۱- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر λ باشند.

الف) توزیع توأم $W = \frac{X}{X+Y}$ و $V = X + Y$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $f_{VW}(v,u) = \lambda^2 v\, e^{-\lambda v},\ v \geq 0,\ 0 \leq w \leq 1$]

ب) مقدار $\mathbb{E}\left\{X \middle| \frac{X}{X+Y}\right\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{2}{\lambda}\frac{X}{X+Y}$]

۲- فرض کنید تعداد مشتریان یک رستوران، N، یک متغیر تصادفی پوآسن با پارامتر λ باشد. هر مشتری مستقل از سایر مشتریان و نیز مستقل از مقدار N، با احتمال p یک سالاد هم سفارش می‌دهد. فرض کنید تعداد مشتریانی که سالاد سفارش می‌دهند را با X و تعداد بقیه مشتریان را با Y نشان دهیم (به عبارت دیگر $N = X + Y$).

الف) توابع جرم احتمال X و Y را به‌دست آورید. [پاسخ: $X\sim\mathrm{P}(p\,\lambda),\ Y\sim\mathrm{P}((1-p)\,\lambda)$]

ب) تابع جرم احتمال توأم X و Y را نیز بیابید. آیا X و Y مستقلند؟ [پاسخ: بله]

پ) $\mathbb{E}\{X^2Y^2\}$ را پیدا کنید. [پاسخ: $\lambda^2 p(1-p)(\lambda^2 p(1-p) + \lambda + 1)$]

۳- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با میانگین‌های صفر و واریانس‌های σ^2 و ضریب همبستگی r باشند.

الف) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقلند.

ب) مقدار $\mathbb{E}\{X^3 - Y^3 | X - Y\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{3}{2}\sigma^2(1+r)(X-Y) + \frac{(X-Y)^3}{4}$]

۴- X و Y دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با $\eta_X = 2$، $\sigma_X^2 = 4$، $\eta_Y = 1$، $\sigma_Y^2 = 9$ و $r = -\frac{1}{2}$ هستند. مطلوبست:

الف) $\mathbb{E}\{Y|X=3\}$ و $\mathrm{Var}(Y|X=2)$ را پیدا کنید. [پاسخ: $\frac{7}{4}$ و $\frac{27}{4}$]

ب) $\mathbb{E}\{X + 2Y | X + Y = 3\}$ را حساب کنید. [پاسخ: 4]

۵- Y یک متغیر تصادفی پوآسن با میانگین λ و Z یک متغیر تصادفی هندسی، مستقل از Y، با پارامتر p است.

الف) احتمال $\mathbb{P}\mathrm{r}\{Y < Z\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda(1-p)}}$]

ب) احتمال $\mathbb{P}\mathrm{r}\{Y < Z | Z = i\},\ i = 1, 2, \ldots$ را بیابید. [پاسخ: $e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\lambda^k}{k!}$]

پ) احتمال $\mathbb{P}\mathrm{r}\{Y = i | Y < Z\},\ i \geq 0$ را بیابید. [پاسخ: $e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!},\ i = 0,1,\ldots$]

ت) امید ریاضی $\mathbb{E}\{Y | Y < Z\}$ را بیابید. [پاسخ: $\lambda(1-p)$]

۶- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی و گسسته‌ی .i.i.d با $\mathbb{P}\mathrm{r}\{X = k\} = \mathbb{P}\mathrm{r}\{Y = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots$ باشند. اگر $\mathbb{P}\mathrm{r}\{X = k | X + Y = k\} = \frac{1}{k+1},\ k = 0, 1, \ldots$ و $\mathbb{P}\mathrm{r}\{X = k-1 | X + Y = k\} = \frac{1}{k+1},\ k = 1,2,\ldots$ باشد، نشان دهید X و Y متغیرهای تصادفی هندسی هستند که بر اساس تعداد <u>شکست‌ها</u> تا حصول <u>اولین پیروزی</u> تعریف می‌شوند.

۷- متغیرهای تصادفی X و Y با تابع جرم احتمال توأم $p_{XY}(k,\ell) = \frac{3}{2^{k+\ell+1}},\ 1 \leq \ell \leq k,\ k,\ell \in \mathbb{Z}$ مفروضند.

الف) $\mathbb{E}\{Y^2 + 2XY | X < 3\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{34}{7}$]

ب) میانگین X را با شرط آن‌که بدانیم $X^2 + Y^2 \leq 10$ است را نیز محاسبه نمایید. [پاسخ: $\frac{13}{8}$]

۸- اگر X و Y متغیرهای تصادفی .i.i.d هندسی با $p_X(k) = p_Y(k) = (1-p)^{k-1}p,\ \ k = 1, 2, \ldots$ باشند، نشان دهید:

الف) $\mathbb{Pr}\{X+Y = n | X = i\} = (1-p)^{n-i-1}p, \quad n = i+1,\ i+2, \ldots$

ب) $\mathbb{Pr}\{X+Y = n\} = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2, \quad n = 2,\ 3, \ldots$

۹- یک مغازه‌ی پیتزا فروشی n نوع پیتزای مختلف عرضه می‌کند. فرض کنید در هر روز X مشتری به این مغازه مراجعه می‌کنند که X یک متغیر تصادفی گسسته و نامنفی با تابع مولد ممان $M_X(s)$ است. هر مشتری یکی از n نوع پیتزا را به‌صورت کاملاً تصادفی سفارش می‌دهد (هر کدام از n نوع پیتزا با احتمال برابر انتخاب می‌شوند). همچنین نوع پیتزای انتخاب‌شده توسط هر مشتری مستقل از تعداد مشتریان دیگر و نوع پیتزایی است که آن‌ها سفارش می‌دهند. تعیین کنید که به صورت میانگین چند نوع پیتزا در روز توسط این مغازه عرضه می‌شود؟ رابطه‌ی نهایی صرفاً برحسب n و تابع مولد ممان X است. [**راهنمایی:** ابتدا متغیرهای تصادفی T_i را به‌صورت $T_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر حداقل یکی از مشتریان پیتزای نوع } i \text{ سفارش دهد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ برای $i = 1, \ldots, n$ تعریف کنید. سپس $\mathbb{E}\{T_1 + \cdots + T_n\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{T_1 + \cdots + T_n | X\}\}$ را به‌دست آورید.]

[پاسخ: $n - n\, M_X\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$]

۱۰- یک فروشگاه زنجیره‌ای قصد دارد دو شعبه در غرب و شرق تهران راه‌اندازی کند. تعداد کل مشتریان فروشگاه در هر روز یک متغیر تصادفی پوآسن با پارامتر a درنظر گرفته می‌شود. هر یک از مشتریان با احتمال p شعبه غرب و با احتمال $q = 1-p$، مستقل از سایرین، شعبه شرق را انتخاب می‌کند. همچنین میزان خرید هر مشتری در این فروشگاه بزرگ، مستقل از سایر مشتریان، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ درنظر گرفته می‌شود.

الف) میانگین و واریانس فروش کل در تهران را بیابید. [پاسخ: $\frac{a}{\lambda}$ و $\frac{2a}{\lambda^2}$]

ب) میانگین و واریانس فروش شعبه غرب را بیابید. [پاسخ: $\frac{ap}{\lambda}$ و $\frac{2ap}{\lambda^2}$]

۱۱- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند به گونه‌ای که $\mathbb{E}\{X|Y\} = -Y$. تعریف می‌کنیم: $Z = X + Y$.

الف) σ_{ZY} را حساب کنید. [پاسخ: صفر]

ب) اگر بدانیم X و Y متغیرهای تصادفی توأماً نرمال نیز هستند، بهترین تخمین Z برحسب X را با معیار LMSE و خطای متناظر با آن را به‌دست آورید. [پاسخ: $\left(1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)(X - \eta_X)$ با خطای $\left(1 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)^2 \sigma_X^2$]

۱۲- تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{3}y, & -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بهترین تخمین Y را با فرض مشاهده‌ی $X = 0$ با معیار کم‌ترین میانگین مربع خطا (LMSE) بیابید و خطای این تخمین را تعیین کنید. [پاسخ: $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{18}$]

۱۳- تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f_{XY}(x,y) = \frac{x+y}{2}\, e^{-(x+y)},\ x \ge 0,\ y \ge 0$ مفروض است. متغیر تصادفی Z به صورت $Z \triangleq X + Y$ تعریف می‌شود.

الف) حاصل $\mathbb{E}\{X^2|Z\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{Z^2}{3}$]

ب) با توجه به بند (الف) یا هر روش دلخواه دیگر، $\mathbb{E}\{XY|\,Z\}$ را نیز محاسبه کنید. [پاسخ: $\frac{Z^2}{6}$]

۱۴- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی توأماً نرمال با میانگین صفر، واریانس σ^2 و ضریب همبستگی r ($0 < |r| < 1$) باشند. تعریف می‌کنیم: $Z \triangleq X + Y$ و $W \triangleq X + aY$ که در آن a یک مقدار ثابت و یقینی (Deterministic) است.

الف) ثابت a را به نحوی پیدا کنید که Z و W مستقل شوند. [پاسخ: -1]

ب) با توجه به مقدار به‌دست آمده برای a در بند (الف)، $\mathbb{E}\{Z|X = x\}$، $\mathbb{E}\{Z|Y = y\}$ و $\mathbb{E}\{ZW|X = x\}$ را بیابید. [پاسخ: $(1+r)x$، $(1+r)y$ و $(x^2-\sigma^2)(1-r^2)$]

پ) بهترین تخمین‌های خطی و غیرخطی Y برحسب $Z = z$ را با معیار LMSE پیدا کنید. [پاسخ: $\frac{z}{2}$]

ت) حداقل میانگین مربع خطا را برای دو تخمینِ بند (پ) محاسبه کنید. [پاسخ: $\frac{\sigma^2(1-r^2)}{2}$]

۱۵- تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y), & 0 \le x \le 1\ ,0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

الف) بهترین تخمین X برحسب $Y = y$ را با معیار LMSE و خطای متناظر را بیابید. [پاسخ: $\frac{5-4y}{8-6y}$ و $\frac{87-10\ln(2)}{1350}$]

ب) بهترین تخمین Y برحسب $X = x$ را با معیار LMSE و خطای مربوطه را پیدا کنید [پاسخ: $\frac{4-3x}{9-6x}$ و $\frac{8-\ln(9)}{80}$]

پ) بهترین تخمین خطی Y برحسب $X = x$ و X برحسب $Y = y$ را با معیار LMSE محاسبه کنید و خطای را با دو بند (الف) و (ب) مقایسه نمایید. [پاسخ: $\frac{21-5x}{45}$ با خطای $\frac{49}{675}$ و $\frac{7-y}{11}$ با خطای $\frac{49}{825}$]

ت) اگر تعریف کنیم $Z \triangleq (XY)^2$، مقادیر $\mathbb{E}\{Z|X = x\}$ و $\mathbb{E}\{Z|Y = y\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{x^2(5-4x)}{18-12x}$ و $\frac{y^2(18-15y)}{40-30y}$]

۱۶- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نرمال مستقل هر دو با میانگین صفر و واریانس واحد باشند.

الف) تعریف می‌کنیم: $Z \triangleq \frac{X}{Y}$. تابع چگالی احتمال Z را بیابید. [پاسخ: $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$]

ب) بهترین تخمین متغیر تصادفی Y را با فرض مشاهده‌ی Z با استفاده از معیار LMSE به‌دست آورده و خطای این تخمین را حساب کنید. [پاسخ: صفر با خطای واحد]