-1

$$Y=\begin{cases} X^2+3 & -1\leqslant X\leqslant 1 \\ X^2+3X & X>1 \text{ or } X<-1 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر x_i مقادیر y را پیدا می‌کنیم.

$x_i=-2 \longrightarrow Y=-2 \longrightarrow Pr\{Y=-2\}=0.2$

$\begin{cases} x_i=-1 \\ x_i=1 \end{cases} \longrightarrow Y=4 \longrightarrow Pr\{Y=4\}=Pr\{X=1\}+Pr\{X=-1\}=0.5$

$x_i=0 \longrightarrow Y=3 \longrightarrow Pr\{Y=3\}=0.2$

$x_i=2 \longrightarrow Y=10 \longrightarrow Pr\{Y=10\}=0.1$

y_i	-2	3	4	10
$Pr\{Y=y_i\}$	0.2	0.2	0.5	0.1

-5

$X\sim N(0,\sigma^2) \longrightarrow \eta=0 \qquad Pr\{1<X<2\}=F_X(2)-F_X(1)$

$F_X(x) \xrightarrow{\text{for normal}} G\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) \longrightarrow Pr\{1<X<2\}=G\left(\frac{2}{\sigma}\right)-G\left(\frac{1}{\sigma}\right)$

$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \longrightarrow G(2/\sigma)-G\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{2}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt-\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{2}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt\right)=U(\sigma)$ برای ماکسیمم شدن باید مشتق را برابر با صفر قرار دهیم

$\frac{dU}{d\sigma}=0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2}{\sigma^2}e^{\frac{-2}{\sigma^2}}+\frac{1}{\sigma^2}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}}\right)=0$

$\longrightarrow \frac{-2}{\sigma^2}e^{\frac{-2}{\sigma^2}}=\frac{-1}{\sigma^2}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}} \longrightarrow 2e^{\frac{-2}{\sigma^2}}=e^{\frac{-1}{2\sigma^2}} \longrightarrow 2=e^{\frac{3}{2\sigma^2}}$

$\longrightarrow \ln 2=\frac{3}{2\sigma^2} \longrightarrow \sigma^2=\frac{3}{2\ln 2}$

تاریخ تحویل: ۹۷/۸/۱۴

آمار و احتمال مهندسی – تمرین سری دوم

درویش [illegible]
شماره دانشجویی: 810194472

۷- برای محاسبه PMF داریم:

All outcomes: $\binom{100}{0}+\binom{100}{1}+\binom{100}{2}+\dots+\binom{100}{100}=2^{100}$

favourable: برای این بخش ما می‌خواهیم احتمال دیده شدن مهره با شماره k را حساب کنیم

از هر شماره توپ (۰،۱،...،۱۰۰) به تعداد $\binom{100}{k}$ توپ وجود دارد که باز باید یکی از این ها را انتخاب کنیم پس خواهیم داشت:

favourable outcomes: $\binom{\binom{100}{k}}{1}=\binom{100}{k}$

$$\to P_X[k]=\frac{\binom{100}{k}}{2^{100}}$$

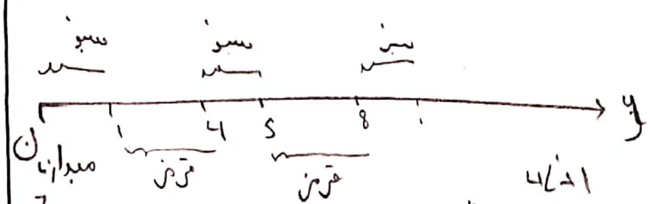
۹-

Poisson: $P_r\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

احتمال اینکه فرد سرما خوردگی نگیرد و دارو هم خورده باشد: $\frac{3}{4}\times e^{-2}\frac{2^0}{0!}+\frac{1}{4}\times e^{-3}\times\frac{3^0}{0!}=\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}e^{-3}$

احتمال سرما نخوردن و موثر بودن دارو: $\frac{\frac{3}{4}e^{-2}}{\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}e^{-3}}=\frac{3e^{-2}}{3e^{-2}+e^{-3}}$

۱۰- واضح است که برای حالت های: $y<0$ ، $y\geq 3$ به ترتیب $F_Y(y)=0$ ، $F_Y(y)=1$ حال حالت $0\leq y\leq 3$ را بررسی می‌کنیم.



برای $y=0$: $F_Y(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{4i}^{4i+1}\lambda e^{-\lambda y}dy=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{4i}^{4i+1}\ln 2\, 2^{-y}dy$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}-2^{-y}\Big|_{4i}^{4i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}2^{-4i}-2^{-4i-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{512}+\dots=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}}=\frac{8}{15}$$

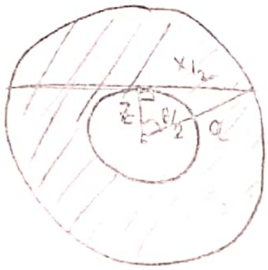
$0<y\leq 3 \to F_Y(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{4i+4-y}\lambda e^{-\lambda y}dy=\sum_{i=0}^{\infty}2^{(y-4i-4)}-2^{(-4i-4)}$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-4-4i}(2^y-1) = (2^y-1)\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-4-4i} = (2^y-1)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\dots\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}(2^y-1) = \frac{1}{15}(2^y-1) \longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{8}{15}+\frac{1}{15}(2^y-1) & 0\leq y\leq 3 \\ 1 & y\geq 3 \end{cases}$$

۱۱- x طول های ممکن برای زه ها بر X متغیر تصادفی ماست. برای یافتن PDF ابتدا CDF را پیدا می‌کنیم و سپس از تعریف بهره می‌بریم.

$F_X(x) = \Pr\{X\leq x\}$ — احتمال کوتاه‌تر بودن وتر از وتری به طول x



$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{x}{2a} \quad , \quad z = \sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$$

ناحیه مطلوب ما ناحیه هاشور زده است. را احتمال آن برابر است با مساحت آن تقسیم بر مساحت کل

$$F_X(x) = \Pr\{X\leq x\} = \frac{\pi(a^2-z^2)}{\pi a^2} = \frac{\pi(a^2-(a^2-x^2/4))}{\pi a^2}$$

$$\longrightarrow F_X(x) = \frac{x^2}{4a^2} \qquad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2x}{4a^2} = \frac{x}{2a^2}$$

واریانس و میانگین تعریف نشده است، امیدوارم آنچه در ادامه می‌نویسیم یاوه نباشد:

$$\text{Avg} = \bar{x} = \int_0^{2a} x f_X(x)\,dx = \int_0^{2a}\frac{x^2}{2a^2}dx = \frac{x^3}{6a^2}\Big|_0^{2a} = \frac{4}{3}a$$

$$\text{Var} = \sigma^2 = \int_0^{2a}(x-\bar{x})^2 f(x)\,dx = \int_0^{2a}(x-\tfrac{4}{3}a)^2\cdot\frac{x}{2a^2}$$

$$= \int_0^{2a}\frac{x^3}{2a^2}dx - \frac{4}{3a}\int_0^{2a}x^2dx + \frac{8}{9}\int_0^{2a}x\,dx = \frac{x^4}{8a^2}\Big|_0^{2a} - \frac{4x^3}{9a}\Big|_0^{2a} + \frac{4x^2}{9}\Big|_0^{2a}$$

$$= 2a^2 - \frac{32}{9}a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{2a^2}{9}$$