به نام حضرت دوست

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل	تکلیف شماره ۵	نیم‌سال اول
۱۳۹۹/۰۹/۰۸		۱۴۰۰-۱۳۹۹

معادلات با مشتقات جزئی

توجه: پاسخ به قسمت‌های مشخص شده با ⁎ الزامی نیست و نمره اضافی ندارد.

۱- معادله ای با صورت و شرایط مرزی و اولیه زیر مفروض است:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + \sin x \quad (0 < x < \pi\,,\ \ t > 0) \\ u(0,t) = T_0,\ \ u(\pi,t) = T_1 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

الف) پاسخ حالت پایدار آن، $u_{ss}(x)$ را بدست آورید.   ب) پاسخ کامل آن را بدست آورید. ($u(x,t) = v(x,t) + u_{ss}(x)$)

۲- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (-\infty < x < \infty\,,\ \ t \geq 0) \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| < 2 \\ 0 & ; \quad |x| > 2 \end{cases}, \qquad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

۳- معادله حرارت را در ناحیه نیمه محدود یک بعدی ($x > 0\,, t > 0$) با شرایط مرزی و اولیه داده شده زیر حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad u(x,0) = e^{-\alpha x^2}$$

۴- معادله حرارت با تقارن دایره ای به صورت زیر است :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

معادله را در ناحیه دایره ای به شعاع a با شرایط مرزی و اولیه زیر حل کنید .

$$u(a,t) = 0\,, \&\, u(r,0) = f(r)$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۵	تاریخ تحویل
۱۳۹۹-۱۴۰۰		۱۳۹۹/۰۹/۰۸

۵- پاسخ معادله حرارت را با شرایط داده شده بدست آورید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}]$$

$$u(a,\varphi,t) = 0 \quad , \quad u_\varphi|_{\varphi=0,\pi} = 0 \quad , \quad u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi)$$

۶- الف)یک صفحه مربع شکل به ابعاد π که دور تا دور آن در دمای صفر نگه داشته شده است، را در نظر بگیرید که دمای اولیه آن به صورت $f(x,y)$ است. با حل معادله $u_t = c^2\nabla^2 u$ نشان دهید:

$$u(x,y,t) = \sum_m \sum_n F_{mn} \sin mx \sin ny \, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

که در آن:

$$F_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi f(x,y) \sin mx \sin ny \; dxdy$$

ب) قسمت الف را با فرض $f(x,y) = x(\pi - x)y(\pi - y)$ حل کنید.

۷- پوسته ای مرتعش به شکل نیم دایره به شعاع b که دور تا دور آن فیکس شده است را در نظر بگیرید.با توجه به شرایط زیر ، $u(r,\varphi,t)$ را بیابید.

$$u_t(r,\varphi,0) = 0\,;\; u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi)$$

*۸- یک میله نیمه محدود نازک که بدنه آن عایق شده است، دارای درجه حرارت اولیه $f(x)$ می باشد. سر $x = 0$ میله را به طور ناگهانی به درجه حرارت صفر رسانده و در آن دما نگه می داریم. درجه حرارت میله را در طول آن بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} T_0 \;\; ; & x \le 1 \\ 0 \;\; ; & x > 1 \end{cases}$$

❋۹- توزیع درجه حرارت در امتداد میله ای به طول l و با شرایط مرزی و اولیه داده شده با حل معادله ی حرارت زیر موردنظر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = T_0 \quad ; \quad t > 0 \quad , \qquad u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < l$$

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = h[u(l,t) - T_1] \quad ; \quad T_1 = constant \quad , \quad t > 0$$

الف) پاسخ حالت پایدار را بدست آورید.

ب) پاسخ کامل را بدست آورید.

❋۱۰- معادله موج ناشی از یک منبع موج که در $x = 0$ قرار گرفته و در $t = 0$ روشن شده است به صورت زیر است . این معادله را با توجه به شرایط اولیه و مرزی آمده ، حل کنید .

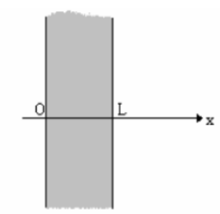
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos\left(\frac{5\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}t\right)$$

$$u(x,0) = e^{-x} \quad ; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{\pi}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) ; \quad for\ 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right) \quad ; \quad u(l,t) = 0$$

❋۱۱- ناحیه نامحدود $0 \le x \le l$ مفروض است . فرض کنید انتشار حرارت در این محیط در راستای x صورت می گیرد (شکل۳). شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر است :

$$u(0,t) = T_0 \qquad ; \qquad -\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = hu(l,t) \quad , \quad u(x,0) = f(x)$$



شکل ۳

پاسخ حالت پایدار و پاسخ کل $u(x,t)$ را بدست آورید.

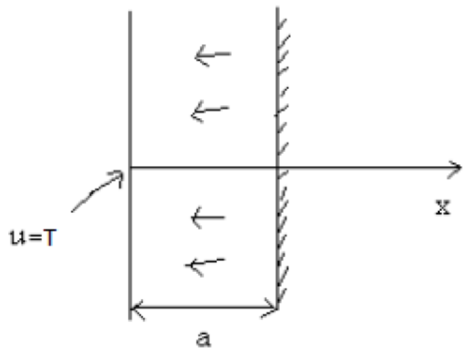
ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل ۱۳۹۹/۰۹/۰۸	تکلیف شماره ۵	نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰

❊۱۲- هنگامی که شرایط مانا برقرار است ، کرانه قطری یک ورقه نیم دایره ای به شعاع a ، در دمای صفر و کرانه قوسی آن در دمایی با توزیع روبه رو نگه داشته می‌شود. توزیع دما را برای تمام نقاط این ورقه پیدا نمایید.

$$u(\theta)=\begin{cases}50\theta & 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 50(\pi-\ \theta) & \dfrac{pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$$

❊۱۳- قطعه ماده ای با طول نامحدود و ضخامت a داده شده است (شکل۴) . یک طرف آن در منبع ثابت $u=T$ قرار دارد و طرف دیگر آن عایق شده است. گستردگی اولیه دما در این عایق به صورت $u(x,0)=T+u_0\frac{x}{a}$ فرض می شود . درجه حرارت $u(x,t)$ را در تمام نقاط این قطعه بدست بیاورید.



شکل ۴

❊۱۴- در معادلات حرارت و موج, چنانچه تابع u در مساله وجود داشته باشد, با تغییر تابع $u(x,t)=e^{kt}v(x,t)$ میتوان با انتخاب مناسب ثابت k ، تابع u را حذف کرده ، معادله را ساده تر کرد.

مساله زیر را با بکار گیری نکته فوق حل کنید.

$$u_t=u_{xx}-4u \quad ; \quad 0<x<2 \quad ;t>0$$

$$u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \quad ; \quad u(x,0)=x$$

به نام حضرت دوست
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل	تکلیف شماره ۵	نیم‌سال اول
۱۳۹۹/۰۹/۰۸		۱۳۹۹-۱۴۰۰

❉۱۵- ارتعاش یک غشاء دایره ای به شعاع a از معادله زیر حاصل می گردد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad ;(r\le a)$$

که در آن u دامنه ارتعاش است . اطراف غشاء گرفته شده است و در $t=0$ داریم : $u(r,0)=0$. اما غشاء طوری نگهداشته شده که سرعت اولیه آن به صورت زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\begin{cases}0 & ;\ \epsilon<r<a\\ \dfrac{P}{\pi\epsilon^2\rho} & ;0<r<\epsilon\end{cases}$$

که در آن P,ρ ثابت بوده و ϵ عددی معلوم بین $(0,a)$ می باشد . دامنه ارتعاش $u(r,t)$ را بدست آورید ، در صورتی که از اصطکاک هوا صرف نظر نشود ، توضیح دهید که شکل معادله اصلی و پاسخ نهایی آن چه تفاوتی می کند ؟

❉۱۶- یک صفحه ی فلزی مستطیل شکل به ابعاد L و H را در نظر بگیرید. دمای ابتدایی صفحه u_0 درجه می باشد. این صفحه از طریق سه مرز خود که در دمای $0^\circ C$ قرار دارند خنک میگردد. مرز چهارم عایق فرض می گردد.

$$u_t=\kappa\nabla^2 u \ \ ,\ \ 0\le x\le L\ \ ,\ \ 0\le y\le H$$

$$u(0,y,t)=u(L,y,t)=0\ \ ,\ \ u(x,0,t)=0\ \ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,H,t)=0$$

الف) مطلوبست حل PDE فوق با شرط اولیه $u(x,y,0)=100$

ب) کمترین مقدار ویژه مسئله را بیابید و به وسیله آن تقریب تک جمله ای جواب را ارائه نمایید.

ج) از تمامی صفحات مستطیلی با مساحت برابر کدامیک آرامتر سرد می شود؟

❉۱۷- معادله با شرایط مرزی و اولیه زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial t} & (0\le x\le a\,,\ \ 0\le y\le b,\ \ t\ge 0)\\ u(0,y,t)=u(a,y,t)=0,\ \ u(x,0,t)=u_y(x,b,t)=0 & \\ u(x,y,0)=T_0 & \end{cases}$$

ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل	تکلیف شماره ۵	نیم‌سال اول
۱۳۹۹/۰۹/۰۸		۱۴۰۰-۱۳۹۹

❋۱۸- معادله حرارت زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}(x - 1 + sin\pi x) \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; t > 0$$

$$u(0,t) = e^{-t} \quad ; u(1,t) = 1$$

$$u(x,0) = 1 + sin\pi x$$

❋۱۹- در یک استوانه نامحدود به شعاع a گرما در امتدا شعاع منتشر شده و معادله غیر همگن گرما به صورت زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + A \qquad ; 0 \le r \le a \qquad A = cte$$

گرمای اولیه در ناحیه صفر است $(u(r,0) = 0)$ و بدنه استوانه نیز در درجه حرارت صفر قرار دارد .$(u(a,t) = 0)$

الف : پاسخ حالت پایدار مساله را بدست آورید.

ب : درجه حرارت در ناحیه $u(r,t)$ را تعیین کنید .

❋۲۰- معادله ارتعاش زیر را حل نمایید.

$$u_{xx} = u_{tt} + t^2 - x^2 - t + x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; t > 0$$

$$u_x(0,t) = t \quad ; \quad u_x(l,t) = t^2$$

$$u(x,0) = 0 \quad ; u_t(x,0) = \frac{-x^2}{2}$$

❋۲۱- معادله ارتعاش زیر را حل نمایید.

$$u_{tt} = u_{xx} + x + t \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; t > 0$$

$$u(0,t) = t \quad ; u(1,t) = 2t$$

$$u(x,0) = x \, ; u_t(x,0) = 2x$$

موفق باشید