سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: پردازش سیگنال‌های دیجیتال تکلیف سری دهم	تاریخ تحویل: 01 / ۵ / 29	—

سوال ۱.

$h[n]=0$ for $n<0$ and $n>9$. $H[k]=\frac{1}{5}\delta[k-1]+\frac{1}{3}\delta[k-7]$

$$\begin{cases} H[k]=\sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \\ h[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \end{cases} \longrightarrow h[n]=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{5}\delta[k-1]+\frac{1}{3}\delta[k-7]\right)e^{\frac{j2\pi kn}{10}}$$

$$\longrightarrow h[n]=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{5}e^{\frac{j\pi n}{5}}+\frac{1}{3}e^{\frac{j7\pi n}{5}}\right]$$

حال از $h[n]$ باید DTFT بگیریم. دقت شود که در صورت استفاده از رابطه $e^{j\omega_0 n}\longleftrightarrow \underset{\text{هر پریود یک بار } 2\pi}{\delta(\omega-\omega_0)}$ به پاسخ غلط خواهیم رسید. لذا در این مسئله از تعریف تبدیل فوریه باید استفاده نماییم.

علت غلط شدن در صورت استفاده از رابطه بالا، پریودیک بودن ملاحظات است که در محاسبه تبدیل فوریه در نظر می‌گیریم.

We know: $H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$

$$\longrightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{50}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{j\pi n}{5}-j\omega n}+\frac{1}{30}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{j7\pi n}{5}-j\omega n}\ \xrightarrow{\text{اعمال کران‌ها}}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{50}\sum_{n=0}^{9}e^{\frac{j\pi n}{5}-j\omega n}+\frac{1}{30}\sum_{n=0}^{9}e^{\frac{j7\pi n}{5}-j\omega n}$$

با دو سری هندسی طرف هستیم، می‌دانیم:

$S_n=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$ r: قدرت a: جمله اول

$$\xrightarrow{n=9} H(e^{j\omega})=\frac{1}{50}\cdot\frac{1-e^{j2\pi}\cdot e^{-j10\omega}}{1-e^{j\frac{\pi}{5}-j\omega}}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1-e^{j14\pi}\cdot e^{-j10\omega}}{1-e^{j\frac{7\pi}{5}-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{50}\cdot\frac{1-e^{-j10\omega}}{1-e^{j(\frac{\pi}{5}-\omega)}}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1-e^{-j10\omega}}{1-e^{j(\frac{7\pi}{5}-\omega)}}$$

از درس می‌دانیم: $H(k)=H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}\rightarrow H(k)=H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{k\pi}{5}}$

if $k=1\rightarrow H(1)=H(e^{j\pi/5})=\frac{1}{50}\times\frac{1-e^{-j2\pi}}{1-e^{j0}}$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. پس

به صورت حدی مقدار را باید گرفت که همانند آن معنی نشان دهنده δ است. لازم به ذکر جزء دوم در $H(e^{j\omega})$ نیز صفر است.

$$\lim_{\omega\to\pi/5}H(e^{j\omega})\overset{HOP}{=}\lim_{\omega\to\pi/5}\frac{+j10e^{-j10\omega}}{je^{j(\pi/5-\omega)}}=10\longrightarrow H(1)=\frac{10}{50}=1/5\longrightarrow\frac{1}{5}\delta[k-1]$$

به طور مشابه برای $k=7$ داریم:

$$\lim_{\omega \to \frac{7\pi}{5}} H(e^{j\omega}) = \lim_{\omega \to \frac{7\pi}{5}} \frac{j10\, e^{-10j\omega}}{j\, e^{j(\frac{\pi 7}{5} - \omega)}} = 10$$

$$\longrightarrow H[7] = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}\delta[k-7]$$

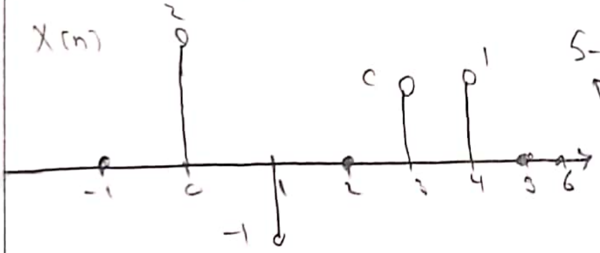
به وضوح مشخص است که به ازای باقی مقادیر k مقدار $H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{k\pi}{5}}$ صفر خواهد شد زیرا صورت آن صفر شده اما مخرج غیر صفر است پس در نهایت خواهیم داشت:

$$H[k] = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{5}\delta[k-1] + \frac{1}{3}\delta[k-7]$$

سوال 2 : در حل این سوال از مفهوم DFT استفاده می کنیم.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

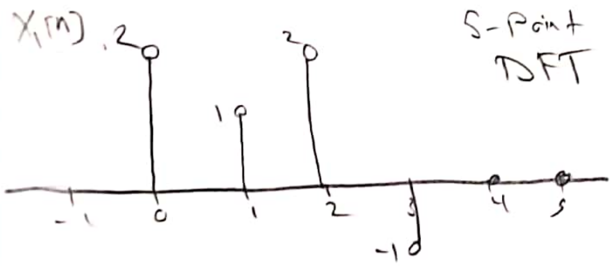
$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$$



5-Point DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{4} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi nk}{5}}$$

$$\rightarrow X[k] = 2 - e^{-\frac{j2\pi k}{5}} + c\,e^{-\frac{j6\pi k}{5}} + e^{-\frac{j8\pi k}{5}}$$



5-Point DFT

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{4} x_1[n]\, e^{-\frac{j2\pi nk}{5}}$$

$$\rightarrow X_1[k] = 2 + e^{-\frac{j2\pi k}{5}} + 2e^{-\frac{j4\pi k}{5}} - e^{-\frac{j6\pi k}{5}}$$

$$\rightarrow X_1[k] = X[k]\, e^{\frac{2j\pi 3k}{5}} \xrightarrow{k=0} X_1[0] = X[0]$$

$$\rightarrow 2+1+2-1 = 2-1+c+1 \rightarrow 4 = 2+c \longrightarrow c = 2$$

سوال 3. DFT N نقطه‌ای هر یک از $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را محاسبه می‌کنیم

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi n k_1}{N}\right) \quad , \quad X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N_1}} \;,\; x_1[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi n k_1}{N}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi n k_1}{N}} \qquad X_1[k_1] = \frac{N}{2} \qquad X_1[N-k_1] = N/2$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_1[k] = N/2 & \text{for } k = k_1 \;\&\; k = N-k_1 \\ X_1[k] = 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

به طریق مشابه

$$\begin{cases} X_2[k] = \frac{N}{2} & \text{for } k = k_2 \;\&\; k = N-k_2 \\ X_2[k] = 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]\, X_2^*[k]$$

حال با [illegible] Summation تقارن داریم:

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2^*[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}\left[\frac{N^2}{4} + \frac{N^2}{4}\right] = N/2 & \text{if } k_1 = k_2, \text{ or } k_2 = N-k_1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

سوال ۴.

الف)

$x[n]=0$, $n<0$, $n\geq 512$ → $x[n]\neq 0$ $0\leq n<512$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad , \quad X[k]=0 \quad 250\leq k\leq 262$$

خطا اگر رخ دهد فقط در یک خانه حافظه است.

$$S[n]=x[n] \xrightarrow{\text{مقدار غلط نقطه } n_0} \quad , \quad S[k]=X[k]+[S[n_0]-x[n_0]]\, e^{-j\frac{2\pi kn_0}{512}}$$

$$\Rightarrow S[k]=X[k]+[S[n_0]-x[n_0]]\, e^{-j\frac{\pi kn_0}{256}}$$

حال می‌خواهیم رخ داد یا نه، خطا را بررسی کنیم، می‌دانیم که $X[k]=0$ $250\leq k\leq 262$ ، ما از صحت $S[k]$ اطمینان داریم، حال می‌آییم در یک k در بازه‌ای که $X(k)$ صفر است انتخاب می‌کنیم. اگر $S(k)$ صفر شد که مشکلی نداریم، خطا نیست. اما اگر صفر نشد پس دچار مشکل هستیم، یعنی $S[n_0]\neq x[n_0]$ پس یک ترم نمایی مقداری به $S(k)$ اضافه می‌کند، پس خطا رخ داده است.

ب) حال دنبال الگوریتمی با تعیین n_0 هستیم. گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

۱- دو نقطه متوالی k و k+1 را در بازه‌ای که $X(k)=0$ است، در نظر می‌گیریم و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$S[k]=\cancel{X[k]}+[S[n_0]-x[n_0]]\, e^{-\frac{j2\pi kn_0}{512}}$$
$$S[k+1]=\cancel{X[k+1]}+[S[n_0]-x[n_0]]\, e^{-\frac{j2\pi (k+1)n_0}{512}} \Rightarrow \frac{S[k+1]}{S[k]}=e^{-\frac{j2\pi n_0}{512}}$$

با توجه به بازه که به وضوح $X[k]=0$ ، $X[k+1]=0$ پس در گام ۲ و ۳ داریم:

۲- عبارت $\frac{S[k+1]}{S[k]}$ را تشکیل می‌دهیم

$$\frac{S[k+1]}{S[k]}=e^{-\frac{j2\pi n_0}{512}}$$

۳- از $\ln$ استفاده کرده و n_0 را عرضه می‌کنیم.

$$\ln\left(\frac{S[k+1]}{S[k]}\right)=-j\frac{2\pi n_0}{512}$$

$$\rightarrow n_0=\frac{-512}{j2\pi}\ln\left(\frac{S[k+1]}{S[k]}\right)\rightarrow n_0=\frac{j512}{2\pi}\ln\left(\frac{S[k+1]}{S[k]}\right)$$

ج) اینجا حالت ما چنین است که n_0 برای ما کاملاً مشخص است، دنبال الگوریتمی جهت بازیابی $x[n_0]$ به کمک $S(k)$ هستیم. به صورت زیر رفتار می‌کنیم.

از رابطه بند الف باید بهره بگیریم.

$$S[k] = X[k] + (S[n_0] - x[n_0])\, e^{-\frac{j2\pi k n_0}{512}}$$

فرض می کنیم که k در بازه‌ای باشد که $X(k)=0$ است پس می توانیم بنویسیم.

$$S[k] = (S[n_0] - x[n_0])\, e^{-\frac{j2\pi k n_0}{512}} \quad *$$

حال باید از IDFT استفاده نماییم.

$$S[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S[k]\, e^{\frac{j2\pi k n}{512}}$$

$$\xrightarrow{n \to n_0} \quad S[n_0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S[k]\, e^{\frac{j2\pi k n_0}{512}}$$

با رابطه بالا ما عملا $S[n_0]$ را به دست می آوریم پس با استفاده از رابطه * به سادگی $x[n_0]$ قابل محاسبه خواهد بود.

سوال 5.

$h[n]=(\frac{1}{3})^n u[n]$, $\omega_k=\frac{2\pi k}{16}$, $k=0,1,2,\dots,15$

$G[k]=H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{16}}$ $k=0,\dots,15$ $g[n]=IDFT_{16\,point}\{G[k]\}$

$$H(e^{j\omega})=DTFT\left((\tfrac{1}{3})^n u[n]\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

به کمک Sampling ، $H(e^{j\omega})$ می‌توانیم $G(k)$ را بیابیم و سپس از آن IDFT بگیریم، منتهی این کار دشوار است، لذا یه طور روش دیگری باید برید. از قضیه استفاده می‌کنیم:

$$y[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN]\right]R_N(n) \quad , \quad R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leq n<N\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\rightarrow g[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-mN]\right]R_N(n) \rightarrow g[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\tfrac{1}{3})^{n-mN}u(n-mN)\right]R_N(n)$$

$$\xrightarrow{\text{استدلال } U(n-mN)} g[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{0}(\tfrac{1}{3})^{n-mN}\right]R_N(n) ,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{0}(\tfrac{1}{3})^{n-mN}=\sum_{m=-\infty}^{0}(\tfrac{1}{3})^{n}\cdot(\tfrac{1}{3})^{-mN}=(\tfrac{1}{3})^{n}\sum_{m=-\infty}^{0}(\tfrac{1}{3})^{-mN} \xrightarrow{\text{تغییر توان}}$$

$$=(\tfrac{1}{3})^{n}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(\tfrac{1}{3})^{mN}}_{\text{سری هندسی}}=(\tfrac{1}{3})^{n}\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^N}$$

پس در نهایت می‌توانیم رابطه $g(n)$ را به فرمت زیر بیان نماییم.

$$g[n]=\left[(\tfrac{1}{3})^{n}\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^N}\right]R_N(n) \quad , \quad R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leq n<N\\ 0 & o.w\end{cases}$$

دقت شود که این مسئله به کمک گرفتن IDFT از $G(k)$ هم قابل حل بود، اما محاسبات پیچیده‌ای را شامل می‌شود.

سوال 6.

الف)

$$c_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\, x[n+m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[-m]\, x[n-m] = y[-n] * x[n]$$

می‌دانیم هر دو سیگنال اینجا حقیقی هستند.

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]\, e^{-j\omega n}}_{X_2(e^{j\omega})\, e^{-j\omega k}} = X_2(e^{j\omega}) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, e^{-j\omega k}}_{X_1(e^{j\omega})}$$

$$\rightarrow DTFT\{x_1[k] * x_2[k]\} = X_1(e^{j\omega})\, X_2(e^{j\omega})$$ خاصیت *

$$x[-n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega}) \xrightarrow[\text{حقیقی}]{x[n]} X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$ خاصیت **

با توجه به خواصی که اثبات کردیم

$$DTFT\{c_{xy}[n]\} = C_{xy}(e^{j\omega}) = Y^*(e^{j\omega})\, X(e^{j\omega})$$ QED ✓

ب) با توجه به تعریف صورت مسأله خواهیم داشت:

$x[n] \neq 0 \quad 0 \leqslant n < 100$

$y[n] \neq 0 \quad 0 \leqslant n < 50 \qquad c_{xy}[n] \neq 0 \quad N_1 \leqslant n \leqslant N_2$

با توجه به آنچه از کانولوشن در درس سیگنال‌ها، سیستم‌ها می‌دانیم اگر یک سیگنال در بازه $[a, b]$ مقدار داشته باشد و سیگنال دیگری در بازه $[c, d]$ آنگاه کانولوشن این دو، در بازه $[a+c,\ b+d]$ مقدار خواهد داشت. بنابراین:

$N_1 = 0 + 0 = 0, \quad N_2 = 100 + 50 - 1 - 1 = 148 \rightarrow c_{xy}(n) \neq 0 \quad 0 \leqslant n \leqslant 148$

ج) در اینجا عملا دنبال محاسبه یک کانولوشن $x(n) * y(n)$ به کمک روش ساده‌ساز DFT هستیم، در درس ملاحظه کردیم که شرط جلوگیری از پدیده Aliasing این است که $N \geqslant l + p - 1$ که l و p تعداد نقاط سیگنال های $x_1[n]$ ، $x_2(n)$ که قرار است ما کانولوشن رویشان انجام شود می‌باشند. پس منطقا $N_{min} = 20$ خواهد بود و اگر $c(n)$ به درستی بازیابی نمی‌شود، مطابق جزوه درسی اگر دقت کنیم و ببینیم در صورت عدم رعایت شرط بیان شده

می خواهد بیشتر داریم که از نقاط l تا $l+p-2$ یعنی $p-1$ نقطه دچار twist خواهند
شد و نمونه‌ها خراب می‌گردند.

سوال 7. مطابق درس، از الگوریتم FFT برای محاسبه Radix3 استفاده می کنیم. در این حالت

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$N = 3^{\gamma}$ خواهد بود. مشابه حالت Radix 2 جلو می رویم.

حالا به جای دو Summation باید سه تا Summation تعریف کنیم زیرا باقی مانده اعداد به 3، 0 و 1 و یا 2 است. پس داریم:

$$X[k] = \sum_{n=0,3,6,\dots} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n=1,4,7,\dots} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n=2,5,8,\dots} x[n] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m] W_N^{3mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m+1] W_N^{(3m+1)k} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m+2] W_N^{(3m+2)k}$$

$$\xrightarrow{W_N^{3mk} = W_{N/3}^{mk}} X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m] W_{N/3}^{mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m+1] W_{N/3}^{mk} \cdot W_N^{k} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3m+2] W_{\frac{N}{3}}^{mk} W_N^{2k}$$

$$\xrightarrow{\text{if } N=9} X[k] = \sum_{m=0}^{2} \underbrace{x[3m] W_3^{mk}}_{f(m)} + W_9^{k} \sum_{m=0}^{2} \underbrace{x[3m+1] W_3^{mk}}_{g(m)} + W_9^{2k} \sum_{m=0}^{2} \underbrace{x[3m+2] W_3^{mk}}_{h(m)}$$

تذکر: $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$

$\frac{N}{3}$-Point DFT = 4 ضرب مختلط

Stage 2 : 16 ضرب مختلط

تعداد ضرب های مختلط $= 16 + 3\times 4 = 16+12 = \boxed{28}$

سیگنال فلوگراف برای این حالت به صورت زیر است: