4_ الف) $X_1, X_2, \dots, X_n \longrightarrow$ توأماً مستقل $\quad Y_1 = X_1 \quad Y_2 = 2X_2 + X_1$

$\dots \; Y_n = nX_n + Y_{n-1} \quad E\{Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} = E\{nX_n + Y_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\}$

$= nE\{X_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} + E\{Y_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} = Y_{n-1} + nE\{X_n|\underbrace{Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}}_{\text{مستقل از } X_n}\}$

$= Y_{n-1} + nE\{X_n\} \quad E\{X_n\} = \eta_n \quad \rightarrow E\{Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} = Y_{n-1} + n\eta_n$

ب) $Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E\{Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} - (E\{Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\})^2 \quad *$

$E\{Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} = E\{n^2X_n^2 + Y_{n-1}^2 + 2nX_nY_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\}$

$= n^2E\{X_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} + 2nE\{X_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\}E\{Y_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\}$

$+ E\{Y_{n-1}^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}\} = n^2E\{X_n^2\} + 2n\eta_nY_{n-1} + Y_{n-1}^2$

$= n^2\eta_n^2 + n^2\sigma_n^2 + 2n\eta_nY_{n-1} + Y_{n-1}^2 \xrightarrow{*} Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1})$

$= n^2\eta_n^2 + n^2\sigma_n^2 + 2n\eta_nY_{n-1} + Y_{n-1}^2 - (n\eta_n + Y_{n-1})^2 = n^2\sigma_n^2 \rightarrow Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = n^2\sigma_n^2$

پ) از رابطه ژاکوبین حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = 2X_2 + X_1 \\ \vdots \\ Y_n = nX_n + Y_{n-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \frac{y_2 - y_1}{2} \\ \vdots \\ x_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{2} \end{cases}$$

حال ماتریس ژاکوبین را تشکیل می‌دهیم: می‌دانیم دترمینان ماتریس بالامثلثی برابر حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی است.

$$J = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & & \dots & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 2 & \dots & & n-1 & n \end{bmatrix} = n!$$

حال داریم: $f_Y(y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1} \frac{f_X(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})}{|J(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})|} = \frac{1}{n!} f_1(y_1) f_2\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) f_3\left(\frac{y_3-y_2}{3}\right) \dots f_n\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{n}\right)$

دسروش ... فردوش ...
شماره دانشجویی: 810198472

۶- الف) (میانگین x_1, x_2, x_3 صفر است.) $\eta_Y=\eta_Z=0$ $\quad Z=X_1-X_2-X_3 \quad Y=X_1+X_2+X_3$

از آنجایی که x_1, x_2, x_3 دو به دو ناهمبسته‌اند یعنی $E\{x_ix_j\}=0$ است پس برای محاسبه واریانس Z و Y به راحتی می‌توانیم بنویسیم:

$$Var(Y)=Var(Z)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2=3$$

حال باید ضریب همبستگی را بیابیم.

$$\sigma_{ZY}=E\{ZY\}-\underbrace{E\{Z\}E\{Y\}}_{0}=E\{ZY\}$$

$$=E\{X_1^2-X_2^2-X_3^2-2X_2X_3\}=E\{X_1^2\}-E\{X_2^2\}-E\{X_3^2\}-2\underbrace{E\{X_2\}E\{X_3\}}_{0}$$

$$=1-1-1=-1 \quad \longrightarrow r_{ZY}=\frac{\sigma_{ZY}}{\sigma_Z\sigma_Y}=-1/3$$

در فصل قبل اثبات شد تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی نرمال را با کردند پس داریم:

$$f_{ZY}(z,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_Z\sigma_Y\sqrt{1-r_{ZY}^2}}e^{\frac{-1}{2(1-r_{ZY}^2)}\left(\frac{z^2}{\sigma_Z^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2r_{ZY}yz}{\sigma_Z\sigma_Y}\right)}$$

$$\longrightarrow f_{ZY}(z,y)=\frac{1}{2\sqrt8}e^{\frac{-9}{16}\left(\frac{z^2+y^2+\frac{2}{3}yz}{3}\right)}$$

ب)

$$E\{Z|Y\}=\eta_Z+r_{ZY}\frac{\sigma_Z}{\sigma_Y}(Y-\eta_Y)\xrightarrow[\substack{r_{ZY}=-1/3\\ \sigma_Z=\sigma_Y=\sqrt3}]{\eta_Z=\eta_Y=0} E\{Z|Y\}=\frac{-Y}{3}$$

$$E\{Y^2|Z\}=Var(Y|Z)+(E\{Y|Z\})^2 \qquad E\{Y|Z\}=\eta_Y+r_{ZY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_Z}(Z-\eta_Z)=-\frac{Z}{3}$$

$$Var(Y|Z)=\sigma_Y^2(1-r_{ZY}^2)=3(1-\tfrac19)=\frac{24}{9}=8/3$$

$$\longrightarrow E\{Y^2|Z\}=8/3+Z^2/9$$

-2

$F_X(x)=h(x)$ $F_Y(y)=h^2(y)$ $F_Z(z)=h^3(z)$ $\Pr\{X<Y<Z\}$

$\Pr\{X<Y<Z|Y=y\}=\Pr\{X<y \text{ and } Z>y\}$ از تعریف احتمال شرطی استفاده می‌کنیم

$\xrightarrow{\text{استقلال}} \Pr\{X<y\}\times\Pr\{Z>y\} \xrightarrow{CDF} F_X(y)\times(F_Z(\infty)-F_Z(y))$

$= F_X(y)\times(1-F_Z(y)) \xrightarrow[F_Z(z)=h^3(z)]{F_X(x)=h(x)} h(y)(1-h^3(y))$

$P(X<Y<Z)=\int \Pr\{X<Y<Z|Y=y\}f_Y(y)\,dy$ $f_Y(y)=\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}=\frac{\partial h^2(y)}{\partial y}$

$=2h(y)h'(y) \to \Pr\{X<Y<Z\}=\int_{-\infty}^{\infty} 2h^2(y)(1-h^3(y))h'(y)\,dy$

$\to v=h(y) \to dv=h'(y)dy \to \Pr\{X<Y<Z\}=\int 2v^2(1-v^3)\,dv$

$\xrightarrow{\text{تعیین کران}} h(\infty)=1$ $h(-\infty)=0 \to \Pr\{X<Y<Z\}=\int_0^1 2v^2(1-v^3)\,dv$

$=\int_0^1(-2v^5+2v^2)\,dv=\frac{2}{3}v^3-\frac{v^6}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

8- الف)

$M_{X_1X_2X_3}=\exp\left(\frac{1}{2}s_1^2+\frac{1}{2}s_2^2+\frac{1}{2}s_3^2+\frac{1}{4}s_1s_2+\frac{1}{4}s_2s_3\right)$

$\to \eta_1=\eta_2=\eta_3=0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=1$ $\sigma_{12}=\frac{1}{4}$ $\sigma_{23}=\frac{1}{4}$ $\sigma_{13}=0$

$E\{3X_1X_2|X_1,X_2\}=3X_1E\{X_2|X_1,X_2\} \to \underline{X}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$ $\underline{Z}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$

$\underline{Y}=[X_3]$, $\eta_{\underline{Z}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\eta_{\underline{Y}}=0$ $C_{YZ}=E\{\tilde{Y}\tilde{Z}^T\}=E\{\tilde{X}_3\cdot[\tilde{X}_1,\tilde{X}_2]\}$

$=E\{[\tilde{X}_3\tilde{X}_1,\tilde{X}_3\tilde{X}_2]\}=[\sigma_{31},\sigma_{32}]=[0,\frac{1}{4}]$

$$C_Z = E\{Z.Z^t\} = E\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.[x_1, x_2]\right\} = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E\{Y|Z\} = \eta_y + C_{YZ}\, C_Z^{-1}(Z-\eta_Z) = C_{YZ}\, C_Z^{-1}(Z)$$

$$C_Z^{-1} = \frac{1}{\det(C_Z)}\, C_Z^{*} = \frac{16}{15}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{16}{15} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{4}{15} & \frac{16}{15}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E\{Y|Z\} = [0, \tfrac{1}{4}]\begin{bmatrix}\frac{16}{15} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{4}{15} & \frac{16}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = [-\tfrac{1}{15}, \tfrac{4}{15}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{x_1}{15} + \frac{4x_2}{15} \quad \rightarrow E\{x_3 | x_1, x_2\} = -\frac{x_1}{15} + \frac{4x_2}{15}$$

$$\rightarrow E\{3x_1x_3 | x_1, x_2\} = -\frac{x_1^2}{5} + \frac{4x_1x_2}{5}$$

ب) به آن باز خواهم گشت!

11- الف)

$$X = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad Y = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\rightarrow F_Y(y) = \Pr\{\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq y\} = \Pr\{x_1 \leq y, x_2 \leq y, x_3 \leq y \dots, x_n \leq y\}$$

$$= \underbrace{F(y) \times F(y) \times \dots \times F(y)}_{n} = F(y)^n \longrightarrow F_Y(y) = F(y)^n$$

n بار (چون مستقل اند ها) ضرب می کنیم

$$F_X(x) = \Pr\{\min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \leq x\} \xrightarrow{\text{متمم گیری}}$$

چون محاسبه متغیر آن بسیار دشوار است پس متمم می گیریم.

$$= 1 - \Pr\{x_1 > x, x_2 > x, \dots, x_n > x\}$$

$$= 1 - (1 - F(x))^n$$

دقت کنیم که توابع چگالی نیز به صورت زیر است.

$$f_Y(y) = n f(y) F(y)^{n-1}, \quad f_X(x) = n f(x)(1 - F(x))^{n-1}$$

ب) ابتدا برای اطمینان خاطر PDF, CDF توزیع Uniform را می‌نویسیم.

$$U[0,1] \to CDF = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x\in[0,1] \\ 1 & x>1 \end{cases} \qquad PDF = \begin{cases} 1 & x\in[a,b] \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$Z = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_n}{\sqrt{n}}$$

هر کدام از x_i ها دارای میانگین η_i ، واریانس σ_i^2 هستند که داریم

می‌دانیم $\eta_i = \frac{1}{2}$ $\sigma_i^2 = \frac{1}{12}$ از آنجایی که متغیر تصادفی Z بدون بایاس تعریف شده است پس به وضوح

میانگین آن صفر است ، با کمک CLT داریم :

$$\sigma_Z^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{1}{12})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

همچنین در CLT داشتیم که چنین متغیر تصادفی توزیع نرمال دارد پس $Z \sim N(\eta_Z, \sigma^2) = N(0, \frac{1}{12})$

حال می‌رویم سراغ $W = \lim_{n\to\infty} n\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ برای $\{x_1\}$ ... داریم $W = n\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$F_{W}(w)_{(n\neq\infty)} = Pr\{n\min\{x_1,\dots,x_n\} \le x\} = 1 - Pr\{x_1 > \tfrac{x}{n}, x_2 > \tfrac{x}{n}, \dots, x_n > \tfrac{x}{n}\}$$

$$= 1-(1-F(\tfrac{x}{n}))^n$$

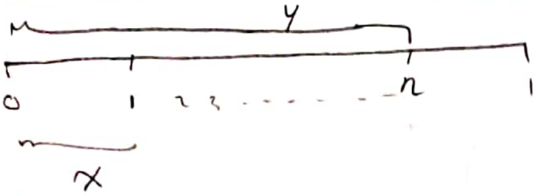
حال برای بدست آوردن CDF ، W حد در رابطه n میل می‌دهیم.

$$F_W(w) = \lim_{n\to\infty} 1-(1-F(\tfrac{x}{n}))^n = \lim_{n\to\infty} 1 - A \qquad A = \lim_{n\to\infty}(1-F(\tfrac{x}{n}))^n$$

$$\to \ln A = \lim_{n\to\infty} n\ln(1-F(\tfrac{x}{n})) \xrightarrow{\infty\times 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-F(\frac{x}{n}))}{\frac{1}{n}} \ \frac{0}{0}\ \text{Hop}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\frac{x}{n^2} f(\frac{x}{n})}{1-F(\frac{x}{n})}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x f(\frac{x}{n})}{F(\frac{x}{n})-1} = -x \to A = e^{-x} \to F_W(w) = 1-e^{-x} \to$$ نهایی با پارامتر ...

ب) اگر نمایش محوری روبه رو را در نظر بگیریم:



متغیر تصادفی Y بیانگر فاصله نقطه n ام تا مبدا است. منظور آن این است که از نقطه n ام تا 1 هیچ نقطه‌ای نباشد.

for $0\le y\le 1 \rightarrow F_Y(y) = Pr\{Y\le y\} = Pr\{$بین n, 1 نقطه‌ای نبودن$\} = y^n$ (در واقع همه نقاط آن‌ها کمتر از y دارند)

$y<0 \rightarrow F_Y(y)=0 \qquad y>1 \rightarrow F_Y(y)=1$

$$F_Y(y)=\begin{cases} y^n & 0\le y\le 1 \\ 0 & y<0 \\ 1 & y>1 \end{cases}$$

برای متغیر تصادفی X ایده مینیمم باید به کار بگیریم. یعنی برای به دست آوردن CDF آن باید احتمال آن را بیابیم که مینیمم یک نقطه در بازه 0 تا x باشد.

for $0\le x\le 1 \rightarrow F_X(x)=Pr\{X\le x\}$

$= \underbrace{1-\underbrace{(1-x)^n}_{\text{نبودن نقطه بین } x \text{ تا } 1}}_{\text{متمم احتمال کل}} = 1-(1-x)^n \qquad x<0 \rightarrow F_X(x)=0 \qquad x>1 \; F_X(x)=1$

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-(1-x)^n & 0\le x\le 1 \\ 0 & x<0 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

برای به دست آوردن $F_{XY}(x,y)$ چون هیچ ربطی به هم ندارند پس مستقل اند در نتیجه آن‌ها را در هم ضرب کرده اما باید به بازه‌ها دقت کنیم.

$x<0$ or $y<0 \rightarrow F_{XY}(x,y)=0 \qquad 0\le x\le y<1 \rightarrow F_{XY}(x,y)=y^n-(y-x)^n$

$0\le y\le x<1 \rightarrow F_{XY}(x,y)=y^n \qquad 0\le x<1\le y \xrightarrow{F_Y(y)=1} F_{XY}(x,y)=F_X(x)=1-(1-x)^n$

$1\le x$ and $1\le y \rightarrow F_{XY}(x,y)=1$

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ or } y<0 \\ y^n-(y-x)^n & 0\le x\le y<1 \\ y^n & 0\le y<x<1 \\ 1-(1-x)^n & 0\le x<1\le y \\ 1 & x\ge 1 \text{ and } y\ge 1 \end{cases}$$

۱- الف) فکر می‌کنم صورت صحیح سوال به فرم $Pr\{X\geq 2n\}\leq (\frac{2}{e})^n$ باشد!!

با استفاده از کران چرنوف مسأله را حل می‌کنیم.

$$Pr\{X\geq a\}\leq \frac{E\{e^{Xs}\}}{e^{as}}$$

$$\rightarrow Pr\{X\geq a\}\leq e^{-as} M_X(s)$$

نمایی با $\lambda=1$ $\rightarrow$ $f(x)=e^{-x}u(x)$

$$\rightarrow M_X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}e^{-x}u(x)dx=\int_0^{\infty} e^{(s-1)x}dx=\frac{1}{1-s} \rightarrow M_X(s)=\frac{1}{1-s}$$

$$Pr\{X\geq a\}\leq \frac{e^{-as}}{1-s} \xrightarrow{a=2n} Pr\{X\geq 2n\}\leq \frac{e^{-2ns}}{1-s}$$

منطقاً وقتی $Pr\{X\geq 2n\}$ از $\frac{e^{-2ns}}{1-s}$ کوچکتر باشد اگر ما s را طوری برگزینیم که $1-s<1$ یعنی مخرج از ۱ کوچکتر شود در این حالت اگر به مخرج نیز توان n بدهیم باز هم $Pr\{X\geq 2n\}$ از آن کوچکتر است یعنی خواهیم داشت:

$$Pr\{X\geq 2n\}\leq \frac{e^{-2ns}}{1-s}\leq \frac{e^{-2ns}}{(1-s)^n} \quad (\text{if } (1-s)<1)$$

$$s=\frac{1}{2} \rightarrow Pr\{X\geq 2n\}\leq \frac{e^{-n}}{(\frac{1}{2})^n} \rightarrow Pr\{X\geq 2n\}\leq \frac{e^{-n}}{2^{-n}} \rightarrow Pr\{X\geq 2n\}\leq (\frac{2}{e})^n$$

ب) توزیع ارلانگ را با توسل به ویکی پدیا پیدا کردم:

$$PDF: \frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}u(x)$$

$$MGF: (1-\frac{s}{\lambda})^{-k}=(\frac{\lambda}{\lambda-s})^k$$

در این سوال چون پارامتر تابع نمایی ما یه λ ات برابر با ۱ است مسأله را با این دانش جلو می‌بریم:

$$Erlang: PDF\ \frac{b^k x^{k-1}e^{-bx}}{(k-1)!}u(x) \quad MGF: (\frac{b}{b-s})^k$$

از آنجایی که فرم MGF ساده‌تر است سعی می‌کنیم به MGF ها یکسان برسیم.

$$Y\triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \eta_{x_i}=Var\,x_i=1$$

$$M_{x_i}(s)=E\{e^{sx_i}\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}e^{-x}u(x)=\int_0^{\infty} e^{(s-1)x}dx=\frac{1}{1-s}$$

حال مولدها را اعمال می‌کنیم.

$$M_Y(s)=E\{e^{\frac{s}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\}=M_{x_i}^n(\frac{s}{n}) \rightarrow M_Y(s)=(\frac{1}{1-s/n})^n$$

$$M_Y(s) = \left(\frac{1}{1-\frac{s}{n}}\right)^n = \left(\frac{n}{n-s}\right)^n \qquad \text{Erlang} \left(\frac{b}{b-s}\right)^K$$

$$\begin{matrix} K = n \\ n = b \end{matrix} \rightarrow K = n = b \rightarrow Y \sim \text{Erlang}$$

(نکته: در همه قبل جهت رفع سوتفاهم b ها در ارلانگ را عوض کردم.)

با استفاده از فرم دیگر تابع چگالی ارلانگ مسئله را حل می‌کنیم:

$$\text{Erlang}: f_X(x) = \frac{b^K}{\Gamma(K)} x^{K-1} e^{-bx} u(x)$$

$$\rightarrow E\left\{\frac{1}{Y}\right\} = \int_0^\infty \frac{n^n}{\underset{\Gamma(n) = (n-1)!}{(n-1)!}} \frac{x^{n-1}}{x} e^{-nx} dx = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-nx} dx$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} U = nx \rightarrow dU = n\,dx \rightarrow \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{U^{n-2}}{n^{n-2}} \frac{e^{-U}}{n} dU$$

$$= \frac{n^n}{(n-1)!} \times \frac{1}{n^{n-1}} \times \underbrace{\int_0^\infty U^{n-2} e^{-U} dU}_{\Gamma(n-1)}$$

تابع Γ را از انتگرالات می‌شناسیم

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty U^{x-1} e^{-U} dU$$

$$\rightarrow E\left\{\frac{1}{Y}\right\} = \frac{n^n}{(n-1)!} \times \frac{1}{n^{n-1}} \times \Gamma(n-1) = \frac{n}{(n-1)!} \times (n-2)! = \frac{n}{n-1}$$

$$E\left\{\frac{1}{Y^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{x^{n-1}}{x^2} e^{-nx} dx = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-3} e^{-nx} dx$$

$$\rightarrow U = nx \rightarrow dU = n\,dx \rightarrow \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{U^{n-3}}{n^{n-3}} \frac{e^{-U}}{n} dU$$

$$\rightarrow \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{U^{n-3}}{n^{n-2}} e^{-U} dU = \frac{n^n}{(n-1)!} \times \frac{1}{n^{n-2}} \times \underbrace{\int_0^\infty U^{n-3} e^{-U} dU}_{\Gamma(n-2)}$$

$$= \frac{n^n}{(n-1)!} \times \frac{1}{n^{n-2}} \times \Gamma(n-2) = \frac{n^2}{(n-1)!} \times (n-3)! = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$$

ب)

$$S \triangleq \begin{cases} nY & Z \neq 0 \\ 0 & Z = 0 \end{cases} \qquad Z \sim \text{Poisson}(a)$$

$Z \neq 0 \to Z > 0$

$E\{S\} = E\{E\{S \mid Z \neq 0\}\} \to E\{S \mid Z > 0\} = E\{nY\}$

$E\{S\} = \Pr\{Z > 0\} E\{nY\}$ $\qquad E\{nY\} = E\{X_1\} + E\{X_2\} + \dots + E\{X_n\}$

$= \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ بار}} = n$ $\qquad \Pr\{Z = k\} = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \to \Pr\{Z > 0\} = 1 - \Pr\{Z = 0\}$

$\to \Pr\{Z > 0\} = 1 - e^{-a} \to E\{S\} = n(1 - e^{-a})$

برای واریانس از استدلال مشابهی استفاده می‌کنیم.

$Var(S) = E\{S^2\} - (E\{S\})^2 \qquad E\{S^2\} = E\{E\{S^2 \mid Z > 0\}\}$

$E\{S^2 \mid Z > 0\} = E\{S^2\} = E\{n^2 Y^2\} \qquad Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

$\to S^2 = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 \xrightarrow{E} E\{S^2\} = \underbrace{E\{X_1^2\} + E\{X_2^2\} + \dots + E\{X_n^2\}}_{\text{تا } n}$

$+ \underbrace{E\{X_1\}^2 + E\{X_2\}^2 + \dots + E\{X_n\}^2}_{\text{تا } n} + 2(E\{X_1 X_2\} + \dots + E\{X_{n-1} X_n\})$

$\to n + n + 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = n^2 - n + 2n = n^2 + n$, $E\{S^2 \mid Z > 0\} = (n^2 + n) \Pr\{Z > 0\}$

از قبل $\to \Pr\{Z > 0\} = (1 - e^{-a}) \to E\{S^2 \mid Z > 0\} = (n^2 + n)(1 - e^{-a})$

$\to Var(S) = (n^2 + n)(1 - e^{-a}) - n^2(1 - e^{-a})^2 = (1 - e^{-a})(n^2 + n - n^2 + n^2 e^{-a})$

$= (1 - e^{-a})(n + n^2 e^{-a}) = n(1 + n e^{-a})(1 - e^{-a})$

ت)

$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{CLT} Y$ نرمال $\quad \eta_Y = E\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\{x_i\}$

$= \frac{1}{n}(\overbrace{1+1+1+\dots+1}^{n}) = 1 \qquad Var(Y) = E\{Y^2\} - 1$

$E\{Y^2\} = \frac{1}{n^2} E\{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2\} = \frac{2n + n(n-1)}{n^2} = \frac{n^2+n}{n^2}$ (بخش قبل مثل کلاس)

$\rightarrow Var(Y) = \frac{n^2+n}{n^2} - 1 = \frac{1}{n}$

$Pr\{0.9 \leq Y \leq 1.1\} \geq 0.95 \rightarrow Pr\{-0.1 \leq Y-1 \leq 0.1\} \geq 0.95$

نرمال استاندارد

$\rightarrow Pr\{-0.1\sqrt{n} \leq \frac{Y-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq 0.1\sqrt{n}\} \geq 0.95 \rightarrow G(0.1\sqrt{n}) - G(-0.1\sqrt{n}) \geq 0.95$

$\rightarrow 2G(0.1\sqrt{n}) - 1 \geq 0.95 \longrightarrow G(0.1\sqrt{n}) \geq 0.975 \xrightarrow{\text{جدول } G(x)} 0.1\sqrt{n} = 1.96$

$\rightarrow n = 384.16 \rightarrow n \geq 385$

8- ب) طبق بخش الف داریم:

$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \quad c_{12} = c_{23} = \frac{1}{4} \quad c_{13} = 0$

$Z = X_1 + X_2 \rightarrow Z$ نرمال $\quad W = X_2 + X_3 \rightarrow W$ نرمال $\quad \eta_Z = \eta_W = 0$

$Var(Z) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$Var(W) = Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_2, X_3) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 5/2$

$Cov(Z,W) = E\{ZW\} - \cancel{E\{Z\}E\{W\}} = E\{ZW\}$

$\rightarrow E\{ZW\} = E\{X_2^2\} + E\{X_1X_2\} + \cancel{E\{X_1X_3\}} + E\{X_2X_3\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$r_{ZW} = \frac{Cov(Z,W)}{Var(Z)Var(W)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$ (آن کوواریانس‌ها هم تمامی لوا)

حال با توجه به نرمال بودن که اساساً لتشه داریم:

$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{2\pi(\frac{5}{2})\sqrt{1-r^2}} e^{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left(\frac{z^2+w^2-2rzw}{\frac{5}{2}}\right)} \quad r = \frac{3}{5}$

در قلم بوده است درباره احتمال غلط بودن

$\longrightarrow f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{5\pi\sqrt{1-r^2}} e^{\frac{-1}{(1-r^2)}\left(\frac{z^2+w^2-2rzw}{5}\right)} \quad r = \frac{3}{5}$ با کناره کسب نشده