۱- X و Y دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل به‌ترتیب با میانگین‌های $\frac{1}{\lambda}$ و $\frac{1}{\mu}$ هستند. تعریف می‌کنیم $W = \min(X,Y)$. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی W را پیدا کنید. [پاسخ: $W \sim \mathrm{E}(\lambda+\mu)$]

۲- یک آمبولانس با سرعت ثابت در جاده‌ای به طول L رفت‌وآمد می‌کند. در یک لحظه معین، حادثه‌ای در نقطه‌ای از جاده رخ می‌دهد که آن نقطه به طور یکنواخت روی $[0,L]$ توزیع شده است. همچنین در لحظه حادثه، مکان آمبولانس نیز در جاده به طور یکنواخت روی $[0,L]$ توزیع شده است. با فرض استقلال این دو متغیر تصادفی:

الف) توزیع فاصله آمبولانس تا محل حادثه را محاسبه کنید. [پاسخ: $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2(L-z)}{L^2} & 0 \le z \le L \\ 0 & \mathrm{o.w.} \end{cases}$]

ب) با فرض آن‌که آمبولانس با سرعت ثابت V تردد نماید،متوسط زمان رسیدن آن را به محل حادثه، به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{L}{3V}$]

۳- اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت زیر باشد، تابع چگالی احتمال $Z = X - Y$ را بیابید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x, & x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1 \\ 0, & \mathrm{o.w.} \end{cases}$$

[پاسخ: $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1+z)^2, & -1 \le z \le 0 \\ \frac{3}{4}(1+2z-3z^2), & 0 \le z \le 1 \\ 0, & \mathrm{o.w.} \end{cases}$]

۴- تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر است. تابع چگالی احتمال $Z = \frac{X}{Y}$ را به‌دست آورید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24\,xy, & x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1 \\ 0, & \mathrm{o.w.} \end{cases}$$

[پاسخ: $f_Z(z) = \frac{6z}{(1+z)^4} u(z)$]

۵- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $Z = X + Y$ باشد.

الف) نشان دهید $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y) dy$.

ب) اگر Y متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $(0,1)$ باشد، نشان دهید $f_Z(z) = F_X(z) - F_X(z-1)$.

۶- X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ هستند. متغیرهای تصادفی Z و W را با توجه به آن‌ها به‌صورت $Z \triangleq X + Y$ و $W \triangleq \frac{X}{Y}$ تعریف می‌کنیم.

الف) تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Z را پیدا کنید. [پاسخ: $f_{XZ}(x,z) = \lambda^2 e^{-z},\ z \ge x \ge 0$]

ب) با استدلال ریاضی مناسب، تعیین کنید که آیا متغیرهای تصادفی Z و W مستقلند یا خیر؟

[پاسخ: بله؛ $f_{ZW}(z,w) = \frac{\lambda^2 z}{(1+w)^2} e^{-\lambda z},\ z > 0,\ w > 0,\ f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} u(z),\ f_W(w) = \frac{u(w)}{(1+w)^2}$]

پ) حال تعریف می‌کنیم: $Z \triangleq \min(X,Y)$ و $W \triangleq \max(X,Y) - \min(X,Y)$، ثابت کنید Z و W مستقلند. **[راهنمایی:** ابتدا یک متغیرتصادفی کمکی به‌صورت $V = \max(X,Y)$ در نظر گرفته و $f_{VW}(v,w)$ را با توجه به مطالب بیان شده در درس پیدا کنید. سپس از قضیه‌ی اساسی احتمال برای محاسبه‌ی $f_{ZW}(z,w)$ استفاده کنید.]

[پاسخ: $f_{ZW}(z,w) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2z+w)},\ z > 0,\ w > 0,\ Z \sim \mathrm{E}(2\lambda),\ W \sim \mathrm{E}(\lambda)$]

۷- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با پارامتر p باشند:

الف) حاصل $\mathbb{E}\left\{\frac{X^2+Y^2}{XY}\right\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{2\ln\left(\frac{1}{p}\right)}{1-p}$]

ب) تابع جرم احتمال توأم $Z = X + Y$ و $W = X - Y$ و توابع چگالی حاشیه‌ای Z و W را بیابید.

[پاسخ: $p_{ZW}(i,j) = p^2(1-p)^{i-2},\ \ i > 0, -i < j < i,\ \ i+j$: زوج،

$p_Z(i) = (i-1)\, p^2(1-p)^{i-2},\ \ i = 2,3,\dots$

$p_W(j) = \frac{p(1-p)^{|j|}}{2-p},\ j = \cdots,-2,-1,0,1,2,\dots$]

۸- یک سکه‌ی اریب با $P(H) = p$ را n بار به‌طور مستقل پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد Hها و Y تعداد Tها را در این n پرتاب نشان دهد، توزیع $Z = X - Y$ و میانگین و واریانس آن را پیدا کنید. [**راهنمایی:** Z را می‌توان برحسب X نوشت.]

[پاسخ: $\eta_Z = n(2p-1)$، $\sigma_Z^2 = 4np(1-p)$، $p_Z(k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}},\ \ k = -n,-n+2,\dots,n-2,n,$]

۹- متغیر تصادفی Z دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ و U، مستقل از Z، به‌صورت یکنواخت روی $(0,2\pi)$ توزیع شده است. تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X = \sqrt{2Z}\,\cos U$ و $Y = \sqrt{2Z}\,\sin U$ را به‌دست آورید. [پاسخ: X و Y مستقل و دارای توزیع $\mathcal{N}(0,1)$ هستند.]

۱۰- الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم $f_{XY}(x,y)$ باشند. مختصات یک نقطه در دستگاه کارتزین را با (X,Y) نشان می‌دهیم. همین نقطه در مختصات قطبی به‌صورت (R,Φ) نشان داده می‌شود که در آن

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} \qquad \Phi = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \qquad -\pi \le \Phi \le \pi.$$

نشان دهید $f_{R\Phi}(r,\varphi) = r f_{XY}(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)$.

ب) در بند (الف) اگر X و Y مستقل بوده و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند نشان دهید متغیرهای تصادفی R و Φ نیز مستقل‌اند و توابع چگالی احتمال آن‌ها را بیابید. [پاسخ: $f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} u(r),\ \ \Phi \sim U(0,2\pi)$]

۱۱- رابطه توان مصرفی در یک مقاومت الکتریکی با جریان به صورت $P = RI^2$ است. فرض کنید که جریان و مقاومت، متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی‌های زیر باشند. تابع چگالی احتمال و امید ریاضی توان مصرف شده در مقاومت را بیابید.

$$f_I(i) = 6i(1-i),\ \ 0 \le i \le 1, \qquad f_R(r) = 2r,\ \ 0 \le r \le 1$$

[پاسخ: $\mathbb{E}(P) = 0.2$، $f_P(p) = 6\left(1-\sqrt{p}\right)^2,\ \ 0 \le p \le 1$]

۱۲- نشان دهید اگر X و Y توأماً نرمال با میانگین صفر باشند آن‌گاه: $E\{X^2Y^2\} = E\{X^2\}E\{Y^2\} + 2E^2\{XY\}$

۱۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با میانگین‌های صفر، واریانس‌های σ^2 و ضریب همبستگی ρ باشند.

الف) با فرض $\rho = 0$ احتمال پیشامد $\{|X| > |Y|\}$ را بیابید. [پاسخ: $\frac{1}{2}$]

ب) ثابت کنید $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقلند.

۱۴- فرض کنید $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ و $Y \sim \mathcal{N}(-1,4)$ دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با ضریب همبستگی $-\frac{1}{2}$ باشند.

الف) $\Pr\{X + Y < -1\}$ را پیدا کنید (نیازی به انجام محاسبات طولانی ندارید). [پاسخ: $\frac{1}{2}$]

ب) α را به گونه‌ای تعیین کنید که متغیرهای تصادفی $\alpha X + Y$ و $X + 2Y$ مستقل باشند. [پاسخ: $\alpha = 7$]

۱۵- فرض کنید $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ و $Y = \begin{cases} X & |X| > c \\ -X & |X| \le c \end{cases}$ که در آن $c \in \mathbb{R}$.

الف) تابع چگالی Y را بیابید. [پاسخ: $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$]

ب) آیا $Z = X - Y$ نرمال است؟ چرا؟ [پاسخ: خیر]