تاریخ تحویل: 99/10/19 | آمار و احتمال مهندسی، کلاس سری دوم | سروش ... شماره دانشجویی: 86198472

4-

$\bar{X}=25000 \quad \sigma_x=5000 \quad n=64 \quad \gamma=1-\delta=0.9 \to \delta=0.1$

بازه اطمینان $\longrightarrow \left[\bar{X}-z_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right]$ $\quad z_{1-\frac{\delta}{2}}=z_{0.95}\overset{\uparrow}{=}1.64$ از جدول نرمال

بازه اطمینان ۹۰ درصد $\longrightarrow \left[25000-1.64\times\frac{5000}{8},\ 25000+1.64\times\frac{5000}{8}\right]=[25000-1028,\ 25000+1028]$

6-

$\bar{X}=80 \quad \sigma_x=10 \quad n=20 \quad \gamma=1-\delta=0.95 \to \delta=0.05$

بازه اطمینان $\longrightarrow \left[\bar{X}-z_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right] \to c=z_{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

$z_{1-\frac{\delta}{2}}=z_{0.975}=1.96 \qquad c=1.96\times\frac{10}{\sqrt{20}}=4.3827$

8-

$f_x(x)=c^4x^3e^{-cx} \xrightarrow[\text{مستقل ایزوتوزیع}]{n\ \text{نمونه}} f_{\underline{X}}(\underline{x})=c^{4n}\underline{x}^{3n}e^{-cnx}$

$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial c}=0 \longrightarrow 4nc^{4n-1}\underline{x}^{3n}e^{-cnx}-\bar{x}nc^{4n}\underline{x}^{3n}e^{-cnx-1})=0$

$\underline{x}^{3n}e^{-cnx}c^{4n}\left(\frac{4n}{c}-\bar{x}n\right)=0 \to \frac{4n}{c}-\underline{x}n=0 \quad \hat{c}_{ML}=\frac{4n}{\underline{x}}=\frac{4n}{3.1+3.3+3.4}\overset{n=3}{=}\frac{12}{9.8}$

$=1.2245$

12- از آزمون فرض $\eta_x=\eta_0$ استفاده می‌کنیم چون σ_x نامعلوم است پس q متغیر تصادفی Student-t است. $H_0: \eta=\eta_0=8 \quad H_1: \eta\neq 8$

$q=\frac{\bar{X}-\eta_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{7.7-8}{\frac{1.5}{8}}=\frac{-2.4}{1.5}=-1.6$ (در صورت درستی H_0)

(چون نمونه‌ها زیاد بود Student-t تقریبا مثل نرمال رفتار می‌کند.)

$\alpha=0.1 \quad q_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{0.95}=1.67 \qquad |q|<1.67 \to H_0$ برقرار

$\alpha=0.01 \quad q_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{0.995}=2.62 \qquad |q|>2.67 \to H_0$ (رد) نشود

۱۴- الف)

$S=1.05 \quad \bar{x}=7.73 \quad 1-\alpha=0.9 \rightarrow \alpha=0.1 \quad n=49$

بازه اطمینان $\left[\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0.95}=1.64$ $\qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{1.64\times1.05}{7}=0.246$

بازه اطمینان $\rightarrow [7.73-0.246,\ 7.73+0.246] \rightarrow [7.484,\ 7.976]$

ب) اولا چون تعداد نمونه ها بالاست، رفتار Student-t را می توانیم مثل نرمال در نظر بگیریم.

$H_0: \eta=\eta_0=8$
$H_1: \eta\neq8$

$$q=\frac{\bar{x}-\eta_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{7.73-8}{\frac{1.05}{7}}=\frac{-0.27\times7}{1.05}=-1.8$$

$\rightarrow |q|=1.8 \qquad \alpha=0.02 \qquad q_{1-\alpha}=q_{0.98}=t_{48}(0.98)\simeq z_{0.98}=2.06$

$|q|<q_{1-\alpha}$ ✓ $\rightarrow H_0$ قابل رد نیست.

۱۵- الف)

$f_X(x)=c(1+\theta x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=1 \rightarrow \int_{-1}^{1}(c+c\theta x)dx=1 \rightarrow 2c=1 \rightarrow c=\frac{1}{2}$

حال برای این که نشان دهیم تخمین بایاس ندارد. امید آن را حساب می کنیم، انتظار داریم برابر با θ شود.

$\hat{\theta}=3\bar{x} \rightarrow E\{\hat{\theta}\}=E\{3\bar{x}\}=3E\{\bar{x}\} \qquad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

میانگین گیری فرقی نمی کند کدام x_i را بگیریم نتیجه همه یکی می‌شود.

$\rightarrow 3E\{\bar{x}\}=\frac{3}{n}E\{nx_1\}=3E\{x_1\}=3\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x+\theta x^2)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+\theta x^2)dx$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\theta x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\theta \rightarrow$ بایاس ندارد

ب)

پ) به این دو باز می گردم.

۲- الف)

$$M = E\left\{\frac{X_{min}+X_{max}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(E\{X_{min}\}+E\{X_{max}\}\right)$$

$$X_i \sim U(0,1) \xrightarrow{E\{X_{min}\}=E\{X_{max}\}=\eta} M = \frac{1}{2}\times 2\eta = \eta \longrightarrow \text{unbiased}$$

ب) برای این که بفهمیم Midrange estimator بهتر است، یا میانگین نمونه‌ای باید σ^2_M, σ^2_X را با هم مقایسه کنیم

$$\sigma^2_X = \frac{1-0}{12n} = \frac{1}{12n}$$

$$\sigma^2_M = E\{M^2\} - E\{M\}^2 \qquad E\{M\} = \eta_{uniform} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sigma^2_M = E\{M^2\} - \frac{1}{4}$$

$$E\{M^2\} = E\left\{\left(\frac{X_{min}+X_{max}}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}\left(E\{X_{min}^2\} + E\{X_{max}^2\} + 2E\{X_{min}X_{max}\}\right)$$

$$F_{X_{min}}(x) = 1-(1-x)^n \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_{X_{min}}(x) = n(1-x)^{n-1} \qquad F_{X_{max}}(x) = x^n \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_{X_{max}}(x) = nx^{n-1}$$

$$f_{X_{max}X_{min}}(x,y) = y^n - (y-x)^n$$

حال E ها را جدا حساب می‌کنیم

$$E\{X_{min}^2\} = \int_0^1 n(1-x)^{n-1}x^2\,dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \qquad E\{X_{max}^2\} = \int_0^1 x^2 n x^{n-1}\,dx = \int_0^1 n x^{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+2} \qquad E\{X_{min}X_{max}\} = \int_0^1\int_0^1 xy\left(y^n - (y-x)^n\right)dx\,dy = \frac{n+4}{2(n+1)(n+2)}$$

$$Var(M) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+2} + \frac{n+4}{2(n+1)(n+2)} - 1\right) = \frac{1}{2n^2+6n+4}$$

$$Var(M) < Var(X) \longrightarrow M$$ بهتر از میانگین نمونه‌ای

پیروش حسن فرزش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

آمار و احتمال مهندسی
تکلیف سری دوم

تاریخ تحویل: ۹۹/۱۰/۱۹

۱۰ـ الف) در این جا به جای $f_X(x,\theta)$ از تابع likelihood استفاده می کنیم

$$L(x,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta x_i}{2}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}L(x,\theta)=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{x_i}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\theta x_i}{2}}=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+\theta x_i}\right)=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta(1+\theta x_i)}=0$$

(تفکیک به دو کسرها)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta(1+\theta x_i)} \rightarrow n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\theta x_i)}$$

$$n=2 \longrightarrow n=\frac{1}{1+\theta x_1}+\frac{1}{1+\theta x_2} \rightarrow \frac{\theta(x_1+x_2)+2}{\theta^2 x_1x_2+\theta(x_1+x_2)+1}=2$$

$$\rightarrow \theta(x_1+x_2)+2=2\theta^2x_1x_2+2\theta(x_1+x_2)+2 \rightarrow 2\theta^2x_1x_2+\theta(x_1+x_2)=0$$

$$\rightarrow \theta(2\theta x_1x_2+x_1+x_2)=0 \rightarrow \begin{cases}\hat\theta_{ML}=0 \quad \times\\ \hat\theta_{ML}=-\dfrac{x_1+x_2}{2x_1x_2} \quad \checkmark\end{cases} \Rightarrow \hat\theta_{ML}=-\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$$

ب)

$$f_X(x)=x^\theta(1+\theta) \longrightarrow L(x,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i^\theta(1+\theta))$$

$$\rightarrow L(x,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\theta\ln(x_i)+\ln(1+\theta) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\theta}=0$$

$$\rightarrow \frac{-n}{1+\theta}=\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \rightarrow 1+\theta=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)} \rightarrow \hat\theta_{ML}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}-1$$