به‌نام حضرت دوست
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۴۰۰	تکلیف شماره ۳	تاریخ تحویل ۱۳۹۹/۰۸/۱۰

انتگرال فوریه-تبدیل فوریه

توجه: پاسخ به قسمت‌های مشخص شده با ⁕ الزامی نیست و نمره اضافی ندارد.

۱- تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید.
$$f(x) = (2-x)[u(x)-u(x-2)]$$

الف) این تابع را رسم کنید.

ب) انتگرال فوریه این تابع را محاسبه نمایید.

ج) با استفاده از انتگرال فوریه این تابع حاصل انتگرال زیر را محاسبه نمایید.
$$\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega$$

۲- با انتخاب تابع مناسب و نوشتن انتگرال فوریه آن، درستی رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos(x\omega)\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & 0<|x|<\pi/2 \\ 0 & |x|\ge \pi/2 \end{cases}$$

۳- اگر $f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\cos(\omega x)d\omega$ باشد، آن‌گاه حاصل $g(x) = \int_0^\infty (\tan^{-1}\omega)\sin(\omega x)d\omega$ را تعیین کنید.

۴- اگر تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2} cos\omega x\; d\omega$ بیان شده باشد، حاصل $\int_0^\infty (1+xsin2x)\, f(x)dx$ را بدست آورید.

۵- با استفاده از تبدیل فوریه تابع $f(x)$ حاصل انتگرال را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{sin^3\omega}{\omega}\,d\omega$$

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۳	تاریخ تحویل
۱۴۰۰-۱۳۹۹		۱۳۹۹/۰۸/۱۰

۶- الف) تبدیل فوریه تابع حقیقی $f(x) = e^{-a|x|}, a > 0$ را به دست آورید.

ب)با استفاده از قسمت (الف) تبدیل فوریه تابع موهومی $g(x) = jxe^{-a|x|}, a > 0$ را محاسبه کرده و به کمک آن حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3 - 24x}{x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8} dx$$

۷- الف) ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = G(\omega)$$

آنگاه :

$$\mathcal{F}\{G(x)\} = 2\pi f(-\omega)$$

به قضیه بالا خاصیت دوگانی (duality) تبدیل فوریه می گویند.

ب) به کمک خاصیت فوق، تبدیل فوریه تابع زیر را بیابید.

$$h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

*۸-معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx = (1 + |t|)e^{-|t|}$

ب) $\int_{0}^{\infty} f(x) \cos(tx)\, dx = e^{-|t|} + 2\delta(t)$

*۹- با انتخاب یک تابع مناسب و با استفاده از خواص تبدیل فوریه و اتحاد پارسوال، نشان دهید که:

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{\pi}{(2a)^5} \quad , a > 0$$

*۱۰- با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x)$ نشان دهید:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^*)[\lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin(\omega(x^* - x))}{x^* - x}]\, dx^*$$

در عبارت بالا $\frac{1}{\pi}\lim_{\omega \to \infty} \frac{\sin(\omega(x^* - x))}{x^* - x}$ چه تعبیری دارد؟

ریاضی مهندسی

نیم‌سال اول	تکلیف شماره ۳	تاریخ تحویل
۱۳۹۹-۱۴۰۰		۱۳۹۹/۰۸/۱۰

❊۱۱-تبدیل فوریه تابع $f(x) = cos\, x^2$ را بدست آورید. در این محاسبه می‌توانید از انتگرال $I = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ کمک بگیرید.

❊۱۲-اگر $F(\omega)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد،

الف) نشان دهید که $j\frac{dF}{d\omega}$ تبدیل فوریه $xf(x)$ می‌باشد.

ب) برای $F(\omega) = e^{-\alpha|\omega|}, \alpha > 0$ تابع $f(x)$ را بدست آورید.

موفق باشید