۱- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,2\pi)$ باشد. تابع چگالی احتمال $Y=\sin(X)$ را بیابید.

[پاسخ: $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$]

۲- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x)=A\,e^{-2|x|}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2}$ است.

الف) مقدار A و میانگین و واریانس X را به‌دست آورید. [پاسخ: $A=0,\ \eta=0,\ \sigma^2=\frac{1}{8}$]

ب) اگر $Y=\begin{cases}\sqrt{2|X|-1}, & |X|\ge\frac{1}{2}\\ 0, & |X|<\frac{1}{2}\end{cases}$ باشد، $f_Y(y)$ را بیابید. [پاسخ: $(2G(\sqrt{2})-1)\delta(y)+\frac{4y}{\sqrt{\pi}}e^{-(y^2+1)^2}u(y)$]

۳- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی اکیداً صعودی $F_X(x)$ باشد نشان دهید:

الف) $Y=F_X(x)$ به‌صورت یکنواخت در بازه $[0,1]$ توزیع شده است.

ب) اگر U دارای توزیع یکنواخت بین صفر و یک باشد، آن‌گاه $Y=F_X^{-1}(U)$ دارای همان توزیع متغیر تصادفی X است.

۴- اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای p و n باشد، نشان دهید $E\left\{\frac{1}{X+1}\right\}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$.

۵- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به‌صورت $F_X(x)=(1-e^{-x})^3u(x)$ داده شده است.

الف) میانگین این متغیر تصادفی را با استفاده از تعریف و نیز Tail Sum for Expectation به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{11}{6}$]

ب) تابع چگالی متغیر تصادفی $Y=g(X)$ را با فرض آن که $g(x)$ به‌صورت زیر تعریف شود، بیابید.

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & -1\le x\le 1\\ 1, & 1<x\end{cases}$$

[پاسخ: $f_Y(y)=3e^{-y}(1-e^{-y})\big(u(y)-u(y-1)\big)+(1-F_X(1))\delta(y-1)$]

۶- چراغ راهنمایی چهارراهی به مدت ۱ دقیقه سبز و ۳۰ ثانیه قرمز می‌شود. اتومبیلی به صورت تصادفی و مستقل از کار چراغ، به چهارراه رسیده است. تابع چگالی احتمال و همچنین میانگین و واریانس زمان انتظار را برای این اتومبیل بیابید.

[پاسخ: $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}\delta(x)+\frac{2}{3}, & 0\le x\le 0.5\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$ $\quad \eta_X=\frac{1}{12}$ ، $\sigma_X^2=\frac{1}{48}$]

۷- در یک بازی، شما تاس سالمی را متناوباً پرتاب می‌کنید. در این بازی می‌توانید در هر خالی که خواستید متوقف شوید، ولی اگر عدد 1 ظاهر شد، مجبور به توقف هستید. در هر صورت، امتیاز شما مربع خال ظاهر شده در آخرین پرتاب خواهد بود.

الف) اگر استراتژی شما توقف در صورت گرفتن خال 5 یا 6 باشد، امید ریاضی و واریانس امتیاز خود را بیابید. [پاسخ: $\frac{62}{3}$ و $\frac{1922}{9}$]

ب) فرض کنید استراتژی شما این است که خال یا خال‌هایی را از پیش تعیین کرده و در صورت ظاهر شدن آن‌ها متوقف شوید. بهترین استراتژی که می‌توانید در راستای به‌دست آوردن امتیاز بالاتر انتخاب کنید کدام است؟ معیار بهترین بودن را نیز ذکر کنید (توجه کنید که در هر دو بند (الف) و (ب)، اگر خال 1 ظاهر شود، مجبور به توقف هستید). [پاسخ: بهترین استراتژی توقف در خال ۵ یا بالاتر است تا میانگین امتیاز ماکزیمم شود.]

۸- برای یک گروه n نفره، میانگین تعداد روزهایی از سال را به‌دست آورید که در هر یک از آن‌ها دقیقاً k نفر به‌دنیا آمده‌اند. طول هر سال را ۳۶۵ روز فرض کنید. [پاسخ: $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^{k-1}\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}$]

[**راهنمایی:** متغیر تصادفی X_i را به‌صورت $X_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر در روز } i\text{ام سال دقیقاً } k \text{ نفر متولد شده باشند} \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$ تعریف کنید.]

۹- فرض کنید احتمال شیر آمدن یک سکه در هر بار پرتاب برابر 0.1 باشد. سکه را ۲۰۰ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل ۲۵ بار شیر بگیرید را محاسبه کرده و به کمک نامساوی‌های مارکوف و چبی‌شف دو کران بالا برای آن پیدا کنید. آیا می‌توانید کران بالای بهتری برای این احتمال پیدا کنید؟ (از نامساوی کانتلی کمک بگیرید.) [پاسخ: دقیق 0.1449، مارکوف 0.8، چبی‌شف 0.72، کانتلی 0.4186]

۱۰- متغیر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p می‌باشد. فرض کنید α عددی حقیقی و مثبت است به‌گونه‌ای که $p < \alpha < 1$. با استفاده از نامساوی‌های مارکوف، چبی‌شف و کانتلی سه کران بالا برای $\Pr\{X \geq \alpha n\}$ بیابید. آیا می‌توان گفت کدام‌یک از این کران‌ها، کران بهتری است؟ [پاسخ: مارکوف $\frac{p}{\alpha}$، چبیشف $\frac{p(1-p)}{n(\alpha-p)^2}$، کانتلی $\frac{p(1-p)}{p(1-p)+n(\alpha-p)^2}$]