



- ۱- اتوبوس و قطاری بین ساعت ۹ تا ۱۰ صبح به صورت تصادفی به ایستگاه می‌رسند. قطار پس از رسیدن به ایستگاه ۱۰ دقیقه توقف دارد ولی اتوبوس ۲۰ دقیقه در ایستگاه می‌ماند. اگر بدانیم در یک روز در این بازه زمانی قطار و اتوبوس یکدیگر را در ایستگاه ملاقات نکرده‌اند، با چه احتمالی قطار پیش از اتوبوس به ایستگاه رسیده است؟ [پاسخ:  $\frac{25}{41}$ ]
- ۲- برای نابودی کامل یک هدف، باید دو راکت به آن اصابت کند. احتمال اصابت هر راکت به هدف ۰.۴ است. اگر تا انهدام کامل هدف به سوی آن شلیک شود، احتمال این‌که با ششمین شلیک، هدف کاملاً نابود شود، چه قدر است؟  
[پاسخ:  $5 \times (0.4)^2 \times (0.6)^4$ ]
- ۳- شانس زایمان غیرطبیعی برای زنان بارداری که سیگاری هستند دو برابر زنان باردار غیرسیگاری است. اگر ۳۲٪ از زنان باردار سیگاری باشند، چند درصد از زن‌هایی که زایمان غیرطبیعی دارند سیگاری هستند؟ [پاسخ:  $\frac{16}{33}$ ]
- ۴- A و B به‌طور متناوب به سوی یک هدف تیراندازی می‌کنند. احتمال آن‌که A به هدف بزند برابر ۰.۴ و احتمال آن‌که B به هدف بزند برابر ۰.۵ است. اگر A شروع به تیراندازی کند، احتمال آن‌که قبل از B به هدف بزند چه قدر است؟ [پاسخ:  $\frac{4}{7}$ ]
- ۵- فرض کنید احتمال پسر یا دختر بودن فرزند در یک خانواده برابر ۰.۵ باشد. برای خانواده‌ای با دو فرزند:  
الف) احتمال آن‌که هر دو فرزند خانواده پسر باشند به شرط آن‌که بدانیم فرزند اول پسر است، چقدر است؟ [پاسخ:  $\frac{1}{2}$ ]  
ب) احتمال آن‌که هر دو فرزند پسر باشند به شرط آن‌که بدانیم حداقل یکی از آن‌ها پسر است، چقدر است؟ [پاسخ:  $\frac{1}{3}$ ]  
پ) یکی از فرزندان به صورت کاملاً تصادفی انتخاب می‌شود. اگر فرزند انتخاب‌شده پسر باشد احتمال آن‌که هر دو فرزند پسر باشند چیست؟ [پاسخ:  $\frac{1}{2}$ ]
- ۶- در یک آزمون تستی، هر تست دارای چهار گزینه است. دانشجویی با احتمال ۰.۶ پاسخ درست را می‌داند. او همچنین قادر است با احتمال ۰.۱۵ تنها دو گزینه‌ی نادرست و با احتمال ۰.۱۵ تنها یک گزینه‌ی نادرست را از بین چهار گزینه حذف کند. در غیر این‌صورت دانشجو یکی از چهار گزینه را به‌صورت کاملاً تصادفی انتخاب می‌کند.  
الف) اگر دانشجو پاسخ یک تست را به‌درستی داده باشد، احتمال آن‌که پاسخ درست آن را می‌دانسته چه قدر است؟ [پاسخ:  $\frac{4}{5}$ ]  
ب) فرض کنید دانشجو پاسخ تستی را نمی‌دانسته ولی به آن پاسخ درست داده است. احتمال آن‌که دانشجو پاسخ تست را با حذف تنها یک گزینه‌ی نادرست داده باشد، چه قدر است؟ [پاسخ:  $\frac{1}{3}$ ]
- ۷- ۱۵٪ از افراد یک شهر مبتلا به ویروس سرماخوردگی و ۵٪ مبتلا به ویروس آنفولانزا هستند. ابتلای هر شخص به هر کدام از بیماری‌های بالا مستقل از اشخاص دیگر فرض می‌شود.  
الف) چند درصد از افراد شهر سالم هستند؟ [پاسخ: ۸۰.۷۵٪]  
ب) اگر شخصی بیمار باشد احتمال آن‌که تنها یک نوع بیماری داشته باشد، چه قدر است؟ [پاسخ:  $0.961 \approx$ ]  
پ) احتمال آن‌که در یک خانواده پنج نفری اکثر افراد سالم باشند چه قدر است؟ (افراد مختلف را مستقل از یکدیگر فرض کرده و از نتیجه بند الف) استفاده نمائید) [پاسخ:  $(0.1925)^{5-k} \times (0.8075)^k \times \frac{5!}{(5-k)!k!}$ ]

۸- یک متخصص قلب و عروق می‌تواند با احتمال 50% عارضه قلبی را تشخیص دهد. اگر عارضه قلبی به‌درستی تشخیص داده شود با احتمال 90% می‌تواند درمان شود. در حالی‌که در صورت عدم تشخیص، تنها با احتمال 20% قابل درمان است. احتمال آن را حساب کنید که از 20 بیمار قلبی مراجعه‌کننده به پزشک، عارضه 10 بیمار تشخیص داده شده و سلامتی خود را به‌دست آورند و از 10 بیمار دیگر 6 بیمار درمان شوند. [پاسخ:  $(0.5 \times 0.9)^{10} \times (0.5 \times 0.2)^6 \times (0.5 \times 0.8)^4 \times \frac{20!}{10!6!4!}$ ]

۹- سیستم تصویرگری پزشکی A در هر ساعت 100 تصویر برمی‌دارد که 10% از آنها به علت نویز شدید غیرقابل استفاده‌اند. سیستم تصویرگری دیگر B در همان زمان 200 تصویر برمی‌دارد که 5% آن غیر قابل استفاده است. اگر از میان تصاویر 2 تصویر را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال این‌که هر دو غیر قابل استفاده باشند چه قدر است؟ اگر تصاویر انتخاب‌شده را بررسی و نویز شدیدی در دو تصویر مشاهده کنیم، با چه احتمالی تصاویر توسط A برداشته شده است؟

$$\left[ \frac{\frac{10}{300} \times \frac{9}{299}}{\frac{20}{300} \times \frac{19}{299}} = \frac{9}{38}, \frac{20}{300} \times \frac{19}{299} \right] \text{ پاسخ‌ها:}$$

۱۰- دانشجویی ماشین حساب خود را در یکی از کتوهای میزش قرار داده است. او می‌داند که ماشین حساب با احتمال  $p_i > 0$  در کشوی نام قرار دارد. از طرفی کتوهای میز او آن قدر به‌هم‌ریخته هستند که اگر ماشین حساب در کشوی نام باشد این دانشجو با احتمال  $0 < d_i < 1$  قادر به یافتن آن است. اگر دانشجو کشوی نام را جستجو کند و ماشین حساب را در آن نیابد، احتمال آن را پیدا کنید که ماشین حساب واقعاً در کشوی نام بوده است. [پاسخ:  $\frac{p_i(1-d_i)}{1-p_i d_i}$ ]

۱۱- سه سکه داریم. سکه A عادی و اریب است (احتمال شیر برابر  $p$  می‌باشد). سکه B غیرعادی است به طوری که هر دو روی آن شیر می‌باشد. سکه C سکه‌ای عادی و ناریب است (احتمال شیر برابر 50% می‌باشد). سکه‌ای را به تصادف از میان این سه سکه انتخاب کرده و آن را دو بار پرتاب می‌کنیم. سکه دیگری را با جایگذاری سکه اول انتخاب کرده و یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر سه بار شیر بگیریم با چه احتمالی هر دو سکه انتخاب شده C بوده است؟ [پاسخ:  $\frac{1}{(4p^2+5)(2p+3)}$ ]

۱۲- یک آدم آهنی با فشار یک کلید یک قدم به جلو یا یک قدم به عقب می‌رود. اگر در هر بار فشار دادن کلید شانس جلو آمدنش دو برابر شانس عقب رفتنش باشد، احتمال این‌که پس از ۶ بار فشار دادن کلید، آدم آهنی به نقطه‌ای که در ابتدا در آن جا بوده برگردد، چه قدر است؟ [پاسخ:  $20 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ]

۱۳- دو بازیکن به نوبت دو تاس را می‌اندازند. اولین نفری که مجموع اعداد روی دو تاسش ۷ شود، برنده است. احتمال آن را بیابید که شروع‌کننده‌ی بازی، برنده باشد. [پاسخ:  $\frac{6}{11}$ ]

۱۴- شاهین و شادی یک رشته بازی انجام می‌دهند که احتمال پیروزی شاهین در هر یک از آن‌ها برابر  $p$  است. بنابراین احتمال برد شادی در هر بازی برابر  $q = 1 - p$  خواهد بود. فرض کنید نتیجه‌ی هر بازی مستقل از سایر بازی‌ها است و برنده‌ی نهایی اولین نفری است که تعداد پیروزی‌هایش ۲ تا بیشتر از تعداد پیروزی‌های نفر دیگر شود. مثلاً اگر شاهین در دو بازی اول برنده شود برنده‌ی نهایی اوست. همچنین اگر در بازی اول شادی و در بازی‌های دوم، سوم و چهارم شاهین برنده شود، باز هم برنده‌ی نهایی شاهین است. احتمال آن‌که شاهین برنده‌ی نهایی باشد چه قدر است؟ [پاسخ:  $\frac{p^2}{1-2pq}$ ]

۱۵- فرض کنید پیشامدهای  $A_1, A_2, \dots$  و  $A_K$  فضای نمونه را افراز کنند. می‌دانیم که برای  $k = 1, \dots, K$  پیشامدهای  $M$  و  $N$  به شرط  $A_k$  از هم مستقلند یعنی  $P(M \cap N | A_k) = P(M | A_k) P(N | A_k)$ . نشان دهید که در صورت استقلال  $N$  از همه‌ی  $A_k$ ‌ها،  $M$  و  $N$  از هم مستقلند.

۱۶- سه پاکت داریم که دو تا از آنها خالی و سومی حاوی مبلغی پول است. یکی از پاکت‌ها را به صورت کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم. قبل از باز کردن پاکت انتخاب‌شده، یکی از دو پاکت دیگر باز شده و مشاهده می‌شود که پاکت باز شده خالی است. به ما این شانس داده می‌شود که پاکت انتخاب‌شده‌ی خود را با پاکتی که هنوز باز نشده تعویض کنیم. آیا این کار شانس بردن پول را افزایش می‌دهد؟ چه قدر؟ [پاسخ: بله. تعویض پاکت شانس را دو برابر می‌کند.]

۱۷- یک کارخانه‌ی تولید چیپس به طور تصادفی عکس یکی از سه شخصیت معروف کارتون‌ی را در هر پاکت چیپس قرار می‌دهد. احتمال آن که عکس هریک از این سه شخصیت در یک پاکت باشد مساوی یکدیگر و برابر  $1/3$  است. فرض کنید شخصی آن قدر از این چیپس خریداری کند تا عکس هر سه شخصیت را جمع‌آوری کند. احتمال آن که سومین تصویر در  $n$ مین خرید به دست آید چه قدر است؟ [راهنمایی: فرض کنید که احتمال بدست آمدن  $k$ مین تصویر در  $n$ مین خرید  $p_k[n]$  باشد. با فرض  $p_1[1] = 1$  و  $p_2[1] = p_3[1] = 0$ ، مقدار  $p_3[n]$  را بیاید.]

$$\text{پاسخ: } p_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad p_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2), \quad p_3[n] = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1, \quad n \geq 1$$