



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل
۱۳۹۹/۱۱/۰۶

تکلیف شماره ۱۰

نیم‌سال اول
۱۳۹۹-۱۴۰۰

دنباله و سری - مانده‌ها و کاربردها

توجه: پاسخ به قسمت‌های مشخص شده با * الزامی نیست و نمره اضافی ندارد.

۱- ناحیه همگرایی و مجموع سری‌های زیر را بدست آورید

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z^2+4)}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} nze^{-nz^2}$

۲- ضمن تعیین ناحیه همگرایی هر یک از توابع زیر، بسط لوران توابع را حول نقاط داده شده بدست آورید.

(الف) $g(z) = (z+1) \sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$ ($z=2$)

(ب) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ ($z=-1$)

* (ج) $h(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ ($z=2$)

۳- ناحیه ای از صفحه ی z را بیابید که در آن هر دو سری زیر همگرا باشند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(2z-j)^n$$

* ۴- تابع $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ را در نظر بگیرید.

الف) کلیه ی بسط های لوران حول $z=0$ را بدست آورید.

ب) اگر بخواهیم $f(z)$ را حول $z=1+j$ بسط دهیم در کدام ناحیه، تابع بسط تیلور و در کدام ناحیه بسط لوران خواهد داشت؟

* ۵- نشان دهید که ضرایب بسط لوران تابع $|z| > 0$; $f(z) = e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})}$ عبارتست از:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - t \sin(\theta)) d\theta$$

که در آن a_n ضریب جمله z^n می باشد.



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل
۱۳۹۹/۱۱/۰۶

تکلیف شماره ۱۰

نیم سال اول
۱۳۹۹-۱۴۰۰

۶- مانده های توابع زیر را در نقاط تکین تابع بدست آورید.

الف) $e^z \sinh \frac{1}{z}$

ب) $ze^{-\frac{1}{z-1}}$

۷- حاصل انتگرال های زیر را به کمک نظریه مانده ها بدست آورید.

۲) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$

۱) $\int_0^{2\pi} \cos(\cos(\theta)) \cosh(\sin(\theta)) d\theta$

۴*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$

۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2x\cos(3x)+1}{x^9-5x^5+4x} dx$

۶*) $\oint_{|z-2i|=\frac{1}{3}} \frac{\ln(z^2+1)}{(z-2i)^3} dz$

۵) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+2x+2} dx$

۸) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} e^{(z-\frac{1}{z})} dz$

۷) $\oint_{|z|=2} (z+2)^5 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$

۱۰) $\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z^6-6z^4+5z^2} dz$

۹*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$

۱۲*) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{\bar{z}-2i} dz$

۱۱*) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} dx$

۸- با استفاده از مسیر های مناسبی در صفحه مختلط ، حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

۲*) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

۱) $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$

۴*) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi}$

۳*) $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx ; 0 < p < 1$

۵*) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$

۹- نشان دهید که: $\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!} ; n \in \mathbb{N}$

۱۰- تابع $F(s) = \frac{\cosh(x\sqrt{s})}{\operatorname{scosh}(\sqrt{s})}$ را در نظر می گیریم .

الف) نشان دهید که نقطه $s = 0$ یک قطب ساده است (نه یک نقطه شاخه)



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل
۱۳۹۹/۱۱/۰۶

تکلیف شماره ۱۰

نیم‌سال اول
۱۳۹۹-۱۴۰۰

ب) به کمک نظریه مانده‌ها نشان دهید که تبدیل عکس لاپلاس $F(s)$ عبارت است:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right] e^{-\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t}$$

در صورت لزوم می‌توانید از بسط $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$ کمک بگیرید.

موفق باشید