

۱- تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X در جدول زیر آمده است:

x_i	-2	-1	0	1	2
$\Pr\{X = x_i\}$	0.2	0.1	0.2	0.4	0.1

اگر متغیر تصادفی Y به صورت $Y = \begin{cases} X^2 + 3 & |X| \leq 1 \\ X^2 + 3X & |X| > 1 \end{cases}$ تعریف شود، تابع جرم احتمال آن را پیدا کنید.

[پاسخ: $\Pr\{Y = -2, +3\} = 0.2, \Pr\{Y = +4\} = 0.5, \Pr\{Y = +10\} = 0.1$]

۲- ۱۰ توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ در جعبه‌ای قرار دارند (از هر شماره ۲ توپ). ۴ توپ را به صورت کاملاً تصادفی و بدون جای‌گذاری

از جعبه خارج می‌کنیم. با فرض آن‌که X نشان دهنده‌ی بزرگترین شماره در بین این ۴ توپ باشد، تابع جرم احتمال X را

بیابید. [پاسخ: $\Pr\{X = 2\} = \frac{1}{210}, \Pr\{X = 3\} = \frac{1}{15}, \Pr\{X = 4\} = \frac{11}{42}, \Pr\{X = 5\} = \frac{2}{3}$]

۳- تابع چگالی احتمال X به صورت $f_X(x) = c(\delta(x+1) + \delta(x-1)) + xe^{-x^2}u(x)$ داده شده است.

الف) مقدار c را بیابید و تابع توزیع تجمعی X را رسم کنید. [پاسخ: $c = 0.25$]

ب) $\Pr\{-1 \leq X \leq 1\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{2-e^{-1}}{2}$]

۴- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است که در آن s, r و t مقادیر ثابت (ناوابسته به x) هستند.

$$F_X(x) = \begin{cases} r, & x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 3 \\ s, & 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & 4 \leq x < 6 \\ t, & 6 \leq x \end{cases}$$

الف) مقادیر r و t و بازه‌ی مقادیر مجاز برای s پیدا کنید. [پاسخ: $r = 0, t = 1, 0.3 \leq s \leq 0.9$]

ب) $\Pr\{2 < X \leq 5\}$ را تعیین کنید. [پاسخ: 0.6]

پ) اگر بدانیم $\Pr\{X = 3\} = \Pr\{X = 4\}$ ، تابع جرم احتمال X را بیابید. [پاسخ: $p_X(x) = \begin{cases} 0.3, & x = 1, 3, 4 \\ 0.1, & x = 6 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$]

۵- اگر X دارای توزیع نرمال به صورت $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ باشد و بخواهیم $\Pr\{1 < X < 2\}$ ماکزیمم شود، مقدار σ^2 باید چه قدر

باشد؟ [پاسخ: $\sigma^2 = \frac{3}{2\ln(2)}$]

۶- تعداد تصادفات در یک جاده‌ی پرتردد به صورت یک متغیر تصادفی پواسن با چگالی $\lambda = 2$ تصادف بر ساعت مدل می‌شود.

احتمال آن را بیابید که:

الف) در بازه‌ای به طول یک ساعت دقیقاً دو تصادف رخ دهد. [پاسخ: $2e^{-2}$]

ب) در بازه‌ای به طول یک ساعت دقیقاً دو تصادف و هر دو تصادف در ربع ساعت اول رخ دهد. [پاسخ: $\frac{1}{8}e^{-2}$]

۷- در جعبه‌ای $\binom{100}{0}$ توپ با شماره 0، $\binom{100}{1}$ توپ با شماره 1، ... و $\binom{100}{100}$ توپ با شماره 100 وجود دارد. توپی را به تصادف از

جعبه خارج می‌کنیم و شماره‌ی آن را X می‌نامیم. تابع جرم احتمال X را پیدا کنید. [پاسخ: $p_X[k] = \frac{\binom{100}{k}}{2^{100}}$]

۸- در یک جامعه تعداد فرزندان هر خانواده را می‌توان یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین 2.5 در نظر گرفت. احتمال آن که خانواده‌ای در این جامعه دقیقاً دو پسر و دو دختر داشته باشد چقدر است؟ فرض کنید احتمال دختر یا پسر بودن هر فرزند، مستقل از یکدیگر، برابر 0.5 است. [پاسخ: $\frac{e^{-2.5} 5^4}{2^{10}}$]

۹- تعداد دفعاتی که فردی در سال دچار سرماخوردگی می‌شود، یک متغیر تصادفی پواسن با $\lambda = 3$ است. دارویی برای پیش‌گیری از سرماخوردگی ارائه شده است که بر ۷۵٪ افراد مؤثر بوده و پارامتر پواسن را به $\lambda = 2$ کاهش می‌دهد. دارو بر بقیه‌ی ۲۵٪ بی‌تأثیر است. اگر فردی از این دارو استفاده کند و در طول آن سال به سرما خوردگی مبتلا نشود، با چه احتمالی دارو بر او مؤثر بوده است؟ [پاسخ: $\frac{3e^{-2}}{3e^{-2} + e^{-3}}$]

۱۰- فرض کنید یک چراغ راهنمایی در مسیر شما به دانشگاه وجود دارد که هر روز ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کند. به این صورت که به تناوب یک دقیقه سبز و سه دقیقه قرمز است (چراغ راهنمایی با سبز شروع به کار می‌کند). فرض کنید زمان رسیدن شما بر حسب دقیقه به این چراغ راهنمایی نسبت به مبدأ ۷ صبح یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \ln(2)$ باشد. Y را مدت زمان توقف شما (بر حسب دقیقه) پشت چراغ تعریف می‌کنیم. تابع توزیع تجمعی Y را محاسبه کنید.

$$[F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{8}{15} + \frac{1}{15}(2^y - 1), & 0 \leq y \leq 3 \\ 1, & 3 < y \end{cases} \quad \text{پاسخ:}]$$

۱۱- نقطه‌ای را به صورت کاملاً تصادفی درون دایره‌ای به شعاع a انتخاب می‌کنیم. طول وتر گذرا از این نقطه را که بر شعاع گذرنده از آن عمود است، X می‌نامیم. تابع چگالی احتمال X را پیدا کنید. [پاسخ: $f_X(x) = \frac{x}{2a^2}$, $0 \leq x \leq 2a$]

راهنمایی: نقطه‌ی قرمز رنگ، نقطه‌ای است که به صورت تصادفی داخل دایره انتخاب شده است. تعیین کنید که برای یک x حقیقی و معین، ناحیه‌ی خاکستری رنگ معرف چه نقاطی است؟

