-12

$\hat{Y}$: تخمین Y   بهترین تخمین Y : $E\{Y|X=0\} = \int y f_Y(y|X=0)\,dy$

$f_X(x) = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3}y)\,dy = x^2 + \frac{1}{6}$ $\quad f_Y(y|X=0) = \frac{f_{XY}(0,y)}{f_X(0)} = \frac{\frac{1}{3}y}{\frac{1}{6}} = 2y$

$E\{Y|X=0\} = \int_0^1 2y^2\,dy = \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^1 = 2/3$

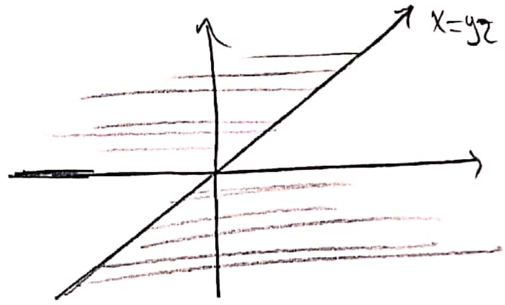
LMSE: $Var\{Y|X=0\} = \int_0^1 2y^3\,dy - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

16- (الف)

$Z = \frac{X}{Y} \rightarrow F_Z(z) = Pr\{Z \le z\} = Pr\{\frac{X}{Y} \le z\}$

$= Pr\{X \le yz, y \ge 0\} + Pr\{X \ge yz, y \le 0\}$

$= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{yz} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$



$\rightarrow f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \int_0^{\infty} y f_{XY}(yz,y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f_{XY}(yz,y)\,dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{XY}(yz,y)\,dy \qquad f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

$\rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} y e^{-\frac{(1+z^2)y^2}{2}} \qquad u = (1+z^2)y^2$

$\rightarrow y\,dy = \frac{du}{1+z^2} \rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{1+z^2}\,du \rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$

(ب)

$\hat{Y}$: تخمین Y $E\{Y|Z=z\} = \int y f_Y(y|Z=z) \quad f_Y(y|Z=z) = f_Y(y)$

$\rightarrow E\{Y|Z=z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 0$ و نیز $Var\{Y|Z=z\} = 1$

4- الف)

$E\{Y|X\} = \eta_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\eta_x) = 1-\frac{3}{4}(X-2)$ $\quad \underline{X=3}, \quad E\{Y|X=3\} = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

به تشکر از ... در رابطه پیشنهادی اشتباهی وجود دارد و آن هم این است که اگر $r=\frac{1}{2}$ فرض شود آنگاه پاسخ به صورت زیر است:

$E\{Y|X=3\} = 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$Y|X=2 \sim N\left(\eta_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\eta_x), \sigma_y^2(1-r^2)\right)$

$\rightarrow Var\{Y|X=2\} = \sigma_y^2(1-r^2) = 9\times(1-\frac{1}{4}) = \frac{27}{4}$

ب)

$E\{X+2Y|X+Y=3\}$ $\quad U=X+2Y \quad V=X+Y$

$E\{U|V\}$ $\quad \eta_U = \eta_x+2\eta_y = 4 \quad \eta_V = \eta_x+\eta_y = 3$

$\sigma_U^2 = \sigma_x^2+4\sigma_y^2+4r_{xy} = 38 \quad \sigma_V^2 = \sigma_x^2+\sigma_y^2+2r_{xy} = 13-1 = 12$

$\rightarrow E\{U|V\} = 4-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{38}{12}}(V-3) \quad E\{U|V=3\} = 4$

14- الف)

$Z = X+Y \quad W = X+aY \quad Z \perp W \quad r_{ZW}=0 \quad E\{ZW\} = E\{Z\}E\{W\}$

$E\{Z\} = E\{W\} = 0 \rightarrow E\{ZW\} = 0$ شرط استقلال $\quad E\{ZW\} = E\{X^2\}+aE\{Y^2\}$

$+(a+1)E\{XY\} = 0 \quad E\{X^2\} = \sigma^2 = E\{Y^2\} \rightarrow (1+a)\sigma^2+(1+a)E\{XY\} = 0$

$\rightarrow a = -1 \rightarrow 0 = 0$

ب)

$W = X-Y \quad E\{X\}=E\{Y\}=E\{Z\}=E\{W\}=0 \quad E\{Z|X\} = \eta_z + r_{zx}\frac{\sigma_z}{\sigma_x}(X-\eta_x)$

$Z = X+Y \quad E\{Z|X=x\} = r_{zx}\frac{\sigma_z}{\sigma_x}x$

$\sigma_{zx} = E\{ZX\} - \cancel{E\{Z\}E\{X\}} = E\{ZX\} = \overbrace{E\{X^2\}}^{\sigma^2}+E\{XY\} \quad E\{XY\} = \sigma_{xy} = \sigma^2 r$

$\rightarrow \sigma_{zx} = \sigma^2(1+r) \quad \sigma_z^2 = 2\sigma^2+2Cov(XY) = 2\sigma^2+2\sigma^2 r = 2\sigma^2(1+r)$

$\rightarrow E\{Z|X=x\} = \left(\frac{\sigma^2(1+r)}{\sigma_z\sigma}\frac{\sigma_z}{\sigma}\right)x = (1+r)x$

برای این بخش مثل قبل داریم: $E\{Z|Y=y\}=r_{zy}\frac{\sigma_z}{\sigma_y}y$

$\sigma_{zy}=E\{ZY\}=\underbrace{E\{Y^2\}}_{\sigma^2}+E\{XY\}$ $\quad E\{XY\}=\sigma^2 r \to E\{ZY\}=\sigma^2(1+r)$

$\to r_{zy}=\frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z\sigma_y} \to E\{Z|Y=y\}=\left(\frac{\sigma^2(1+r)}{\sigma\sigma_z}\frac{\sigma_z}{\sigma}\right)y=(1+r)y$

$E\{ZW|X=x\}=E\{X^2-Y^2|X=x\}=E\{X^2|X=x\}-E\{Y^2|X=x\}$

$E\{X^2|X=x\}=x^2 \quad E\{Y^2|X\}=Var(Y|X)+E\{Y|X\}^2$

$E\{Y|X=x\}=rx \quad Var(Y|X=x)=\sigma^2(1-r^2)$

$\to E\{ZW|X=x\}=x^2-r^2x^2-\sigma^2(1-r^2)=x^2(1-r^2)-\sigma^2(1-r^2)=(x^2-\sigma^2)(1-r^2)$

ب) ابتدا تخمین خطی را می‌نویسیم: $\hat{Y}=aZ+b \quad \min E\{|Y-aZ-b|^2\}$

$\to \frac{\partial}{\partial a}E\{|Y-aZ-b|^2\}=-2E\{Z(Y-aZ+b)\} \quad \frac{\partial}{\partial b}E\{|Y-aZ-b|^2\}=-2E\{Y-aZ-b\}$

از بخش قبل: $a=r_{yz}\frac{\sigma_y}{\sigma_z} \quad b=\eta_y-a\eta_z=0 \quad r_{yz}=\frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z\sigma} \quad \sigma_z^2=2\sigma^2(1+r) \quad \sigma_{zy}=\sigma^2(1+r)$

$\to \hat{Y}=aZ+b=\frac{\sigma^2(1+r)}{2\sigma^2(1+r)}Z=\frac{Z}{2}$

حال تخمین غیرخطی می‌زنیم: $E\{Y|Z=z\}=r_{yz}\frac{\sigma_y}{\sigma_z}z \quad \sigma_z^2=2\sigma^2(1+r) \quad \sigma_{zy}=\sigma^2(1+r)$

$\to E\{Y|Z=z\}=\left(\frac{\sigma^2(1+r)}{\sigma\,2\sigma^2(1+r)}\sigma\right)z=\frac{z}{2}$

بهترین تخمین (غیرخطی) با خطی یکسان می‌شود.

ت) خطی LMSE: $\sigma^2(1-r_{zy}^2) \quad r_{zy}=\frac{\sigma^2(1+r)}{\sigma\sqrt{2}\sigma\sqrt{1+r}}=\sqrt{\frac{1+r}{2}}$

$\to$ LMSE: $\sigma^2\left(1-\frac{1+r}{2}\right)=\frac{\sigma^2}{2}(1-r)$ غیرخطی: LMSE: $Var(Y|Z=z)=\sigma^2(1-r_{zy}^2)=\frac{\sigma^2}{2}(1+r)$

2- الف) هنگام تدریس متغیر تصادفی پوآسن نکته‌ای بیان شد که طبق آن می‌توانیم استدلال کنیم که در این جا
چون تعداد مسافرها پوآسن است یعنی X افراد سفارش دهنده سالاد (احتمال p) و Y نیز افرادی باشند که سالاد
سفارش نمی‌دهند. نتیجتاً طبق نکته گفته شده در کلاس درس خود این دو نیز متغیر تصادفی از نوع پوآسن هستند که
پارامتر به صورت $p\lambda$, $(1-p)\lambda$ است.

$X \sim P(p\lambda) \qquad Y \sim P((1-p)\lambda)$

ب) منطق حکم می‌کند که سفارش و عدم سفارش سالاد افراد به هم ربطی نداشته باشد پس مستقل اند در نتیجه تابع توام
به صورت حاصل ضرب هم هاست.

$P(X,Y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) = ? \qquad \Pr(X=x) = e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^x}{x!} \qquad \Pr\{Y=y\} = e^{-\lambda(1-p)}\dfrac{((1-p)\lambda)^y}{y!}$

$\Pr\{X=x, Y=y\} = e^{-\lambda p}\, e^{-\lambda(1-p)}\, \dfrac{(\lambda p)^x}{x!}\, \dfrac{((1-p)\lambda)^y}{y!} \qquad x = 0,1,2,\dots \quad y = 0,1,\dots$

$E\{X^2Y^2\} = E\{X^2\}\,E\{Y^2\}$

پ) چون که X و Y مستقل هستند پس:
می‌دانیم که متغیر تصادفی پوآسن با پارامتر a دارای میانگین و واریانس a است.

$E\{X^2\} = Var(X) + \eta_X^2 \rightarrow E\{X^2\} = p\lambda + p^2\lambda^2 = p\lambda(1+p\lambda)$

$E\{Y^2\} = Var(Y) + \eta_Y^2 \rightarrow E\{Y^2\} = \lambda(1-p)((1-p)\lambda+1)$

$E\{X^2Y^2\} = E\{X^2\}E\{Y^2\} = p(1-p)\lambda^2(p(1-\lambda)\lambda^2 + \lambda + 1)$

8- الف) $\Pr\{X+Y=n \text{ و } X=i\} = \Pr\{X+Y=n \mid X=i\}\Pr\{X=i\}$ $\qquad P_X(k) = P_Y(k) = (1-p)^{k-1}p \;,\; k=1,2,\dots$

$\Pr\{X+Y=n\} \times \Pr\{X=i\} = \Pr\{X=i\} \times \Pr\{Y=n-i\}$

$\Pr\{X+Y=n \mid X=i\} = \Pr\{Y=n-i\} = (1-p)^{n-i-1}p \qquad n = i+1, i+2, \dots$

ب) $\Pr\{X+Y=n\} = \sum_{i=1}^{n-1} \Pr\{X+Y=n, X=i\}\Pr\{X=i\}$ $\qquad \Pr\{X+Y=n, X=i\} = \Pr\{X+Y=n \mid X=i\}\Pr\{X=i\}$

سروش میر فردوس مشد
شماره دانشجویی: 810198472

آمار و احتمال مهندسی
تکلیف سری هفتم

تاریخ تحویل: ۹۹/۹/۲۲

$$Pr\{X+Y=n, X=i\} = (1-p)^{n-i-1}p \times (p)(1-p)^{i-1} = p^2(1-p)^{n-2}$$

$$Pr\{X+Y=n\} = \sum_{i=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2$$