به‌نام حضرت دوست
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۴	تاریخ تحویل
۱۳۹۹-۱۴۰۰		۱۳۹۹/۰۸/۲۴

معادلات موج و حرارت

توجه: پاسخ به قسمت‌های مشخص شده با ❊ الزامی نیست و نمره اضافی ندارد.

۱- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را بر حسب خطی یا غیرخطی دسته‌بندی نموده و متغیر وابسته و مستقل آن‌ها را بیان نمایید.

الف) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ب) $x^2\frac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$

ج) $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$

❊د) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

۲- الف) ثابت کنید $u = F(t-3x)$ که در آن F تابع دلخواه مشتق‌پذیری است، جواب عمومی $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ است.

ب) جواب ویژه معادله مذکور را با شرط $u(0,t) = 4\sin t$ بدست آورید.

۳- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را با استفاده از روش تفکیک‌پذیری (جداسازی) متغیرها حل نمایید.

❊الف) $u_x = 4u_y \;,\; u(0,y) = 8e^{-3y}$

ب) $xu_x = yu_y$

❊ج) $u_x + u_y = 2(x+y)u$

۴- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید.

❊الف)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (0 < x < 1 \,,\; t > 0) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0,\; u_t(x,0) = 2\cos\frac{\pi x}{l} \end{cases}$$

❊ب)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (0 < x < l \,,\; t > 0) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0,\; u_t(x,0) = x \end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 < x < 1 \,,\; t > 0) \\ u(0,t) = u(1,t) = 100 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

❊د)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 < x < 1 \,,\; t > 0) \\ u(0,t) = u_0 \,,\; u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

❊ه)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 < x < \pi \,,\; t > 0) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x - 4\sin 5x \end{cases}$$

❊و)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0 < x < l \,,\; t > 0) \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 6 + 4\cos\frac{3\pi}{l}x \end{cases}$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۴	تاریخ تحویل
۱۴۰۰-۱۳۹۹		۱۳۹۹/۰۸/۲۴

❋۵- پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2\left(1-\dfrac{x}{l}\right) \qquad (0 \le x \le l\,,\;\; t \ge 0) \\ u(0,t) = u_0, \quad u(l,t) = u_1 \\ u(x,0) = x(l-x), \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

۶- پاسخ معادله حرارت $u(r,t)$ را داخل یک کره به شعاع $r = 1$ ، با کمک شرایط داده شده بدست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = a^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$u(1,t) = 0\,; u(r,0) = f(r)$$

راهنمایی : معادله را با تغییر متغیر $w(r,t) = ru(r,t)$ ساده کنید.

۷- پاسخ معادله زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku \quad (0 \le x \le l\,,\;\; t \ge 0\,,\;\; k > 0) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

❋۸- مسأله زیر را حل کنید.

$$u_t - t^2 u_{xx} - u = 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad\qquad 0 \le\; x \le 1$$

$$u(x,0) = f(x)$$

❋۹- معادله ارتعاشات آزاد یک میله به طول l که در دو طرف روی تکیه گاه قرار گرفته (شکل ۱) به صورت زیر بیان می شود:

شکل ۱

به‌نام حضرت دوست
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۴	تاریخ تحویل
۱۳۹۹-۱۴۰۰		۱۳۹۹/۰۸/۲۴

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \mathrm{x}^4}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

شرایط مرزی چنین مساله ای به صورت زیر است:

دو انتهای میله دارای تکیه گاه است پس نوسان در ابتدا و انتهای میله صفر است: $u(0,t)=u(l,t)=0$

میزان انحنا در دو انتهای میله صفر است: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad for\ x=0\ ,x=l$

معادله را با شرایط مرزی بالا و شرایط اولیه روبه رو حل کنید. $u(x,0)=x(l-x) \qquad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0$

موفق باشید