۱- متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 توأماً مستقل و دارای توزیع پوآسن با پارامتر λ هستند.

الف) با استفاده از تابع مولد ممان (یا هر روش دیگر)، تابع جرم احتمال (PMF) متغیر تصادفی Y با تعریف $Y \triangleq X_1 + X_2 + X_3$ را پیدا کنید. [پاسخ: $Y \sim \mathrm{P}(3\lambda)$]

ب) حاصل $\Pr\{Y = 2 \mid X_1 = 1\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $2\lambda e^{-2\lambda}$]

پ) حاصل $\Pr\{X_3 > 1 \mid Y = 3\}$ را پیدا کنید. [پاسخ: $\frac{7}{27}$]

۲- فرض کنید X، Y و Z متغیرهای تصادفی پیوسته و توأماً مستقل با توابع توزیع تجمعی $F_X(x) = h(x)$، $F_Y(y) = h^2(y)$ و $F_Z(z) = h^3(z)$ باشند. $\mathbb{P}\mathrm{r}\{X < Y < Z\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $\frac{1}{4}$]

۳- با فرض آن‌که X، Y و Z متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با پارامتر واحد باشند:

الف) تابع چگالی احتمال X را مشروط به $Y + Z \leq 1$ به‌دست آورید. [پاسخ: همان تابع چگالی X]

ب) تابع چگالی احتمال X را مشروط به $X \leq 1$ و $X + Y \leq 1$ به‌دست آورید.

[پاسخ: $f_X(x|X+Y \leq 1, X \leq 1) = \begin{cases} \frac{e^{-x-y}}{1-2e^{-1}}, & x+y \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$]

پ) احتمال آن‌که X، Y و Z طول‌های سه ضلع یک مثلث باشند چه‌قدر است؟ (**راهنمایی:** این احتمال در حقیقت احتمال پیشامد $\{X < Y + Z,\ Y < X + Z,\ Z < X + Y\}$ است. احتمال این پیشامد را می‌توان به‌صورت مستقیم یا با شرطی کردن روی مثلاً $Z = z$ پیدا کرد.) [پاسخ: $\frac{1}{4}$]

۴- فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n توأماً مستقل با $\mathbb{E}\{X_i\} = \eta_i$، $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ و $f_{X_i}(x) = f_i(x)$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$ باشند. تعریف می‌کنیم: $Y_1 \triangleq X_1$، $Y_2 \triangleq X_1 + 2X_2$، ... و $Y_n \triangleq X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n$.

الف) میانگین شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ را پیدا کنید. [پاسخ: $Y_{n-1} + n\eta_n$]

ب) واریانس شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ را پیدا کنید. [پاسخ: $n^2\sigma_n^2$]

پ) تابع چگالی احتمال بردار تصادفی Y را برحسب توابع $f_1(\cdot)$، $f_2(\cdot)$، ... و $f_n(\cdot)$ به‌دست آورید.

[پاسخ: $\frac{1}{n!} f_1(y_1) f_2\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right) f_3\left(\frac{y_3 - y_2}{3}\right) \ldots f_n\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{n}\right)$]

۵- فرض کنید X_1، X_2 و X_3 سه متغیر تصادفی پوآسنِ مستقل با میانگین‌های $\mathbb{E}\{X_1\} = 1$، $\mathbb{E}\{X_2\} = 2$ و $\mathbb{E}\{X_3\} = 3$ باشند. تعریف می‌کنیم $Y_1 \triangleq X_1$، $Y_2 \triangleq X_2 - X_1$ و $Y_3 \triangleq X_3 - X_2$.

الف) ماتریس همبستگی بردار $\underline{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ و ماتریس کواریانس بردار $\underline{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$ را پیدا کنید.

[پاسخ: $R_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad C_{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$]

ب) احتمال پیشامد $\{Y_1 = Y_2 = Y_3 = 3\}$ چه‌قدر است؟ [پاسخ: $\frac{e^{-6} 1^3 2^6 3^9}{3!6!9!}$]

۶- متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 توأماً نرمال با میانگین صفر، واریانس واحد و دوبه‌دو ناهمبسته‌اند. متغیرهای تصادفی Y و Z را به‌صورت $Y \triangleq X_1 + X_2 + X_3$ و $Z = X_1 - X_2 - X_3$ تعریف می‌کنیم.

الف) تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی Y و Z را پیدا کنید. [پاسخ: $\eta_Z = \eta_Y = 0, \sigma_Z^2 = \sigma_Y^2 = 3,\ r = -\frac{1}{3}$

$f_{ZY}(z, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{z^2}{\sigma_Z^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2ryz}{\sigma_Z\sigma_Y}\right)}$]

ب) میانگین‌های شرطی $\mathbb{E}\{Z|Y\}$ و $\mathbb{E}\{Y^2|Z\}$ را به‌دست آورید. [پاسخ: $\mathbb{E}\{Z|Y\} = -\frac{1}{3}Y$ و $\mathbb{E}\{Y^2|Z\} = \frac{8}{3} + \frac{Z^2}{9}$]

۷- فرض کنید تابع چگالی توأم X، Y و Z به‌صورت $f_{xyz}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{2}xy\right)\right]$ است.

الف) آیا X، Y و Z توأماً نرمال هستند؟ چرا؟ [پاسخ: بله]

ب) بردار میانگین و ماتریس کوواریانس بردار $[X\ \ Y\ \ Z]^T$ را حساب کنید. [پاسخ: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$]

پ) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای بردار $[X\ \ Z]^T$ را پیدا کنید. [پاسخ: $f_{XZ}(x,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+z^2}{2}\right)}$]

۸- تابع مولد ممان توأم متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 به‌صورت زیر داده شده است:

$$M_{X_1X_2X_3}(s_1,s_2,s_3) = \exp\left(\frac{1}{2}\,s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 + \frac{1}{4}s_1s_2 + \frac{1}{4}s_2s_3\right)$$

الف) $\mathbb{E}\{3X_1X_3|X_1,X_2\}$ را محاسبه نمایید. [پاسخ: $\mathbb{E}\{3X_1X_3|X_1,X_2\} = -\frac{X_1^2}{5} + \frac{4X_1X_2}{5}$]

ب) با استفاده از خواص بردار نرمال، تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی $Z = X_1 + X_2$ و $W = X_2 + X_3$ را بیابید.

[پاسخ: $r = \frac{3}{4}$, $f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{8\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{z^2+w^2-2rzw}{2}\right)}$]

۹- فرض کنید X_iها متغیرهای تصادفی نرمال توأماً مستقل با میانگین η و واریانس σ^2 باشند.

الف) متغیر تصادفی Y_n را به‌صورت $Y_n \triangleq X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$ تعریف می‌کنیم. مقدار $\mathrm{Cov}(Y_n\,, Y_{n+1})$ را حساب کنید.

[پاسخ: $\mathrm{Cov}(Y_n\,, Y_{n+1}) = 2\sigma^2$]

ب) اگر $\eta = 0$ باشد با فرض: $Z \triangleq \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{i=1}^{n}|X_{2i} - X_{2i-1}|$ نشان دهید $\mathbb{E}\{Z\} = \sigma$ و $\sigma_Z^2 = \frac{\pi-2}{2n}\sigma^2$.

۱۰- فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n متغیرهای تصادفی نمایی .i.i.d با تابع چگالی $f(x) = e^{-x}u(x)$ باشند. متغیر تصادفی Y به‌صورت $Y \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ تعریف می‌شود.

الف) نشان دهید $\Pr\{Y \geq 2\} \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

ب) ثابت کنید Y دارای توزیع ارلانگ است و همچنین $\mathbb{E}\left\{\frac{1}{Y^2}\right\} = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$ و $\mathbb{E}\left\{\frac{1}{Y}\right\} = \frac{n}{n-1}$.

پ) اگر Z یک متغیر تصادفی پوآسن مستقل از X_iها و با میانگین $\eta_Z = a$ باشد، میانگین و واریانس S با تعریف زیر را بیابید.

$$S \triangleq \begin{cases} nY, & Z \neq 0 \\ 0, & Z = 0 \end{cases}$$

[پاسخ: $\sigma_S^2 = n(1 + n\,e^{-a})(1 - e^{-a})$ $\eta_S = n(1 - e^{-a})$]

ت) حداقل مقدار n که تضمین کند $\Pr\{0.9 \leq Y \leq 1.1\} \geq 0.95$ است را بیابید. [پاسخ: $n_{\min} = 385$]

۱۱- فرض کنید X_1، X_2، ....، X_n متغیرهای تصادفی .i.i.d با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند.

الف) توابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را برحسب توابع $f(\cdot)$، $F(\cdot)$ یا هر دو بیان کنید.

$$Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}\,, \qquad X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

[پاسخ: $F_Y(y) = F(y)^n$, $F_X(x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n$]

ب) اگر X_iها توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0,1]$ داشته باشند و تعریف کنیم: $\tilde{X}_i \triangleq X_i - \mathbb{E}\{X_i\}$، تابع چگالی متغیرهای تصادفی $Z = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_n}{\sqrt{n}}$ و $W = \lim_{n\to\infty} n\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ را پیدا کنید. [پاسخ: $Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $W \sim \mathrm{Exp}(1)$]

پ) n نقطه را به طور تصادفی در بازه $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب نشان‌دهنده فاصله مبدأ تا اولین و آخرین نقطه‌ی تصادفی باشند. توابع توزیع $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ و $F_{XY}(x,y)$ را به‌دست آورید.

[پاسخ:
$$F_X(x)=\begin{cases}1-(1-x)^n & 0\le x\le 1\\ 0 & x<0\\ 1 & x>1\end{cases},\quad F_Y(y)=\begin{cases}y^n & 0\le y\le 1\\ 0 & y<0\\ 1 & y>1\end{cases}$$

$$[F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ یا } y<0\\ y^n-(y-x)^n, & 0\le x\le y<1\\ y^n, & 0\le y\le x<1\\ 1-(1-x)^n & 0\le x<1<y\\ 1, & 1\le x \text{ و } 1\le y\end{cases}$$

توجه: مسائل زیر صرفاً جهت تمرین بیشتر دانشجویان علاقمند انتخاب شده و تحویل گرفته نمی‌شوند. توزیع‌های معرفی‌شده در مسائل زیر در مباحث آماری (بخش آخر درس) بسیار پرکاربرد هستند.

۱۲- اگر X_iها متغیرهای تصادفی نرمال و تواماً مستقل به‌صورت $X_i\sim\mathcal{N}(\eta_i,\sigma_i^2)$ باشند.تعریف می‌کنیم $Y\triangleq\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\eta_i)^2}{\sigma_i^2}$. با فرض $\Gamma(\alpha)\triangleq\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$:

الف) نشان دهید که Y دارای توزیع Chi-squared با n درجه‌ی آزادی است یعنی:

$$Y\sim\chi^2(n):\quad f_Y(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{y}{2}}\,u(y)$$

ب) اگر $W\sim\mathcal{N}(0,1)$ مستقل از Y باشد، نشان دهید $Z\triangleq W/\sqrt{Y/n}$ توزیع Student-t با n درجه‌ی آزادی دارد یعنی:

$$Z\sim t(n):\quad f_Z(z)=\frac{\gamma_1}{\sqrt{(1+z^2/n)^{n+1}}},\quad \gamma_1=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}$$

۱۳- فرض کنید X_iها متغیرهای i.i.d. با توزیع نرمال باشند یعنی $X_i\sim\mathcal{N}(\eta_X,\sigma_X^2)$ باشند. برحسب آن‌ها میانگین و واریانس نمونه‌ای را به‌صورت $\bar{X}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $S^2=\bar{V}\triangleq\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید:

الف) $\bar{X}$ و $X_i-\bar{X}$ برای $i=1,\dots,n$ از یکدیگر مستقلند.

ب) $\frac{(n-1)\bar{V}}{\sigma_X^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2$ دارای توزیع Chi-squared با $n-1$ درجه‌ی آزادی است .

پ) $\frac{\bar{X}-\eta_X}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$ دارای توزیع Student-t با $n-1$ درجه‌ی آزادی است.