+10

نام و نام خانوادگی: پیروش مبین فروزش مقدم شماره دانشجویی: 810198472	ریاضیات مهندسی تکلیف سری ۱	تاریخ تحویل: ۹۹/۱۱/۶

۱- الف)

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z^2+4)}$ آزمون نسبت: $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-n(z^2+4)}\cdot e^{-(z^2+4)}}{e^{-n(z^2+4)}}\right| = |e^{-(z^2+4)}|$ $\quad L<1 \to |e^{-(x^2-y^2+4+j2xy)}|<1$

$= |e^{y^2-x^2-4}\cdot e^{-j2xy}|<1 \to e^{y^2-x^2-4}<1 \to y^2-x^2-4<0 \to y^2-x^2<4$

$\to$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z^2+4)} = \frac{1}{e^{z^2+4}} + \underbrace{\frac{1}{e^{2(z^2+4)}}+\cdots}$$

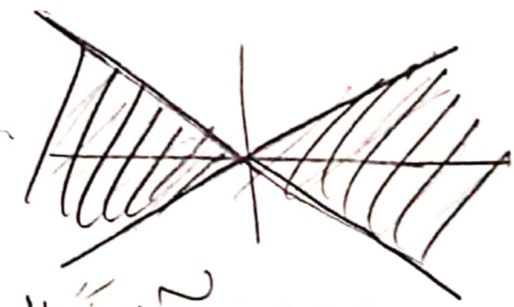
$$1+A = \frac{1}{1-\frac{1}{e^{z^2+4}}} = \frac{e^{z^2+4}}{e^{z^2+4}-1}$$

$$\to A = \text{Sum} = \frac{e^{z^2+4}}{e^{z^2+4}-1} - 1 = \frac{1}{e^{z^2+4}-1}$$

ب)

$\sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2}$ آزمون نسبت: $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)ze^{-(n+1)z^2}}{nze^{-nz^2}}\right| = |e^{-z^2}|$ $\quad L<1 \to |e^{-z^2}| = |e^{y^2-x^2}\cdot e^{-j2xy}|<1$

$\to e^{y^2-x^2}<1 \xrightarrow{\ln} y^2-x^2<0 \quad y^2<x^2 \to$ 

$\sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2}$ $\quad nze^{-nz^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-nz^2}\right)'$ حاصل سری فوق را یافته، از آن مشتق می‌گیریم:

$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz^2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz^2} = \underbrace{e^{-z^2}+e^{-2z^2}+\cdots}_{A}$ $\quad 1+A = \frac{1}{1-\frac{1}{e^{z^2}}} = \frac{e^{z^2}}{-1+e^{z^2}}$

$A = \text{Sum} = \frac{e^{z^2}}{-1+e^{z^2}} - 1 = \frac{1}{e^{z^2}-1} \to -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz^2} = \frac{+1}{2(1-e^{z^2})}$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{z^2}}\right)' = \frac{ze^{z^2}}{(e^{z^2}-1)^2}$$

تاریخ تحویل : 99/11/6 — ریاضیات مهندسی، تکلیف سری دهم — دانشجو: [illegible]، شماره دانشجویی : 810198472

2- الف) در همه جا بجز z=2 تحلیلی می‌باشد.

$g(z)=(z+1)\sin(\frac{1}{z-2})$

$s=z-2 \to g(s)=(s+3)\sin(\frac{1}{s})$

برای s+3 نیازی به نوشتن سری لوران نیست. ولی برای سینوس باید بنویسیم.

$\sin(s) \xrightarrow{\text{لوران}} s-\frac{s^3}{3!}+\frac{s^5}{5!}$

$\to \sin(\frac{1}{s})=\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{s^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{s^5}}{5!}-\frac{\frac{1}{s^7}}{7!}$

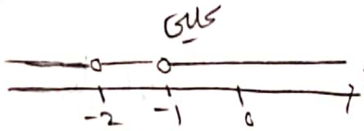
$\to (s+3)(\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{s^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{s^5}}{5!}-\frac{\frac{1}{s^7}}{7!}) \xrightarrow{s=z-2}$

$\to (z-2)[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^3 3!}+\frac{1}{(z-2)^5 5!}+\dots]+3[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^3 3!}+\dots]$

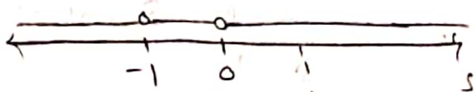
$=1+\frac{3}{z-2}-\frac{1}{3!(z-2)^2}-\frac{3}{3!(z-2)^3}+\dots$

ب) تحلیلی در همه جا بجز $z=-1$ ، $z\in\mathbb{R}$

$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$



صورت کسر را $s=z+1 \to f(s)=\frac{s-1}{s(s+1)}$



به غیر از نقاط تو خالی تحلیلی است. حال باید سری لوران $f(s)$ را حول $s=0$ حاصل کنیم.

$f(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s(s+1)}$ $0<|s|<1$ $f(s)=\frac{1}{1+s}-\frac{1}{s}(\frac{1}{1+s})$

سری هندسی است.

$\frac{1}{1+s}=1-s+s^2-s^3+\dots$ .. Laurent: $1-s+s^2-s^3+\dots-\frac{1}{s}(1-s+s^2-s^3+\dots)$

$=(-\frac{1}{s}+2-2s+2s^2-2s^3+2s^4\dots)$ $0<|z+1|<1 \to f(z)=(\frac{-1}{z+1}+2-2(z+1)$

$+2(z+1)^2-2(z+1)^3+2(z+1)^4\dots)$

$$|s|>1 \quad f(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

به فرم حول منرات.

$$\frac{1}{1+s} \xrightarrow{\text{فاکتور از } s} \frac{1}{s(1+\frac{1}{s})} \therefore f(s) = \frac{1}{s(1+\frac{1}{s})} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{s}}\right)$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{s}} \xrightarrow{\text{taylor}} 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \dots$$

$$\therefore f(s) \rightarrow \text{Laurent}: \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) - \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \dots\right)$$

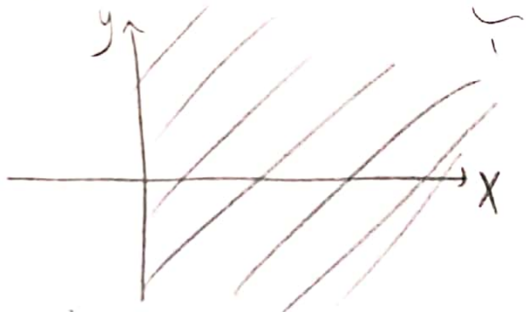
$$= \left(-\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^5} \dots\right)$$

$$f(z) = \left(\frac{-2}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)} + \frac{2}{(z+1)^3} - \frac{2}{(z+1)^4} + \frac{2}{(z+1)^5}\right) \quad |z+1|>1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz} \quad \text{آزمون نسبت}: \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{-(n+1)z}}{e^{-nz}}\right| = |e^{-z}|$$

-3

$$|e^{-z}|<1 \xrightarrow{z=x+jy} |e^{-x}\cdot e^{-jy}|<1 \therefore e^{-x}<1 \xrightarrow{\ln} -x<0 \rightarrow x>0$$

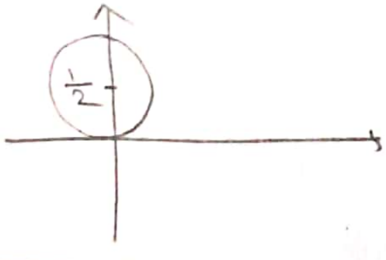


①

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2z-j)^n \quad \text{آزمون نسبت} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2z-j)^{n+1}}{n(2z-j)^n}\right|$$

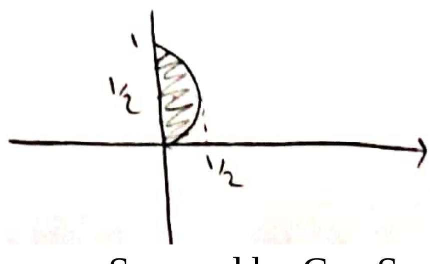
$$\therefore \lim_{n\to\infty}|(2z-j)| = |2z-j|<1 \xrightarrow{z=x+jy} |2x+(2y-1)j|<1$$

$$\therefore \sqrt{4x^2+(2y-1)^2}<1 \rightarrow \sqrt{x^2+(y-1/2)^2}<\frac{1}{2} \longrightarrow R=\frac{1}{2}, (0,\frac{1}{2})$$ درون دایره‌ای به مرکز



②

① ∩ ② $\longrightarrow$



6- الف)

$$f(z)=e^z\sinh(\tfrac{1}{z}) \qquad e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\sinh(\tfrac{1}{z})=\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\frac{1}{z^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{z^5}}{5!}+\frac{\frac{1}{z^7}}{7!}+\cdots$$

$$f(z)=e^z\sinh(\tfrac{1}{z})=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)(\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\frac{1}{z^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{z^5}}{5!}+\cdots)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرایب } \frac{1}{z} \text{ بیابیم}} \operatorname{Res}[f(z)]=1+\frac{1}{2!\times3!}+\frac{1}{4!\times5!}+\frac{1}{6!\times7!}+\frac{1}{8!\times9!}+\cdots$$

ب)

$$f(z)=ze^{\frac{-1}{z-1}} \quad \xrightarrow{s=z-1} f(s)=(s+1)e^{\frac{-1}{s}}$$

$$=(s+1)(1-\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{s^2}}{2!}-\frac{\frac{1}{s^3}}{3!}+\cdots) \rightarrow \operatorname{Res}[f(z)]=-1+1/2=\frac{-1}{2}$$

7- ه

$$\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\,d\theta \qquad \cos(\cos\theta)=\frac{e^{j\cos\theta}+e^{-j\cos\theta}}{2}$$

$$\cosh(\sin\theta)=\frac{e^{j\sin\theta}+e^{-j\sin\theta}}{2} \quad\rightarrow \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}e^{j\cos\theta+\sin\theta}+e^{j\cos\theta-\sin\theta}+e^{-j\cos\theta+\sin\theta}+e^{-j\cos\theta-\sin\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}(\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{j\cos\theta+\sin\theta}+e^{j\cos\theta-\sin\theta}}_{I_1})+\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{-j\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta}_{I_2}+\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{-j\cos\theta-\sin\theta}\,d\theta}_{I_3})$$

$$I_1:\ z=e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)} \rightarrow dz=-je^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}d\theta \rightarrow d\theta=\frac{-dz}{jz}$$

$$I_1=\frac{1}{4}\oint\frac{(e^z+e^{\frac{1}{z}})\,dz}{-jz}=\frac{-1}{4j}\times2\pi j\times2=+\pi$$

$$I_2=\frac{1}{4}\oint\frac{e^z}{jz}dz=\frac{1}{4j}\times2\pi j\times1=\frac{\pi}{2} \qquad (z=e^{j(\theta-\pi/2)})$$

$$I_3=\frac{1}{4}\oint\frac{e^z}{jz}dz=\frac{1}{4j}\times2\pi j\times1=\pi/2 \qquad (z=-e^{j(\theta-\pi/2)})$$

$$\rightarrow I=I_1+I_2+I_3=+\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=2\pi$$

$\frac{5}{10}$ | تاریخ تحویل: 99/11/6 | ریاضیات مهندسی کلاس سری دوم | پیروزی مس فروش شهد — شماره دانشجویی: 8619472

2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} \qquad z=e^{j\theta} \rightarrow dz = je^{j\theta}d\theta \,,\; d\theta = \frac{dz}{jz} \qquad \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{دایره یک}} \oint \frac{\frac{dz}{jz}}{\sqrt{2}-\frac{z^2+1}{2z}} = \oint \frac{dz}{jz\left(\frac{-z^2+2\sqrt{2}z-1}{2z}\right)} = \oint \frac{-2j\,dz}{-z^2+2\sqrt{2}z-1} = 2\pi j \sum R_{es} f(z)$$

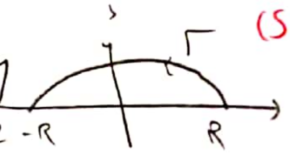
$$f(z) = \frac{-2j}{-z^2+2\sqrt{2}z-1} \qquad -z^2+2\sqrt{2}z-1=0 \rightarrow z_1 = \sqrt{2}+1 \longrightarrow \text{بیرون دایره یک}$$

$$z_2 = \sqrt{2}-1 \rightarrow \checkmark$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi j\left(\frac{-2j}{-2z_2+2\sqrt{2}}\right) = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

5)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+2} = \operatorname{Im}\Big[2\pi j \sum_{\text{بالای محور}} Res\, \frac{ze^{jz}}{z^2+2z+2} + \pi j \sum_{\text{روی محور}} Res\, \frac{ze^{jz}}{z^2+2z+2}\Big]$$



$$z^2+2z+2=0 \rightarrow z=-1+j \checkmark \quad z=-1-j \times \text{پایین} \qquad Res\,(f(z))_{z=-1+j}$$

$$\xrightarrow{\text{دستور هوپیتال}} \frac{(-1+j)e^{-1-j}}{2j} = \frac{(j+1)e^{-1-j}}{2} = \frac{j+1}{2}(\cos 1 - j\sin 1)$$

$$\rightarrow \int = \operatorname{Im}\left[\frac{j+1}{2}\left(\cos 1 - j\sin 1\right)\right] = \pi/e\,(\cos 1+\sin 1)$$

7)

$$\oint_{|z|=2} (z+2)^5 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)dz = 2\pi j\; Res\,(f(z))_{z=1}$$

چون تکینی اساسی دارد سری لوران می‌نویسیم (|z|>1)

$$f(z) = (z+2)^5\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \qquad s=z-1 \rightarrow f(s) = (s+3)^5\sin\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= (s+3)^5\left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{s^3}}{3!} + \frac{\frac{1}{s^5}}{5!} + \cdots\right)$$

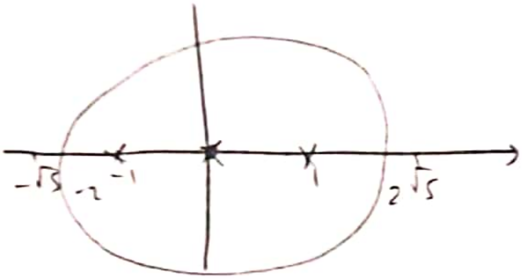
$$f(z) = (z-1+3)^5\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{\frac{(z-1)^3}{3!}} + \frac{1}{\frac{(z-1)^5}{5!}} + \cdots\right) \quad \int = 2\pi j\left[243-45+\tfrac{1}{8}\right] = 396.25\pi j$$

۱۰)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^6+8z^4+5z^2} = 2\pi j \sum \operatorname{Res} f(z) \qquad z^6-6z^4+5z^2=0$$

$$\to z^2(z^4-6z^2+5)=0 \qquad z^2=t \to t(t^2-6t+5) \qquad t=0,\ t=1,\ t=5$$

$$\to z=0 \quad z^2=1 \to z=e^{jk\pi}\ \ k=0,1 \qquad z^2=5 \to z=\sqrt5 e^{jk\pi}\ \ k=0,1$$



$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^6-6z^4+5z^2} = \operatorname{Res}\{f(z)\}_{z=1,-1,0}$$

قطب ساده

$$\operatorname{Res}(f(z))\big|_{z=z_0} = \frac{z_0^2+1}{6z_0^5-24z_0^3+10z_0}$$ برای قطب‌های ساده

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=1} = \frac{2}{-8} = -\frac14 \qquad \operatorname{Res} f(z)_{z=-1} = \frac{2}{-6+24-10} = \frac14$$

قطب مرتبه ۲ $(z=0)$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+1}{z^4-6z^2+5}\right)_{z=0} = 0$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^6-6z^4+5z^2} = 2\pi j\left(\frac14-\frac14+0\right) = 0$$

-۴

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta = \frac12\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\left(e^{j(n\theta-\sin\theta)}+e^{-j(n\theta-\sin\theta)}\right)d\theta$$

$$\frac12\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta-j\sin\theta}e^{jn\theta}\,d\theta \qquad z=e^{+j\theta} \to dz=+je^{+j\theta}d\theta \qquad d\theta=+\frac{dz}{jz}$$

$$\frac{1}{2j}\oint e^{\frac1z}z^{n-1}\,dz \xrightarrow{\text{لوران}} n\operatorname{Res}\{f(z)\}_{z=0} \to z^{n-1}\left(1+\frac1z+\frac{1}{z^2 2!}+\dots+\frac{1}{z^n n!}\right)\times n \to \frac{n}{n!}$$

$$\to \frac{1}{2j}\oint e^{\frac1z}z^{n-1}\,dz = \frac{\pi}{n!} \qquad \frac12\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+j\sin\theta}e^{-jn\theta}\,d\theta \qquad z=e^{j\theta} \to d\theta=\frac{dz}{jz}$$

$$= \frac{1}{2j}\oint \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{\pi}{n!} \to \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

۱- الف) نقاط شاخه نقاطی هستند که تابع در آن از مرتبه مشتق نپذیرفت. حال به دلیل وجود $\sqrt{s}$ در توان‌های e این نیاز به وجود می‌آید که $s=0$ را Branch point داشته باشیم. در درس گفته شد که اگر یک دور حول نقطه شاخه بزنیم، مقدار تابع عوض می‌شود. اما در تابع داده شده با دور زدن حول $s=0$ به دلیل وجود $\cosh\sqrt{s}$ توان‌های زوج در مخرج تغییر فاز نخواهیم داشت پس $s=0$ تکینی ساده است.

$$F(s)=\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cosh(\sqrt{s})}$$

ب)

$$F(s)=\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cosh(\sqrt{s})}\xrightarrow{\text{قطب‌های تابع}} s\cosh\sqrt{s}=0\rightarrow s=0$$

$$\cosh\sqrt{s}=0\rightarrow \frac{e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}}}{2}=0 \qquad \underbrace{e^{-\sqrt{s}}}_{\neq 0}(e^{2\sqrt{s}}+1)=0 \qquad e^{2\sqrt{s}}+1=0$$

$$e^{2\sqrt{s}}=-1\rightarrow 2\sqrt{s}=j(2n-1)\pi\rightarrow \sqrt{s}=\frac{j(2n-1)\pi}{2}\rightarrow s=-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\text{Res}[F(s)e^{st}] \qquad \text{Res}\left[\frac{\cosh x\sqrt{s}\,e^{st}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]_{s=0}\xrightarrow{\text{قطب ساده}},$$

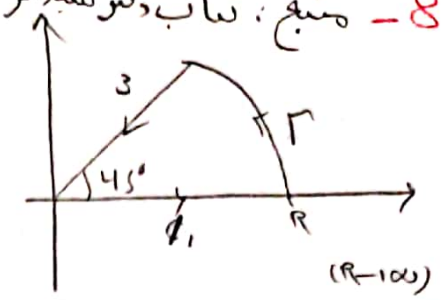
$$=\lim_{s\to 0}\frac{\cosh x\sqrt{s}\,e^{st}}{\cosh\sqrt{s}}=1 \qquad \text{Res}\left[\frac{\cosh x\sqrt{s}\,e^{st}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]\Big|_{s=-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2=-\pi^2(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{دستور هوپیتال}}=\frac{\cosh\left(x\frac{j\pi(2n-1)}{2}\right)e^{-\pi^2(n-\frac{1}{2})^2t}}{\cancel{\cosh\sqrt{s}}+\frac{\sqrt{s}}{2}\sinh\left(\frac{j\pi(2n-1)}{2}\right)}\xrightarrow[\sinh(jz)=j\sin z]{\cosh(jz)=\cos z}$$

$$=\frac{\cos((n-\frac{1}{2})\pi x)\,e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2t}}{j\frac{\pi}{4}(2n-1)\,j\sin(\pi(n-\frac{1}{2}))}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\cos((n-\tfrac{1}{2})\pi x)e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2t}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\cos\left[(n-\tfrac{1}{2})\pi x\right]e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2t}$$

8- منبع: کتاب دکتر شیدفر



$\int_0^\infty \sin x^2\, dx \rightarrow$ Fernel integral مسیر تبدیل

با توجه به ارتباط سینوس با تابع نمایی از e^{jz^2} روی شکل پیشنهادی انتگرال کوشی گورسا می‌گیریم

$$\oint f(z)dz = \int_1 f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz + \int_3 f(z)dz = 0 \qquad f(z) = e^{jz^2}$$

$\int_\Gamma f(z)dz = 0$ قضیه لم جردن

$$\int_1 f(z)dz \overset{z=x}{\underset{y=0}{=}} \int_0^R e^{jx^2}dx \xrightarrow{R\to\infty} \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty e^{jx^2}dx = -\int_3 f(z)dz$$

$$-\int_3 f(z)dz = -\int_3 e^{jz^2}dz = +\sqrt{j}\int_\infty^0 e^{jz^2}dz = +\sqrt{j}\int_0^\infty e^{jz^2}dz \xrightarrow{\text{جزوه بهزاد}} = \frac{\sqrt{j\pi}}{2}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{jx^2}dx = \frac{\sqrt{j\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}j\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty e^{jx^2}dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx + j\int_0^\infty \sin x^2 dx \rightarrow \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}}$$

10- الف) نقاط منفرد: اگر بسط تابع داده شده را بنویسیم کاملا روشن است که $s=0$ قطب ساده است.

$$F(s) = \frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cosh(\sqrt{s})} = \frac{1 + \frac{(x\sqrt{s})^2}{2!} + \frac{(x\sqrt{s})^4}{4!} + \frac{(x\sqrt{s})^6}{6!} + \cdots}{s\left[1 + \frac{(\sqrt{s})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{s})^4}{4!} + \frac{(\sqrt{s})^6}{6!} + \cdots\right]} = \frac{1 + \frac{x^2 s}{2!} + \frac{x^4 s^2}{4!} + \cdots}{s\left[1 + \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{4!} + \cdots\right]}$$

همانطور که قبل نیز اشاره کردم توان ها $\frac{1}{2}$ در رادیکال‌ها از بین می‌روند و نقطه شاخه‌ای نداریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2x\cos 3x+1}{x^9-5x^5+4x}dx=\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^9-5x^5+4x}dx}}_{odd}^{0}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\cos 3x}{x^9-5x^5+4x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2x\cos 3x+1}{x^9-5x^5+4x}dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\cos 3x}{x^9-5x^5+4x}dx}_{I}$$

$(R\to\infty)$

$$\oint\underbrace{\frac{2z\cos 3z}{z^9-5z^5+4z}}_{f(z)}dz=I+\cancel{\int_{\Gamma}f(z)dz}$$

قضیه ۳ ارون ۰

$\to I=2\pi j\sum \mathrm{Res}[f(z)]$ $\qquad f(z)=\dfrac{2\cos 3z}{z^8-5z^4+4}$ به دست آوردن قطب‌ها

$z^8-5z^4+4=0\to(z^4-4)(z^4-1)=0\quad z^4-1=0\to z=1\quad z=-1\quad z=j\quad z=-j\ \times$ (پایین محور)

$z^4-4=0\quad z=\sqrt2\quad z=-\sqrt2\quad z=j\sqrt2\quad z=-j\sqrt2\ \times$ (پایین محور)

قطب‌های روی محور: $1\quad -1\quad \sqrt2\quad -\sqrt2$ ، قطب‌های داخل مسیر: $j\sqrt2\ ,\ j$

$$\oint\frac{2e^{3jz}}{z^8-5z^4+4}=\oint\frac{2\cos 3x}{z^8-5z^4+4}+j\oint\frac{2\sin 3x}{z^8-5z^4+4}$$

بخش حقیقی این مد نظر است.

$$\oint\frac{2e^{3jz}}{z^8-5z^4+4}dz=2\pi j\left[\mathrm{Res}f(z)|_{z=j\sqrt2,\,j}\right]+\pi j\left[\mathrm{Res}f(z)|_{z=1,-1,\sqrt2,-\sqrt2}\right]$$

$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=j}=\dfrac{2e^{-1}}{-8j+20j}=\dfrac{-j}{6}e^{3}$ $\qquad \mathrm{Res}[f(z)]_{z=2\sqrt j}=\dfrac{2e^{-\sqrt2}}{-64\sqrt2 j+40\sqrt2 j}=\dfrac{j\sqrt2}{24}e^{3\sqrt2}$

$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=1}=\dfrac{2e^{3j}}{-12}=-\dfrac{1}{6}e^{3j}$ $\qquad \mathrm{Res}[f(z)]_{z=-1}=\dfrac{2e^{-3j}}{12}=\dfrac{1}{6}e^{-3j}$

$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=\sqrt2}=\dfrac{2e^{3j\sqrt2}}{24\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{24}e^{3j\sqrt2}$ $\qquad \mathrm{Res}[f(z)]_{z=-\sqrt2}=\dfrac{2e^{-3\sqrt2 j}}{-24\sqrt2}=\dfrac{-\sqrt2}{24}e^{-3\sqrt2 j}$

$$\to\oint\frac{2e^{jz}}{z^8-5z^4+4}=\pi\left[\frac{1}{3}e^{-3}+\frac{1}{3}\sin 3-\frac{\sqrt2}{12}e^{-3\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{12}\sin 3\sqrt2\right]$$

سیروس مس فروش مشهد شماره دانشجویی: 8101847۲	ریاضیات مهندسی تکلیف سری دوم	تاریخ تحویل: 6/8/99

$$\oint \frac{2x\cos 3x}{x^9-5x^5+4x}dx = \mathrm{Re}\left[\oint \frac{2e^{3jz}}{z^9-5z^5+4z}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}e^{-3}+\frac{1}{3}\sin 3-\frac{\sqrt2}{12}e^{3\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{12}\sin 3\sqrt2\right]$$

18-7

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \underbrace{e^{\left(z-\frac{1}{z}\right)}}_{f(z)}dz = \mathrm{Res}\{f(z)\}_{z=0}$$

$$e^{z-\frac1z} = e^{z}\cdot e^{-\frac1z} \to z=0 \text{ تکینی اساسی}$$

$$e^{z-\frac1z} \xrightarrow{\text{بسط لوران}} \left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^5}{120}+\cdots\right)\left(1-\frac1z+\frac{\frac{1}{z^2}}{2!}-\frac{\frac{1}{z^3}}{3!}+\frac{\frac{1}{z^4}}{4!}-\cdots\right)$$

$$\mathrm{Res}\{f(z)\} = \frac1z \text{ ضریب} = -1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!\times3!}+\frac{1}{3!\times4!}-\frac{1}{4!\times5!}+\cdots$$

$$\to \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} e^{(z-1/z)}dz = \frac{-1}{0!\times1!}+\frac{1}{1!\times2!}-\frac{1}{2!\times3!}+\frac{1}{3!\times4!}-\frac{1}{4!\times5!}+\cdots$$