تاریخ تحویل : 99/9/8 | ریاضیات مهندسی — تکلیف سری پنجم | سروش دین‌فروش مشهد — شماره دانشجویی : 810198472

۱- الف)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=\sin x \\ u(0,t)=T_0 \quad u(\pi,t)=T_1 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases} \xrightarrow{u(x,t)=V(x,t)+u_s(x)} ① \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}=\sin x \\ u_s(0)=T_0 \\ u_s(\pi)=T_1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\dfrac{\partial V}{\partial t}=0 \\ V(0,t)=V(\pi,t)=0 \\ V(x,0)=f(x)-u_s(x) \end{cases}$$

برای بدست آوردن پاسخ پایدار معادله ① را حل می‌کنیم.

$$① \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}=\sin x \\ u_s(0)=T_0 \\ u_s(\pi)=T_1 \end{cases} \qquad \frac{\partial u_s}{\partial x}=\int \sin x\,dx=-\cos x+a \to u_s(x)=\int(a-\cos x)\,dx=ax-\sin x+b$$

$$u_s(0)=T_0 \to b=T_0 \qquad u_s(\pi)=T_1 \to a\pi+T_0=T_1$$

$$\to a=\frac{T_1-T_0}{\pi} \qquad u_s(x)=\left(\frac{T_1-T_0}{\pi}\right)x-\sin x+T_0$$

ب) برای بدست آوردن پاسخ کامل معادله ② را حل می‌کنیم و حاصل را با پاسخ پایدار جمع می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\dfrac{\partial V}{\partial t}=0 \\ V(0,t)=V(\pi,t)=0 \\ V(x,0)=\underbrace{f(x)+\sin x+\left(\frac{T_0-T_1}{\pi}\right)x-T_0}_{g(x)} \end{cases} \qquad V(x,t)=X(x)T(t) \qquad (c=1,\ l=\pi)$$

$$\to \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-p^2$$

$$\to X''+p^2X=0 \to X(x)=A\cos px+B\sin px \qquad X(0)=0\to A=0 \qquad X(\pi)=0$$

$$\to B\sin\pi p=0 \to p\pi=n\pi \to p=n \qquad X_n(x)=B_n\sin nx$$

$$T_n'+p^2T_n=0 \to T_n(t)=C_ne^{-n^2t} \to V_n(x,t)=D_ne^{-n^2t}\sin nx$$

$$D_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$$

چون در تابع $g(x)$ خود $f(x)$ دقیق معلوم نشده است،

نمی‌توان انتگرال $g(x)$ را که آن ها داشته می‌شود را دقیق و کامل حساب کرد.

$$D_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}\left(\frac{T_1-T_0}{\pi}\right)x\,dx+\int_0^{\pi}-T_0\sin nx\,dx\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \sin nx\, dx = 0 \quad \text{for } n \neq 1 \qquad \text{if } n=1 \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{T_1 - T_0}{\pi}\right) x\, dx = \pi\left(\frac{T_1 - T_0}{2}\right) \qquad \int_0^{\pi} -T_0 \sin nx\, dx = \frac{T_0\left((-1)^n - 1\right)}{n}$$

$$D_1 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(T_1 - T_0) - 2T_0\right)$$

علت اینکه D_1 را جدا نوشتم به این علت است که به ازای $n=1$ صفر حاصل نمی‌شود.

$$n \in O,\neq 1 \rightarrow D_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx + \frac{\pi}{2}(T_1 - T_0) - \frac{2T_0}{n}\right)$$

$$n \in E \rightarrow D_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx + \frac{\pi}{2}(T_1 - T_0)\right)$$

پس در نهایت : $V(x,t) = D_n e^{-n^2 t}$

پاسخ کل $\rightarrow U(x,t) = V(x,t) + U_s(x) = D_n e^{-n^2 t} + \left(\frac{T_1 - T_0}{\pi}\right)x - \sin x + T_0$

2- به نظرم با روش دالامبر حل کردیم خیلی ساده‌تر از انتگرال فوریه حل می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ U(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| < 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \quad U_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = x + 2t \\ z = x - 2t \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{2\partial^2 u}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - \frac{2\partial^2 u}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ جاگذاری در معادله

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial z} = 0 \xrightarrow{\int dw} \frac{\partial u}{\partial z} = h(z) \xrightarrow{\int dz} u(w,z) = \int h(z)\,dz + \psi(w) = \phi(z) + \psi(w)$$

$$\xrightarrow[z = x - 2t]{w = x + 2t} U(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

حال شروط مرزی زمانی را اعمال می‌کنیم.

$$U(x,0)=\underbrace{\begin{cases}1 & -2<x<2\\ 0 & x>2 \text{ or } x<-2\end{cases}}_{f(x)} \rightarrow \phi(x)+\psi(x)=f(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

$$\rightarrow -c\phi'(x)+c\psi_1'(x)=0$$

$$\phi'(x)=\psi'(x) \xrightarrow{\int} \phi(x)-\psi_1(x)=K \qquad \begin{cases}\phi(x)+\psi(x)=f(x)\\ \phi(x)-\psi_1(x)=K\end{cases}$$

$$\rightarrow \phi(x)=\frac{f(x)+K}{2} \qquad \psi_1(x)=\frac{f(x)-K}{2} \qquad \frac{x\rightarrow x+2t\ (\text{for } \psi)}{x\rightarrow x-2t\ (\text{for } \phi)}$$

$$\phi(x-2t)=\frac{f(x-2t)+K}{2} \qquad \psi_1(x+2t)=\frac{f(x+2t)-K}{2}$$

$$\rightarrow U(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x-2t)+f(x+2t)\right) \rightarrow U(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & |x-2t|<2\\ 0 & |x-2t|>2\end{cases}$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2} & |x+2t|<2\\ 0 & |x-2t|>2\end{cases}$$

در واقع برای حل این سوال از تکنیک دالامبر جهت قرار دادن مطابق ضرایب عیب و غریب برای انتگرال فوریه استفاده کردیم.

3-

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0\\ u(x,0)=e^{-ax^2} \quad \lim_{x\rightarrow\infty}u(x,t): \text{کراندار}\\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \quad (x>0)\ (t>0)\end{cases}$$

تکنیک جداسازی: $u=X(x)T(t)$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T \quad \frac{\partial u}{\partial t}=XT'$

$$\rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{1}{c^2}\frac{T'}{T}=-k^2$$

صرفاً $-k^2$ جوابی ارزشمند است.

$$X''+k^2X=0 \rightarrow X(x)=A\cos kx+B\sin kx \qquad U_x(0)=0 \rightarrow X'(0)=0 \rightarrow BK\cos kx=0 \ (x=0)$$

$$\rightarrow BK=0 \longrightarrow B=0 \rightarrow X(x)=A\cos kx$$

دقت کنیم که به دلیل کراندار بودن $\cos kx$ پس

$$T'+k^2c^2T=0 \rightarrow T(t)=Ce^{-k^2c^2t}$$

کراندار $\lim_{x\rightarrow\infty}u(x,t)=$ هم برقرار است.

$$U(x,t,k)=A(k)e^{-k^2c^2t}\cos kx$$

چون K گسسته نیست باید با انتگرال فوریه جلو برویم.

سروش عسل فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

$u(x,t)=\int_0^\infty A(k)e^{-k^2c^2t}\cos kx\,dx$ $\qquad u(x,0)=f(x)=e^{-ax^2}$

$e^{-ax^2}=\int_0^\infty A(k)\cos kx\,dx \to$ انتگرال فوریه

چون مسئله نیم محدود است و چون داخل انتگرال فوریه فقط عبارت کسینوس وجود دارد پس تابع را گسترش زوج داده و ضریب انتگرال فوریه کسینوسی را حاصل می‌کنیم.

$$A(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos kx\,dx$$

$* \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos kx\,dx \qquad ax^2=v^2 \to 2ax\,dx=2v\,dv \to ax\,dx=v\,dv$

$\to \frac{1}{\sqrt a}\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\frac{kv}{\sqrt a}\,dv \qquad \frac{k}{\sqrt a}=t \to \frac{1}{\sqrt a}\int_0^\infty e^{-v^2}\cos tv\,dv=\frac{1}{\sqrt a}f(t)$

پس مشتق گیری می‌کنیم ($\frac{\partial}{\partial t}$) و با جزء به جزء جلو می‌رویم

$f'(t)=\int_0^\infty -ve^{-v^2}\sin vt\,dv \xrightarrow{\text{دو بار جزء به جزء}} f'(t)=-\frac{t}{2}f(t) \to f'(t)+\frac{t}{2}f(t)=0$

$\to f(t)=Ae^{-t^2/4} \qquad f(0)=\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\frac{\sqrt\pi}{2}$ از ریاضی عمومی 2 به خاطر داریم:

$\to f(t)=\frac{\sqrt\pi}{2}e^{-t^2/4} \to \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos kx\,dx=\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt a}e^{-\frac{t^2}{4}}=\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt a}e^{-\frac{k^2}{4a^2}}$

$A(k)=\frac{1}{\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{k^2}{4a}} \qquad u(x,t)=\int_0^\infty A(k)e^{-k^2c^2t}\cos kx\,dk$

$=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{k^2}{4a}}\cdot e^{-k^2c^2t}\cos kx\,dk \quad \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_0^\infty e^{-k^2(c^2t+\frac{1}{4a})}\cos kx\,dk$

انتگرال عجیب، ضریب * را اگر دوباره استفاده کنیم جواب با شکل زیر ساده می‌شود.

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4ac^2t}}e^{-\left(\frac{ax^2}{1+4ac^2t}\right)} \qquad (x\geq 0,\ t\geq 0)$$

۴- تکنیک حل جداسازی متغیرهاست.

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(a,t)=0 \quad u(0,t)\ \text{کراندار} \\ u(r,0)=f(r) \end{cases}$$

$$u = R(r)T(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = R'T \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = RT'$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR')T - \frac{1}{c^2}RT' = 0 \xrightarrow{\div u = RT} \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = \frac{1}{c^2}\frac{T'}{T} = \begin{cases} k^2 \times \\ 0 \times \\ -k^2 \checkmark \end{cases}$$

حالت $-k^2$ (بقیه جواب‌های بدیهی دارند): $\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = -k^2 \longrightarrow R'' + \frac{1}{r}R' + k^2R = 0$

$$\longrightarrow r^2R'' + rR' + k^2r^2R = 0 \qquad x \triangleq kr \longrightarrow \underbrace{x^2R_{xx} + xR_x + x^2R = 0}_{\text{بسل مرتبه صفر}}$$

$$R(x) = AJ_0(x) + BN_0(x) \xrightarrow{x=kr} R(r) = AJ_0(kr) + BJ_0(kr)$$

$$u(0,t) = \text{کراندار} \longrightarrow B = 0 \qquad u(a,t) = 0 \longrightarrow J_0(ka) = 0 \longrightarrow R(r) = AJ_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)$$

α_{m0}: صفر m ام بسل مرتبه 0

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'_m}{T} = -k^2 \longrightarrow T'_m + \left(\frac{\alpha_{m0}c}{a}\right)^2 T_m = 0 \qquad \lambda_m = \frac{\alpha_{m0}c}{a}$$

$$T'_m + \lambda_m^2 T_m = 0 \longrightarrow T_m = ce^{-\lambda_m^2 t} \qquad u_m(r,t) = E_m e^{-\lambda_m^2 t} J_0\frac{\alpha_{m0}}{a}r \quad m=1,2,\dots$$

باید سیگما بگیریم و شرط اولیه را ارضا کنیم.

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m e^{-\lambda_m^2 t} J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)$$

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right) = f(r) \qquad \int_0^a rJ_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)J_0\left(\frac{\alpha_{p0}}{a}r\right)dr = \begin{cases} 0 & p \neq m \\ \frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_{m0}) & (p=m) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_m \text{ یافتن}} \int_0^a rJ_0\left(\frac{\alpha_{p0}}{a}r\right) \sum_{m=1}^{\infty} E_m J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)dr = \int_0^a f(r)rJ_0\left(\frac{\alpha_{p0}}{a}r\right)dr$$

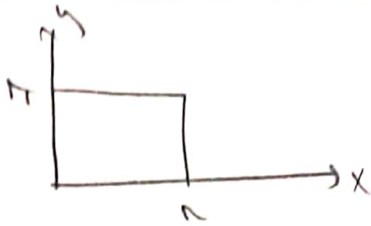
$$\xrightarrow[m=p]{\text{متعامد}} \sum_{m=1}^{\infty} E_m \int_0^a rJ_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)^2 dr = \int_0^a rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)dr \longrightarrow E_m\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_{m0}) = \int_0^a rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a}r\right)dr$$

$$E_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a} r\right) dr \qquad u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty} E_m e^{-\lambda_m^2 t} J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{a} r\right)$$

$$\lambda_m = \frac{\alpha_{m0} \cdot c}{a}$$

6) ز) ابتدا) - الف)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0 \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) \end{cases}$$



تکنیک طبق معمول همان جداسازی است.

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \rightarrow X''YT+XY''T-\frac{1}{c^2}XYT'=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } u=XYT}$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}-\frac{1}{c^2}\frac{T'}{T}=cte=\begin{cases} k^2 & \text{بی ارزش} \times \\ 0 & \text{بی ارزش} \times \\ -k^2 & \text{با ارزش} \checkmark \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{X''}{X}=-k_x^2 \\ \dfrac{Y''}{Y}=-k_y^2 \\ \dfrac{T'}{T}=-(k_x^2+k_y^2) \end{cases}$$

$$\frac{X''}{X}=-k_x^2 \rightarrow X''+k_x^2X=0 \rightarrow X(x)=A\cos k_x x+B\sin k_x x$$

$$u(0,y,t)=0 \rightarrow X(0)=0 \rightarrow A=0 \qquad u(\pi,y,t)=0 \rightarrow B\sin k_x\pi=0$$

$$\rightarrow k_x\pi=m\pi \rightarrow k_x=m \quad (m=1,2,\dots) \qquad X_m(x)=B\sin mx$$

$$\frac{Y''}{Y}=-k_y^2 \rightarrow Y''+k_y^2Y=0 \rightarrow Y(y)=C\cos k_y y+D\sin k_y y$$

$$u(x,0,t)=0 \rightarrow Y(0)=0 \rightarrow C=0 \qquad u(x,\pi,t)=0 \rightarrow D\sin k_y\pi=0$$

$$\rightarrow k_y\pi=n\pi \rightarrow k_y=n \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'_{mn}}{T_{mn}}=-(k_x^2+k_y^2)=-(m^2+n^2) \rightarrow T'_{mn}+c^2(m^2+n^2)T_{mn}=0 \rightarrow T_{mn}(t)=E_{mn}e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

باید برای به دست آوردن پاسخ نهایی روی m و n تنها جمع بزنیم (پس از ضرب کردن X، Y، T در هم).

$$u_{mn}(x,y,t)=F_{mn}\sin mx\sin ny\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

$$\rightarrow u(x,y,t)=\sum_m\sum_n u_{mn}(x,y,t)=\sum_m\sum_n F_{mn}\sin mx\sin ny\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

سروش [illegible]
شماره دانشجویی: 810198472

ریاضیات مهندسی
تکلیف سری پنجم

تاریخ تحویل: ۹۹/۹/۱۸

حال می‌خواهیم F_{mn} را پیدا کنیم.

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}\sin mx\sin ny}_{\text{سری فوریه دوگانه}}$$

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sin mx\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}\sin ny}_{\text{صرفاً تابعیت } y \text{ ، } G_m(y)}\Big)\rightarrow f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}G_m(y)\sin mx$$

ضریب فوریه f در راستای x موقع گسترش می‌گردد.

$$G_m(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}F_{mn}\sin ny$$

$$\rightarrow F_{mn}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\,dx\Big)\sin ny\,dy$$

$$\rightarrow F_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy \qquad QED$$

ب) فرم کلی پاسخ، F_{mn} را در قسمت الف به دست آوردیم. حال جایگذاری می‌کنیم:

$$F_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)y(\pi-y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\Big(\frac{2-2\cos\pi m}{m^3}\Big)y(\pi-y)\sin ny\,dy=\frac{4}{\pi^2}\Big(\frac{2-2\cos\pi m}{m^3}\Big)\Big(\frac{2-2\cos\pi n}{n^3}\Big)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\frac{(2-2\times(-1)^n)^2}{n^3m^3}=\begin{cases}\frac{16}{\pi n^3m^3} & m,n\in O\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m\text{ فرد}}\sum_{n\text{ فرد}}\frac{16}{\pi n^3m^3}\sin mx\sin ny\,e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

سروش حسن فروش مشهد — شماره دانشجویی: 810198472

5-

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=0 \\ u(a,\varphi,t)=0 \quad u(0,\varphi,t)= \text{کراندار} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}u(r,0,t)=\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\pi,t)=0 \\ u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi) \end{cases}$$

جدا سازی متغیر ها

$$u(r,\varphi,t)=R(r)\Phi(\varphi)T(t)$$

$$\to \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=\frac{1}{k}\frac{T'}{T}=\begin{cases}p^2 & \times \\ 0 & \times \\ -p^2 & \checkmark\end{cases}$$

حالت $-p^2$: $\frac{r(rR')'}{R}+\frac{\Phi''}{\Phi}=-p^2r^2 \to \frac{\Phi''}{\Phi}=\frac{-r(rR')'}{R}-p^2r^2=\begin{cases}\nu^2 & \times \\ 0 & \times \\ -\nu^2 & \checkmark\end{cases}$

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-\nu^2 \to \Phi''+\nu^2\Phi=0 \to \Phi(\varphi)=A\cos\nu\varphi+B\sin\nu\varphi$$ اعمال شرایط مرزی

$$\to \Phi'(\varphi)=-A\nu\sin\nu\varphi+B\nu\cos\nu\varphi \qquad \Phi'(0)=\Phi'(\pi)=0 \to B=0,\ n=\nu$$

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi \qquad x=pr \to x^2R_{xx}+xR_x+(x^2-n^2)R=0$$

$$\to R_n(r)=C_nJ_n(pr) \to u(a,\varphi,t)=0 \quad R_n(a)=0 \quad pa=\alpha_{mn} \to p=\frac{\alpha_{mn}}{a}$$

$$\to R_n(r)=C_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right) \qquad T'_{mn}+p^2kT_{mn}=0 \to T=D_{mn}e^{-p^2kt}$$

$$\to u=R\Phi T \to u(r,\varphi,t)=\sum_m\sum_n F_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)e^{-p^2kt}\cos n\varphi$$

$$\to u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi)=\sum_m\sum_n F_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)e^{-p^2kt}\cos n\varphi$$

$$=\sum_m F_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)\sum_n\cos n\varphi=f(r,\varphi)$$

$$F_{mn}=\frac{4}{a^2J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^\pi r f(r,\varphi)J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}r\right)e^{-\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2kt}\cos n\varphi\, dr\, d\varphi$$

از آنجایی که برای این معادله "موج صرفاً" تا از شرایط مرزی داده شده است استنباط من این است که باقی شروط را باید خودمان بنویسیم!

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \\ u(b,\varphi,t)=0 \qquad u(0,\varphi,t)=\text{کراندار} \\ u(r,0,t)=u(r,\pi,t)=0 \quad (\text{چون فیکس شده برای صفحات}) \\ u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi) \quad \text{شرط حالت اولیه} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad \text{شرط سرعت اولیه} \end{cases}$$

جداسازی متغیرها:

$$u(r,\varphi,t)=R(r)\Phi(\varphi)T(t)$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=\begin{cases}k^2 & \times\\ 0 & \times\\ -k^2 & \checkmark\end{cases}$$

حالت $-k^2$: $\frac{r(rR')'}{R}+\frac{\Phi''}{\Phi}=-k^2r^2 \qquad \frac{\Phi''}{\Phi}=-\frac{r(rR')'}{R}-k^2r^2=\begin{cases}v^2 & \times\\ 0 & \times\\ -v^2\end{cases}$

$$\Phi''+v^2\Phi=0 \longrightarrow \Phi(\varphi)=A\cos v\varphi+B\sin v\varphi \xrightarrow[\text{مرزی}]{\text{اعمال شرایط}} \Phi(0)=\Phi(\pi)=0$$

$$\longrightarrow A=0,\ \xrightarrow{v=n} \Phi_n(\varphi)=B_n\sin n\varphi$$

$$\underbrace{x^2R_{xx}+xR_x+(x^2-n^2)R=0}_{\text{بسل}} \longrightarrow R(x)=CJ_n(x)+DN_n(x) \xrightarrow{x=kr}$$

$$R(r)=CJ_n(kr)+DN_n(kr) \xrightarrow[\text{مرزی}]{\text{اعمال شرایط}} D=0 \quad R_n(r)=C_nJ_n(kr)$$

$$\longrightarrow u(b,\varphi,t)=0 \longrightarrow kb=\alpha_{mn} \longrightarrow k_m=\frac{\alpha_{mn}}{b} \quad R_n(r)=C_{mn}J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{b}r\right)$$

$$T''_{mn}+k^2c^2T_{mn}=0 \longrightarrow T_{mn}(t)=E_{mn}\cos kct+F_{mn}\sin kct$$

$$\longrightarrow u(r,\varphi,t)=\sum_m\sum_n\left(Z_{mn}\cos kct+X_{mn}\sin kct\right)J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{b}r\right)\sin n\varphi$$

که در این پاسخ با تشکیل شدن ضرایب B_n C_{mn} در بقیه ضرایب به طور خلاصه آن‌ها را Z_{mn}, X_{mn} نوشتیم.

Scanned by CamScanner