



۱- تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به فرم زیر است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{8}, & 0 \leq x \leq y \leq A \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) مقدار  $A$  و ضریب همبستگی  $X$  و  $Y$  را بیابید. [پاسخ:  $A = 2$ ,  $r_{XY} = \frac{11}{\sqrt{489}}$ ]

ب) بدون محاسبه ی توابع چگالی حاشیه ای، تعیین کنید که آیا  $X$  و  $Y$  مستقل یا متعامدند؟ [پاسخ: نه مستقلند و نه متعامد.]

۲- متغیرهای تصادفی پیوسته ی  $X$  و  $Y$  دارای چگالی توأم یکنواخت بر روی ناحیه ی  $0 \leq y \leq 1 - x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  هستند. الف) توابع چگالی حاشیه ای  $X$  و  $Y$  را پیدا کنید.

$$[f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{1-y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}] \text{ پاسخ:}$$

ب) احتمال آن که نقطه ی  $(X, Y)$  (با توزیع فوق) داخل دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد، اما خارج از ناحیه ی  $Y \leq 1 - |X|$  باشد چقدر است. [پاسخ:  $\frac{1}{4}$ ]

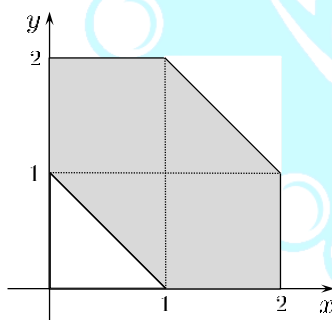
۳- با فرض آن که تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر باشد

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x+y \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مقدار  $c$  و توابع چگالی احتمال حاشیه ای  $X$  و  $Y$  را بیابید.

$$[c = 24, f_Y(t) = f_X(t) = \begin{cases} 12t(1-t)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}] \text{ پاسخ:}$$

۴- تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت روبرو داده شده است:



$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{ناحیه ی خاکستری} \\ 0, & \text{سایر نواحی} \end{cases}$$

الف) احتمال پیشامد  $\{X + Y > 2\}$  را به دست آورید. [پاسخ:  $\frac{11}{18}$ ]

ب) توابع چگالی حاشیه ای  $X$  و  $Y$  را به دست آورید.

$$[f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{3}(3-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4-(y-1)^2}{6}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{(y-3)^2}{6}, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}] \text{ پاسخ:}$$

۵- متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال  $f_X(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{b}}}{2b}$ ,  $b > 0$  است. متغیر تصادفی  $Y = X^2 u(X)$  را به صورت  $u(\cdot)$  تعریف می‌کنیم که در آن تابع پله واحد است.

الف) تابع چگالی احتمال  $Y$  را به دست آورید. [پاسخ:  $f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{4b\sqrt{y}}e^{-\frac{\sqrt{y}}{b}}u(y)$ ]  
 ب) احتمال پیشامد  $\{Y \leq b|X|\}$  را پیدا کنید. [پاسخ:  $1 - \frac{1}{2e}$ ]

۶- تابع جرم احتمال توأم متغیرهای تصادفی صحیح و نامنفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر داده شده است:

$$p_{XY}[i, j] = \begin{cases} \frac{c}{2^{\min(i, j)}}, & i, j \text{ نامنفی}, |i - j| \leq 1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار  $c$  و توابع جرم احتمال حاشیه‌ای  $X$  و  $Y$  را بیابید. [پاسخ:  $c = \frac{1}{6}$ ]  
 $p_X[k] = p_Y[k] = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{3}2^{-k} & k \geq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

ب) احتمال پیشامدهای  $\{X = Y\}$  و  $\{1 \leq X^2 + Y^2 \leq 5\}$  را بیابید. [پاسخ:  $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$ ]

۷- در جعبه‌ای ۱۰ گلوله‌ی سفید و ۲۰ گلوله‌ی سیاه وجود دارد. ۱۰ گلوله را به صورت کاملاً تصادفی و بدون جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم. اگر متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به ترتیب تعداد گلوله‌های سفید و سیاه خارج شده از جعبه باشند، تابع جرم احتمال توأم  $X$  و  $Y$  و ضریب همبستگی این دو متغیر تصادفی را به دست آورید.

[پاسخ:  $p_{XY}[i, j] = \frac{\binom{20}{i}\binom{10}{j}}{\binom{30}{i+j}}, i+j=10, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, r_{XY} = -1$ ]

۸-  $X$  ورودی به یک کانال مخابراتی است که مقادیر  $\pm 1$  را با احتمال یکسان اختیار می‌کند. در خروجی کانال، سیگنال دریافتی به فرم  $Y = X + V$  است که در آن  $V$  مؤلفه‌ی نویز است که یک متغیر تصادفی با چگالی  $f_V(v) = \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|v|}$ ,  $\alpha > 0$  مستقل از  $X$  فرض می‌شود.

الف)  $\Pr\{Y \leq k, X = k\}$  را برای  $k = \pm 1$  به دست آورید. [پاسخ:  $\frac{1}{2}$ ]

ب) تابع چگالی احتمال توأم  $X$  و  $Y$  را بیابید. [پاسخ:  $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4}\alpha e^{-\alpha|y-1|}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\alpha e^{-\alpha|y+1|}\delta(x+1)$ ]

۹- الف) نشان دهید که اگر  $X$  یک متغیر تصادفی Chi-Squared با  $n$  درجه آزادی باشد، تابع مولد ممان (MGF) آن از رابطه‌ی  $M_X(s) = (1 - 2s)^{-\frac{n}{2}}, s < \frac{1}{2}$  به دست می‌آید.

ب) اگر  $Z = X + Y$  باشد که در آن  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی Chi-Squared مستقل به ترتیب با  $n$  و  $m$  درجه آزادی هستند، تابع مولد ممان توأم  $X$  و  $Y$  را پیدا کنید و با استفاده از آن توزیع  $Z$  را به دست آورید.

[پاسخ:  $Z \sim \chi^2(n+m), M_{XY}(s_1, s_2) = (1 - 2s_1)^{-\frac{n}{2}}(1 - 2s_2)^{-\frac{m}{2}}$ ]

پ) اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای مستقل به ترتیب با پارامترهای  $(n, p)$  و  $(m, p)$  باشند. نشان دهید که  $Z = X + Y$  نیز دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای  $(n+m, p)$  است. [راهنمایی: ابتدا تابع مولد ممان  $Z$  را به دست آورید.]

۱۰- ممان مرتبه‌ی  $k$ ام متغیر تصادفی گسسته‌ی  $X$  به صورت  $E\{X^k\} = \frac{(-1)^k}{2}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  داده شده است. CDF این متغیر

تصادفی را پیدا کرده و رسم کنید. [پاسخ:  $F_X[k] = \frac{1}{2}(u[k] + u[k+1])$ ]

۱۱- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته‌ی صحیح و نامنفی با تابع مولد ممان  $e^s < 3$ ,  $M_X(s) = \frac{c}{3-e^s}$  باشد.

الف) مقدار  $c$  و تابع جرم احتمال  $X$  را پیدا کنید. [پاسخ:  $c = 2$ ,  $p_X(k) = \frac{2}{3^{k+1}}$ ,  $k \geq 0$ ]

ب) بدون استفاده از تابع جرم احتمال  $X$ ، میانگین و واریانس آن را به‌دست آورید. [پاسخ:  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{4}$ ]

پ) برای  $\Pr\{X \geq a\}$  کران‌های چرنوف و کانتلی را پیدا کرده و برای  $1 \leq a \leq 8$  این کران‌ها را به همراه مقدار دقیق  $\Pr\{X \geq a\}$

رسم کنید. آیا همیشه کران چرنوف از کران کانتلی بهتر است؟ [پاسخ:  $\frac{2}{3^{a+1}} \frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}$ ، خیر]

۱۲- تابع مولد ممان توأم  $X$  و  $Y$  به صورت  $s_1 < 1$ ,  $s_1 + s_2 < 2$ ,  $M_{XY}(s_1, s_2) = \frac{2}{(s_1-1)(s_1+s_2-2)}$  داده شده است.

الف) ضریب همبستگی این دو متغیر تصادفی را پیدا کنید. [پاسخ:  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ]

ب) نشان دهید متغیر تصادفی  $Z = X - Y$  از  $Y$  مستقل است.

