۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد. می‌دانیم $f(x)$ تنها یک ماکزیمم دارد و در دو طرف این ماکزیمم به‌صورت اکیداً یکنوا به صفر میرا می‌شود. با فرض آن‌که $\Pr\{c_1 < X < c_2\} = \gamma$ نشان دهید $c_2 - c_1$ هنگامی کم‌ترین مقدار را دارد که $f(c_1) = f(c_2)$ باشد.

۲- فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌هایی تصادفی از یک توزیع یکنواخت روی $[0,1]$ و $X_{\min}$ و $X_{\max}$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین نمونه در بین این نمونه‌ها باشند. با استفاده از نتایج مسأله‌ی ۱۱ از تمرین سری قبل تعیین کنید که:

الف) آیا $M = (X_{\max} + X_{\min})/2$ (به M اصطلاحاً Midrange Estimator گفته می‌شود) یک تخمین بدون بایاس از میانگین است؟ [پاسخ: بله]

ب) آیا این تخمین از میانگین نمونه‌ای بهتر است؟ چرا؟ [پاسخ: بله. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2n^2+6n+4} = \sigma_M^2 \le \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{12n}$]

۳- فرض کنید U_1 و U_2 دو تخمین بدون بایاس و مستقل برای θ به ترتیب با واریانس‌های 2 و 3 باشند. تخمین بدون بایاس جدیدی به صورت $U_3 \triangleq \alpha U_1 + \beta U_2$ برای θ تعریف می‌کنیم. α و β را به گونه‌ای تعیین کنید که تخمین جدید کم‌ترین واریانس را داشته باشد. کدام‌یک از سه تخمین فوق بهترین است؟ چرا؟ [پاسخ: $\alpha = \frac{3}{5},\ \beta = \frac{2}{5}$، U_3 بهترین است.]

۴- فرض کنید متغیر تصادفی X عمر مفید نوعی لاستیک خودرو را برحسب کیلومتر نشان می‌دهد و $\sigma_X = 5000$ است. در یک نمونه‌ی ۶۴ تایی از این نوع لاستیک، میانگین نمونه‌ای $\bar{X} = 25000 \text{ Km}$ به‌دست آمده است. بازه اطمینان 90% را برای میانگین متغیر تصادفی X بیابید. [پاسخ: 25000 ± 1028]

۵- در امتحان آمار و احتمال مهندسی، نمره‌ی ۱۷ نفر از شرکت‌کنندگان به شرح زیر است:

۴۹، ۵۷، ۶۴، ۷۲، ۷۵، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۱، ۸۱، ۸۲، ۸۴، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۳، ۹۶

اگر نمره‌ها تقریباً توزیع نرمال داشته باشند، بازه‌ی اطمینان 95% را برای میانگین نمره‌ها از روش‌های زیر بیابید:

الف) با استفاده از انحراف معیار نمونه‌ای. [پاسخ: $\bar{X} \pm z_{0.975}\frac{S}{\sqrt{n}} = 78.24 \pm 5.86$]

ب) با استفاده از توزیع Student-t. [پاسخ: $\bar{X} \pm t_{0.975}^{16}\frac{S}{\sqrt{n}} = 78.24 \pm 6.34$]

۶- طول عمر نوعی لامپ، یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین نامعلوم و $\sigma = 10$ ساعت است. پس از بررسی ۲۰ نمونه از این نوع لامپ، میانگین طول عمر آن‌ها برابر ۸۰ ساعت به‌دست آمده‌است. عدد c را به‌گونه‌ای بیابید که با اطمینان 95% بتوان گفت اگر یک لامپ جدید را امتحان کنیم، طول عمر آن در بازه‌ی $80 \pm c$ خواهد بود. [پاسخ: $c = 4.3827$]

۷- طول نوعی خط‌کش (برحسب میلی‌متر) را با یک متغیر تصادفی X با میانگین نامعلوم و $\sigma = 10$ مدل می‌کنیم. میانگین نمونه‌ای برای ۴ نمونه از این خط‌کش برابر $\bar{X} = 203$ به‌دست آمده است.

الف) اگر فرض کنیم X توزیع نرمال دارد، بازه‌ی اطمینان 95% را برای میانگین X بیابید. [پاسخ: 203 ± 9.8]

ب) اگر توزیع X نامعلوم باشد، با استفاده از نامساوی چبی‌شف، c را به‌گونه‌ای بیابید که با اطمینان 95% بتوان گفت میانگین X در بازه‌ی $203 \pm c$ است. [پاسخ: 203 ± 22.36]

۸- متغیر تصادفی X توزیع ارلانگ با تابع چگالی $f_X(x) = c^4 x^3 e^{-cx}\, u(x),\ c > 0$ دارد. نمونه‌های 3.1، 3.3 و 3.4 از آن مشاهده شده‌اند. تخمین c را بر اساس معیار بیشترین شباهت (ML) بیابید. [پاسخ: $\hat{c}_{\text{ML}} = \frac{12}{x_1+x_2+x_3} = 1.2245$]

۹- n نمونه‌ی X_1، X_2، ...، X_n از یک متغیر تصادفی X با توزیع نمایی کوتاه‌شده (Truncated Exponential) با تابع چگالی $f_X(x) = ce^{-c(x-x_0)}\, u(x-x_0)$ در اختیار داریم (x_0 مقداری معلوم است). تخمین پارامتر c را براساس معیار ML بیابید. [پاسخ: $\hat{c}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{\bar{x}-x_0}$]

۱۰- متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x) = c\,(1+\theta x),\ -1 \le x \le 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید n مشاهده‌ی مستقل از این متغیر تصادفی به‌صورت x_1، x_2، ... و x_n صورت گرفته است.

الف) مقدار c را تعیین کنید و نشان دهید $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ یک تخمین بدون بایاس از θ است. [پاسخ: $c = \frac{1}{2}$]

ب) با فرض $n = 2$، تخمین θ را با استفاده از معیار ML تعیین کنید [پاسخ: $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = -\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$]

پ) بند (ب) را برای $f_X(x) = x^{\theta}\,(1+\theta),\ 0 \le x \le 1$ و n دلخواه تکرار کنید. [پاسخ: $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)} - 1$]

۱۱- نشان دهید تخمین ML برای میانگین یک متغیر تصادفی با توزیع پوآسن با پارامتر λ بر اساس n مشاهده‌ی مستقل از این متغیر تصادفی، برابر میانگین نمونه‌ای است یعنی $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \bar{X}$.

۱۲- جرم هر بسته از یک محصول را برحسب کیلوگرم با متغیر تصادفی X با میانگین η مدل کرده‌ایم. جرم ۶۴ بسته از این محصول را اندازه‌گیری کرده‌ایم و میانگین و انحراف معیار نمونه‌ای به ترتیب $\bar{X} = 7.7$ و $S = 1.5$ به‌دست آمده‌اند. فرض $\mathrm{H_0}: \eta = 8$ را در مقابل فرض $\mathrm{H_1}: \eta \neq 8$ برای $\alpha = 0.1$ و $\alpha = 0.01$ بیازمایید. [پاسخ: قابل قبول/غیر قابل قبول].

۱۳- در ۶۴ بار پرتاب یک سکه ۲۲ بار شیر ظاهر شده است. فرض سالم بودن سکه را در مقابل فرض اریب بودن آن برای $\alpha = 0.05$ بیازمایید. [پاسخ: غیر قابل قبول (نمی‌تواند سالم باشد)].

۱۴- نمونه‌ای ۴۹ نفره از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب شده و از آن‌ها در مورد مدت زمان خوابشان در طول یک شبانه‌روز سوال شده است. میانگین مدت زمان خواب این نمونه 7.73 ساعت و انحراف معیار آن 1.05 ساعت ثبت شده است.

الف) یک بازه اطمینان 90% برای میانگین زمان خواب دانشجویان دانشگاه تهران محاسبه کنید. [پاسخ: [7.6057, 7.8543]]

ب) با فرض $\alpha = 0.02$ یک آزمون فرض طراحی کنید و به کمک آن تصمیم بگیرید که آیا میانگین مدت زمان خواب دانشجویان دانشگاه تهران برابر ۸ ساعت است یا کم‌تر از آن؟ [پاسخ: نمی‌توان $\mathrm{H_0}$ را رد کرد].