



۱- با حروف کلمه STATISTIC

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ [پاسخ: $\frac{8!}{3!2!2!} + \frac{8!}{3!2!2!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{2!2!2!}$]
 ب) چند کلمه ۹ حرفی می‌توان نوشت که T ها کنار هم، ولی A و I کنار هم نباشند؟ [پاسخ: 600]

۲- با حروف (a,b,c,d,e,f,g,h,i):

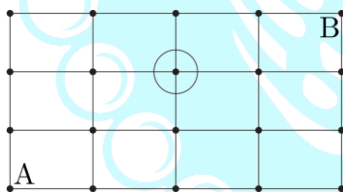
الف) چند کلمه ۹ حرفی با حروف متمایز می‌توان نوشت که حرف d بلافاصله بعد از e آمده باشد (حروف متمایزند). [پاسخ: 8!]
 ب) در چه تعداد از کلمات ۶ حرفی، حرف f بعد از d و d بعد از e (نه لزوماً بلافاصله) می‌آید (فرض کنید حروف متمایزند). [پاسخ: $\frac{6!6!}{3!3!3!}$]
 پ) به چند طریق می‌توان سه کلمه ۳ حرفی با حروف متمایز نوشت؟ [پاسخ: $\frac{9!}{3!}$]

۳- کیسه‌ای حاوی n توپ متمایز با شماره‌های ۱ تا n است.

الف) k توپ را یک به یک از کیسه خارج کرده و با در نظر گرفتن ترتیب کنار هم قرار می‌دهیم ($k \leq n$). احتمال آن که شماره توپ‌های بیرون آمده یک رشته مرتب (صعودی اکید) باشد، چه قدر است؟ [پاسخ: $\frac{1}{k!}$]
 ب) k توپ را به تصادف بیرون آورده و بزرگترین شماره را در نظر می‌گیریم. احتمال آن که این شماره برابر با m باشد را بیابید ($k \leq m \leq n$). [پاسخ: $\frac{\binom{m-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$]

۴- مردی ۷ هدیه متفاوت برای سه فرزندش خریده است. به چند حالت متفاوت می‌تواند هدایا را به فرزندانش بدهد اگر بخواهد:

الف) هیچ محدودیتی در تقسیم هدایا نباشد. [پاسخ: 3^7]
 ب) هر فرزند حداقل یک هدیه داشته باشد. [پاسخ: $3^7 - 3 \times 2^7 + 3$]
 پ) بزرگترین فرزند سه هدیه و بقیه هر کدام دو هدیه داشته باشند. [پاسخ: $\binom{7}{3}\binom{4}{2}$]



۵- الف) در شکل روبرو اگر در هر مرحله مجاز باشیم یک گام به راست یا یک گام به بالا برداریم به چند طریق می‌توان از A به B رسید؟ [پاسخ: $\binom{7}{4}$]
 ب) بند الف) را برای حالتی که ناگزیر باشیم حتماً از نقطه‌ای که در شکل با دایره مشخص شده است تکرار کنیم. [پاسخ: $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$]

۶- از ظرفی که ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز دارد، هر مرتبه مهره‌ای به تصادف انتخاب و رنگ آن ملاحظه می‌شود. اگر مهره قرمز باشد به همراه دو مهره هم‌رنگ دیگر و اگر سفید باشد به همراه ۳ مهره هم‌رنگ دیگر به ظرف برگردانده می‌شود. احتمال آن که در انتخاب پیاپی مهره‌ها رنگ چهار مهره اول به تناوب تغییر کند چه قدر است؟ [پاسخ: $(\frac{5}{8} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{16}) + (\frac{3}{8} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{15})$]

۷- در ظرفی ۳ مهره سفید، ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سبز داریم. از این ظرف شش مهره با هم بیرون می‌آوریم. مطلوب‌ست احتمال آن که الف) در این نمونه ۶ تایی، مهره‌های هم‌رنگ مساوی باشند [پاسخ: $\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2} + \binom{4}{3}\binom{5}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{3} + \binom{4}{3}\binom{3}{3}}{\binom{12}{6}}$]
 ب) مهره‌ها از سه رنگ باشند و اکثریت با مهره‌های سبز باشد [پاسخ: $\frac{\binom{5}{4}\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{6}}$]

۸- آمار تصادفات جاده‌ای به صورت 18% مرگبار، 52% جدی و 30% جزیی است. اگر تعداد تصادفات در یک روز 10 فقره گزارش شود، مطلوب‌ست احتمال آن که:

الف) ۲ تصادف جدی و ۱ تصادف مرگبار باشد. [پاسخ: $\frac{10!}{2!1!7!} \times 0.52^2 \times 0.18 \times 0.3^7$]

ب) ۲ تصادف جدی و ۱ تصادف مرگبار باشد به شرط آن که بدانیم ۷ تصادف جزئی بوده است. [پاسخ: $\frac{10!}{2!1!7!} \times 0.52^2 \times 0.18 \times 0.3^7$]

پ) حداکثر ۱ تصادف مرگبار و حداقل ۸ تصادف جزئی باشد.

[پاسخ: $0.3^{10} + (\frac{10!}{9!1!} \times 0.3^9 \times 0.18) + (\frac{10!}{9!1!} \times 0.3^9 \times 0.52) + (\frac{10!}{8!1!1!} \times 0.3^8 \times 0.52 \times 0.18) + (\frac{10!}{8!1!1!} \times 0.3^8 \times 0.52^2)$]

۹- جعبه‌ای شامل ۷ مهره متمایز است. مهره‌های این جعبه را به تصادف در بین ۴ جعبه تقسیم می‌کنیم.

الف) احتمال آن که هیچ جعبه‌ای خالی نماند چه قدر است؟ [پاسخ: $\frac{4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4}{4^7}$]

ب) اگر فرض کنیم مهره‌ها مشابه هستند چه تغییری در احتمال فوق حاصل می‌شود؟ [پاسخ: $\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$]

۱۰- دو جعبه A و B هر یک محتوی n توپ هستند که از 1 تا n شماره‌گذاری شده‌اند. از هر جعبه به صورت کاملاً تصادفی l توپ

($l \leq n$) خارج می‌کنیم. احتمال آن که از این 2l توپ خارج شده از جعبه‌ها، دقیقاً k جفت توپ هم‌شماره باشند چه قدر است؟

[پاسخ: $\frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} \binom{n-l}{l-k}}{\binom{n}{l} \binom{n}{l}}$]

۱۱- یک سازنده سوزن ادعا می‌کند که تنها سه درصد از محصولاتش معیوبند. یک نمونه تصادفی شامل ۲۴ سوزن را انتخاب کرده و

دریافته‌ایم که دو عدد از آن‌ها معیوب است. آیا بر مبنای این مشاهدات رد ادعای این سازنده منصفانه است؟ [پاسخ: خیر]

۱۲- جعبه‌ی A شامل ۱۰۰۰ لامپ است که احتمال خرابی هر یک از آن‌ها 0.2 می‌باشد. در جعبه‌ی B نیز ۳۰۰۰ لامپ وجود دارد

که این لامپ‌ها نیز با احتمال 0.01 خراب هستند.

الف) احتمال آن که تعداد لامپ‌های خراب در جعبه‌ی A بیشتر از ۲۰۰ باشد را به صورت دقیق و تقریبی پیدا کنید.

[پاسخ: (دقیق) 0.4811، (تقریبی) $G\left(\frac{800.5}{\sqrt{160}}\right) - G\left(\frac{0.5}{\sqrt{160}}\right)$]

ب) اگر بدانیم تعداد لامپ‌های خراب در جعبه‌ی B بیش از ۱۰ است، احتمال آن که تعداد لامپ‌های خراب از ۲۵ بیشتر نباشد

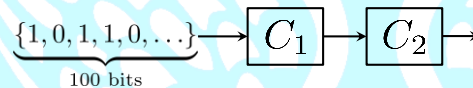
را نیز به طور دقیق و تقریبی پیدا کنید. [پاسخ: (دقیق) 0.2071 (تقریبی) 0.2083]

۱۳- یک دنباله ۱۰۰ بیتی از دو کانال مخابراتی C_1 با احتمال خطای $\frac{1}{20}$ و C_2 با احتمال خطای $\frac{1}{18}$ ، که مطابق شکل زیر به صورت

سری به هم متصل شده‌اند، عبور می‌کند. فرض کنید وقوع خطا در هر کانال از کانال دیگر مستقل است. همچنین احتمال خطای

یک کانال، احتمال تبدیل شدن یک بیت ۰ به ۱، یا یک بیت ۱ به ۰ است. احتمال این که حداقل 12 بیت خطا در خروجی

داشته باشیم، تقریباً چه قدر است؟



[پاسخ: 0.3085]

۱۴- فرض کنید احتمال تولد یک فرد در هر روز سال برابر روزهای دیگر سال و برابر $\frac{1}{365}$ باشد (از سال‌های کبیسه صرف نظر کنید). تولد

هر فرد را نیز مستقل از تولد افراد دیگر فرض کنید. اگر شما عضو یک گروه n نفره باشید، حداقل مقدار n را به گونه‌ای بیابید که

احتمال یکسان شدن تولد شما با تولد حداقل سه نفر دیگر، از $\frac{1}{2}$ بیشتر شود. [پاسخ: (دقیق) $n > 975$ (تقریبی) $n > 976$]

$$G(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-x^2/2)}{0.661x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}}, \quad x > 0$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.00	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.10	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.20	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.30	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.40	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.50	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.60	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.70	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.80	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.90	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997