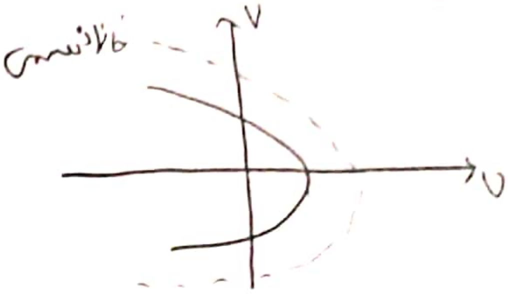
تاریخ تحویل: ۹۹/۱۰/۲۰ | ریاضیات مهندسی — تکلیف سری ششم | سیروس شمس مردوش ششتر — شماره دانشجویی: 86198472

-1

$x=c$: $w = u + jv = z^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u} + j\underbrace{2xy}_{v}$ $\quad x=c \to u = c^2-y^2$

$v = 2cy \to y = \dfrac{v}{2c}$

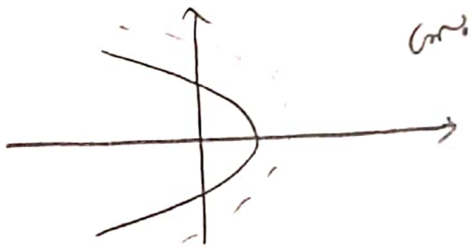
$u = c^2 - \dfrac{v^2}{4c^2} \to v^2 = 4c^2(c^2-u) \longrightarrow$ خانواده سهمی



$y=c \to u = x^2-c^2$

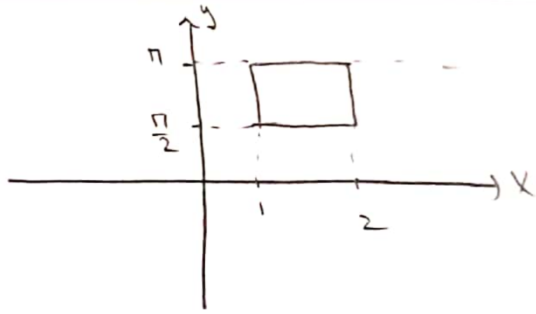
$v = 2xc \to x = \dfrac{v}{2c} \longrightarrow u = \dfrac{v^2}{4c^2} - c^2 \to v^2 = 4c^2(u+c^2)$

↳ خانواده سهمی



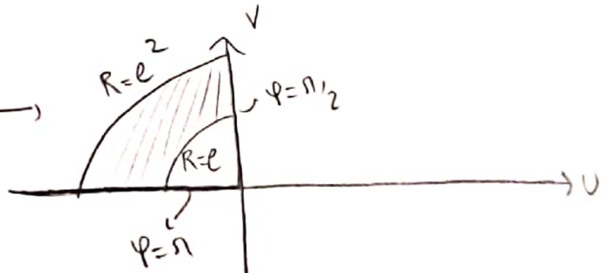
-2

$\{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le y \le \pi\} \xrightarrow{\text{رسم ناحیه}}$



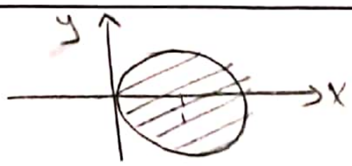
$w = e^z = Re^{j\varphi} = e^{x+jy} = e^x e^{jy}$

$\to \begin{cases} R = e^x \\ \varphi = y \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} e^1 \le R \le e^2 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{array} \longrightarrow$



-3

$|z-1| < 1 \longrightarrow$ نقاط داخل دایره به شعاع ۱ و مرکز $z_0=1$

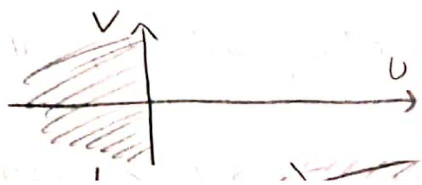


$w = \dfrac{z-1}{z}$ $\quad (a=1, b=-1, c=1, d=0)$

$w = \dfrac{z-1}{z} \to wz = z-1 \to z(w-1) = -1 \to z = \dfrac{1}{1-w} \to z-1 = \dfrac{1}{1-w} - 1$

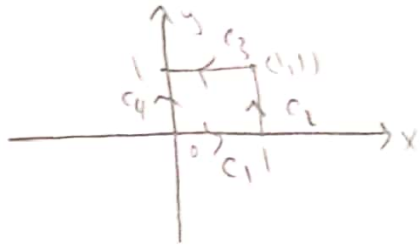
$\to z-1 = \dfrac{w}{1-w} \to |z-1| = \left|\dfrac{w}{1-w}\right| \Rightarrow |u+jv| < |1-u-jv|$

$\to u^2+v^2 < (1-u)^2+v^2 \to 2u<0 \to u<0 \longrightarrow$



7- الف)

$\oint_C |z|^2 dz \qquad |z|^2 = x^2 + y^2$



$dz = dx + j\,dy$

انتگرال را روی چهار مسیر c_1, c_2, c_3, c_4 حساب کرده و جواب هر کدام را جمع می‌کنیم.

$\int_{C_1} |z|^2 dz = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \int_{C_2} |z|^2 dz = \int_0^1 (1+y^2)\, j\,dy = j\left(y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}j$

$\int_{C_3} |z|^2 dz = \int_1^0 (1+x^2)\,dx = \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^0 = \frac{-4}{3} \qquad \int_{C_4} |z|^2 dz = \int_1^0 (y^2)\, j\,dy = \frac{jy^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{-j}{3}$

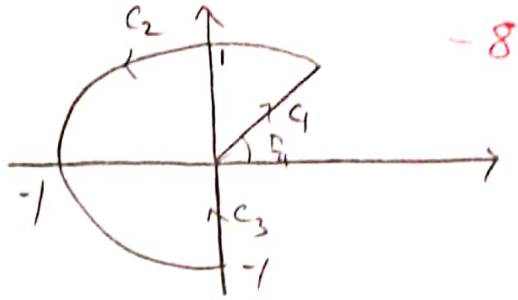
$\oint_C |z|^2 dz = \int_{C_1} |z|^2 dz + \int_{C_2} |z|^2 dz + \int_{C_3} |z|^2 dz + \int_{C_4} |z|^2 dz = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}j - 4/3 - j/3$

$\longrightarrow \oint_C |z|^2 dz = -1 + j$

Scanned by CamScanner

-8

$$I=\oint_C(\bar z+z^2)\,dz=\underbrace{\oint_C \bar z\,dz}_{I_1}+\underbrace{\oint_C z^2\,dz}_{I_2}$$



$I=I_1+I_2$

$I_1:\ \oint_C \bar z\,dz \xrightarrow{\text{تفکیک مسیرها}} C_1:\begin{cases} z=re^{j\frac{\pi}{4}}\\ \bar z=re^{-j\frac{\pi}{4}}\end{cases}\qquad C_2:\begin{cases} z=e^{j\theta}\\ \bar z=e^{-j\theta}\end{cases}$

$C_3:\begin{cases} z=re^{+j\times\frac{3\pi}{2}}\\ \bar z=re^{-j\frac{3\pi}{2}}\end{cases}\qquad \oint_C \bar z\,dz=\int_{C_1}\bar z\,dz+\int_{C_2}\bar z\,dz+\int_{C_3}\bar z\,dz$

$C_1:\ \int_0^1 re^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}}\,dr=\int_0^1 r\,dr=\frac{1}{2}$

$C_2:\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(e^{-j\theta})\,je^{j\theta}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} j\,d\theta=\frac{5\pi}{4}j \Longrightarrow \oint_C \bar z\,dz=\frac{1}{2}+\frac{5\pi}{4}j-\frac{1}{2}$

$C_3:\ \int_{-1}^{0} re^{-j\frac{3\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}\,dr=\int_{-1}^{0} r\,dr=-\frac{1}{2}\qquad =\frac{5\pi}{4}j\qquad I_1=\frac{5\pi}{4}j$

$I_2:\ \oint z^2\,dz\qquad z=re^{j\theta}\rightarrow z^2=r^2e^{2j\theta}\rightarrow C_1:\begin{cases} z^2=r^2e^{j\frac{\pi}{2}}\\ dz=e^{j\frac{\pi}{4}}\,dr\end{cases}$

$C_2:\begin{cases} z^2=e^{2j\theta}\\ dz=je^{j\theta}\,d\theta\end{cases}\qquad C_3:\begin{cases} z^2=r^2e^{3\pi j}\\ dz=e^{j\frac{3\pi}{2}}\,dr\end{cases}$

$C_1:\ \int_0^1 r^2e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\,dr=\int_0^1 r^2e^{\frac{3j\pi}{4}}\,dr=\frac{e^{\frac{3j\pi}{4}}}{3}$

$C_2:\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{2j\theta}\,je^{j\theta}\,d\theta=j\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{3j\theta}\,d\theta=\frac{e^{3j\theta}}{3}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{e^{\frac{9\pi}{2}j}-e^{\frac{3\pi}{4}j}}{3}$

$C_3:\ \int_{-1}^{0} r^2e^{3\pi j}\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}\,dr=-\frac{e^{\frac{9\pi}{2}j}}{3}\rightarrow \oint_C z^2\,dz=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}j}}{3}+\frac{e^{\frac{9\pi}{2}j}-e^{\frac{3\pi}{4}j}}{3}-\frac{e^{\frac{9\pi}{2}j}}{3}=0$

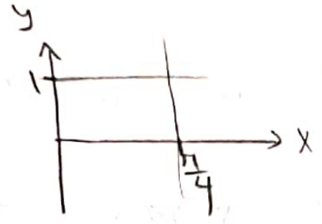
دقت کنیم که برای محاسبه I_2 در امل نیازی به محاسبه نیست، می‌شود طبق قضیه Cauchy-Gorsat

ادعا کرد چون مسیر بسته است و z^2 نیز تحلیلی است پس $I_2 = 0$

$$\oint_C (\bar{z} + z^2)\, dz = \frac{5\pi}{4} j$$

4— ابتدا نگاشت $\cos z$ را اعمال می‌کنیم، سپس $e^{j\frac{\pi}{4}}$ که به معنای دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ است را اعمال می‌کنیم

$$\begin{cases} 0 < y < 1 \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow$$



$$W = \cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$

$$w = u + jv \rightarrow \begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = -\sin x \sinh y \end{cases}$$

① : $x = \frac{\pi}{4}$, $0 < y < 1 \longrightarrow \begin{cases} \cosh y = \sqrt{2}\, u \\ \sinh y = -\sqrt{2}\, v \end{cases}$

$\rightarrow 2u^2 - 2v^2 = 1$ $(\pm 1, 0)$ هذلولی به کانون

② : $y = 1$, $0 < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{u}{\cosh 1} \\ \sin x = \frac{-v}{\sinh 1} \end{cases}$

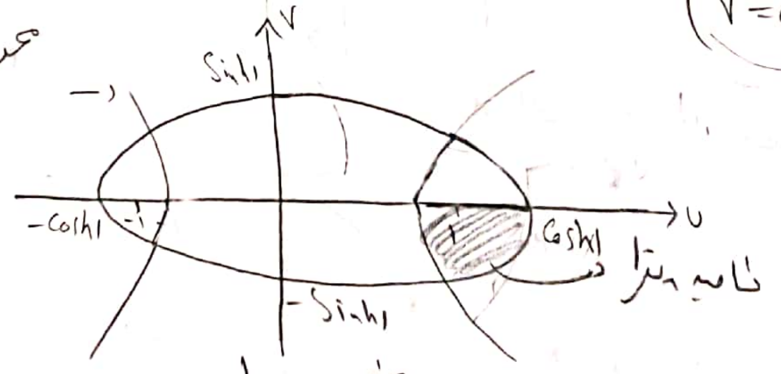
$\longrightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$ $(\pm 1, 0)$ بیضی به کانون

③ $x = 0$, $0 < y < 1 \rightarrow \begin{cases} u = \cosh y \\ v = 0 \end{cases}$

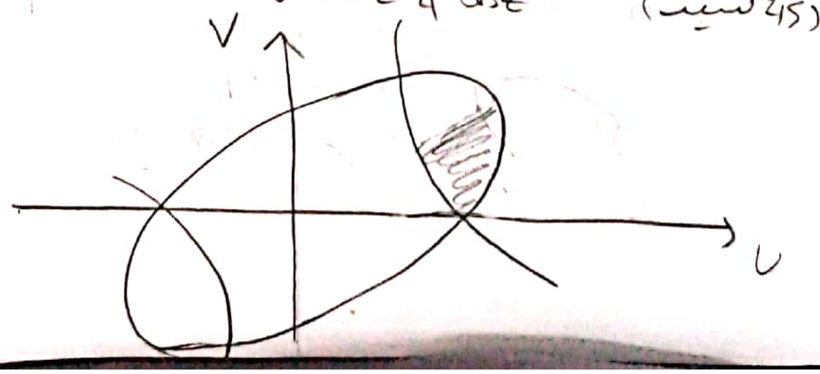
$\longrightarrow$ محور افقی از 1 به بعد

④: $y = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ محور افقی بین 1- و 1



$$\downarrow w = e^{\frac{j\pi}{4}} \cos z \qquad \text{(دوران ۴۵ درجه)}$$



6 - به نظرم باید به طریقی ناحیه داده شده را به نیم دایره واحد تبدیل کنیم وبعد از عکس نگاشتی که نیم صفحه بالا را به داخل دایره واحد می نگارد استفاده کنیم.

$$w = e^{j\theta}\,\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \longrightarrow$$ (تمام نقاط نیم صفحه بالا را به دایره واحد می نگارد) $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $Im(z_0)>0$

در این جا θ، z_0 دو پارامتر آزاد هستند که شروط بالا را اقناع کنند. می توانیم مقادیر دلخواهی جای آن قرار دهیم. فعلاً مسأله را پارامتری حل می بریم.

$$w = e^{j\theta}\frac{(z - z_0)}{z - \bar{z}_0} \rightarrow w z - w\bar{z}_0 = e^{j\theta} z - e^{j\theta} z_0$$

$$\rightarrow w\bar{z}_0 - e^{j\theta} z_0 = z(w - e^{j\theta}) \longrightarrow z = \frac{w\bar{z}_0 - e^{j\theta} z_0}{w - e^{j\theta}}$$

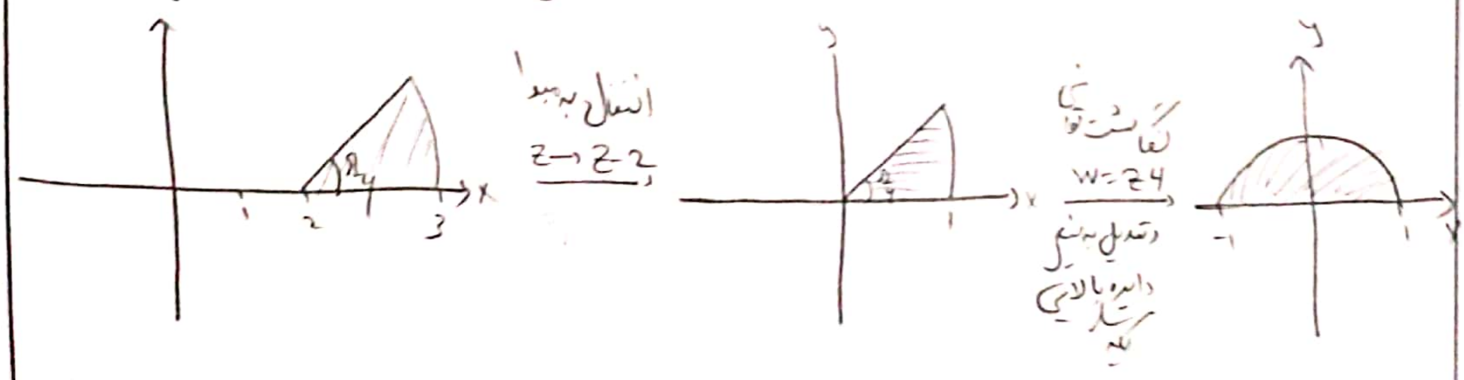
حال جای z را با w عوض می کنیم تا نگاشتی حاصل شود که دایره یکه را به نیم صفحه بالایی بنگارد.

$$z = \frac{w\bar{z}_0 - e^{j\theta} z_0}{w - e^{j\theta}} \xleftrightarrow{z \leftrightarrow w} w = \frac{z\bar{z}_0 - e^{j\theta} z_0}{z - e^{j\theta}}$$ نگاشتی که دایره یکه را به نیم صفحه بالا می نگارد.

حال باید ببینیم نیم دایره بالا به ربع اول نگاشته می شود:
برای این منظور برای تعیین آن به صورت پارامتری اندکی دشوار است، $j = z_0$، $\theta = \pi$ ، $z = j$ در نیم دایره یکه بالا انتخاب کردم تا ببینیم نیم دایره بالا در ربع دوم نگاشته می شود یا اول

$$w = \frac{j(-j) + 1j}{j + 1} = \frac{1 + j}{j + 1} = 1 \longrightarrow$$ نیم دایره بالا به ربع اول نگاشته می شود

حال شکل داده شده در سوال را در چند مرحله به نیم دایره یکه بالایی تبدیل می کنیم.



پس ابتدا ما z را به $(z-2)^4$ تبدیل کردیم، پس نگاشت به طور کامل به صورت زیر است:

با توجه به این که مسأله به ما مثلاً دو تا نقطه از نگاشت یا نسبت آن را نداده است، دو پارامتر z_0, θ داریم. اما یکی از پاسخ‌های متداول در حالتی که $\theta=\pi$, $z_0=j$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$W=\frac{(z-2)^4\bar{z}_0-e^{j\theta}z_0}{(z-2)^4-e^{j\theta}}$$

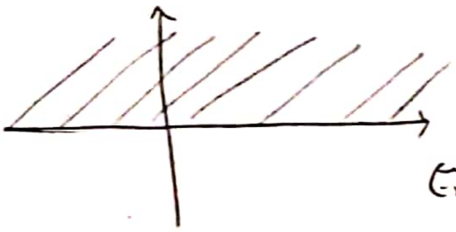
$$W=\frac{(z-2)^4(-j)+j}{(z-2)^4+1}=-j\left(\frac{(z-2)^4-1}{(z-2)^4+1}\right)$$

5 - در این مسأله یک نگاشت خطی کسری داریم که $\ln$ به آن اعمال شده است.

$$W=\ln\frac{z-1}{z+1}$$

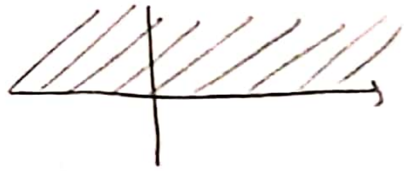
بررسی نگاشت: $\frac{z-1}{z+1}$ $\xrightarrow{\text{تفکیک}}$
$$\begin{cases} z_1=z+1 \\ z_2=\dfrac{1}{z_1} \\ W=-2z_2+1 \end{cases}$$

$\xrightarrow[\ Im(z)>0\ ]{\text{اعمال نگاشت روی}}$



$\xrightarrow{z_1=z+1}$

انتقال به راست هیچ اثری ندارد.

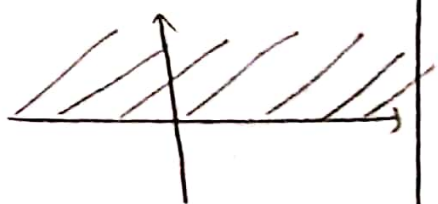


$\xrightarrow{z_2=\frac{1}{z_1}}$

شعاع را اول که ما بی تأثیرات، زاویه را منفی می‌کند. شکل را به نیم صفحه پایین منتقل می‌کند.

$\xrightarrow{W=-2z_2+1}$

اسکیل با منفی 2، چون -2 است شکل دوباره می‌آید بالا، $+1$ هم بی اثر است.



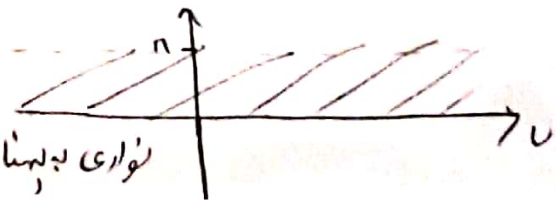
پس در اثر اعمال نگاشت خطی کسری دوباره به همان ناحیه $Im(z)>0$ می‌رسیم. حال $\ln$ اعمال می‌کنیم.

در صفحه $Im(z)>0$ در واقع شعاع بین ۰ تا ∞ است و زاویه هم بین ۰ تا π پس

$$\ln z=\ln|z|+\arg z \longrightarrow \begin{cases} u=\ln|z| \\ v=\arg z \end{cases}$$

$\ln 0<u<\ln\infty \longrightarrow -\infty<u<\infty$

$0<v<\pi$ $\longrightarrow$



نواری به پهنای π