۲-۱) الف)

$$f_X(x) = Ae^{-2|x|} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2} \to 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}$$

[illegible]

$$\to 1 = A + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\sqrt{\frac{\pi}{4}} \to 1 = A + 1 \to A = 0$$

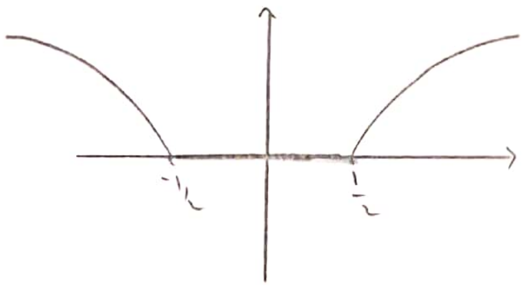
$$\eta_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-4x^2}dx = \frac{e^{-4x^2}}{8}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-4x^2}dx \qquad u = x \to du = dx$$
$$e^{-4x^2}dx = dv \to v = -\frac{1}{8}e^{-4x^2}$$

$$\to \underbrace{\frac{-x}{8}e^{-4x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} = \frac{1}{8}\times\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \to \sigma^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{16}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{8}$$

ب)

$$y = \begin{cases} \sqrt{2x-1} & x > 1/2 \\ 0 & -1/2 \le x < 1/2 \\ \sqrt{-2x-1} & x \le -1/2 \end{cases}$$



$$y = g(x) \to y = \sqrt{2x-1} \to y^2 = 2x-1 \to x = \frac{y^2+1}{2} \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{2x-1} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\to y = \sqrt{-2x-1} \to y^2 = -2x-1 \to x = \frac{-(y^2+1)}{2} \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{-2x-1} = \frac{-1}{\sqrt{2x-1}}$$

طبق رابطه: $f_Y(y) = \dfrac{f_X(\frac{y^2+1}{2})}{\frac{1}{\sqrt{y^2}}} + \dfrac{f(\frac{-y^2-1}{2})}{\frac{-1}{\sqrt{y^2}}} = \dfrac{4y}{\sqrt{\pi}}e^{-(y^2+1)^2}$

در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تعداد غیر قابل شمارش جواب برای $y = g(x)$ داریم پس:

$$-0.5 < y < 0.5 = F_X(0.5) - F_X(-0.5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0.5} e^{-4x^2}dx - \int_{-\infty}^{-0.5} e^{-4x^2}dx\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,(\mathrm{erf}(1)+1)}{4} + \frac{\sqrt{\pi}\,(\mathrm{erf}(1)-1)}{4}\right) = \mathrm{erf}(1) \qquad \mathrm{erf}(1) = 2G(1\times\sqrt{2}) - 1$$

$$\to \mathrm{erf}(1) = 2G(\sqrt{2}) - 1 \to f_Y(y) = (2G(\sqrt{2})-1)\,\delta(y) + \frac{4y}{\sqrt{\pi}}e^{-(y^2+1)^2}U(y)$$

4 -

$$E\left\{\frac{1}{X+1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)p}\binom{n+1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(n+1)p} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k}}_{p+(1-p)^{n+1}} \qquad \left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)$$

$a=p$, $b=1-p$

$$= \frac{1}{(n+1)p}\left(1-(1-p)^{n+1}\right) = \frac{\left(1-(1-p)^{n+1}\right)}{(n+1)p}$$

---

5 - الف) روش معمول

$$F_X(x) = (1-e^{-x})^3 U(x) \rightarrow (1-e^{-x})^3 \ (x>0) \quad f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$= 3e^{-x}(1-e^{-x})^2 = 3e^{-3x} - 6e^{-2x} + 3e^{-x}$$

$$\eta = E\{X\} = \int_0^{\infty} 3xe^{-3x} + \int_0^{\infty} -6xe^{-2x} + \int_0^{\infty} 3xe^{-x}$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-3x}dx \rightarrow \begin{matrix} x & e^{-3x} \\ 1 & -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix} \rightarrow -\frac{x}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3}\int_0^{\infty} e^{-3x} = \frac{1}{9}$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx \longrightarrow \begin{matrix} x & e^{-2x} \\ 1 & -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \rightarrow -\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx \longrightarrow \begin{matrix} x & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{matrix} \rightarrow -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

$$\rightarrow \eta_X = E\{X\} = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 = \frac{11}{6}$$

با tail sum:

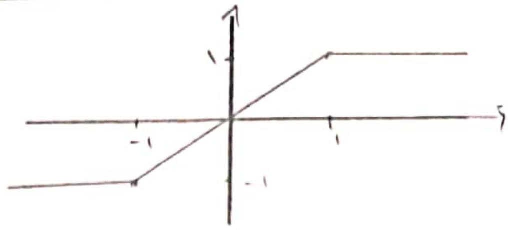
$$F_X(x) = (1-e^{-x})^3 \ (x>0) = 1 - e^{-3x} - 3e^{-x} + 3e^{-2x}$$

$$\eta_X = E\{X\} = \int_0^{\infty} (e^{-3x} + 3e^{-x} - 3e^{-2x})\,dx - \int_0^{\infty} (1-e^{-x})^3 dx = \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} - 3e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}\right)\Big|$$

$$= -\left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{6}$$

ب)

$$g(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x\ge 1\end{cases} \xrightarrow{\text{رسم}}$$



معادله $y=g(x)$ برای حالات $y=1$ ، $y=-1$ تعداد قابل شمارش جواب ندارد بنابراین مراحل را داریم

$F_X(x)=(1-e^{-x})^3u(x) \to (1-e^{-x})^3 \quad x>0$

$y=-1 \to \Pr\{y=-1\}=\underbrace{F_X(-1)}_{0}-\underbrace{F_X(-\infty)}_{0}=0$

$y=1 \to \Pr\{y=1\}=F_X(\infty)-F_X(1)=1-F_X(1)$

$y=x \to f_Y(y)=3e^{-y}(1-e^{-y})^2\underbrace{(u(y)-u(y-1))}_{\text{جهت صفر زدن آن در بازه } (-1,0)}+(1-F_X(1))\delta(y-1)$

جهت این که اگر $\int_{-1}^{1}$ را بگیریم همان مقدار جرم احتمال را به ما دهد.

۵- به نظر می آید که با متغیر تصادفی یکنواخت سروکار داشته باشیم.

بازه های ما به صورت $3/2$ دقیقه، $3/2$ دقیقه عوض می شود بدین معنا $=$ متغیر تصادفی با پارامتر مدت زمان انتظار برابر X

که ما می توانیم مقدار کمتر از ۰ بیست مراغ نمانیم لذا باید $\delta(x)$ ضرب در $\frac{1}{b-a}$ که برابر با $2/3$ بکنیم که در مدت انتگرال گیری از ۰ تا 0^+ پاسخگوی شکل ما باشد پس در نهایت داریم:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\delta(x)+2/3 & 0<X<0.5\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\eta_X=E\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}x\delta(x)+2/3\,x\,dx$$

$$=\int_0^{0.5}\frac{2}{3}x\delta(x)+\frac{2}{3}x\,dx=\frac{2}{3}(0)+\frac{x^2}{3}\Big|_0^{0.5}=\frac{1}{12}$$

$$\sigma_X^2=E\{X^2\}-\eta_X^2=\int_0^{0.5}\frac{2}{3}x^2\delta(x)+\frac{2}{3}x^2\,dx-\frac{1}{144}=\frac{2}{3}(0)+\frac{2}{9}x^3\Big|_0^{0.5}-\frac{1}{144}$$

$$=\frac{1}{36}-\frac{1}{144}=\frac{3}{144}=\frac{1}{48}$$

18- (۸، ۱۰ را جابجا نوشتم.)

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\, n!}{(n-k)!\, k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \begin{matrix} y = k-1 \\ m = n-1 \end{matrix} \to \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(m+1)!}{(m-y)!\, y!} p^{y+1} (1-p)^{m-y}$$

$$= \underbrace{(m+1)}_{n} p \sum_{y=0}^{\infty} \frac{m!}{y!\,(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} \qquad (a+b)^m = \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\,(m-y)!} a^m b^{m-y}$$

$$a = p \quad b = 1-p \to E\{X\} = np\,(p+1-p)^n = np$$

مارکوف: $\Pr\{X \geq n\alpha\} \leq \dfrac{E\{X \geq n\alpha\}}{n\alpha} \to \dfrac{np}{n\alpha} = p/\alpha$

چبیشف: $\Pr\{|X-\eta_x| \geq \epsilon\} \leq \dfrac{\sigma_x^2}{\epsilon^2} \to \Pr\{X-\eta_x \geq \epsilon \text{ or } X-\eta_x \leq -\epsilon\} \leq \dfrac{\sigma_x^2}{\epsilon^2}$

$$\to \Pr\{X-\eta_x \geq \epsilon_0\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\epsilon^2} \xrightarrow[\sigma_x^2 = np(1-p)]{\eta_x = np} \Pr\{X \geq \epsilon_0 + np\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\epsilon^2}$$

$$\epsilon_0 = \alpha n - np \to \Pr\{X \geq \alpha n\} \leq \frac{np(1-p)}{n^2(\alpha-p)^2} \to \Pr\{X \geq \alpha n\} \leq \frac{p(1-p)}{n(\alpha-p)^2}$$

کانتلی: $\Pr\{X-\eta_x \geq a\} \leq \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + a^2} \quad a > 0 \to a = \alpha n - np > 0$

$$\to \Pr\{X \geq a + \eta_x\} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + a^2} \to \Pr\{X \geq \alpha n\} = \frac{np(1-p)}{np(1-p) + n^2(\alpha-p)^2}$$

$$\to \Pr\{X \geq \alpha n\} = \frac{p(1-p)}{p(1-p) + n(\alpha-p)^2}$$

8-

$$P\{X_i = 1\} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} \to E\{X\} = \sum_{x_i=0}^{365} x_i \binom{n}{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$$

انتخاب k نفر از n نفر — احتمال آن روز بودن تولدشان — احتمال بقیه در روزهای دیگر

$$= \underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} + \cdots}_{365 \text{ بار}} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^{k-1} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$$