cases}x[\frac{nM}{L}] & n=Lk\\ 0 & o.w\end{cases}$

$\xrightarrow[M=2]{L=3} y_A[n]=\begin{cases}x[\frac{2n}{3}] & n=3k\\ 0 & o.w\end{cases}$

بررسی سیستم B : $w_B[n]=x[\frac{n}{L}]$, $y_B[n]=w_B[nM]\longrightarrow y_B[n]=\begin{cases}x[\frac{nM}{L}] & n=Lk\\ 0 & o.w\end{cases}$

$\xrightarrow[M=2]{L=3} y_B[n]=\begin{cases}x[\frac{2n}{3}] & n=3k\\ 0 & o.w\end{cases}$ مشاهده می‌کنیم $y_A[n]=y_B[n]$ پس سیستم ها

یکسان هستند. برای یکسان بودن نمونه ها باید دقت کنیم که هم با شرط بین از $\frac{n}{L}$ هم $\frac{Mn}{L}$ صحیح باشد. حالا فرض کنیم L و M باید نسبت به هم اول باشند، دقت شود که به ازای هر M و L را ایجاد سیستم یکسان نمی‌شوند این موضوع با گذاشتن تبدیل فوریه مشخص می‌شود.

Scanned by CamScanner

مسئله 12

$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$, $h[n]=h_a(nT_s)$, داریم: $H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

$$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}=\frac{s+a}{s^2+2as+(a^2+b^2)}=\frac{s+a}{(s+(a+bj))(s+(a-bj))}$$

$$\to H_a(s)=\frac{A}{s+(a+bj)}+\frac{B}{s+a-bj} \to A(s+(a-bj))+B(s+(a+bj))=s+a$$

$$s=-a-bj \to -2Abj=-bj \to A=\tfrac{1}{2}, \quad s=-a+bj \to 2Bbj=bj \to B=1/2$$

$$\to H_a(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s+(a+bj)}+\frac{1/2}{s+(a-bj)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+(a+bj)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+(a+bj)}\right]\right)$$

$$\to h_a(t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(a+bj)t}u(t)+e^{-(a-bj)t}u(t)\right]=\frac{1}{2}e^{-at}\left[e^{-bjt}+e^{bjt}\right]u(t)=e^{-at}\cos(bt)u(t) \xrightarrow{h[n]=h_a(nT_s)}$$

$$h[n]=e^{-anT_s}\cos(bnT_s)u[nT_s], \quad H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-anT_s}\cos(bnT_s)u[nT_s]e^{-jn\omega}$$

$$\to H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_s}\cos(bnT_s)e^{-jn\omega}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega}\left(e^{(-a+jb)nT_s}+e^{(-a-jb)nT_s}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-aT_s})^n\left(e^{-jn(\omega+bT_s)}+e^{-jn(\omega-bT_s)}\right)$$

همگرایی این سری خود مشروط است
درصورتی که $a>0$ باشد همگرایی خواهیم داشت، درغیر این صورت واگرا می‌شود.

if $a>0 \to H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{(-a-bj)T_s}e^{-j\omega}}+\frac{1}{1-e^{(jb-a)T_s}e^{-j\omega}}\right]$

مسئله 5.

$x(t)\to X(j\Omega)=0, \ \Omega>\Omega_0$. Sampling frequency $=\Omega_s>2\Omega_0$

$$x(t)\to\boxed{C/D}\to x[n] \qquad (T)$$

$x[n]=x(nT)$

درباره انرژی سیگنال ها در حالت پیوسته و گسسته می‌دانیم که:

$$E_{x(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\Omega)|^2d\Omega, \quad E_{x[n]}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

$$E_{x(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\Omega)|^2d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}|X(j\Omega)|^2d\Omega, \quad x[n]=x(nT)\xrightarrow{DTFT}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(j\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right), \quad E_{x[n]}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(e^{j\omega})|^2d\omega \xrightarrow[\text{2π دوره}]{\text{متناوب با}}$$

Scanned by CamScanner

4	تاریخ تحویل: ۲۰ / ۱ / ۱۴۰۱	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال — تکلیف سری ۲	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

می‌دانیم که در پردازش گسسته سیگنال‌های پیوسته با بعدهای به صورت $\Omega = \frac{\omega}{T}$ به ترارات سیگنال داریم:

$$E_{x[n]} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{T^2}\int_{-\pi}^{\pi} |X(j\frac{\omega}{T})|^2 d\omega$$

$$E_{x[n]} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}, \quad \Omega_s \geq 2\Omega_0 \rightarrow E_{x[n]} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{T}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

$$\longrightarrow \underline{E_{x[n]} = \frac{1}{T} E_{x(t)}}$$

سوال ۹. الف)

$$x_1(t) = \frac{\sin(400\pi t)}{\pi t} \rightarrow x_1(t) = 400\,\mathrm{Sinc}(400t)$$

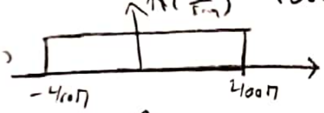
$$x_2(t) = \frac{\sin(600\pi t)}{\pi t} \rightarrow x_2(t) = 600\,\mathrm{Sinc}(600t)$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{300}{\pi}\,\mathrm{Sinc}(400t)\,\mathrm{Sinc}(600t)$$

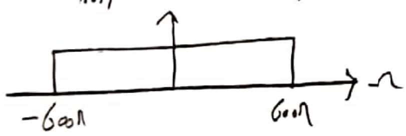
می‌دانیم: $\mathrm{Sinc}(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\,\Pi(\frac{\Omega}{2\pi a}) \rightarrow X(j\Omega) = \frac{300}{\pi}\times\frac{1}{240000\times 2\pi}\left(\Pi(\frac{\Omega}{800\pi}) * \Pi(\frac{\Omega}{1200\pi})\right) \longrightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{1600\pi^2}\left(\Pi(\frac{\Omega}{800\pi}) * \Pi(\frac{\Omega}{1200\pi})\right)$

پهنای باند سیگنال $X(j\Omega)$ را باید به دست آوریم.

$\Pi(\frac{\Omega}{800\pi}) \longrightarrow$



$\Pi(\frac{\Omega}{1200\pi}) \longrightarrow$



می‌دانیم که کانولوشن بازه های سیگنال را پهن می‌کند یعنی داریم:

$$x_1(t) \rightarrow [t_1, t_2], \quad x_2(t) \rightarrow [t_3, t_4] \rightarrow x_1(t) * x_2(t) \rightarrow [t_1+t_3, t_2+t_4]$$

$$\longrightarrow B.W(X(j\Omega)) = 400\pi + 600\pi = 1000\pi \rightarrow \Omega_M = 1000\pi$$

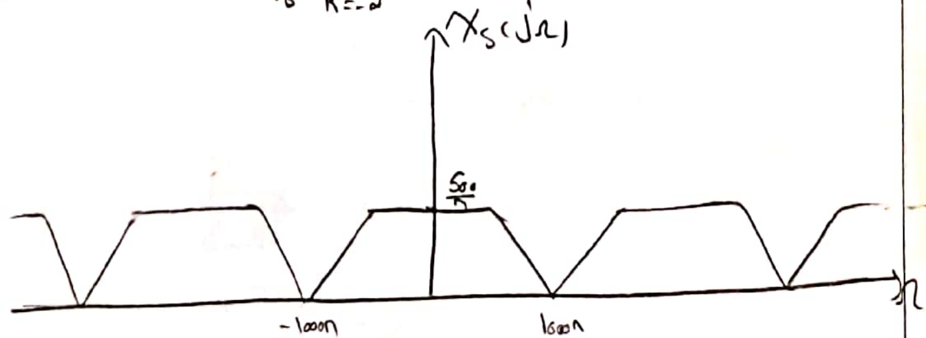
اگر Ω_s را نرخ نایکوییست بنامیم به سادگی داریم $\Omega_s \geq 2\Omega_M \leftarrow \Omega_s \geq 2000\pi$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow T_s = \frac{2\pi}{2000\pi} = \frac{1}{1000}$$

ب) برای رسم $X(j\Omega)$ در حالتی که $\Omega_s = 2000\pi$ داریم:

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT_s)\,\delta(t-kT_s) \rightarrow X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

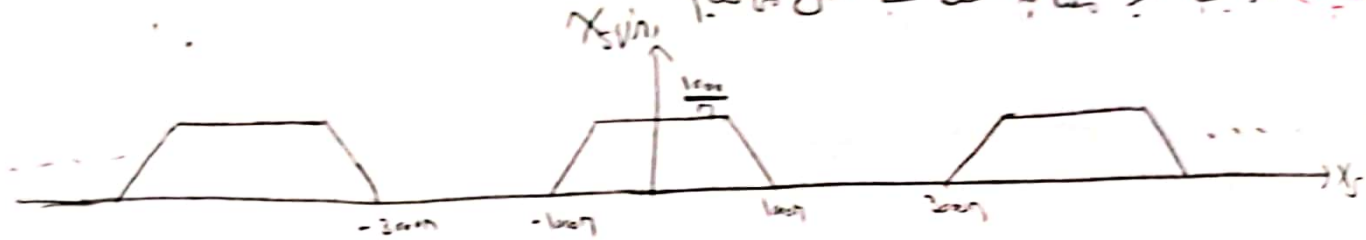
$$X(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -200\pi < \Omega \leq 200\pi \\ \frac{1000\pi-\Omega}{1600\pi^2} & 200\pi \leq \Omega < 1000\pi \\ \frac{1000\pi+\Omega}{1600\pi^2} & -1000 \leq \Omega \leq -200\pi \end{cases}$$



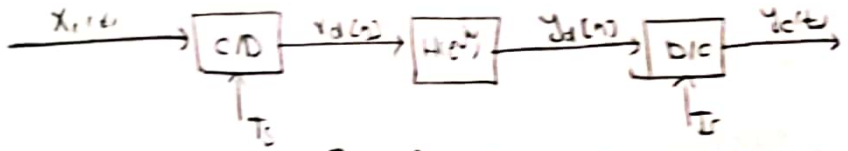
Scanned by CamScanner

5	تاریخ تحویل: 01/1/20	نام درس: پردازش سیگنال های دیجیتال تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ب) در اینجا نیز دقیقاً به شکل مشابه عمل می‌کنیم



مسئله 4، الف)



می‌دانیم که سیگنال $x_c(t)$ باید Band-limited باشد. یعنی داشته باشیم:

$$X_c(j\Omega)=0 \quad \text{for} \quad |\Omega|>\frac{\pi}{T_s}$$

تحت این شرط از پدیده‌ی Aliasing جلوگیری شده است. پس T_s باید به گونه‌ای باشد که شرط بالا رعایت گردد.

$$\Omega_s \geq 2\Omega_c \xrightarrow{\Omega_s=\frac{2\pi}{T_s}} T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_c} \to T_s \leq 2T_c$$

ب) مطابق آنچه در فرمول های خود در درس داریم

$$x_d[n]=x_c(nT) \longrightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_s}-\frac{2\pi k}{T_s}\right)\right)$$

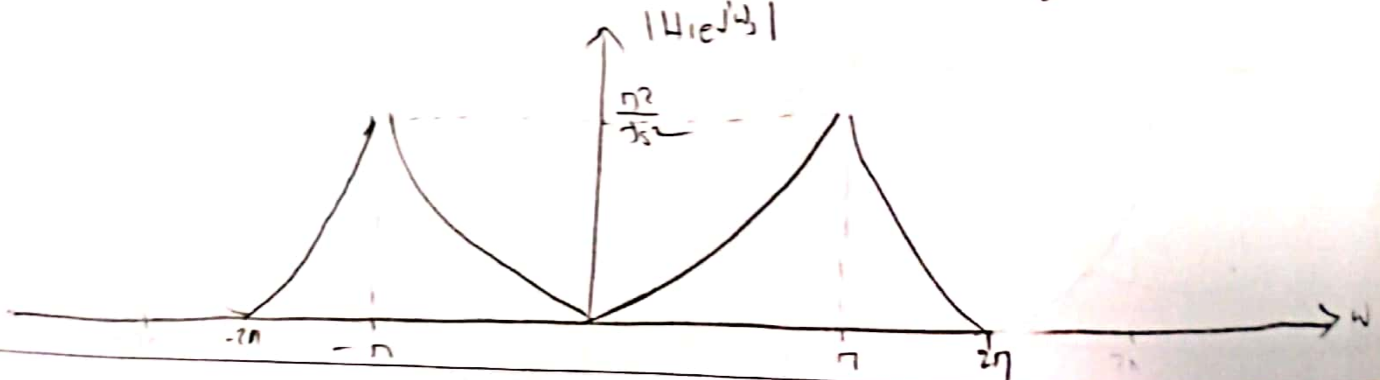
$$Y_d(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{دنبال این هستیم}} \qquad Y_c(j\Omega)=Y_d(e^{j\Omega T_s})H_r(j\Omega)$$

$$\rightarrow Y_c(j\Omega)=\begin{cases} H(e^{j\Omega T_s})\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\Omega-k\Omega_s)) & |\Omega|<\frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\rightarrow Y_c(j\Omega)=\begin{cases} H(e^{j\Omega T_s})X_c(j\Omega) & |\Omega|<\frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$y_c(t)=\frac{d^2}{dt^2}x_c(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_c(j\Omega)=-\Omega^2X_c(j\Omega) \rightarrow H(e^{j\Omega T_s})=-\Omega^2$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{-\omega^2}{T_s^2} \quad \text{متناوب با دوره } 2\pi \qquad |H(e^{j\omega})|=\frac{\omega^2}{T_s^2}$$



Scanned by CamScanner

6	تاریخ تحویل: 01/1/20	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 6.

a) $X(j\Omega)=0$ for $|\Omega|>5000\pi$ $\qquad x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$

$\Omega_M=5000\pi$ $\qquad \Omega_s=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{10^{-4}}=20000\pi$ $\qquad \Omega_s\geq 2\Omega_M$ ✓

پس امکان بازیابی سیگنال وجود دارد

b) $X(j\Omega)=0$ for $|\Omega|>15000\pi$, $\Omega_s=20000\pi$ $\qquad \Omega_s\geq 2\Omega_M$ ✗

پس امکان بازیابی سیگنال وجود ندارد

c) $X(j\Omega)=0$ for $|\Omega|>5000\pi$, $x(t)$ real

$\Omega_s=20000\pi$ $\qquad \Omega_s\geq 2\Omega_M$ ✓

پس امکان بازیابی سیگنال وجود دارد. دقت شود با توجه به حقیقی بودن سیگنال $x(t)$، تبدیل فوریه آن متقارن خواهد بود و برای بازیابی آن داشتن فقط نصف تبدیل فوریه و استفاده از تقارن آن هم ممکن است.

d) $X(j\Omega)*X(j\Omega)=0 \rightarrow$ for $|\Omega|>15000\pi$

در این حالت با توجه به آنچه از کانولوشن می‌دانیم می‌توان استنباط کرد که $X(j\Omega)=0$ برای $|\Omega|>7500\pi$

و $\Omega_s\geq 2\Omega_M$ ✓ پس $X(j\Omega)$ طوری هست که به کمک آن بتوان $x(t)$ را بازیابی کرد.

مسئله 7.

$g[n]=x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$ $\qquad x[n]=X(e^{j\omega})$ متناوب با دوره 2π

اگر بخواهیم مستقیماً از $g[n]$ تبدیل فوریه بگیریم، شکل دچار تداخل می‌شود. شکل شماتیک معادل را برای $g[n]$ رسم می‌کنیم.

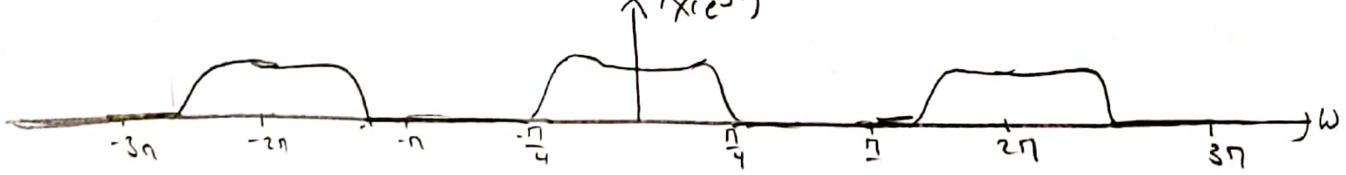
$$x[n]\rightarrow\boxed{4\downarrow}\xrightarrow{w[n]}\boxed{4\uparrow}\rightarrow g[n]$$

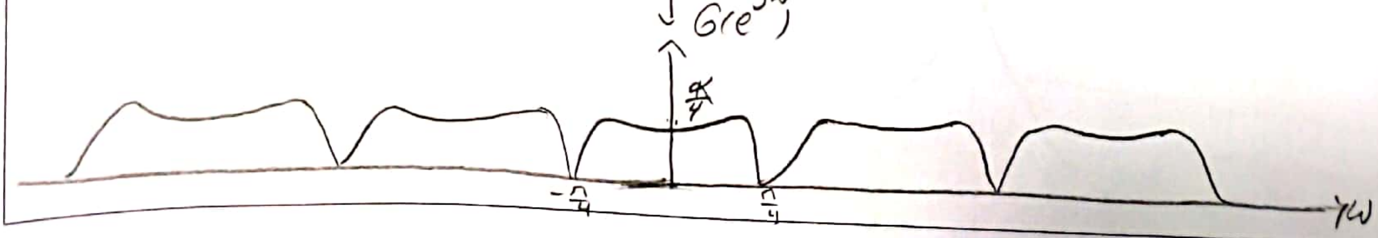
می‌دانیم: $z[n]=x[nM] \xrightarrow{DTFT} Z(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{j(\frac{\omega-2\pi k}{M})})$

$w[n]=x[4n]\rightarrow W(e^{j\omega})=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(e^{j(\frac{\omega-2\pi k}{M})})$ $\qquad G(e^{j\omega})=W(e^{j4\omega})$

$\rightarrow G(e^{j\omega})=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(e^{j(\frac{4\omega+2\pi k}{M})})=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(e^{j(\omega+\frac{\pi k}{2})})$

$\rightarrow G(e^{j\omega})=\frac{1}{4}\left[X(e^{j\omega})+X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})})+X(e^{j(\omega+\pi)})+X(e^{j(\omega+\frac{3\pi}{2})})\right]$





Scanned by CamScanner

7	تاریخ تحویل: 0/11/20	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

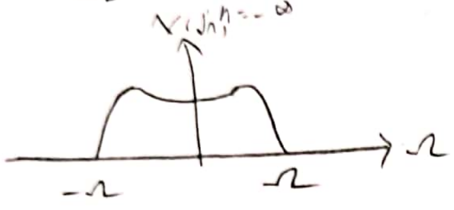
برای بازسازی از یک فیلتر ایده‌آل در حوزه فوریه استفاده کنیم به صورت زیر   پریودیک با دوره ۲π

$$H(e^{j\omega}) = 4\alpha\, \Pi\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) \longrightarrow h[n] = 4\alpha \times \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\, \mathrm{sinc}\left[\frac{\frac{\pi}{4} n}{\pi}\right]$$

$$\longrightarrow h[n] = \alpha\, \mathrm{sinc}\left[\frac{n}{4}\right]$$

مسئله ۸.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, g(t-nT) \qquad X(j\Omega) = 0 \quad \text{for } |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$$



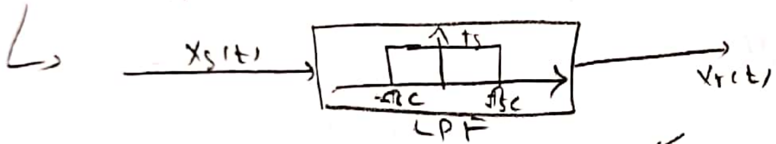
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT) \xrightarrow{\ *\, g(t)\ }$$

$$x_s(t) * g(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,(g(t) * \delta(t-nT)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, g(t-nT)$$

مطابق آنچه در درس آموختیم. با استفاده از $x_s(t)$ رابطه زیر برقرار است. $x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$

که در آن $h_r(t)$ به فرم یک Sinc خواهد بود، با به خطا دقیق‌تر $h_r(t) = T_s \frac{\Omega_c}{\pi}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)$



مشخص است که اینجا $x_r(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ است، پس اگر به حوزه فوریه ببریم داریم:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\Omega\, X(j\Omega) = X_s(j\Omega)\, G(j\Omega)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$j\Omega\, X_s(j\Omega)\, T_s\, \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right) = X_s(j\Omega)\, G(j\Omega)$$

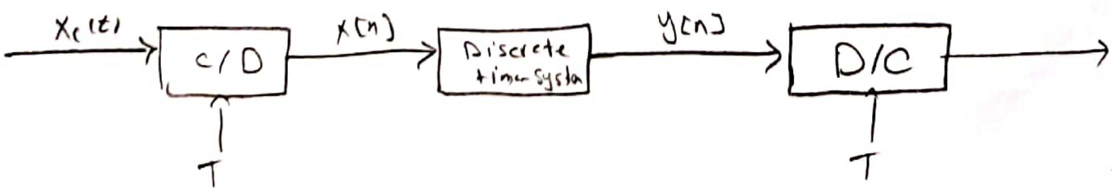
$$\longrightarrow G(j\Omega) = j\Omega\, T_s\, \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right) \longrightarrow g(t) = \frac{\partial}{\partial t}\, T_s\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\pi t}\right)$$

$\Omega_c = \frac{2\pi}{T_s}$

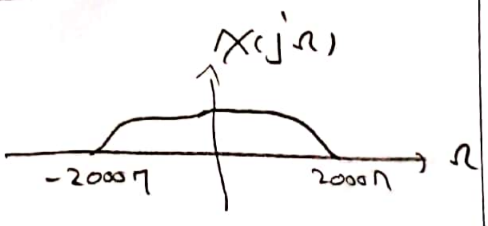
$$\longrightarrow g(t) = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \longrightarrow g(t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{t} - \frac{\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)}{t}$$

مسئله ۱۱.

ابتدا یک بار دیاگرام سیستم را رسم می‌کنیم.



$$y[n] = x[n]^2 \qquad X(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 2000\pi$$



Scanned by CamScanner

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری اول	تاریخ تحویل: 0/1/1 / 20	8

اگر به فرم سیگنال خروجی دقت کنیم داریم که $y_c(t) = x_c^2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega) * X_c(j\Omega)$

از درس سیگنال به خاطر داریم که کانولوشن باعث پهن شدن سیگنال شده، پس اگر برای سیگنال $X_c(j\Omega)$ داشته باشیم که $B.W = 2000\pi$ آنگاه برای $X_c(j\Omega) * X_c(j\Omega)$ داریم که: $B.W: 4000\pi$

اگر به خاطر بیاوریم، در پردازش گسسته سیگنال‌های پیوسته رابطه زیر برقرار است:

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)) & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

در اینجا $\Omega = 4000\pi$ قرار دهیم داریم:

$$4000\pi = \frac{\pi}{T} \rightarrow T = \frac{1}{4000}\, s$$