



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل
۱۳۹۹/۰۹/۱۵

تکلیف شماره ۶

نیم سال اول
۱۴۰۰-۱۳۹۹

معادله لاپلاس

توجه: پاسخ به قسمت‌های مشخص شده با * الزامی نیست و نمره اضافی ندارد.

۱- پاسخ معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را بدست آورید.

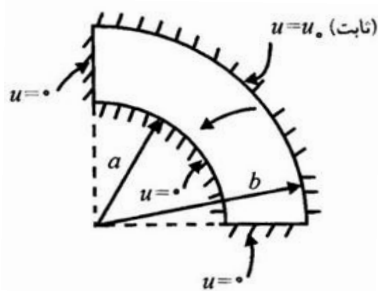
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H) \\ u(0, y) = 0, & u(L, y) = 0 \\ u(x, 0) - u_y(x, 0) = 0, & u(x, H) = f(x) \end{cases}$$

۲- معادلات با شرایط مرزی زیر را حل نمایید. (c_1 عددی ثابت است).

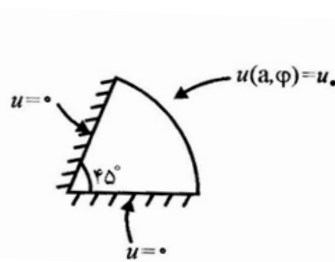
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = 0 & (1 \leq r \leq e, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ u(1, \varphi) = c_1, & u(e, \varphi) = 2c_1 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = 0 & (1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \\ u(1, \varphi) = 0, & u(2, \varphi) = \sin 2\varphi (1 - \cos 2\varphi) \\ u(r, 0) = 0, & u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

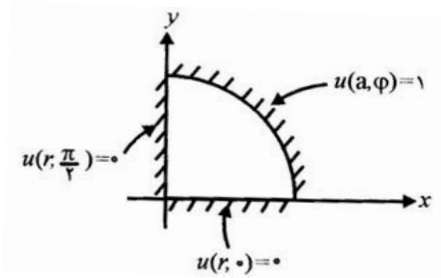
۳- معادله لاپلاس را در ناحیه‌های زیر و با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید.



(ج) *



(ب)



(الف) *

۴- پتانسیل روی کره‌ای به شعاع a به صورت $u(a, \theta) = f(\theta)$ داده شده است. با حل معادله لاپلاس، پتانسیل را در داخل و خارج کره مذکور به دست آورید.



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل

۱۳۹۹/۰۹/۱۵

تکلیف شماره ۶

نیم سال اول

۱۴۰۰-۱۳۹۹

*۵- مطلوب است پاسخ معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر، اگر: الف) $f(y) = 0$ باشد. ب) $f(y) \neq 0$ باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1) \\ u(0, y) = 0, & u(2, y) = f(y) \\ u(x, 0) = 100, & u(x, 1) = 0 \end{cases}$$

*۶- معادلات با شرایط مرزی زیر را حل نمایید. (c عددی ثابت است).

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 & (0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi) \\ u(a, \varphi) = \cos 2\varphi \\ u_\varphi(r, 0) = 0, & u_\varphi(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

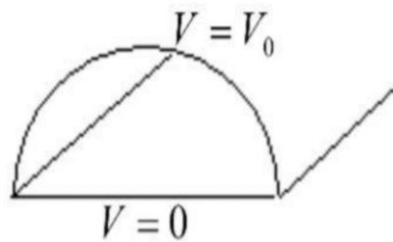
$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 & (a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \\ u(a, \varphi) = 0, & u(b, \varphi) = c \\ u(r, 0) = 0, & u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

*۷- پاسخ معادلات زیر را با شرایط مرزی مشخص شده بدست آورید.

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq b) \\ u(a, z) = u(r, 0) = 0, & u(r, b) = f(r) \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 & (a \leq r \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ u(a, \varphi) = 0, & u(b, \varphi) = f(\varphi) \end{cases} \quad \text{الف)}$$

*۸- یک تونل با سطح مقطع نیم استوانه مطابق شکل دارای پتانسیل‌های داده شده است. تابع پتانسیل در داخل تونل را به دست آورید.



*۹- ناحیه نیم استوانه $r < a$ و $z > 0$ را در نظر بگیرید. پاسخ معادله لاپلاس را برای شرایط زیر بدست آورید:

در قسمت (الف) پاسخ مستقل از θ می باشد ولی در قسمت (ب) پاسخ به صورت $u(r, \theta, z)$ می باشد.

$$u(a, z) = f(z) = \begin{cases} 0 & ; z > 1 \\ 1 & ; 0 < z < 1 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{الف)}$$

$$u(a, \theta, z) = 0, \quad u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \quad \text{ب)}$$



ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل
۱۳۹۹/۰۹/۱۵

تکلیف شماره ۶

نیم‌سال اول
۱۴۰۰-۱۳۹۹

*۱۰- پاسخ معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 & (a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ u(a, \theta) = 0, u(b, \theta) = V_0 \cos \theta \end{cases}$$

*۱۱- در معادله زیر ابتدا از تغییر متغیر $u(x, t) = v(x, t)e^{-x}$ استفاده کرده و سپس معادله جدید را به روش دالامبر حل نمایید.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u & (-\infty < x < +\infty, t \geq 0) \\ u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید