2 - الف) چون که d باید بلافاصله پس از e آمده باشد این دو را به صورت یک بسته $\boxed{ed}$ در نظر می‌گیریم

$a, b, c, \boxed{ed}, f, g, h, i \xrightarrow{\text{جایگشت‌ها}} 8!$

ب) برای حل این سوال ابتدا باید دقت کنیم که e,d,f باید بین حروف انتخابی باشند. پس از بین 9 حرف سه تا را حذف، از 6 حرف باقی‌مانده سه تا را باید انتخاب کنیم:

$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i$ — روش‌های انتخاب سه حرف غیر از e,d,f $\longrightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!}$

حال این سه حرف، e,d,f خود به $6!$ حالت امکان جایگشت دارند. منتهی باید دقت کنیم که $3!$ حالت جابجایی حروف e,d,f ابداً مطلوب ما نیستند.

حالات جایگشت حروف کلمه $\longrightarrow \frac{6!}{3!}$

$$Ans = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{6!}{3!} = \frac{6!\,6!}{3!3!3!}$$

پ) برای این بخش تصور می‌کنیم که حروف a تا i کنار هم قرار گرفته‌اند. این کار $9!$ حالت دارد. حال می‌آییم و سه تا سه تا حروف را جدا می‌کنیم که کلمات را تشکیل دهیم. اما با این کار ما به کلمات ترتیب می‌دهیم که ضمن این کار باعث می‌شود یک $3!$ اضافی ضرب کنیم و به $9!$ برسیم. پس چون به کلمات نباید ترتیب دهیم باید $9!$ را تقسیم بر $3!$ کنیم.

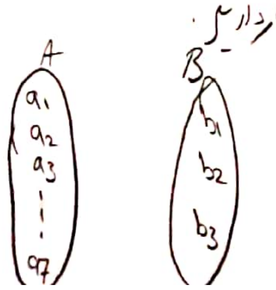
word1, word2, word3

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{9!} \longrightarrow Ans = \frac{9!}{3!}$$

4 - الف) کل این سوال با مفهوم تعداد توابع (معمولی، یوشا، یک به یک) حل می‌شود. از A به B به طوری که $|A|=n$ ، $|B|=m$ باشند، در این بخش با تعداد توابع سروکار داریم.

$A =$ تعداد اعداد $= 7 = n$

$B =$ تعداد فرزندان $= 3 = m$

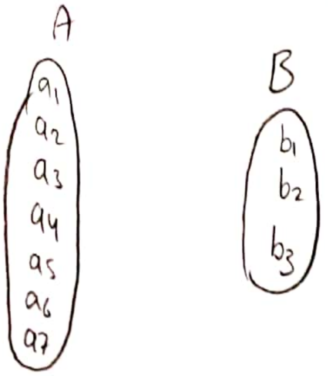


هرکدام از عناصر A برای رفتن به B سه حالت دارند

پس چون $n=7$ داریم: $Ans = m^n = 3^7$

تاریخ تحویل: 99/7/26	آمار و احتمال مهندسی — تکلیف سری دوم	فردوس حسن فردوس مشهد — شماره دانشجویی: 810198472

ب) در این بخش تعداد توابع پوشا از A به B مطلوب است ($R_f = B$)



دو روش برای حل این سوال ارائه می کنم یکی با اصل شمول و عدم شمول دیگری با یادگاری از دوران کنکور

روش اول)

$|S| = 3^7$ غیرپوشا − کل توابع = توابع پوشا

$A_1 = \{f \mid b_1 \notin f(A)\}$ ← b_1 در برد نباشد

$A_2 = \{f \mid b_2 \notin f(A)\}$ ← b_2 در برد نباشد

$A_3 = \{f \mid b_3 \notin f(A)\}$ ← b_3 در برد نباشد.

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^7$ $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^7 = 1$ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^7 - \big(|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\big) = 3^7 - (3 \times 2^7 - 3 + 0) \to \text{Ans} = 3^7 - 3 \times 2^7 + 3$$

روش دوم) به یاد دوران کنکور!

if $m < n$ — $\text{تعداد توابع پوشا} = m^n - \left[\binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \dots\right]$

$$\to \text{Ans} = 3^7 - \left[\binom{3}{1}2^7 - \binom{3}{2}1^n\right] = 3^7 - 3 \times 2^7 + 3$$

پ) برای هدیه دادن به بزرگترین فرزند 3 تا انتخاب از 7 تا هدیه موجود داریم و برای دیگر فرزندان به ترتیب 2 انتخاب از 4 هدیه باقی مانده و 2 انتخاب از 2 هدیه موجود داریم پس:

$$\text{Ans} = \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{4!\,3!} \times \frac{4!}{2!\,2!} = 35 \times 6 = 210$$

6 – این سوال را برای دو حالت اول سفید بیرون آمد، اول قرمز بیرون آید باید حل کنیم و نتیجه را جمع کنیم

5W
3R

Box

حالت ۱: اول سفید $P(W_f) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8+3} \times \frac{5+3}{8+3+2} \times \frac{5}{8+3+2+3} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{16}$

حالت ۲: اول قرمز $P(R_f) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8+2} \times \frac{5}{8+2+3} \times \frac{8}{8+2+3+2} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{15}$

$$\to P(\text{مطلوب}) = P(W_f) + P(R_f) = \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{13} \times \frac{5}{16}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{15}\right)$$

8 - الف) از حالت تعمیم یافته آزمایش‌های برنولی بهره می‌گیریم :

1: lethal : L

2: Brutal : B

3: Partial : p

$$p(\text{مسئله}) = \binom{10}{1,2,7} p(L) \times p^2(B) \times p^7(p)$$

$$= \frac{10}{1!2!7!} \times 0.18 \times (0.52)^2 \times (0.3)^7$$

ب) B: پیشامد رخ دادن 7 تصادف جزئی

A: پیشامد وقوع دو تصادف بدنی و تصادف مرگبار

$p(A)$ $\frac{\text{مثل بخش الف}}{}$, $p(A) = \binom{10}{1,2,7} p(L) \times p^2(B) \times p^7(p) = \frac{10!}{1!2!7!} \times 0.18 \times (0.52)^2 \times (0.3)^7$

$$p(B) = \binom{10}{7} \times (0.3)^7 \times (0.7)^3$$

انتخاب 7 تا از 10 تا تصادف — احتمال تصادف جزئی — سایر نوع تصادف‌ها

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{10!}{1!2!7!} \times 0.18 \times (0.52)^2}{\binom{10}{7} \times (0.3)^7 \times (0.7)^3}$$

پ) با توجه به قید حداقل و حداکثر مسئله جدول زیر را رسم می‌کنیم :

حالات	1	2	3	4	5
lethal	1	0	1	0	0
Brutal	1	2	0	1	0
Partial	8	8	9	9	10

Ans: $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)$

$$p(1) = \frac{10!}{8!1!1!} \times 0.18 \times 0.52 \times (0.3)^8$$

$$p(2) = \frac{10!}{8!2!} \times (0.52)^2 \times (0.3)^8 \qquad p(3) = \frac{10!}{9!1!} \times 0.18 \times (0.3)^9$$

$$p(4) = \frac{10!}{9!1!} \times 0.52 \times (0.3)^9 \qquad p(5) = (0.3)^{10}$$

$$Ans = \left(\frac{10!}{8!1!1!} \times 0.18 \times 0.52 \times (0.3)^8\right) + \left(\frac{10!}{8!2!} \times (0.52)^2 \times (0.3)^8\right) + \left(\frac{10!}{9!1!} \times 0.18 \times (0.3)^9\right) + \left(\frac{10!}{9!1!} \times 0.52 \times (0.3)^9\right) + (0.3)^{10}$$

۱۰- اول از همه می‌دانیم که برای انتخاب l توپ از هر سبد $\binom{n}{l}$ حالت داریم. پس واضح است که در مخرج پاسخ عبارت $\binom{n}{l}\binom{n}{l}$ وجود خواهد داشت.

برای سبد اول فرض می‌کنیم k توپ با شماره‌های معین خارج کنیم که می‌شود $\binom{n}{k}$ حال چون باید l تا از هرکدام از جعبه‌ها خارج کنیم $l-k$ تا انتخاب از $n-k$ توپ باقی مانده داریم یعنی

$$\binom{n-k}{l-k}$$

برای جعبه دوم حتماً باید اول همان k توپ خارج شده باشد و سپس انتخاب داریم پس در نهایت:

$$Ans = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}\binom{n-k}{l-k}}{\binom{n}{l}\binom{n}{l}}$$

۱۲- الف) در درس توضیح داده شد که در n بار تکرار یک آزمایش برنولی احتمال پیروزی بین k_1, k_2 بار باشد برابر است با:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\binom{n}{k}p^k \times (1-p)^{n-k}$$

، پس برای این سوال داریم: A: خرابی بیش از ۲۰۰ لامپ

$$P(A) = \sum_{k=201}^{1000}\binom{1000}{k}p^k \times (1-p)^{1000-k} = \sum_{k=201}^{1000}\binom{1000}{k}\times(0.2)^k\times(0.8)^{1000-k}$$

برای محاسبه مقدار دقیق آن با استفاده از نرم‌افزار پایتون کد زیر را نوشتم:

```
import math
Sum=0
for i in range(201,1001):
    Sum=Sum+(math.factorial(1000)/math.factorial(1000-i)*math.factorial(i))
* ((0.2)**i) * (0.8)**(1000-i)
Print(Sum)
```

که این کد به ما خروجی 0.48108856444283 را می‌دهد که با تقریب تا چهار رقم اعشار داریم: $P(A)=0.4811$

تقریب:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\binom{n}{k}p^k\times(1-p)^{n-k} \simeq G\left(\frac{k_2+\frac{1}{2}-\eta}{\sigma}\right) - G\left(\frac{k_1-\frac{1}{2}-\eta}{\sigma}\right) \quad \sigma=\sqrt{np(1-p)} \quad \eta=np$$

$\eta = 1000\times\frac{2}{10} = 200$ ، $\sigma=\sqrt{1000\times0.2\times0.8}=\sqrt{160}$ — طبق تقریب: $G\left(\frac{800.5}{\sqrt{160}}\right)-G\left(\frac{0.5}{\sqrt{160}}\right)$

ب) در این بخش مشابه بخش قبل عمل می‌کنیم:

B: پیشامد آنکه بین ۱۰ تا ۲۵ مرغ، بیمار باشند

$$P(B)=\sum_{k=10}^{25}\binom{3000}{k}\times(0.01)^k\times(0.99)^{3000-k}$$

برای محاسبه مقدار دقیق دوباره از پایتون کمک گرفتیم:

```
import math
Sum=0
for i in range(11,26):
    Sum=Sum+(math.factorial(3000)/math.factorial(3000-i)*math.factorial(i))
    *((0.01)**i*(0.99)**(3000-i)
print(Sum)
```

خروجی کد زیر برابر با: 0.20705219630170 73 می‌باشد که با تقریب تا چهار رقم اعشار داریم: $P(B)=0.2071$

برای بخش تقریبی مشابه بخش قبل:

$$P(\text{تقریبی})=G\left(\frac{k_2+\frac{1}{2}-\eta}{\sigma}\right)-G\left(\frac{k_1-\frac{1}{2}-\eta}{\sigma}\right)$$

$$G(x)\simeq1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{e^{-x^2/2}}{0.661x+0.339\sqrt{x^2+5.51}}$$

$$\eta=np=3000\times\frac{1}{100}=30\qquad\sigma=\sqrt{np(1-p)}$$

$$\Rightarrow\sigma=\sqrt{3000\times\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}}=\sqrt{\frac{3}{10}\times99}=\sqrt{29.7}$$

$$P(\text{تقریبی})=G\left(\frac{25+1/2-30}{\sqrt{29.7}}\right)-G\left(\frac{10-\frac{1}{2}-30}{\sqrt{29.7}}\right)=G\left(\frac{-4.5}{\sqrt{29.7}}\right)-G\left(\frac{-20.5}{\sqrt{29.7}}\right)$$

$$G(-0.8257)-G(-3.7616)=G(3.7616)-G(0.8257)\xrightarrow{\text{جدول ضمیمه}}\cong0.2083$$

14- چون خدا‌ها نیز گروه n نفره هستیم اساساً باید احتمال آن را بیابیم که تعداد تولد‌ها بیشتر از ۱ (حداقل ۳) نفر تا $n-1$ نفر چقدر است که این n از فرمول زیر حاصل می‌شود.

A = پیشامد میان بودن تولد من، با حداقل 3 نفر از $n-1$ نفر

$$P(A)=\sum_{k=3}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k-1}$$

واضح است که این مقدار را به سادگی نمی‌توان دستی حساب کرد پس از کد پایتون ضمیمه بهره گرفتیم:

```
import math
n=5
flag=0
Sum=0
while(True):
    for i in range(3,n):
        Sum=Sum+(math.factorial(n)/math.factorial(n-i)*math.factorial(i)))*
        ((1/365)**i)*(364/365)**(n-i)
        if Sum>=0.5:
            flag=1
            break
        elif Sum<0.5 and i==n-1:
            Sum=0
            n=n+1
    if flag==1:
        break
print(n)
print(Sum)
```

خروجی کدی که نوشتم به صورت زیر است :

n= 976

Sum=0.5000994129725254

که این به ما نتیجه می‌دهد پاسخ دقیق به صورت n>975 است

اگر بخواهیم تقریبی حساب کنیم باید با تقریب پواسن جلو رویم :

$$P(A)=\sum_{k=3}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{365}\right)^k\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k-1}\cong\sum_{k=3}^{n-1}e^{-(n-1)p}\frac{((n-1)p)^k}{k!}$$

مشابه بخش قبلی اگر کد بنویسیم می‌بینیم که عدد 977 را به ما می‌دهد پس پاسخ به صورت n>976 ،