1	تاریخ تحویل: ۰۱/ ۸ / ۱۴	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

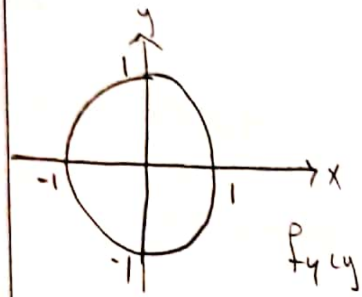
مسأله ۱.

a.) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

در اینجا ما مشاهده $X = x$ را داریم. می‌خواهیم تخمین برای Y عرضه کنیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم (با معیار MMSE):

$\hat{Y}_{MMSE} = E(Y|X)$, $E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad |x| \leqslant 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \quad |y| \leqslant 1$$

آزمایش: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx \xrightarrow{x=\sin\theta} \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 1$ ✓ , $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1$ به طریق مشابه

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

$$\rightarrow \hat{Y}_{MMSE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = 0 \rightarrow \hat{Y}_{MMSE} = \hat{g}(Y) = 0 \qquad MSE = E_X(Var(Y|X))$$

$$Var(Y|X) = E(Y^2|X) - \underset{0}{E(Y|X)}^2 \rightarrow Var(Y|X) = E(Y^2|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1-x^2}{3}$$

$$MSE = E\left\{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{3}\right\} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}E\{x^2\} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$\rightarrow \hat{Y}_{MMSE} = 0$, $MSE = 1/4$ ✓

b.)

در این قسمت با مشاهده $Y = y$ می‌خواهیم تخمینی برای X با معیار LMMSE ارائه کنیم.

$\hat{X}_{LMMSE} = aY + b \xrightarrow[\text{شد}]{\text{در درس اثبات}} \hat{X}_{LMMSE} = \frac{\rho_{XY}\sigma_X}{\sigma_Y}Y + m_X - \frac{\rho_{XY}\sigma_X}{\sigma_Y}m_X$

$$\rightarrow \hat{X}_{LMMSE} = m_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-m_Y) = m_X + \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_Y^2}(Y-m_Y)$$

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\text{فرد}}\,dx = 0 \rightarrow m_X = 0$$

$$m_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy = 0 \rightarrow m_Y = 0$$

2	تاریخ تحویل: ۱۴ / 8 / ۰۱	نام درس: فرآیند های تصادفی تکلیف سری سوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy - (E(Y))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} y^2\sqrt{1-y^2}\,dy \quad \frac{y=\sin\theta}{dy=\cos\theta\,d\theta}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta - \sin^4\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\theta\right]$$

$$\int \sin^2\theta\,d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \longrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\int \sin^4\theta\,d\theta = \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{4} \longrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

$$\longrightarrow \sigma_Y^2 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{8}\right] = 1/4$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}$$

$$E(XY) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{r^2}{2}\sin 2\theta\, f_{R\Theta}(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{r^3}{2}\sin 2\theta \cdot \pi r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2} r^4 \sin 2\theta\,dr\,d\theta$$

$f_{R\Theta}(r,\theta) = \pi r$ (۱۲)(۱) : در تمرین 2 دیدیم ←

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{5}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{5}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0 \longrightarrow Cov(X,Y) = 0$$

$$\longrightarrow \hat{X}_{LMMSE} = 0 \quad , \quad MSE = \sigma_X^2 - \frac{\cancel{Cov(X,Y)}}{\cancel{\sigma_Y^2}} = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{4}$$

---

a) $X_1, X_2, \dots, X_n \longrightarrow i.i.d \quad f_{X_i}(x) = f_X(x), \quad E(X_i) = \eta, \ Var(X_i) = \sigma^2$ 2. مسئله 4

$$Y_j = \sum_{k=1}^{j} X_k, \quad j = 1, \dots, n \qquad \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_1 + X_2 \\ \vdots \\ Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{cases} \longrightarrow Y_n = Y_{n-1} + X_n$$

$$E(Y_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) = E(Y_{n-1} + X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) = E(X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$$

$$+ E(Y_{n-1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = E(X_n) + E(Y_{n-1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) = \eta + Y_{n-1}$$

b) $$E(Y_n | Y_1, \dots, Y_{n-2}) = E(Y_{n-1} + X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) = E(X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2})$$

$$+ E(Y_{n-1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) \xrightarrow{Y_{n-1} = Y_{n-2} + X_{n-1}} E(X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2})$$

$$+ E(X_{n-1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) + E(Y_{n-2} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) = E(X_n) + E(X_{n-1})$$

$$+ E(Y_{n-2} | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) \longrightarrow E(Y_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-2}) = 2\eta + Y_{n-2}$$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری دوم	تاریخ تحویل: ۱۴ / ۸ / ۹۹	3

c.) $Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E(Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) - (E(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}))^2$

$E(Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E((Y_{n-1}+X_n)^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E(X_n^2+2Y_{n-1}X_n+Y_{n-1}^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E(X_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) + 2E(X_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1})E(Y_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) + E(Y_{n-1}^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E(X_n^2) + 2E(X_n)E(Y_{n-1}|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) + E(Y_{n-1}^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1})$

$= E(X_n^2) + 2\eta Y_{n-1} + Y_{n-1}^2$, $E(X_n^2) = \sigma^2 + \eta^2 \rightarrow E(Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1})$

$= \sigma^2+\eta^2+2\eta Y_{n-1}+Y_{n-1}^2$, $Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = E(Y_n^2|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) - (E(Y_n|Y_1,\dots,Y_{n-1}))^2$

$= \sigma^2+\eta^2+2\eta Y_{n-1}+Y_{n-1}^2 - (\eta+Y_{n-1})^2 = \sigma^2+\eta^2+2\eta Y_{n-1}+Y_{n-1}^2-\eta^2-2\eta Y_{n-1}-Y_{n-1}^2$

$\rightarrow Var(Y_n|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1}) = \sigma^2$

d.) $f_{\underline{Y}}(y_1,y_2,\dots,y_n) = ?$

برای یافتن $f_{\underline{Y}}(\underline{y})$ از قضیه بیان شده در درس استفاده خواهیم کرد.

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_i \frac{f_{\underline{X}}(x_i)}{|J(x_i)|} \qquad J(\underline{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

در این مسئله با حالت خاصی طرف هستیم که Y ها با X رابطه خطی دارند به طوری که داریم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum \frac{f_{\underline{X}}(A^{-1}(\underline{y}-b))}{|\det(A)|}$$

حال در این مسئله داریم:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{cases} \qquad J = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

نکته: اگر A ماتریس پایین یا بالا مثلثی باشد $\det(A)$ به صورت ضرب درایه‌های قطر اصلی آن به دست می‌آید.

پس در نهایت به راحتی خواهیم داشت:

$$f_{\underline{Y}}(y_1,y_2,\dots,y_n) = \sum_i \frac{f_{\underline{X}}(x_i)}{|J(x_i)|} = f_x(y_1)\cdot f_x(y_2-y_1)\, f_x(y_3-y_2)\cdots f_x(y_n-y_{n-1})$$

مسئله 4.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{m}_X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_X = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & -5 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \qquad C_X = C_X^H \checkmark$$

طبق آنچه در درس بیان شد، شرط لازم و کافی برای این که بین المانهای $\underline{X}$ یک رابطه خطی وجود داشته باشد این است که:

$$\det(C_X)=0, \quad \det(C_X) = \begin{vmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & -5 \\ -5 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 10(100-25) + 5(-50-25) - 5(25+50) = 10(75) - 10(75)$$

$$= 0 \rightarrow |C_X| = 0 \longrightarrow$$ رابطه خطی وجود خواهد داشت.

حال رابطه خطی را به دست خواهیم آورد.

$$C_X \underline{q} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & -5 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 10q_1 - 5q_2 - 5q_3 = 0 \\ -5q_1 + 10q_2 - 5q_3 = 0 \\ -5q_1 - 5q_2 + 10q_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2q_1 - q_2 - q_3 = 0 \\ -q_1 + 2q_2 - q_3 = 0 \\ -q_1 - q_2 + 2q_3 = 0 \\ |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 = 1 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow q_3 = +q_1 \\ \rightarrow \{ 3q_2 - 3q_1 = 0 \rightarrow q_2 = q_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow |q_1|^2 + |q_1| + |-q_1|^2 = 1 \rightarrow 3|q_1|^2 = 1 \rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q_3 = \frac{+1}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{q}^H \tilde{\underline{X}} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ +1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} x_1 - m_{x_1} \\ x_2 - m_{x_2} \\ x_3 - m_{x_3} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - m_{x_1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_2 - m_{x_2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_3 - m_{x_3})$$

$$= 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - 1 + x_2 + x_3 + 2) = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

مسئله 5.

$$\underline{X} = [x_1, x_2, x_3]^T \qquad \underline{m}_X = [5, -5, 6]^T \qquad C_X = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$C_X = C_X^H$ ✓ هرمیتی است.

$$\mathrm{Det}(C_X - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 60\lambda + 79$$

$$\rightarrow \mathrm{Det}(C - \lambda I) = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 60\lambda + 79 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2.609 \quad \lambda_2 = 4.227 \quad \lambda_3 = 7.164$$

پس با توجه به مثبت بودن مقادیر ویژه C_X، C_X یک ماتریس p.d است.

$\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, $m_Y = 0$, $C_Y = I$, در درس اثبات شد: $A = L^{-1}$ $\underline{b} = -L^{-1}\underline{m}_X$

$$C_X = LL^H \xrightarrow[\text{Decomposition}]{\text{cholesky}} \quad l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \qquad l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{11} = \sqrt{c_{11}} = \sqrt{5}, \quad l_{21} = \frac{c_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad l_{22} = \sqrt{c_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{21}{5}}$$

$$l_{31} = \frac{c_{31}}{l_{11}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad l_{32} = \frac{c_{32} - l_{31} \times l_{21}}{l_{22}} = \frac{0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{21}{5}}} \rightarrow l_{32} = \frac{2}{\sqrt{105}}$$

$$l_{33} = \sqrt{c_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{5} - \frac{4}{105}} = \sqrt{\frac{395}{105}} = \sqrt{\frac{79}{21}}$$

پس در نهایت ماتریس L به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$L=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{21}{5}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}} & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{bmatrix}$$

$$C_x=LL^H=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{21}{5}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}} & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{\frac{21}{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

طبق نقشی که انجام دادیم، ماتریس L درست به دست آمده است، می‌دانیم $A=L^{-1}$، پس نیازمند معکوس L هستیم.

$$\det(L)=\sqrt{\frac{79}{21}}\left(\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{21}{5}}-0\right)=\sqrt{\frac{79}{21}}\times\sqrt{21}=\sqrt{79}$$

$$L^T=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{\frac{21}{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{الحاق}]{\text{تشکیل ماتریس}} a_{11}=\begin{vmatrix}\sqrt{\frac{21}{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}}\\ 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{vmatrix}=\sqrt{\frac{79}{5}}$$

$$a_{12}=\begin{vmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{105}}\\ 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{vmatrix}=0\qquad a_{13}=\begin{vmatrix}0 & \sqrt{\frac{21}{5}}\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\qquad a_{21}=\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{vmatrix}=\frac{2\sqrt{79}}{\sqrt{105}}$$

$$a_{22}=\begin{vmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{\frac{79}{21}}\end{vmatrix}=\sqrt{\frac{395}{21}}\qquad a_{23}=\begin{vmatrix}\sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0\qquad a_{31}=\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sqrt{\frac{21}{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}}\end{vmatrix}\longrightarrow$$

$$a_{31}=\frac{4}{\sqrt{525}}+\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}}\qquad a_{32}=\begin{vmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{105}}\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{21}}\qquad a_{33}=\begin{vmatrix}\sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{\frac{21}{5}}\end{vmatrix}=\sqrt{21}$$

$$\mathrm{Adj}(L)=\begin{bmatrix}a_{11} & -a_{12} & a_{13}\\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23}\\ a_{31} & -a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{Adj}(L)=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{79}{5}} & 0 & 0\\ \sqrt{\frac{316}{105}} & \sqrt{\frac{395}{21}} & 0\\ \frac{4}{\sqrt{525}}+\sqrt{\frac{21}{25}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \sqrt{21}\end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم معکوس L را به صورت زیر حساب کنیم.

$$L^{-1}=\frac{1}{\det(L)}\times \mathrm{Adj}(L)$$

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{105}} & \sqrt{\frac{5}{21}} & 0\\ \frac{4}{\sqrt{41475}}+\sqrt{\frac{21}{1975}} & \frac{2}{\sqrt{1659}} & \sqrt{\frac{21}{79}}\end{bmatrix}=A$$

پس ماتریس A به دست آمد.

$$\underline{b}=-L^{-1}\underline{m}_x=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{105}} & \sqrt{\frac{5}{21}} & 0\\ \frac{4}{\sqrt{41475}}+\sqrt{\frac{21}{1975}} & \frac{2}{\sqrt{1659}} & \sqrt{\frac{21}{79}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -5\\ 6\end{bmatrix}=\left[\sqrt{5},\frac{\sqrt{70}-\sqrt{125}}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{1659}}+\sqrt{\frac{21}{79}}-\frac{10}{\sqrt{1659}}+6\sqrt{\frac{21}{79}}\right]^T$$

$$\longrightarrow \underline{b}=\left[\sqrt{5},\frac{\sqrt{70}-\sqrt{125}}{\sqrt{21}},7\sqrt{\frac{21}{79}}-\frac{6}{\sqrt{1659}}\right]^T$$

$$\underline{Y}=A\underline{x}+\underline{b}$$

سروش مس‌فروش مشهد | نام درس: فرآیندهای تصادفی (تمرین سری سوم) | تاریخ تحویل: 01 / 8 / 14 | 6

شماره دانشجویی: 810108472

مسأله 6.

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{2}{\pi\sqrt{7}}\exp\left\{-\frac{8}{7}\left(x_1^2+\frac{3}{2}x_1x_2+x_2^2\right)\right\}$$

اگر X و Y مشترکاً نرمال باشند داریم: $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}$

حال رابطه بالا را با عبارت $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ گفته شده مقایسه خواهیم کرد.

$m_{X_1}=m_{X_2}=0$, $\quad \frac{-1}{2(1-\rho_{X_1X_2}^2)}=-\frac{8}{7}\to 7=16(1-\rho_{X_1X_2}^2)\to \rho_{X_1X_2}^2=\frac{9}{16}$

$\to |\rho_{X_1X_2}|=\frac{3}{4}$, $\quad \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X_1X_2}^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{7}}\to\sqrt{7}=4\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\frac{9}{16}}$

$\to \sigma_{X_1}\sigma_{X_2}=1$, $\quad \frac{-2\rho_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}=\frac{3}{2}\to\rho_{X_1X_2}=-\frac{3}{4}$ $\quad \sigma_{X_1}^2=\sigma_{X_2}^2=1$

$\Rightarrow m_{X_1}=m_{X_2}=0,\quad \sigma_{X_1}^2=\sigma_{X_2}^2=1,\quad \rho_{X_1X_2}=-\frac{3}{4}$

حال می‌خواهیم A را به گونه‌ای بیابیم که $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ آنگاه y_1 و y_2 مستقل باشند. بردار $\underline{X}$ را تشکیل خواهیم داد.

$\underline{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $\quad \underline{m}_X=0$, $\quad \tilde{\underline{X}}=\underline{X}$

$C_X=\begin{bmatrix}\sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2}\\ \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{X_2}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{مقادیر ویژه}]{\text{بدست آوردن}}\det(C_X-\lambda I)=0$

$\to\begin{vmatrix}1-\lambda & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1-\frac{9}{16}=0\to\lambda^2-2\lambda+\frac{7}{16}=0\to\Delta^2=\frac{9}{4}$

$\to\lambda_1=\frac{2+\frac{3}{2}}{2}=\frac{7}{4}\quad \lambda_2=\frac{2-\frac{3}{2}}{2}=\frac{1}{4}\quad C\underline{q}=\lambda\underline{q},\quad \lambda=\lambda_1=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4}q_1\\ \frac{7}{4}q_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}q_1-\frac{3}{4}q_2=\frac{7}{4}q_1\\ -\frac{3}{4}q_1+q_2=\frac{7}{4}q_2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}q_1+\frac{3}{4}q_2=0\\ -\frac{3}{4}q_1-\frac{3}{4}q_2=0\\ |q_1|^2+|q_2|^2=1\end{cases}\Rightarrow q_1=-q_2$

$\to |q_1|^2=\frac{1}{2}\to q_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ q_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}\qquad \underline{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$\lambda=\lambda_2=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}q_1\\ \frac{1}{4}q_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}q_1-\frac{3}{4}q_2=\frac{1}{4}q_1\\ -\frac{3}{4}q_1+q_2=\frac{1}{4}q_2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}q_1=\frac{3}{4}q_2\\ -\frac{3}{4}q_1=-\frac{3}{4}q_1\\ |q_1|^2+|q_1|^2=1\end{cases}$

$\to |q_1|^2+|q_1|^2=1\to|q_1|=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad q_1=q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \underline{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

پس داریم: $L=Q\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{4}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{7}{4}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{چولسکی}}$ $\underline{Y}$ بردار سفید شده یعنی مستقل

$L^{-1}=\frac{1}{\det(L)}L^*=\frac{4}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \frac{4}{2\sqrt{14}} & \frac{4}{2\sqrt{14}}\end{bmatrix}$ $\qquad \underline{Y}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ نیز خواهد بود.

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی
تکلیف سری دوم

تاریخ تحویل: 01/8/14

مسأله 3.

a.) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ... i.i.d continuous random variables. $f_{X_i}(x) = f(x)$

Decreasing order: $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \cdots \geq X_{(n)}$, $X_{(1)}$ is the largest element

$f_{\underline{X}_{OS}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ?$

باید دقت شود که نمادهای مرتب شده $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ معادل $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ باشند. را برای جایگشت‌هایی از $(n, \ldots, 2, 1)$ بخواهیم. حال خواهیم داشت:

$X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \ldots, X_n = x_{i_n}$, $P(x_{i_n} - \frac{\epsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\epsilon}{2}, \ldots, x_{i_1} - \frac{\epsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\epsilon}{2})$

$\approx \epsilon^n f_{X_1 \ldots X_n}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \epsilon^n f(x_{i_n}) \cdots f(x_{i_1}) = \epsilon^n f(x_n) \cdots f(x_1)$

$\xrightarrow{x_1 > x_2 \cdots > x_n} P(x_n - \frac{\epsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\epsilon}{2}, \ldots, x_1 - \frac{\epsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\epsilon}{2})$

$\approx n!\, \epsilon^n f(x_n) \cdots f(x_1)$ $\quad f_{\underline{X}_{OS}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{n!\, \epsilon^n f(x_n) \cdots f(x_1)}{\epsilon^n} = n!\, f(x_n) \cdots f(x_1)$

$\rightarrow f_{\underline{X}_{OS}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\, f(x_1) \cdots f(x_n)$

b.) $f_{X_{(i)}}(x_i) = ?$ $\quad P(X_{(i)} \in [x, x+\epsilon]) = P($یکی از x ها $\in [x, x+\epsilon]$، $i-1$ تا بقیه دقیقاً $< x)$

$= \sum_{k=1}^{n} P(X_k \in [x, x+\epsilon]$، $i-1$ تا بقیه دقیقاً $< x) = n P(X_1 \in [x, x+\epsilon]) P($دقیقاً $i-1$ تا بقیه $< x)$

$= n P(X_1 \in [x, x+\epsilon]) \left[\binom{n-1}{i-1} P(X < x)^{i-1} P(X > x)^{n-i} \right] \longrightarrow$

(فرض کردیم که $F_{X}(x)$ ها یکسان باشند.)

$f_{X_{(i)}}(x) = n f(x) \binom{n-1}{i-1} F(x)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i}$

c.) $f_{X_{(i)} X_{(j)}}(x_i, y_j)$ for $i < j$

با حل کردن روندی مشابه قسمت ب، و یا با شروع از $f_{\underline{X}_{OS}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ می‌توانیم به پاسخ مسئله

برسیم، با توجه به تشابهات بسیار زیاد، امکان این که دقیقاً به پاسخ برسم را پیدا نکردم.