1	تاریخ تحویل: ۲۰ / ۱۰ / ۰۱	نام درس: فرآیند های تصادفی — تکلیف سری هشتم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله ۱.

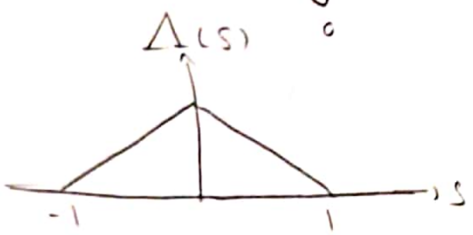
$X(t) \to WSS \quad m_{X(t)} = m_X = 0, \quad R_X(\tau) = \Lambda(\tau)$

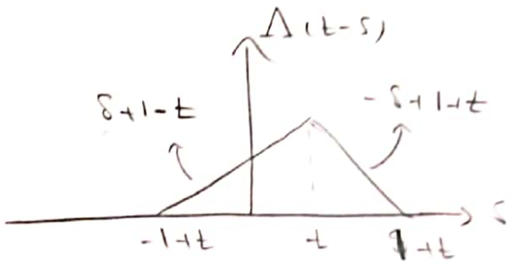
$t \in [0, t)$, $t \leq 1$ is known. Karhunen-Loève Expansion: ?

$a \leq s, t \leq b \to a=0, b=1 \qquad \int_a^b R_X(t,s)\phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n(t) \quad a \leq t \leq b$

$\to \int_0^T R_X(t,s)\phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n(t) \quad 0 \leq t \leq T \qquad R_X(t,s) = R_X(t-s)$

$= \Lambda(t-s), \quad \int_0^t R_X(t,s)\phi_n(s)ds + \int_t^T R_X(t,s)\phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n(t)$





$\to \int_0^t (s+1-t)\phi_n(s)ds + \int_t^T (t+1-s)\phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n(t) \longrightarrow$

$\int_0^t \phi_n(s)ds - t\int_0^t \phi_n(s)ds + \int_0^t s\phi_n(s)ds + \int_t^T \phi_n(s)ds + t\int_t^T \phi_n(s)ds - \int_t^T s\phi_n(s)ds$

$= \lambda_n \phi_n(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} \phi_n(t) - \int_0^t \phi_n(s)ds - t\phi_n(t) + t\phi_n(t) - \phi_n(t) + \int_t^T \phi_n(s)ds$

$- t\phi_n(t) + t\phi_n(t) = \lambda_n \phi_n'(t) \longrightarrow \int_t^T \phi_n(s)ds - \int_0^t \phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n'(t) \quad (1)$

$\xrightarrow[(1)]{\text{مشتق}} -\phi_n(t) - \phi_n(t) = \lambda_n \phi_n''(t) \to \phi_n''(t) + \frac{2}{\lambda_n}\phi_n(t) = 0 \quad \underline{\text{حل معادله دیفرانسیل}},$

$\phi_n(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t\right) = Ae^{j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t} + Be^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t}$

$\int_0^T R_X(t,s)\phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n(t) \quad t=\infty \to \phi_n(\infty) = 0 \longrightarrow A=0, \ \phi_n(t) = Be^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t}$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t)|^2 dt = 1 \longrightarrow \int_0^T B^2 dt = 1 \to B = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}t}$

$t=0 \xrightarrow{(1)} \int_0^T \phi_n(s)ds = \lambda_n \phi_n'(0), \quad \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}s}ds = -j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}\lambda_n \quad X_n = \langle X(t), \phi_n(t)\rangle = \sqrt{T}X(t)$

$\to \frac{1 - e^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}T}}{-j\sqrt{T}\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}} = +\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}\lambda_n \to e^{-j\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}T} = +1 \longrightarrow \lambda_n = \infty \to \hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t)$

مسئله 2.

a.) $X(n)$ is i.i.d $\rightarrow P\{X(n)=1\} = P\{X(n)=-1\} = 0.5$

$$y(n) = 0.8\,y(n-1) + x(n) \xrightarrow{Z} Y(z) = 0.8 z^{-1} Y(z) + X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}} h(n) = (0.8)^n u(n)$$

$R_x[n_1,n_2] = E\{x(n_1)x^*(n_2)\} = 0$ if $n_1 \neq n_2$, if $n_1 = n_2 \rightarrow R_x(n_1,n_1)$

$$= E\{x(n_1)x^*(n_1)\} = E\{|x(n_1)|^2\} = 1/2 + 1/2 = 1 \rightarrow R_x(n_1,n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 \\ 0 & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \qquad S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

$$S_x(f) = \mathcal{F}[\overline{R_x(n_1,n_1)}] = \mathcal{F}[\overline{R_x(n+m,m)}] \Rightarrow S_x(f) = 1$$

$$H(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}} = \frac{1}{1-0.8e^{-j2\pi f}} \rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos(2\pi f)}}$$

$$\rightarrow S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1.64 - 1.6\cos(2\pi f)}$$

b.) مطابق آنچه در کلاس درس گفته شد، فرآیندی مارکوف است که در لحظه n فقط به $n-1$ وابسته باشد.

مثلاً برای بارش یک شهر، اگر بخواهیم حال امسال را تخمین بزنیم، صرفاً حال گذشته مهم است. (اگر

سرشماری سال به سال باشد.) اکنون $y(n)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$y(n) = 0.8\,y(n-1) + x(n)$$

مشخص است که $y(n)$ ارتباطی به زمان‌ها هیچ جز $y(n-1)$ ندارد ($x(n)$ که i.i.d است)، لذا می‌توان گفت فرآیند مارکوف است.

c.) $Z(n) = X(n) + Y(n-1)$

احتمالاً ابتدا PMF منظور بوده است. حالات ممکن برای $Z(n)$ در زیر:

$x(n)=1,\ x(n-1)=1 \longrightarrow Z(n)=2$ $\qquad$ $x(n)=-1\ \ x(n-1)=1 \longrightarrow Z(n)=0$

$x(n)=1\ \ x(n-1)=-1 \longrightarrow Z(n)=0$ $\qquad$ $x(n)=-1\ \ x(n-1) \longrightarrow Z(n)=-2$

3	تاریخ تحویل: 99/10/20	نام درس: فرآیند های تصادفی تکلیف سری هشتم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$P(Z=z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & z=0 \\ 1/4 & z=-1,1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

d.1 $m_Z = E\{Z(n)\} = 0\times 1/2 + -1\times 1/4 + 1\times 1/4 = 0 \longrightarrow m_{Z(n)} = 0$

$R_Z(n+m,n) = E\{Z(n+m)Z^*(n)\} = E\{(x(n+m)+x(n+m-1))(x(n)+x(n-1))^*\}$

فرایند حقیقی است.

$R_Z(n+m,n) = E\{x(n+m)x(n)\} + E\{x(n+m)x(n-1)\} + E\{x(n+m-1)x(n)\}$

$+ E\{x(n+m-1)x(n-1)\} = R_x(m) + R_x(m+1) + R_x(m-1) + R_x(m)$

$\longrightarrow R_Z(n+m,n) = R_Z(m) = 2R_x(m) + R_x(m+1) + R_x(m-1) \qquad R_x(m) = \delta(m)$

$\longrightarrow R_Z(m) = 2\delta(m) + \delta(m+1) + \delta(m-1)$

$S_Z(f) = F[\overline{R_Z(m)}] = \mathcal{F}[R_Z(m)] = 2 + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f} = 2 + 2\cos(2\pi f)$

$\longrightarrow S_Z(f) = 4\cos^2(\pi f)$

Q.1 (5. [illegible]) در صورت سوال باید [illegible] اشتباه نوشته است، و باید $k=0$ باشد

$V(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 3^{-k} x(n-k)$ ضمناً واضح است که این فرآیند یک فرآیند AR(1) نمی‌باشد

$\longrightarrow x(n) = -4/3\, x(n-1) - x(n-2) - \dots + V(n)$

حال داریم:

$n x(n) \xleftrightarrow{Z} -z\frac{\partial X(z)}{\partial(z)}, \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$

$n^2 x(n) \xleftrightarrow{Z} z X'(z) + z^2 X''(z), \quad V(n) = x(n) * \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 3^{-k} \delta(n-k)$

$\longrightarrow V(z) = X(z) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 3^{-k} z^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 3^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 3^{-k} z^{-k}$

$+ 2\sum_{k=0}^{\infty} k 3^{-k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} z^{-k} = z\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)' + z^2\left(\frac{1}{1-1/3 z^{-1}}\right)''$

$-2z\left(\frac{1}{1-1/3 z^{-1}}\right)' + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right) = z^2\left(\frac{1}{1-1/3 z^{-1}}\right)'' - z\left(\frac{1}{1-1/3 z^{-1}}\right)'$

$+ \frac{1}{1-1/3 z^{-1}} = \frac{+18z^2}{(3z-1)^3} + \frac{3z}{(3z-1)^2} + \frac{3z}{3z-1}$

Scanned by CamScanner

4	تاریخ تحویل: 20/10/01	نام درس: فرآیند های تصادفی تمرین سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$\longrightarrow \frac{18z^2+3z(3z-1)+3z(3z-1)^2}{(3z-1)^3}$$

$$= \frac{18z^2+9z^2-3z+27z^3-18z^2+3z}{27z^3-27z^2+9z-1} = \frac{27z^3+9z^2}{27z^3-27z^2+9z-1}$$

$$\longrightarrow V(z) = X(z)\left[\frac{27z^3+9z^2}{27z^3-27z^2+9z-1}\right]$$

$$\longrightarrow V(z) = X(z)\left[\frac{27+9z^{-1}}{27-27z^{-1}+9z^{-2}-z^{-3}}\right] \longrightarrow V(z)\left[27-27z^{-1}+9z^{-2}-z^{-3}\right]$$

$$= X(z)\left[27+9z^{-1}\right] \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} 27V(n)-27V(n-1)+9V(n-2)-V(n-3)$$

$$= 27x(n)+9x(n-1) \longrightarrow x(n) = \frac{-1}{3}x(n-1)+V(n)-V(n-1)+\frac{1}{3}V(n-2)-\frac{1}{27}V(n-3)$$

پس بعد از محاسبات طولانی به این نتیجه می‌رسیم که : $\longrightarrow ARMA(1,3)$

b.

مجدداً جهت پیدا کردن رابطه $x(n)$ با $V(n)$ را ارائه می‌کنیم.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\, 3^{-k}\, x(n-k) = V(n)$$

حال باید ببینیم که آیا ریشه‌ها صورت داخل دایره واحد هستند یا خیر.

$$H(z) = \frac{27+9z^{-1}}{(3-z^{-1})^3}, \quad 27+9z^{-1}=0 \rightarrow z^{-1}+3=0 \rightarrow \frac{1}{z}=-3 \rightarrow z=-1/3$$

داخل دایره واحد است پس فرآیند $MA(\infty)$ هم خواهد بود.

$$y(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{V(n)} \underbrace{\boxed{1/H(z)}}_{g(n)} \longrightarrow x(n)$$

$$\rightarrow x(n) = V(n) * g(n) \Rightarrow G(z) = \frac{(3-z^{-1})^3}{27+9z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} g[n] = 8\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\left(1-U(2-n)\right)$$

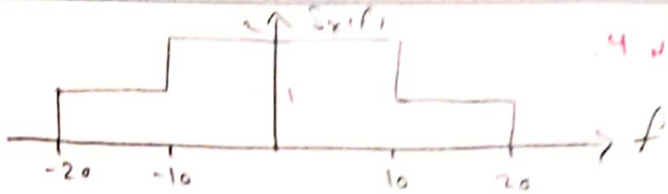
$$+\ 7/9\, U(2-n)U(n-2) - 4/3\, U(1-n)U(n-1) + U(-n), \quad x(n) = V(n) * g(n)$$

$$\longrightarrow x(n) \longrightarrow MA(\infty)$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری هشتم	تاریخ تحویل: ۲۰ / ۱۰ / ۰۱	5

سوال ۴

$X(t) \longrightarrow$ Gaussian Random process



برای حل این سوال ابتدا یک فرآیند گاوسی $Y(t)$ در نظر می‌گیریم. طیف آن نیز مربعی است. در بازه $[-f_0, f_0]$

Nyquist: $2f_0 = \frac{1}{T}$, sinc داخل آرگومان , $\frac{t-nT}{T} = 2f_0(t-\frac{n}{2f_0}) = 2f_0t-n$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

حال فرض کنیم که یک فرآیند wss باشد به این صورت:

$$y_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{nT}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad , \quad \text{بترتیب}: A_n = y_{nT}$$

$\longrightarrow S_A(f) = \frac{1}{T} S\left(\frac{f}{T}\right) \quad |f|<1$ اثبات مقدار مربوط در کتاب Nyquist موجود می‌باشد.

حال با چیزهایی که گفته شد با در نظر گرفتن شکل * خواهیم داشت:

$$S_X(f) = \underbrace{\Pi\left(\frac{f}{20}\right)}_{S_{X_1}(f)} + \underbrace{\Pi\left(\frac{f}{40}\right)}_{S_{X_2}(f)}$$ هر کدام از این دو پالس مربعی را مانند فرآیند

گاوسی در نظر می‌گیریم. Gaussian $Y(t)$: $Y_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2f_0}\, A_n\, \mathrm{Sinc}(2f_0t-n)$

علت ضرب $\sqrt{2f_0}$ در این است که به درستی حاصل شود. A_n ها نیز باید متعامد نرمال باشند به صورت Normal

است. پس داریم: $S_X(f) = S_{X_1}(f) + S_{X_2}(f) \longrightarrow X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{40}\,\mathrm{Sinc}(40t-n)$

$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n}\sqrt{20}\,\mathrm{Sinc}(20t-n)$, تعداد Sample ها $= 2f_{0_1}+2f_{0_2} = 2(10+20) = 60$

برای مینیمم سازی می‌آییم با طیف مستطیلی بین ۲۰- تا ۲۰ در نظر می‌گیریم سپس با یک فیلتر به ساختن فرآیند

با همان طیف $S_X(f)$ میپردازیم. در این صورت تعداد نمونه‌ها از ۶۰ به ۴۰ تقلیل پیدا کنند. زیرا

صرفاً با طیف زمینی $2f_0 = 40$ سروکار داریم.

مسأله ۷.

a.) $S_x(f) = \frac{4}{5-4\cos(2\pi f)} = \frac{4}{5-2e^{j2\pi f}-2e^{-j2\pi f}}$, $z=e^{j2\pi f}$

$\rightarrow S_x(z) = \frac{4}{5-2z-2z^{-1}}$, $5-2z-2z^{-1} = (2-z^{-1})(2-z) = 4(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)$

$\rightarrow S_x(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{1})}$, $x(n) \rightarrow \boxed{\Gamma(z)} \xrightarrow{w(n)} \boxed{L(z)} \rightarrow x(n)$

$\rightarrow S_x(z) = L(z)L^*(z^{-1})$, $L(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow l(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$

← فیلتر ابداع آنالیز

$\Gamma(z) = \frac{1}{L(z)} = 1-\frac{1}{2}z^{-1} \rightarrow \gamma(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

$w(n) = x(n) * \gamma(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$. فرآیند ابداع برای $x(n)$ ، $w(n)$

b.) دنبال یک مدل AR برای $x(n)$ خواهیم بود. مانند بلوک دیاگرام بالا را برعکس می‌نویسیم.

$w(n) \rightarrow \boxed{L(z)} \xrightarrow{x(n)} \boxed{\Gamma(z)} \rightarrow w(n)$

$L(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow l(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ $\Gamma(z) = 1-\frac{1}{2}z^{-1} \rightarrow \gamma(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

AR Model: $x(n) = -\sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i) + b_0 w(n)$

$w(n) = x(n) * \gamma(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) \rightarrow x(n) = \frac{1}{2}x(n-1) + w(n) \rightarrow AR(1)$

c) MA model: $x(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i w(n-i)$

$x(n) = w(n) * l(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k u(k)\, w(n-k) \rightarrow x(n) = w(n) + \frac{1}{2}w(n-1) + \frac{1}{4}w(n-2) + \dots \rightarrow MA(\infty)$

قسمت‌های d تا f در برگه‌های بعدی نوشته شده‌اند.

مسأله ۳.

a.) $y(n) = 0.3y(n-1) + x(n)$, $x(n) \rightarrow$ WSS white noise, $R_x(m) = \delta(m)$

$\rightarrow Y(z) = 0.3z^{-1}Y(z) + X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-0.3z^{-1}}$, $h(n) = (0.3)^n u(n)$

$\rightarrow H(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}} \rightarrow H(f) = \frac{1}{1-0.3e^{-j2\pi f}} \rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1.09-0.6\cos(2\pi f)}$

$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n) \rightarrow S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \frac{1}{1.09-0.6\cos(2\pi f)}$

7	تاریخ تحویل: ۰۱/۱۶/۲۰	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری هشتم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

چون (a) نشان داده شد y(n) WSS است، پس (a) را نیز WSS فرض کردیم. پس حاصل قطعی است.

$S_y(f) = \mathcal{F}[R_y(m)] \to R_y(m) = \mathcal{F}^{-1}[S_y(f)] = Z^{-1}[S_y(z)]$

$S_y(f) = \dfrac{1}{1.09 - 0.3e^{j2\pi f} - 0.3e^{-j2\pi f}} \to S_y(z) = \dfrac{1}{1.09 - 0.3z - 0.3z^{-1}} \xrightarrow[\text{Wolfram Alpha}]{Z^{-1}}$

$R_y(m) = 1.0989\,(0.3^n - 10/3^n)$

b.)

در این حالت واضح است که فرض WSS بودن بین ورودی و سیستم‌های LTI برقرار نباشد.

$y(n) = 0.3y(n-1) + x(n), \quad n \geq 0, \quad y(n) = 0 \text{ for } n < 0$

$y(n_2) = 0.3y(n_2-1) + x(n_2) \longrightarrow x(n_1)y(n_2) = 0.3x(n_1)y(n_2-1) + x(n_2)x(n_1)$

$\xrightarrow{E} E\{x(n_1)y(n_2)\} - 0.3E\{x(n_1)y(n_2-1)\} = E\{x(n_1)x(n_2)\}$

$\longrightarrow R_{xy}(n_1,n_2) - 0.3R_{xy}(n_1,n_2-1) = R_x(n_1-n_2) = \delta(n_1-n_2) \xrightarrow[n_2-n_1]{Z}$

$R_{xy}(n_1,z)[1-0.3z^{-1}] = z^{-n_1} \to R_{xy}(n_1,z) = \dfrac{z^{-n_1}}{1-0.3z^{-1}}$

$\to R_{xy}(n_1,n_2) = Z^{-1}_{n_2}\left[\dfrac{z^{-n_1}}{1-0.3z^{-1}}\right] = (0.3)^{n_2-n_1}u(n_2-n_1)$

$y(n_1) - 0.3y(n_1-1) = x(n_1) \longrightarrow y(n_1)y(n_2) - 0.3y(n_1-1)y(n_2) = x(n_1)y(n_2)$

$\xrightarrow{E} E\{y(n_1)y(n_2)\} - 0.3E\{y(n_1-1)y(n_2)\} = E\{x(n_1)y(n_2)\}$

$\to R_y(n_1,n_2) - 0.3R_y(n_1-1,n_2) = R_{xy}(n_1,n_2) \xrightarrow{Z_{n_1}}$

$R_y(z,n_2) - 0.3z^{-1}R_y(z,n_2) = Z_{n_1}[R_{xy}(n_1,n_2)]$

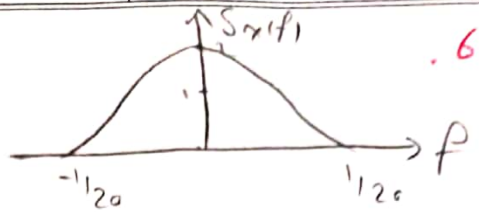
$\to R_y(z,n_2) = \dfrac{Z_{n_1}[R_{xy}(n_1,n_2)]}{1-0.3z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}_{n_1}} R_y(n_1,n_1)$

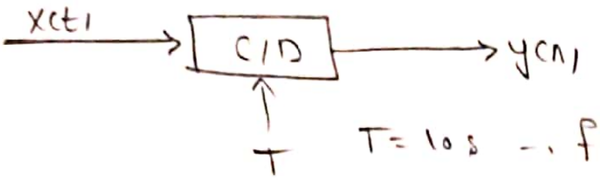
$R_y(n_1,n_2) = (0.3)^{n_2-n_1}u(n_2-n_1) * (0.3)^{n_1}u(n_1)$ پس $R_y(n_1,n_2)$ برابر است با:

شماره	تاریخ تحویل	نام درس	
۶	01/10/20	فرآیند های تصادفی — تکلیف سری هشتم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسأله 6.

a.) $S_x(f) = \begin{cases} 1+\cos(20\pi f) & |f| \leq \frac{1}{20} \\ 0 & |f| > \frac{1}{20} \end{cases}$





We know from DSP: $y(n) = x(nT) \quad n \in \mathbb{Z}$

$T = 10\,s \rightarrow f_s = 1/T = 0.1\,Hz$ Nyquist $f_s \geq 2f_0$

$f_{sample} \cdot f_s = 0.1 \rightarrow w = f_0 = 1/20 \rightarrow f_s = 2f_0 = 2w = 0.1$ دقیقاً نایکوئیست خواهیم داشت

$C_y(n,m) = R_y(n,m) - m_{xy}^2 \; 0 = R_y(n,m)$, $m_y = E\{y(n)\} = E\{x(nT)\} = 0$

$R_y(n,m) = E\{y(n)y^*(m)\} = E\{y(n)y(m)\} = E\{x(nT)x(mT)\} = R_x((n-m)T)$

$x(t) \rightarrow$ zero-mean-stationary , Wiener-Khinchin: $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_x(f)]$

$\mathcal{F}^{-1}[1+\cos(20\pi f)] = \delta(\tau) + \mathcal{F}^{-1}[\cos(20\pi f)]$, $\cos(20\pi f) = \frac{1}{2}e^{j20\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j20\pi f}$

we know: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0}X(f)$ $\quad \delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0}$

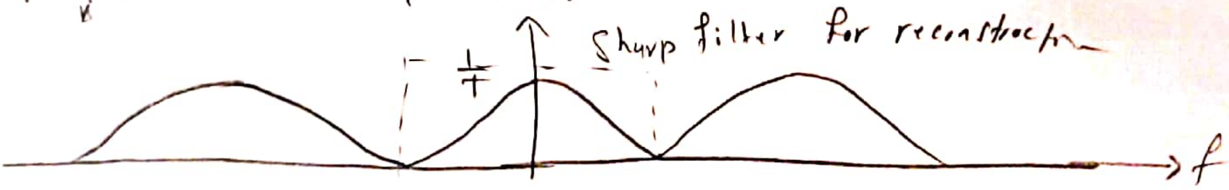
$\rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\cos(20\pi f)] = \frac{1}{2}\delta(\tau-10) + \frac{1}{2}\delta(\tau+10) \rightarrow R_x(\tau) = \delta(\tau) + \frac{1}{2}[\delta(\tau-10)+\delta(\tau+10)]$

$C_y(n,m) = R_y(n,m) = R_x((n-m)T) = \delta((n-m)T) + \frac{1}{2}[\delta((n-m)T-10) + \delta((n-m)T+10)]$

$T=10 \rightarrow C_y(n,m) = \delta(10(n-m)) + \frac{1}{2}[\delta(10(n-m-1)) + \delta(10(n-m+1))]$

$C_y(n,m) = C_y(n-m)$, WSS $\quad R_y(m) = R_x(mT)$

$S_y(f) = \frac{1}{T}\sum_k S_x\left(j\left(\frac{2\pi(f-i)}{T}\right)\right) \quad S_y(f)$ از درس DSP به طور دلخواه داریم:



$H(f) = T\,\Pi(f/2f_0) = 10\,\Pi\left(\frac{f}{20}\right) \quad \hat{x}(t) \overset{m.s}{=} x(t)$

b.) $R_y(n,m) = E\{y(n).y^*(m)\} = E\{x(nT)x^*(mT)\} = R_x((n-m)T) = R_x(20(n-m))$

$R_y(m) = R_x(mT) \longrightarrow S_y(f) = \mathcal{F}[R_y(m)] = \frac{1}{T}\sum_i S_x\left(j\left(\frac{2\pi(f-i)}{T}\right)\right)$

$\rightarrow$ Aliasing قابل بازسازی نیست.

Scanned by CamScanner

ادامه مسئله 7. در تخمین S را از روی مقادیر براساس مشاهدات $x_1, \dots, x_n$ تخمین $\hat{S}$ را به صورت **d.)**

$\hat{S} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ آنگاه. حال اینجا دنبال تخمین LMMSE خواهیم بود.

$MSE = E\{|S-\hat{S}|^2\}$

$S = x(n)\,,\quad X = x(n-1)$ orthogonality principle: $E\{(S-\hat{S})X_k^*\} = 0$

$\hat{S} = aX = a\,x(n-1)$

$\rightarrow E\{(x(n) - a\,x(n-1))\,x^*(n-1)\} = 0 \rightarrow E\{x(n)x^*(n-1)\} - a\,E\{x(n-1)x^*(n-1)\}$

$= R_x(1) - aR_x(0) = 0 \rightarrow a = \dfrac{R_x(1)}{R_x(0)}$ $\quad P(S|X) = E\{|S-\hat{S}|^2\}$ تعریف می‌کنیم

$P(S|X) = E\{(S-aX)(S-aX)^*\} = E\{(S-aX)S^*\} - a^*\underbrace{E\{(S-aX)X^*\}}_{\text{اصل تعامد}}$

$\rightarrow P(S|X) = E\{SS^*\} - a\,E\{XS^*\} = E\{|S|^2\} - a\,E\{XS^*\}$

$\rightarrow P(S|X) = P(x(n)|x(n-1)) = E\{|x(n)|^2\} - a\,E\{x(n-1)x^*(n)\} = R_x(0) - aR_x(-1)$

$= R_x(0) - \dfrac{R_x^2(1)}{R_x(0)}$ $\qquad S_X(z) = S_{x(n-1)}(z) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} = \dfrac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{B}{1-\frac{1}{2}z}$

$\rightarrow A(1-\frac{1}{2}z) + B(1-\frac{1}{2}z^{-1}) = 1 \rightarrow z=2\;\; \frac{3}{4}B = 1 \rightarrow B = 4/3$

$z = 1/2 \rightarrow A\,\frac{3}{4} = 1 \rightarrow A = 4/3 \rightarrow S_X(z) = \dfrac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}z} \xrightarrow{Z^{-1}}$

$\rightarrow R_x(m) = \frac{4}{3}(1/2)^m u(m) + \frac{4}{3}(2)^m u(-1-m)$ $\qquad R_x(0) = \frac{4}{3}\quad R_x(1) = 2/3$

$\rightarrow \hat{S}_{LMMSE} = \frac{1}{2}x(n-1)\,,\quad MSE = \frac{4}{3} - \dfrac{(\frac{2}{3})^2}{4/3} = \frac{4}{3} - \dfrac{4/9}{4/3} = 1$

e.) $S = x(n)\,,\quad X_1 = x(n-1)\,,\ X_2 = x(n-2)\qquad \hat{S} = a_1X_1 + a_2X_2$

orthogonality principle $E\{(S-\hat{S})X_2^*\} = 0\,,\ E\{(S-\hat{S})X_1^*\}$

$= E\{(x(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2))\,x^*(n-1)\} = E\{x(n)x^*(n-1)\} - a_1E\{x(n-1)x^*(n-1)\}$

$- a_2E\{x(n-2)x^*(n-1)\} = R_x(1) - a_1R_x(0) - a_2R_x(-1) = 0$

$E\{(S-\hat{S})X_2^*\} = E\{(x(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2))\,x^*(n-2)\} = E\{x(n)x^*(n-2)\}$

$- a_1E\{x(n-1)x^*(n-2)\} - a_2E\{x(n-2)x^*(n-2)\} = R_x(2) - a_1R_x(1) - a_2R_x(0) = 0$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

$$\begin{cases} R_x(1) - a_1 R_x(0) - a_2 R_x(-1) = 0 \\ R_x(2) - a_1 R_x(1) - a_2 R_x(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{4}{3} a_1 - a_2 \frac{2}{3} = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} a_1 - \frac{4}{3} a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 4a_1 - 2a_2 = 2 \\ 2a_1 - 4a_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8a_1 - 4a_2 = 4 \\ 2a_1 - 4a_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow 6a_1 = 3 \rightarrow a_1 = 1/2$$

$a_2 = 0$, $\hat{s} = \frac{3}{2} x(n-1)$ MSE: $P(s|x_1, x_1) = E\{|s - \hat{s}|^2\}$

$= E\{(s - a_1 x_1)(s - a_1 x_1)^*\} = E\{(s - a_1 x_1) s^*\} - a_1 E\{(s - a_1 x_1) x_1^*\}$

$= E\{|s|^2\} - a_1 E\{x_1 s^*\} = R_x(0) - a_1 E\{x(n-1) x^*(n)\} = R_x(0) - a_1 R_x(-1)$

$= R_x(0) - \frac{1}{2} R_x(1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

f) $s = x(n)$, $x_1 = x(n-1)$ $x_2 = x(n+1)$ $\hat{s} = a_1 x_1 + a_2 x_2$

Orthogonality principle: $E\{(s - \hat{s}) x_k^*\} = 0$ $\therefore$ $E\{(x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n+1)) x^*(n-1)\} = 0$

$\longrightarrow R_x(1) - a_1 R_x(0) - a_2 R_x(2) = 0$ $E\{(x(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n+1)) x^*(n+1)\} = 0$

$\longrightarrow R_x(-1) - a_1 R_x(-2) - a_2 R_x(0) = 0 \longrightarrow \begin{cases} R_x(1) = a_1 R_x(0) + a_2 R_x(2) \\ R_x(1) = a_1 R_x(2) + a_2 R_x(0) \end{cases}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 = 2/3 \\ \frac{1}{3} a_1 + \frac{4}{3} a_2 = 2/3 \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2 = \frac{2}{5} \qquad \hat{s} = \frac{2}{5}(x(n-1) + x(n+1))$$

MSE: $P(s|x_1, x_2) = E\{|s - \hat{s}|^2\} = E\{(s - a_1 x_1 - a_2 x_2)(s - a_1 x_1 - a_2 x_2)^*\}$

$= E\{(s - a_1 x_1 - a_2 x_2) s^*\} - a_1 \cancel{E\{(s - a_1 x_1 - a_2 x_2) x_1^*\}} - a_2 \cancel{E\{(s - a_1 x_1 - a_2 x_2) x_2^*\}}$

$= E\{|s|^2\} - a_1 E\{x_1 s^*\} - a_2 E\{x_2 s^*\} = R_x(0) - a_1 E\{x(n-1) x^*(n)\}$

$- a_2 E\{x(n+1) x^*(n)\} = R_x(0) - a_1 R_x(-1) - a_2 R_x(1) = \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{15}$

$\longrightarrow \boxed{MSE = \frac{4}{5}}$

خطای این تخمین از قبلی کمتر است. لذا نتیجه میگیریم از مشاهدات بیشتری برای تخمین استفاده شده.