1	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۹ /	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری ششم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 4. ابتدا جهت یادآوری فرآیند وینر را معرفی می‌کنیم. $W(t) \rightarrow$ White noise WSS process

$m_W(t)=0,\quad R_W(t+\tau,t)=N_0\delta(\tau),\quad X(t)=\int_0^t W(\alpha)d\alpha \quad . \quad E\{X(t)\}=m_X(t)=0$

$R_X(t_1,t_2)=N_0\min(t_1,t_2)\qquad$ if $t_1<t_2 \rightarrow R_X(t_1,t_2)=N_0t_1$

if $t_2<t_1 \rightarrow R_X(t_1,t_2)=N_0t_2\qquad$ می‌دانیم: $C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-|m_X(t)|^2$

$\rightarrow C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=N_0\min(t_1,t_2)\qquad$ Mean-Ergodic: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}N_0\min(t_1,t_2)dt_1dt_2=?\quad$ if $t_1<t_2$: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}N_0t_1dt_1dt_2$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\frac{N_0}{2}t_1^2\Big|_{-T}^{T}dt_2=0\ \checkmark\quad$ if $t_1>t_2$: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}N_0t_2dt_1dt_2$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}2N_0t_2T\,dt_2=\lim_{T\to\infty}\frac{2N_0}{4T}\int_{-T}^{T}t_2dt_2=0\ \checkmark$

پس این فرآیند ME می‌باشد.

مسئله 1.

a.) $E\{X(t)\}=1\ \&\ R_X(t_1,t_2)=1+e^{-(|t_1|+|t_2|)}\delta(t_1-t_2)$

$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X^2(t)=e^{-(|t_1|+|t_2|)}\delta(t_1-t_2)$

شرط ME بودن: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{-(|t_1|+|t_2|)}\delta(t_1-t_2)dt_1dt_2$

$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{-2|t_2|}\delta(t_1-t_2)dt_1dt_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}e^{-2|t_2|}dt_2$

$\int_{-T}^{T}e^{-2|t_2|}dt_2=\int_{-T}^{0}e^{2t_2}dt_2+\int_{0}^{T}e^{-2t_2}dt_2=\frac{1}{2}e^{2t_2}\Big|_{-T}^{0}+\frac{1}{2}e^{-2t_2}\Big|_{0}^{T}=1-\frac{e^{-2T}+e^{-2T}}{2}$

$=1-e^{-2T}\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{-2T}}{4T^2}=0\rightarrow$ فرآیند ME است.

b.) با توجه به این که فرآیند $X(t)$ یک فرآیند WSS نمی‌باشد، پس ایستان در حوزه همبستگی نخواهد بود، این

سه قسمت نیاز به بررسی ندارد.

مسئله 3. $X=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$, zero mean $X\sim N(0,C)$

از مفهوم تابع مشخصه استفاده خواهیم کرد. می‌دانیم: $E\{X_1X_2X_3X_4\}=\frac{\partial^4}{\partial\omega_1\partial\omega_2\partial\omega_3\partial\omega_4}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0}$

For a normal Vector: $\Phi_X(\omega)=e^{j\omega^Tm_X}\cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^TC\omega}=e^{-1/2\,\omega^TC\omega}$

$-\frac{1}{2}\omega^TC\omega=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\omega_iC_{ij}\omega_j\quad$, طبق تعریف: $C_{ij}=Cov(x_i,x_j)=E\{x_ix_j\}$

واضح است: $\frac{\partial}{\partial\omega}\{-1/2\,\omega^TC\omega\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\omega_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial\omega_n}\end{bmatrix}\{-1/2[\omega_1\ \omega_2\ \cdots]\,C\begin{bmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}\}=-C\omega$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی

تاریخ تحویل: ۰/۱/۹/۱

حال به محاسبه مشتق های بیش از یکی خواهیم پرداخت

$\frac{\partial}{\partial\omega_i}\Phi_X(\omega) = \frac{\partial}{\partial\omega_i}\{-\frac{1}{2}\omega^T C\omega\} e^{-\frac{1}{2}\omega^T C\omega}$

$= -[0 \cdots 1 \cdots 0] C\omega e^{-1/2\,\omega^T C\omega}$, $\frac{\partial}{\partial\omega_4}\Phi_X(\omega) = -[0\,0\,0\,1]C\omega e^{-\frac{1}{2}\omega^T C\omega}$

$= -\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i e^{-1/2\,\omega^T C\omega}$, $\frac{\partial^2}{\partial\omega_3\partial\omega_4}\Phi_X(\omega) = -C_{43} e^{-1/2\,\omega^T C\omega}$

$+ (\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i)(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i) e^{-1/2\,\omega^T C\omega} = e^{-1/2\,\omega^T C\omega}((\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i)(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i) - C_{43})$

حال سراغ مشتق سوم می‌رویم

$\frac{\partial^3}{\partial\omega_2\partial\omega_3\partial\omega_4}\Phi_X(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^T C\omega}[C_{42}(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i) + (\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i)C_{32}]$

$- e^{-1/2\,\omega^T C\omega}(\sum_{i=1}^{4} C_{2i}\omega_i)[-C_{43} + (\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i)(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i)]$

$\to \frac{\partial^3}{\partial\omega_1\partial\omega_2\partial\omega_3} = [C_{42}(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i) + C_{32}(\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i) + C_{43}(\sum_{i=1}^{4} C_{2i}\omega_i)$

$-(\sum_{i=1}^{4} C_{4i}\omega_i)(\sum_{i=1}^{4} C_{3i}\omega_i)(\sum_{i=1}^{4} C_{2i}\omega_i)] e^{-1/2\,\omega^T C\omega}$

در گام آخر یک درجه دیگر مشتق می‌گیریم، $\omega = 0$ حال خواهیم داشت

$\frac{\partial^4}{\partial\omega_1\partial\omega_2\partial\omega_3\partial\omega_4}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = C_{31}C_{42} + C_{41}C_{32} + C_{21}C_{43}$

$\longrightarrow E\{X_1X_2X_3X_4\} = E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\} + E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\} + E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\}$ ✓

b.) we check: $\int_{-\infty}^{\infty}|C_X(\tau)|d\tau < \infty$, $C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2 = R_X(\tau)$

$\to \int_{-\infty}^{\infty}|C_X(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{-|\tau|}|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}d\tau = 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau = 2 < \infty$

پس می‌توان نتیجه گرفت فرآیند ME است. روش دیگر: $C(0) = 1 < \infty$ ✓ $\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} e^{-|\tau|} = 0$ ✓ $\to$ ME ✓

C.) 1) $R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$ در درس قضیه‌ای داریم که بیان می‌کند یک فرآیند تصادفی CE است اگر و تنها اگر:

2) $\langle\langle E\{X(t_1+\tau)X^*(t_1)X(t_2)X(t_2+\tau)\}\rangle_{t_1}\rangle_{t_2} = |R_X(\tau)|^2$

$R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$ با توجه به حقیقی بودن فرآیند عملا conjugation معنایی ندارد، حال خواهیم داشت:

Part a: $E\{X_1X_2X_3X_4\} = C_{12}C_{34} + C_{13}C_{24} + C_{14}C_{23}$, $E\{X(t_1+\tau)X(t_1)X(t_2)X(t_2+\tau)\}$

$= e^{-|\tau|}\cdot e^{-|\tau|} + e^{-|t_1-t_2+\tau|}e^{-|t_1-t_2-\tau|} + e^{-|t_1-t_2|}e^{-|t_1-t_2|}$

حال باید میانگین زمانی را محاسبه کنیم. داشته باشیم که $|R_Y(\tau)|^2$ همان $e^{-2|\tau|}$ است، پس باید ثابت کنیم که:

$$\langle\langle e^{-|t_1-t_2+\tau|-|t_1-t_2-\tau|}+e^{-2|t_1-t_2|}\rangle_{t_1}\rangle_{t_2}=0 \xrightarrow{\tau\to|\tau|}$$

$$\langle\langle e^{-|t_1-t_2+|\tau||-|t_1-t_2-|\tau||}+e^{-2|t_1-t_2|}\rangle_{t_1}\rangle_{t_2}=0 \longrightarrow$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[e^{-|t_1-t_2+|\tau||-|t_1-t_2-|\tau||}+e^{-2|t_1-t_2|}\right]dt_1dt_2$$

نکته: $\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}c(t_1-t_2)dt_1dt_2=\int_{-2T}^{2T}(2T-|s|)\,c(s)\,ds$ $\quad * \quad \xrightarrow{*}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\left[e^{-|s+|\tau||-|s-|\tau||}+e^{-2|s|}\right](2T-|s|)\,ds\longrightarrow$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{2T}\left[e^{-|s+|\tau||-|s-|\tau||}+e^{-2|s|}\right](2T-|s|)\,ds\longrightarrow$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{|\tau|}(e^{-2|\tau|}+e^{-2s})(2T-s)\,ds+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_{|\tau|}^{2T}(e^{-2s}+e^{-2s})(2T-s)\,ds$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{2e^{-4T}+4T-1+e^{-2|\tau|}(4T-2|\tau|(4|\tau|-4T)-1)}{8T^2}=0$$

پس ثابت شد که CE می‌باشد. QED

ج) $Y(t)+\frac{d}{dt}Y(t)=X(t)\quad \forall t>0$

در این مسئله باید $h(t)$ را پیدا کنیم؛ برای این منظور از تبدیل لاپلاس یک‌طرفه استفاده می‌کنیم.

$$\mathcal{L}\longrightarrow (s+1)Y(s)=X(s)\longrightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+1}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)=e^{-t}u(t)$$

می‌دانیم: $m_Y(t)=m_X(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}m_X(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}m_X(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$

$$\longrightarrow m_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}m_X e^{-t}u(t)\xrightarrow{m_X=0} m_Y(t)=0$$

$$R_Y(t+\tau,t)=R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h^*(-\tau)*h(\tau)=e^{-|\tau|}*e^{\tau}u(-\tau)*e^{-\tau}u(\tau)$$

محاسبه سه تا کانولوشن بسیار سخت می‌باشد، لذا از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

$$R_Y(s)=\frac{1}{1-s^2}\times\frac{2}{1-s^2}=\frac{2}{(1-s^2)^2}\xrightarrow[\text{(با دو طرفه)}]{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}\tau e^{\tau}+\frac{1}{2}\tau e^{-\tau}-\frac{1}{2}\tau e^{\tau}+\frac{1}{2}e^{-\tau}$$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی
تکلیف سری ششم

تاریخ تحویل: 01 / 9 / 1

d) $y(t) + \frac{\partial}{\partial t} y(t) = x(t) \quad \forall t$ — ابتدا سیستم ما LTI خواهد بود. لذا از دو طرف امید ریاضی می‌گیریم: (معادله دیفرانسیل است)

$\rightarrow m_y(t) + m_y'(t) - m_x(t) = 0 \rightarrow m_y(t) + m_y'(t) = 0 \rightarrow m_y(t) = ce^{-t}$

$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1) y^*(t_2)\} \longrightarrow$ متاسفانه برای حل این قسمت ایده‌ای ندارم.

مسئله 2.

a.) $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i.i.d binary RV , $P\{A_k = 1\} = P\{A_k = -1\} = 1/2$

Poisson points with uniform λ. $x(t) = A_i \quad t_i < t < t_{i+1}$

$E\{x(t)\} = m_x(t) = E\{A_i\} = \frac{1}{2} \times 1 + 1/2 \times (-1) = 0$

$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) x^*(t_2)\} = E\{x(t_1) x(t_2)\}$

حال باید وجود یا عدم وجود نقطه پواسن در بازه (t_1, t_2) را بررسی کنیم.

هیچ نقطه: $E\{x(t_1) x(t_2)\} = E\{A_i^2\} = \frac{1}{2} + 1/2 = 1 \times p$

حداقل یک نقطه: $E\{x(t_1) x(t_2)\} = E\{A_i A_j\} = 0 \times (1-p)$

حال یک متغیر تصادفی z تعریف می‌کنیم که تعداد نقاط پواسن در بازه (t_1, t_2) است.

$P(z = i) = e^{-a_{t_1, t_2}} \frac{a_{t_1, t_2}^i}{i!} \quad , a_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda d\alpha = \lambda(t_2 - t_1)$

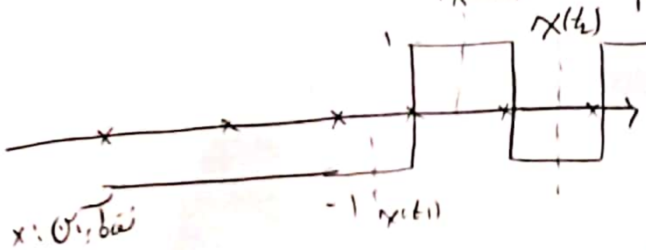
$\rightarrow P(z = i) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^i}{i!} \qquad P(z = 0) = e^{-\lambda|t_2 - t_1|}$

$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) x(t_2)\} = P \times 1 = P \xrightarrow{P = P(z=0)} e^{-\lambda|t_2 - t_1|} = e^{-\lambda|\tau|}$

$R_x(t_1, t_2) = e^{-\lambda|t_2 - t_1|} = R_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$

b) فرآیندی IIP است که شرط زیر را ارضا کند. $t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad x(t_1)$ و $x(t_2) - x(t_1)$ و ... و $x(t_n) - x(t_{n-1})$

برای اینکه نشان دهیم مستقل از هم نیستند (وابسته باشند)، شکل زیر را داریم:



حالت 1: $x(t_2) - x(t_1) = -2$

حالت 2: if $x(t_1) = -1$, $x(t_2) - x(t_1) = 0$

پس $x(t_2) - x(t_1)$ به $x(t_1)$ وابسته است. لذا IIP نیست.

5	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۹ /	نام درس: فرآیندهای تصادفی	سروش مس‌فروش مشهد
		گلکسی سری ششم	شماره دانشجویی: 810198472

c) واضح است که این فرآیند ما دارایِ مقداری در زمان t خاص اختیاری کند هیچ ربطی به این ندارد که قبلاً در t های قبلی چه مقداری داشته است لذا می‌توان ادعا کرد این فرآیند مارکوف است.

$t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad f_{X(t_n)}(x_n \mid X(t_1)=x_1, \dots, X(t_{n-1})=x_{n-1}) = f_{X(t_n)}(x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1})$

پس فرآیند مارکوف است.

d) $f_{X(t)}(x_1 \dots x_n) = f_X(x_1, \dots, x_n; t_1 \dots t_n)$: فرآیند را استیشنری بصورت اکید در نظر داشته باشیم

$= f_X(x_1, \dots, x_n; t_1+c, \dots, t_n+c)$

در مورد c باید استدلال کنیم. اگر شیفت c باعث شود به نقاط پواسن بعدی برسیم که آنگاه با توجه به نوع فرآیند شرط بالا برقرار است و فرآیند SSS است. همچنین اگر c به اندازه‌ای نباشد که ما را به نقطه پواسن بعدی برساند هم اتفاقی نمی‌افتد و باز هم شرط برقرار است. پس فرآیند در کل SSS است.

e) ما توجه به WSS بودن فرآیند $x(t)$ شرط کافی را بررسی می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)|\, d\tau < \infty \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\lambda|\tau|}|\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda|\tau|}\, d\tau = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

پس فرآیند ME است.

مسأله ۴.

a.) $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow$ ME & SSS $\quad Y_n = \frac{1}{M+1} X_n, \quad M \sim Poi(1)$

M ⊥ X_n, $\quad E\{Y_n\} = E\{\frac{1}{M+1} X_n\} = E\{\frac{1}{M+1}\} \underbrace{E\{X_n\}} = E\{\frac{1}{M+1}\} m_X$

$E\{\frac{1}{M+1}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \frac{e^{-1}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} e^{-1}$ $\quad$ we know: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\lambda} - 1$

$\rightarrow E\{\frac{1}{M+1}\} = e^{-1}(e^{1} - 1) = 1 - e^{-1}, \quad E\{Y_n\} = m_X(1 - e^{-1})$

$R_Y(t_1, t_2) = E\{Y(t_1) Y^*(t_2)\} = E\{(\frac{1}{M+1})^2\} E\{X(t_1) X^*(t_2)\} = E\{(\frac{1}{M+1})^2\} R_X(t_1, t_2)$

$= E\{(\frac{1}{M+1})^2\} R_X(\tau) \longrightarrow$ WSS مشخصاً مقدار $E\{\frac{1}{M+1}\}$ اگر محدود باشد. $R_Y(\tau)$ ندارد پس Y_n فقط

می‌باشد. برای اینکه فرآیند SSS داریم به شیفت‌های زمانی به اندازه c آن‌ها، تغییری در خواص آماری ایجاد نکند. مشخصاً $W = \frac{1}{M+1}$ طوری است که به یا استرس زمانی فرآیند Y_n اثری نگذارد، یعنی چون Y_n از X_n ضرب در W تشکیل شده است. چون X_n SSS است پس با توجه به W، Y_n نیز SSS است.

b.) ME بررسی: می‌دانیم: $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t, w_i)\, dt = m_X$ $\quad$ Mean ergodic

$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau, w_i)\, x^*(t, w_i)\, dt$ $\quad$ Ergodic in Auto correlation

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: طرح فرایندهای تصادفی تکلیف سری ششم	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۹ /	6

IME است.

$$E\{(Y_n - m_Y)^2\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad E\{Y_n^2\} - 2m_Y \underbrace{E\{Y_n\}}_{m_Y} + m_Y^2 = 0$$

همچنین با بررسی ارگادیسیتی در اتوکورلیشن خواهیم داشت که CE نیز می‌باشد.