# گزارش پروژه اول ریاضی مهندسی

سروش مس‌فروش مشهد (۸۱۰۱۹۸۴۷۲)

## ۱ بخش اول:

**حل دستی بخش اول:**

ابتدا ضرایب فوریه را برای تابع $x\mathrm{e}^{2x}$ به دست می آوریم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{2x}dx = \frac{\frac{(\pi+1)\mathrm{e}^{-\pi}}{4}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}(\pi-1)}{4}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{2x}cos(2nx)dx = \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}((\pi(\mathrm{e}^{2\pi}+1)+\mathrm{e}^{2\pi}-1)n^2+\pi(\mathrm{e}^{2\pi}+1)-\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{2\pi(n^4+2n^2+1)}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{2x}sin(2nx)dx = \frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}(\pi(-\mathrm{e}^{2\pi}-1)n^3+(2\mathrm{e}^{2\pi}+\pi(-\mathrm{e}^{2\pi}-1)-2)n)}{2\pi(n^2+1)^2}$$

در صورتی که موارد به دست آمده را در فرم سری فوریه تابع جایگزین کنیم کار ما تمام است.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(2nx) + b_n sin(2nx)$$

حال ضرایب فوریه را برای تابع $x\mathrm{e}^{-0.5x}$ به دست می آوریم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{-0.5x}dx = \frac{-(\pi-4)\mathrm{e}^{\pi/4}-(\pi+4)\mathrm{e}^{-\pi/4}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{-0.5x}cos(2nx)dx =$$

$$\frac{2(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-\pi/4}((16\pi+64)\mathrm{e}^{\pi/2}+16\pi-64)n^2+(\pi-4)\mathrm{e}^{\pi/2}+\pi+4}{\pi(256n^4+32n^2+1)}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{e}^{-0.5x}sin(2nx)dx =$$

$$\frac{2(-1)^{n}\mathrm{e}^{-\pi/4}((-64\pi\mathrm{e}^{\pi/2}-64\pi)n^3+((32-4\pi)\mathrm{e}^{\pi/2}-4\pi-32)n)}{\pi(256n^4+32n^2+1)}$$

در صورتی که موارد به دست آمده را در فرم سری فوریه تابع جایگزین کنیم کار ما تمام است.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(2nx) + b_n sin(2nx)$$

**سه جمله اول سری فوریه تابع:**

سه جمله اول سری فوریه تابع $x\mathrm{e}^{2x}$ در عکس زیر ضمیمه گشته است.

```
Enter N: 5
Enter k: 3
Enter m: 3
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: 2
Enter 1 to see Fourier Series or Enter 2 to see the plot: 1
2.76*cos(4.0*x) - 5.8*cos(2.0*x) + 3.96*sin(2.0*x) - 4.05*sin(4.0*x) - 1.45*cos(6.0*x) + 3.26*sin(6.0*x) + 3.96
```

شکل ۱: $x\mathrm{e}^{2x}$

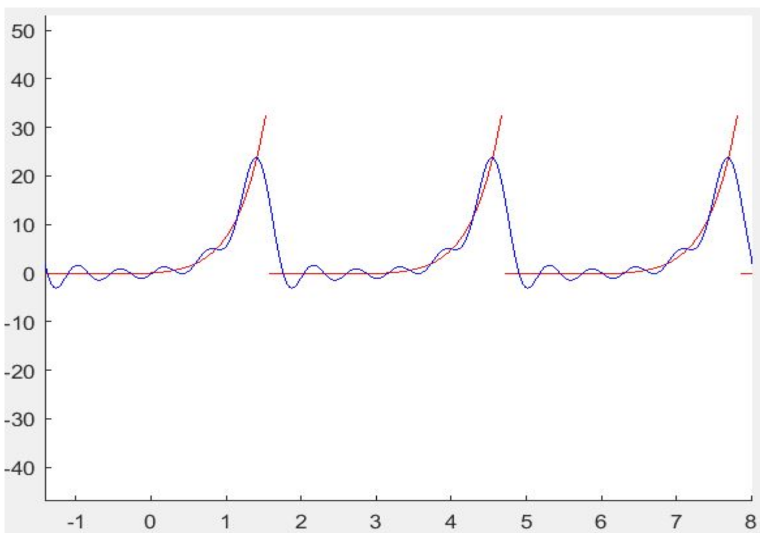
سه جمله اول سری فوریه تابع $x\mathrm{e}^{2x}$ در عکس زیر ضمیمه گشته است.

```
Enter N: 5
Enter k: 3
Enter m: 3
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: -0.5
Enter 1 to see Fourier Series or Enter 2 to see the plot: 1
0.541*cos(2.0*x) - 0.147*cos(4.0*x) + 1.12*sin(2.0*x) - 0.635*sin(4.0*x) + 0.0666*cos(6.0*x) + 0.433*sin(6.0*x) - 0.437
```

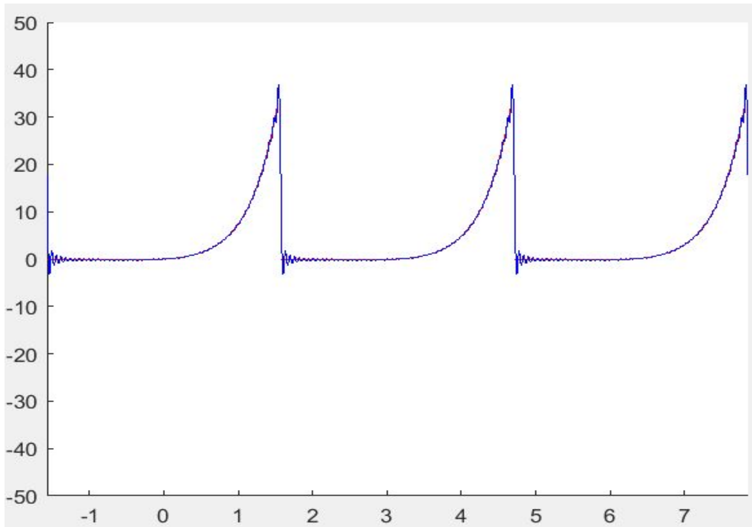
شکل ۲: $x\mathrm{e}^{-0.5x}$

**رسم نمودار توابع و سری فوریه آنها:**

نمودار های تابع $x\mathrm{e}^{2x}$ و سری فوریه آن به صورت زیر رسم شدند:

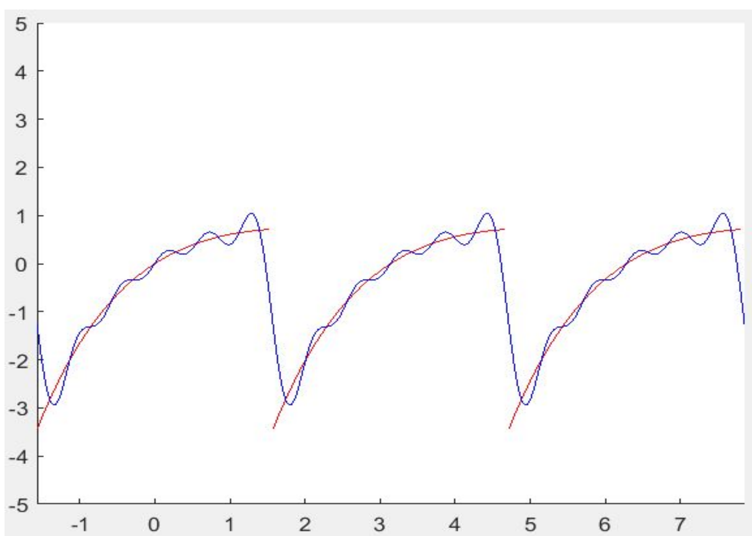



شکل ۳: $N = 5$

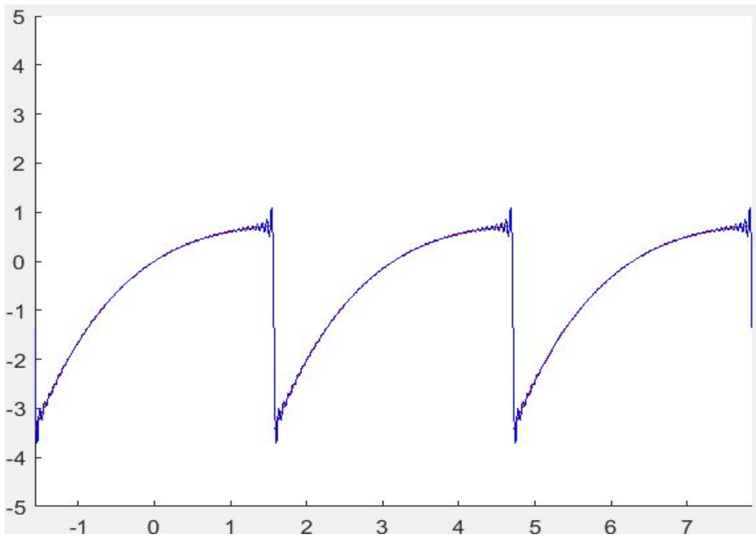



شکل ۴: $N = 50$

نمودار های تابع $x\mathrm{e}^{-0.5x}$ و سری فوریه آن به صورت زیر رسم شدند:




شکل ۵: $N = 5$




شکل ۶: $N = 50$

همینطورر که مشاهده می‌کنید با بالا بردن تعداد جملات سری فوریه تقریب ما دقیق تر می‌شود. **نکته:** با اسکیل نمودار ها جهت نمایش بهتر آن ها در کد بازی کردم.

## ۲ بخش دوم

**حل دستی:**

$$E=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}(f(x)-g(x))^2dx$$
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n cos(\frac{n}{l}x)+b_n sin(\frac{n}{l}x)$$
$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n cos(\frac{n}{l}x)+\beta_n sin(\frac{n}{l}x)$$
$$E=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}(f(x)-g(x))^2dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)dx$$
$$\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{4}(2l)+l\sum_{1}^{N}a_n^2+b_n^2$$
$$\int_{-l}^{l}g^2(x)dx=\frac{\alpha_0^2}{4}(2l)+l\sum_{1}^{N}\alpha_n^2+\beta_n^2$$
$$\int_{-l}^{l}f(x)g(x)=\frac{a_0\alpha_0}{4}(2l)+l\sum_{1}^{N}a_n\alpha_n+b_n\beta_n$$

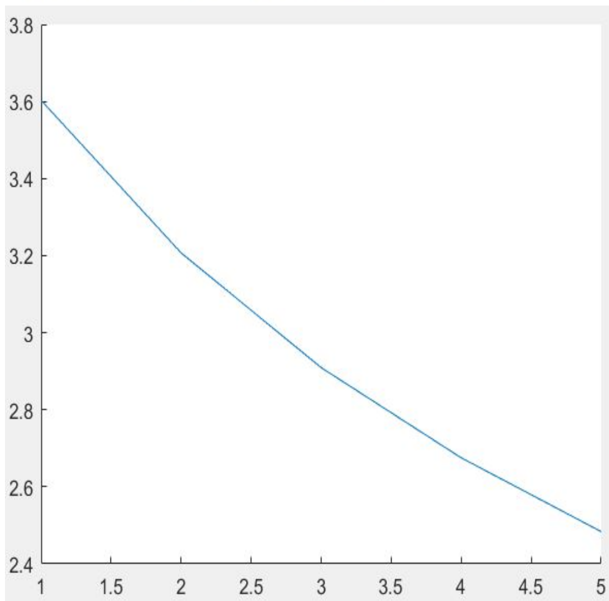
$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}(f(x)-g(x))^2dx\\&=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}a_n^2+b_n^2-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{1}^{N}a_n\alpha_n+b_n\beta_n+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\alpha_n^2+\beta_n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial \alpha_0}=0\longrightarrow\frac{\alpha_0}{2}-\frac{a_0}{2}=0\longrightarrow\alpha_0=a_0,\\&\frac{\partial E}{\partial \alpha_n}=0\longrightarrow -a_n+\alpha_n=0\longrightarrow\alpha_n=a_n,\\&\frac{\partial E}{\partial \beta_n}=0\longrightarrow -b_n+\beta_n=0\longrightarrow\beta_n=b_n,\end{aligned}$$

**بخش کامپیوتری:**

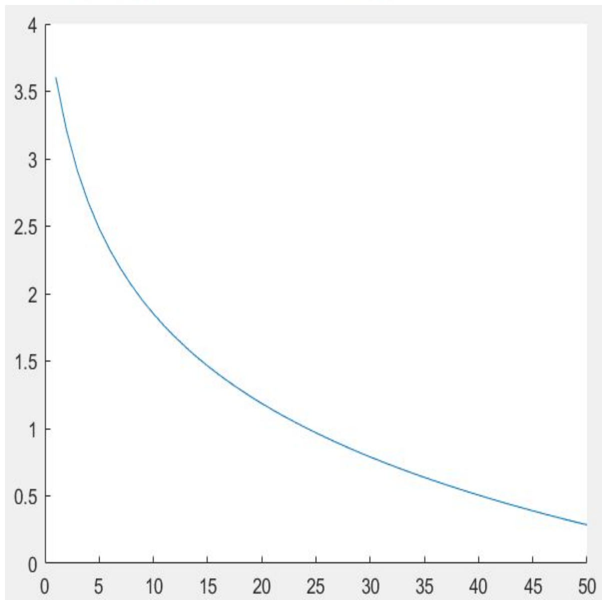
ابتدا عکس های مربوط به خطای تابع $x \exp 2x$ و نمودار های مربوطه ضمیمه گشته است.

```
Enter N:5
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: 2
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
11.984515578860722302458247534853
```



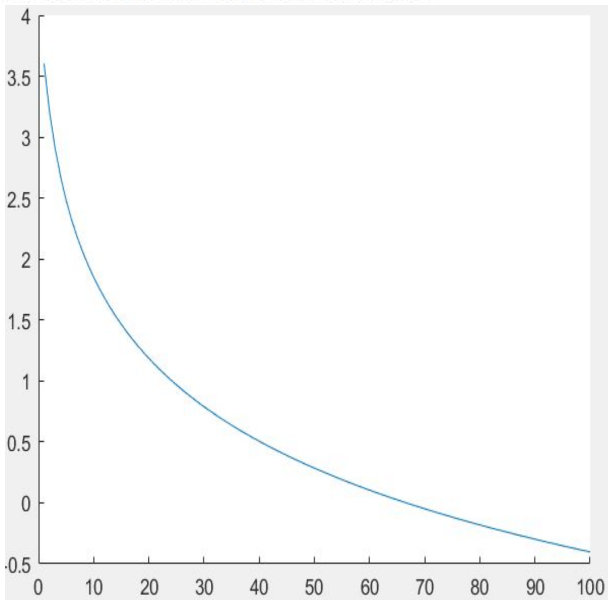

شکل ۷: $N = 5$

```
Enter N:50
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: 2
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
1.33011948157536780517541571738889
```




شکل ۸: $N = 50$

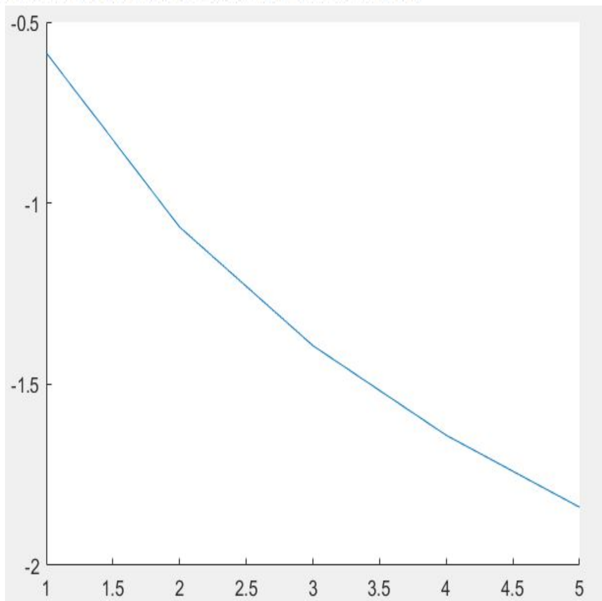
```
Enter N:100
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: 2
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
0.66848493362408883414644393154765
```




شکل ۹: $N = 100$

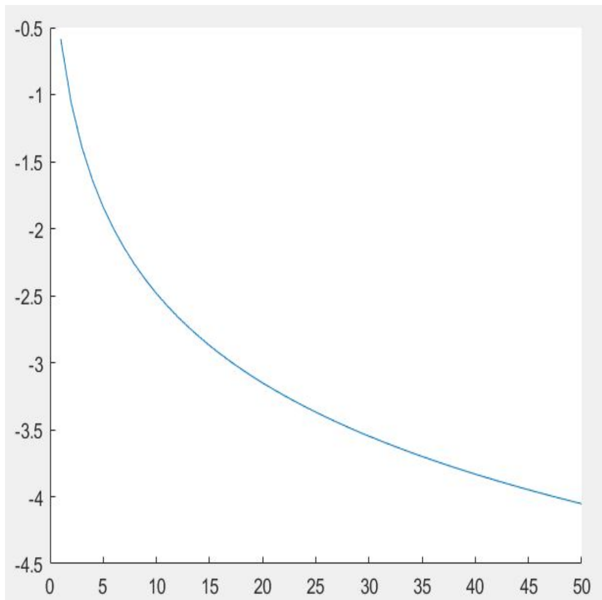
حال عکس های مربوط به خطای تابع $x \exp -0.5x$ و نمودار های مربوطه ضمیمه گشته است.

```
Enter N:5
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: -0.5
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
0.1588608045816253963087658904114
```



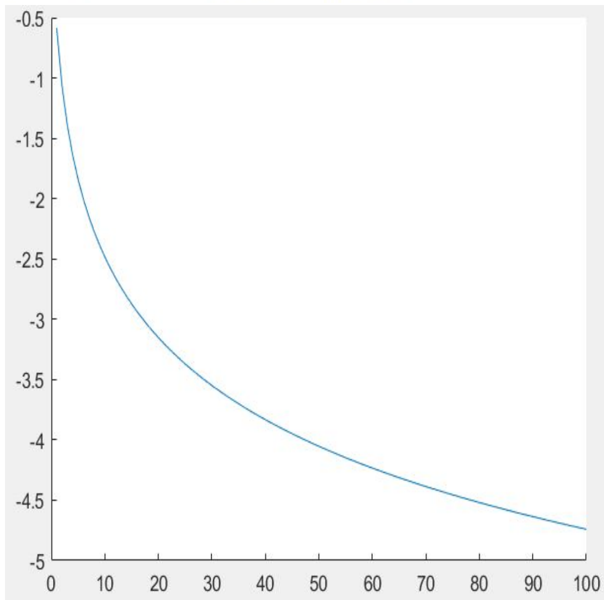

شکل ۱۰: $N = 5$

```
Enter N:50
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: -0.5
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
0.017371323196251567122578067960095
```




شکل ۱۱: $N = 50$

```
Enter N:100
Enter power of polynomial part: 1
Enter power of exponential part: -0.5
Enter 1 to calculate Error or Enter 2 to see plot:1
0.00872919215969286527340777071348 64
```




شکل ۱۲: $N = 100$

شایان ذکر است که ابتدا برای نوشتن این برنامه از انتگرال داده شده در صورت پروژه استفاده کردم که نرم افزار جز در حالت $N = 5$ قادر به برآورده کردن خواسته ما نبود،برای همین از فرم ساده‌تر انتگرال که توسط دکتر محمدپور در کلاس ارائه گشت استفاده کردم:

$$\epsilon = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)dx - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2$$