1	تاریخ تحویل: ۰۱ / ۸ / ۱۸	نام درس: فرآیند های تصادفی تکلیف سری پنجم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 5.

$X(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)$ $\quad F \sim U[2,4]$ $\quad f_F(f) = \frac{1}{2} \quad 2 \le f \le 4$

$\theta \sim U(0, 2\pi)$ .. $f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad m_X(t) = E\{X(t)\}$

$= E\{A\cos(2\pi F t + \theta)\} = A[E\{\cos(2\pi F t)\cos(\theta) - \sin(2\pi F t)\sin\theta\}]$

$= A[E\{\cos(2\pi F t)\}E\{\cos\theta\} - E\{\sin(2\pi F t)\}E\{\sin\theta\}] = A[\int_2^4 \cos(2\pi F t).\frac{1}{2}dF$

$.\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos\theta\, d\theta - \int_2^4 \sin(2\pi F t).\frac{1}{2}dF . \int_0^{2\pi}\sin\theta . \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \rightarrow m_X(t) = 0$

$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = E\{A\cos(2\pi F t_1 + \theta) . A\cos(2\pi F t_2 + \theta)\}$

$= A^2 E\{\cos(2\pi F t_1 + \theta)\cos(2\pi F t_2 + \theta)\} = A^2 E\{\frac{1}{2}\cos(2\pi F(t_1 - t_2))$

$+ \frac{1}{2}\cos(2\pi F(t_1+t_2) + 2\theta)\} = \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\pi F(t_1-t_2))\} + \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\pi F(t_1+t_2)+2\theta)\}$

$= \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\pi F(t_1-t_2))\} + \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\pi F(t_1+t_2))\}\overset{0}{E\{\cos(2\theta)\}} - \frac{A^2}{2}E\{\sin(2\pi F(t_1+t_2))\}$

$.\overset{0}{E\{\sin 2\theta\}} = \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\pi F(t_1-t_2))\} = \frac{A^2}{2}\int_2^4 \frac{1}{2}\cos(2\pi F(t_1-t_2))dF$

$= \frac{A^2}{4}\int_2^4 \cos(2\pi F(t_1-t_2))dF = \frac{A^2}{4} . \frac{1}{2\pi(t_1-t_2)} \sin(2\pi F(t_1-t_2))\Big|_2^4$

$= \frac{A^2}{4} . \frac{1}{2\pi(t_1-t_2)}[\sin(8\pi(t_1-t_2)) - \sin(4\pi(t_1-t_2))]$

$R_X(t_1,t_2) = R(t_1 - t_2) \rightarrow \checkmark \qquad m_X(t) \rightarrow t$ ثابت $\rightarrow$ WSS Process

---

مسئله 6.

$X(t) \rightarrow$ Gaussian process $\qquad$ گوسی زمان نرمال $X(t) \sim N(m_X(t), \sigma^2)$ $\qquad R_X(\tau) = E\{X(t)X^*(t)\}$

$\sigma^2 = R_X(\tau)|_{\tau=0} = R_X(0)$, $\quad m_X(t) = 0 \rightarrow X(t) \sim N(0, R_X(0))$

$Y(t) = Ae^{jX(t)}$, $m_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{Ae^{jX(t)}\} = E\{A\}E\{e^{jX(t)}\} = a E\{e^{jX(t)}\}$

$= a\,\Phi_{X(t)}(1)$ $\qquad$ For a normal RV: $\Phi_X(\omega) = e^{j\omega m_X} . e^{-1/2\sigma_X^2\omega^2}$

$\rightarrow m_Y(t) = a e^{-\frac{1}{2}R_X(0)}$

$R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\} = E\{Ae^{jX(t_1)} Ae^{-jX(t_2)}\} = E\{A^2\}E\{e^{j(X(t_1)-X(t_2))}\}$

we know: $E\{A^2\} = Var(A) + m_A^2 = a^2 + a$ $\qquad E\{e^{j(X(t_1)-X(t_2))}\}$ $\quad U = X(t_1) - X(t_2)$

$\rightarrow E\{e^{jU}\} = \Phi_U(1) = e^{j\omega m_U} . e^{-1/2\sigma_U^2\omega^2}$, حال باید میانگین و واریانس U را به دست آوریم.

2	تاریخ تحویل: ۹ / ۱ / ۸	نام درس: فرآیند های تصادفی تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

$m_U(t) = E\{X(t_1)\} - E\{X(t_2)\} = 0$, $\sigma_U^2 = E\{U^2\} - m_U^2 = E\{U^2\}$

$\sigma_U^2 = E\{U^2\} = E\{(X(t_1) - X(t_2))^2\} = E\{X^2(t_1)\} + E\{X^2(t_2)\} - 2E\{X(t_1)X(t_2)\}$

$= R_X(0) + R_X(0) - 2R_X(t_1 - t_2) = 2R_X(0) - 2R_X(t_1 - t_2)$

$$E\{e^{j(X(t_1) - X(t_2))}\} = e^{-\frac{1}{2}(2R_X(0) - 2R_X(t_1 - t_2))} = e^{R_X(t_1-t_2) - R_X(0)}$$

$$\rightarrow R_Y(t_1, t_2) = (a + a^2)\, e^{R_X(t_1-t_2) - R_X(0)}$$

$Y(t)$ یک فرآیند WSS است.

---

a.)

سوال ۴. ابتدا لازم است فرآیند Wiener را یادآوری نماییم.

اگر $X(t)$ یک فرآیند نویز سفید است و گاوسی باشد آنگاه $W(t) = \int_0^t X(\alpha)d\alpha$ را یک فرآیند وینر نامیم. فرآیند وینر یک فرآیند گاوسی می‌باشد. یعنی

$E\{W(t)\} = 0$, $R_X(t_1, t_2) = N_0 \min(t_1, t_2)$

پارامتر فرآیند

$$f_{W(t)}(w; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}} e^{-\frac{w^2}{2N_0 t}} \qquad X(t) \sim N(0, \sigma_X^2)$$

$Y(t) = W^2(t)$, $y = w^2 \rightarrow w = \sqrt{y}$, $w = -\sqrt{y}$. $f_Y(y; t) = \frac{\sum f_W(w_i; t)}{|J|}$

$|J| = |2w| = 2\sqrt{y}$, $f_Y(y; t) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_W(\sqrt{y}; t) + f_W(-\sqrt{y}; t)\right)$

$$\rightarrow f_Y(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}} e^{-\frac{y}{2N_0 t}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{y}} \rightarrow f_Y(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y N_0 t}} e^{-\frac{y}{2N_0 t}} \qquad y > 0,\ t > 0$$

$$\rightarrow f_Y(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y N_0 t}} e^{-\frac{y}{2N_0 t}}\, U(t)\, U(y)$$

b.)

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا Y فرآیندی با نمو مستقل هست یا خیر.

IIP: $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ $\quad Y(t_1) \perp Y(t_2) - Y(t_1) \perp \cdots \perp Y(t_n) - Y(t_{n-1})$

برای بررسی دو نمو $Y(t_1)$، $Y(t_2) - Y(t_1)$ را در نظر می‌گیریم. مقدار $f_{Y(t_1), Y(t_2)}(y_1, y_2; t_1, t_2)$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$f_{Y(t_1)Y(t_2)}(y_1, y_2; t_1, t_2) = f_{W(t)}(\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}; t_1, t_2)\frac{1}{|J|} + f_{W(t)}(-\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}; t_1, t_2)\frac{1}{|J|}$$

$$+ f_{W(t)}(\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}; t_1, t_2)\frac{1}{|J|} + f_{W(t)}(\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}; t_1, t_2)\frac{1}{|J|} \qquad J = \begin{vmatrix} 2w_1 & 0 \\ 0 & 2w_2 \end{vmatrix} = 4w_1w_2$$

$$\rightarrow J = 4\sqrt{y_1 y_2}, \quad f_{Y(t_1)Y(t_2)}(y_1, y_2; t_1, t_2) = \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}}\Big[f_{W_1}(\sqrt{y_1}) f_{W_2 - W_1}(\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1})$$

$$+ f_{W_1}(-\sqrt{y_1}) f_{W_2 - W_1}(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}) + f_{W_1}(\sqrt{y_1}) f_{W_2 - W_1}(-\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}) + f_{W_1}(-\sqrt{y_1}) f_{W_2 - W_1}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi N_0}\frac{1}{\sqrt{y_1 y_2 t_1(t_2-t_1)}}\left[\frac{1}{2} e^{\left(-\frac{y_1}{2t_1}-\frac{(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1})^2}{2(t_2-t_1)}\right)}+\frac{1}{2} e^{\left(-\frac{y_1}{2t_1}-\frac{(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1})^2}{2(t_2-t_1)}\right)}\right]u(y_2)$$

$u(y_1), \quad t_2 > t_1 \qquad f_y(y_1,y_2;t_1,t_2) \neq f_y(y_2-y_1;t_1,t_2)\, f_y(y_1,t_1)$

پس فرآیند IIP نمی‌باشد.

مسئله 3

$W(t)=\int_0^t x(\alpha)\,d\alpha \quad , \quad x(t) \rightarrow$ zero mean stationary white gaussian process

$R_x(\tau)=N_0\delta(\tau) \quad , \quad W(t)\sim N(0,N_0 t) \qquad f_{W(t)}(w;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}}e^{-\frac{w^2}{2N_0 t}}$

$W(1) \rightarrow f_{W(1)}(w;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}e^{-\frac{w^2}{2N_0}} \qquad W(2) \rightarrow f_{W(2)}(w;t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi N_0}}e^{-\frac{w^2}{4N_0}}$

می‌دانیم که $W(1)$ و $W(2)$ مشترکاً نرمال خواهند بود (از آنجا که هر کدام نیز نرمال هستند). پس خواهیم داشت

$$f_{W(1),W(2)}(w_1,w_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{w_1}\sigma_{w_2}\sqrt{1-\rho_{w_1w_2}^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{w_1w_2}^2)}\left[\frac{(w_1-m_{w_1})^2}{\sigma_{w_1}^2}-\frac{2\rho_{w_1w_2}(w_1-m_{w_1})(w_2-m_{w_2})}{\sigma_{w_1}\sigma_{w_2}}+\frac{(w_2-m_{w_2})^2}{\sigma_{w_2}^2}\right]\right\}$$

$$\xrightarrow[\sigma_{w_1}=\sqrt{N_0},\ \sigma_{w_2}=\sqrt{2N_0}]{m_{w_1}=m_{w_2}=0} f_{w_1w_2}(w_1,w_2)=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi N_0\sqrt{1-\rho_{w_1w_2}^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{w_1w_2}^2)}\left[\frac{w_1^2}{N_0}-\frac{2\rho_{w_1w_2}w_1w_2}{\sqrt{2}N_0}+\frac{w_2^2}{2N_0}\right]\right\}$$

W_1: مشاهده، W_2: تخمین $\qquad W_{2\,MMSE}=E\{W_2|W_1\}$

درادامه چنین خواهیم داشت

$$f_{W_2|W_1}(w_2|w_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_2}^2(1-\rho_{w_1w_2}^2)}}\exp\left\{-\frac{\left(w_1-m_{w_1}-\rho_{w_1w_2}\frac{\sigma_{w_1}}{\sigma_{w_2}}(w_2-m_{w_2})\right)^2}{2\sigma_{w_1}^2(1-\rho_{w_1w_2}^2)}\right\}$$

$$\rightarrow E\{W_2|W_1\}=\int_{-\infty}^{\infty} w_2 f_{w_2|w_1}(w_2|w_1)\,dw_2 = m_{w_2}+\rho_{w_1w_2}\frac{\sigma_{w_2}}{\sigma_{w_1}}(w_1-m_{w_1})$$

علت که چنین رویکردی را در پیش گرفتیم این است که برای متغیرها تصادفی مشترکاً نرمال برای تخمین یکی بر حسب دیگری، بهترین راه استفاده از معیار LMMSE است. یعنی MMSE و LMMSE در نتیجه یکسان خواهد شد.

$$\hat{W}_{2\,MMSE}=\rho_{w_1w_2}\frac{\sigma_{w_2}}{\sigma_{w_1}}(W_1) \Rightarrow \hat{W}_{2\,MMSE}=\rho_{w_1w_2}\sqrt{2}(W_1)=\sqrt{2}\rho_{w_1w_2}(W_1)$$

با توجه به آنچه در درس دیدیم

$$\min J = E\{(s-ax-b)^2\}=\sigma_s^2+a^2\sigma_x^2-2a\,Cov(x,s)$$

$$\rightarrow \sigma_s^2+\frac{Cov^2(s,x)}{\sigma_x^4}\sigma_x^2-\frac{2\,Cov(s,x)}{\sigma_x^2}Cov(x,s) \Rightarrow MSE=\sigma_s^2(1-\rho_{sx}^2)$$

پس در این حالت ما خواهیم داشت:

$$MSE=\sigma_{W_2}^2(1-\rho_{w_1w_2}^2)$$

$\sigma_{W_2}^2=E\{W_2^2\}=E\{W_2W_2^*\}=R_W(2,2)=N_0\min(2,2)=2N_0$ باید $\rho_{w_1w_2}$ محاسبه شود.

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی
دکتر محمدرضا اخوت

تاریخ تحویل: 01/9/14

$$\sigma_{w_1}^2 = E\{W_1^2\} = E\{W_1 W_1^*\} = R_{W_1}(1,1) = N_0 \min(1,1) = N_0$$

$$\rho_{w_1 w_2} = \frac{Cov(w_1, w_2)}{\sigma_{w_1}\sigma_{w_2}}, \quad Cov(w_1,w_2) = E\{W_1W_2\} - E\{W_1\}E\{W_2\} = E\{W_1W_2\}$$

$$= R_W(1,2) = N_0 \min(1,2) = N_0, \quad \rho_{w_1w_2} = \frac{N_0}{\sqrt{N_0}\cdot\sqrt{2}\sqrt{N_0}} = \frac{N_0}{N_0\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \hat{W}_{2LMMSE} = \hat{W}_{2MMSE} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} W_1 = W_1 \rightarrow \hat{W}_{2MMSE} = W_1$$

$$MSE = \sigma_{w_2}^2(1-\rho_{w_1w_2}^2) = 2N_0(1-1/2) = N_0$$

مسئله ۱. می‌دانیم که $X(t)$ یک فرآیند مارکوف می‌باشد، همچنین $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$. می‌خواهیم اثبات کنیم برعکس فرآیند مارکوف از انتها نیز مارکوف است.

$$f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2,\dots,X(t_n)=x_n) = f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2)$$

طبق راهنمایی جناب آقای دکتر اخوت در کلاس درس، از تعریف احتمال شرطی ($P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$) و تعمیم آن به PDF استفاده خواهیم کرد.

$$f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2,\dots,X(t_n)=x_n) = \frac{f_{X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)}{f_{X(t_2)\dots X(t_n)}(x_2,\dots,x_n;t_2,\dots,t_n)}$$

مطابق آنچه در درس آموختیم در ادامه از خاصیت زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم.

$$f_{X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n) = f_{X(t_1)}(x_1;t_1)\, f_{X(t_2)|X(t_1)}(x_2|x_1;t_1,t_2)\,.$$

$$f_{X(t_3)|X(t_1),X(t_2)}(x_3|x_1,x_2;t_1,t_2,t_3)\dots f_{X(t_n)|X(t_1)\dots X(t_{n-1})}(x_n|x_1,\dots,x_{n-1};t_1,\dots,t_{n-1},t_n)$$

$$\rightarrow f_{X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = f_{X(t_1)}(x_1;t_1)\, f_{X(t_2)|X(t_1)}(x_2|x_1;t_1,t_2)\dots$$
$$f_{X(t_n)|X(t_{n-1})}(x_n|x_{n-1};t_{n-1},t_n)$$

پس از این سراغ مخرج عبارت بالا می‌رویم.

$$f_{X(t_2)\dots X(t_n)}(x_2,\dots,x_n;t_2,\dots,t_n) = f_{X(t_2)}(x_2;t_2)\, f_{X(t_3)|X(t_2)}(x_3|x_2;t_2,t_3)\dots$$
$$f_{X(t_n)|X(t_2)\dots X(t_{n-1})}(x_n|x_2,\dots,x_{n-1};t_2,\dots,t_{n-1},t_n)$$

$$\rightarrow f_{X(t_2)\dots X(t_n)} = f_{X(t_2)}(x_2;t_2)\, f_{X(t_3)|X(t_2)}(x_3|x_2;t_2,t_3)\dots f_{X(t_n)|X(t_{n-1})}(x_n|x_{n-1},t_{n-1},t_n)$$

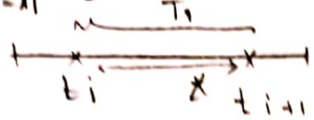
حال خواهیم داشت:

$$f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2,\dots,X(t_n)=x_n) = \frac{f_{X(t_1)}(x_1;t_1)\, f_{X(t_2)|X(t_1)}(x_2|x_1;t_1,t_2)}{f_{X(t_2)}(x_2;t_2)}$$

$$= f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2) \longrightarrow f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2,\dots,X(t_n)=x_n) = f_{X(t_1)}(x_1;t_1 \mid X(t_2)=x_2)$$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

مسأله 2. فرض می‌شود که $X(t)$ یک فرآیند پواسون با چگالی ثابت λ باشد. ما خواهیم که PDF را برای متغیر تصادفی $T_n = t_{i+n} - t_i$ محاسبه نماییم. برای این منظور ابتدا n را مساوی یک قرار داده و سپس به صورت زیر عمل کنیم. $n=1$



$$F_{T_1}(t) = P\{T_1 \le t\} = 1 - P\{T_1 > t\}$$

$$P\{T_1 > t\} = P\left\{\begin{array}{l}\text{تعداد نقاط فرآیند پواسون در بازه}\\ t_{i+1}, t_i \text{ صفر باشد}\end{array}\right\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

for $n=1 \rightarrow F_{T_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \rightarrow f_{T_1}(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} u(t)$

$f_{T_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ برای اینکه نتیجه تشویش نشود به جای t، x می‌گذاریم.

حال همین مسأله را برای n می‌خواهیم حل کنیم. برای این منظور روند دقیقاً یکسان است، صرفاً باید در بازه مذکور، n-1 نقطه پواسون رخ داده باشد. طبق آنچه در درس آموختیم داریم:

$$P(X=i) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}$$

$$F_{T_n}(x) = P\{T_n \le x\} = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad F_{T_n}(x) = 1 - \lambda^{n-1}x^{n-1}\frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

$$f_{T_n}(x) = \lambda^n x^{n-1}\frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!}u(x)$$

مسأله 8. (1.) $U(n), n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Sequence of Random Gaussian Variables.

if $t = n \in \mathbb{Z} \rightarrow X(t) = U(t)$, $U(t) \sim N(0,1)$, $X(t) \sim N(0,1)$

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bell- Shaped.

حال باید حالتی را بررسی کنیم که $t \neq n$ باشد، در این صورت طبق تعریف سوال، $X(t)$ به صورت یک ترکیب خطی از

$$X(t) = \underbrace{(1-a)U(n)}_{V_1} + \underbrace{aU(n+1)}_{V_2}, \quad a = t-n$$

U_n ، U_{n+1} خواهد بود بین

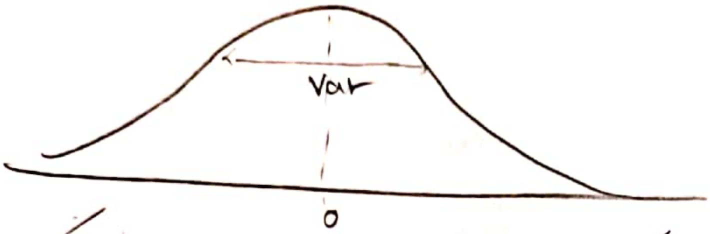
$\rightarrow t = n+a,$

مشخص است که $X(t)$ ترکیب خطی دو تا متغیر تصادفی نرمال است، لذا خودش نیز نرمال خواهد بود (طبق آنچه در آمار و احتمال خواندیم) و چگالی‌ها به صورت کانولوشن قابل نوشتن است.

$$f_X(x;t) = f_{V_1}(x) * f_{V_2}(x)$$

$\rightarrow X(t) \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad \sigma^2 = (1-a)^2 + a^2 = a^2 - 2a + 1 + a^2 = 2a^2 - 2a + 1$

اگر بخواهیم آن را رسم کنیم خواهیم داشت:



b.) برای WSS بودن یک فرآیند تصادفی باید میانگین آن وابسته به زمان نباشد و همچنین تابع خودهمبستگی آن تابعی از تفاضل آرگومان‌هایش باشد. میانگین که دست صفحه صفر است، پس باید فقط اتوکورلیشن را بررسی کنیم

$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\}$ $\quad X(t_1) = (1-a_1)U(n_1) + a_1 U(n_1+1)$

$X(t_2) = (1-a_2)U(n_2) + a_2 U(n_2+1)$ $\quad E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = E\{(1-a_1)(1-a_2)U(n_1)U(n_2)\}$

$+ E\{(1-a_1)a_2 U(n_1)U(n_2+1)\} + E\{a_1(1-a_2)U(n_1+1)U(n_2)\} + E\{a_1 a_2 U(n_1+1)U(n_2+1)\}$

در حالتی که $n_1 \neq n_2$ باشد عبارت فوق صفر خواهد شد حالتی را بررسی می‌کنیم که $n_1 \neq n_2$ پس خواهیم داشت:

$E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = (1-a_1)(1-a_2)E\{U^2(n_1)\} + a_1 a_2 E\{U^2(n_1+1)\}$

$= (1-a_1)(1-a_2) + a_1 a_2 \xrightarrow{a=t-n} (1-t_1-n_1)(1-t_2-n_1) + (t_1-n_1)(t_2-n_2)$

$\xrightarrow{n_1=n_2=n} R_X(t_1,t_2) = (1-t_1-n)(1-t_2-n) + (t_1-n)(t_2-n)$

$\rightarrow R_X(t_1,t_2) = 1 - t_2 - n - t_1 + t_1t_2 + t_1 n - n + n t_2 + n^2 + t_1 t_2 - n t_1 - n t_2 + n^2$

$\rightarrow R_X(t_1,t_2) = 1 - t_1 - t_2 - 2n + 2t_1t_2 + 2n^2 \neq R_X(t_1 - t_2)$

پس فرآیند $X(t)$ یک فرآیند WSS نمی‌باشد.

---

a.) $X(t) \rightarrow$ zero mean stationary, WSS Random process. $\quad$ مسئله 7.

$R_X(\tau) = \operatorname{sinc}^2(\tau)$ $\quad X_1 = X(0), \; X_2 = X(0.5) \quad X_3 = X(1)$

$Y = E\{X_3|X_2\} = m_{X_3} + \rho_{X_3X_2}\frac{\sigma_{X_3}}{\sigma_{X_2}}(X_2 - m_{X_2}) = \rho_{X_3X_2}\frac{\sigma_{X_3}}{\sigma_{X_2}}X_2$

$\sigma_{X_3}^2 = E\{X_3X_3\} = R_X(0) = 1$ $\quad$ دریافتیم در حالت گوسی تخمین MMSE و LMMSE معادل است.

$\sigma_{X_2}^2 = \sigma_{X_3}^2 = 1, \quad Cov(X_2,X_3) = E\{X_3X_2^*\} - E\{X_3\}E\{X_2^*\} = E\{X_3X_2\} - E\{X_3\}E\{X_2\}$

$\rightarrow Cov(X_2,X_3) = E\{X(1)X(0.5)\} = R_X(0.5) = \operatorname{sinc}^2(0.5)$

$\rightarrow \rho_{X_3X_2} = \frac{Cov(X_2,X_3)}{\sigma_{X_2}\sigma_{X_3}} = \operatorname{sinc}^2(0.5), \quad E\{X_3|X_2\} = \operatorname{sinc}^2(0.5)X_2$

7	تاریخ تحویل: 0/1/9/8	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

b.) $P\{|x_1+3y|>1\}$ $\quad Z = x_1+3y$ با توجه به اینکه Z ترکیب خطی از دو متغیر تصادفی گاوسی است، خودش نیز گاوسی خواهد بود.

$m_Z = m_{x_1}+3m_y = 0$, $\quad Var(Z) = Var(x_1)+9Var(y)+6Cov(x_1,y)$, $\quad Var(y) = sinc^4(0.5)Var(x_1) = sinc^4(0.5)$, $Var(x_1)=1$

$Cov(x_1,y) = E\{x_1y\} = E\{x(0)\,sinc^2(0.5)\,x(0.5)\} = sinc^4(0.5)$

$\rightarrow Var(Z) = 1+9sinc^4(0.5)+6sinc^4(0.5) = 1+16\,sinc^4(0.5)$, $\quad Z\sim N(0,\sigma_Z^2)$

$$P(|x_1+3y|>1) = P(|Z|>1) = P(Z>1)+P(Z<-1)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\left(\frac{(z-m_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right)} \rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}}$$

$$P(|Z|>1) = \int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}}dz + \int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}}dz$$

برای حل انتگرال‌های بدست آمده فوق، از مفاهیم G-function و Q-function استفاده کنیم.

Q-function: $Q(x) = \int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$, $\quad Q(x)+Q(-x)=1$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}}dz \overset{u=\frac{z}{\sigma_Z}}{=} \int_{\frac{1}{\sigma_Z}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = Q\left(\frac{1}{\sigma_Z}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2}}dz \overset{u=\frac{z}{\sigma_Z}}{=} \int_{-\infty}^{-1/\sigma_Z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \xrightarrow{u=-v} \int_{\frac{1}{\sigma_Z}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

$$= Q\left(\frac{1}{\sigma_Z}\right), \quad P(|Z|>1) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma_Z}\right) = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{1+16sinc^4(0.5)}}\right)$$

$$= 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{13.6793}}\right) = 2Q(0.27038) = 2\times 0.3934 = 0.7868$$

$$\longrightarrow P(|x_1+3y|>1) = 0.7868$$

c.) $Z_1(t) = x_1\cos(t)+x_3\sin(t)$ $\qquad Z_2(t) = x_1\sin(t)+x_3\cos(t)$

$m_{Z_1(t)} = E\{x_1\cos(t)+x_3\sin(t)\} = \cos t\,E\{x_1\}+\sin(t)\,E\{x_3\} = 0$

$m_{Z_2(t)} = E\{x_1\sin(t)+x_3\cos(t)\} = \sin(t)\,E\{x_1\}+\cos(t)\,E\{x_3\} = 0$

$R_{Z_1}(t_1,t_2) = E\{Z_1(t_1)Z_1^*(t_2)\} = E\{(x_1\cos(t_1)+x_3\sin t_1)(x_1\cos(t_2)+x_3\sin(t_2))\}$

$= \cos t_1\cos t_2\,E\{x_1^2\}+\cos t_1\sin t_2\,E\{x_1x_3\}+\sin t_1\cos t_2\,E\{x_1x_3\}+\sin t_1\sin t_2\,E\{x_3^2\}$

$\rightarrow R_{Z_1}(t_1,t_2) = \cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2 = \cos(t_1-t_2)$, $\quad R_{Z_1}(t_1,t_2) = \cos(t_1-t_2)$

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: فرآیندهای تصادفی تمرین سری پنجم	تاریخ تحویل: 8 / 9 / 0	8

$R_{Z_2}(t_1,t_2) = E\{Z_2(t_1)Z_2^*(t_2)\} = E\{(x_1\sin t_1 + x_3\cos t_1)(x_1\sin t_2 + x_3\cos t_2)\}$

$= \sin t_1\sin t_2\, E\{x_1^2\} + \sin t_1\cos t_2\, E\{x_1x_3\} + \cos t_1\sin t_2\, E\{x_1x_3\} + \cos t_1\cos t_2\, E\{x_3^2\}$

$\to R_{Z_1}(t_1,t_2) = \sin t_1\sin t_2 + \cos t_1\cos t_2 = \cos(t_1-t_2)\,,\ R_{Z_2}(t_1,t_2) = \cos(t_1-t_2)$

با توجه به مستقل بودن میانگین ها، این $R_{Z_1}(t_1,t_2), R_{Z_2}(t_1,t_2)$ هر دو تابعی از تفاضل هستند؛ می‌توان نتیجه گرفت که Z_1 و Z_2 به صورت مستقل از هم WSS خواهند بود. حال cross-correlation را به دست خواهیم آورد.

$R_{Z_1Z_2}(t_1,t_2) = E\{Z_1(t_1)Z_2(t_2)\}$

$= E\{(x_1\cos t_1 + x_3\sin t_1)(x_1\sin t_2 + x_3\cos t_2)\} = \cos t_1\sin t_2\, E\{x_1^2\} + \cos t_1\cos t_2\, E\{x_1x_3\}$

$+ \sin t_1\sin t_2\, E\{x_1x_3\} + \sin t_1\cos t_2\, E\{x_3^2\} = \cos t_1\sin t_2 + \sin t_1\cos t_2$

$\to R_{Z_1Z_2}(t_1,t_2) = \sin(t_1+t_2) \neq R_{Z_1Z_2}(t_1-t_2)$

پس فرآیندهای $Z_1(t), Z_2(t)$ به صورت مشترک WSS نمی‌باشند. اما هرکدام به صورت مستقل WSS است.

d.) $Z_3(t) = x_3 t + x_2$ طبق مطالب درس می‌دانیم هر ترکیب خطی از نرمال خودش نرمال می‌شود

$m_{Z_3} = E\{tx_3\} + E\{x_2\} = tE\{x_3\} + E\{x_2\}$ پس $Z_3(t)$ یک فرآیند نرمال می‌باشد.

$\to m_{Z_3} = 0,\quad Var(Z_3) = \sigma_{Z_3}^2 = E\{(tx_3+x_2)^2\} = E\{t^2x_3^2 + x_2^2 + 2tx_2x_3\}$

$= t^2E\{x_3^2\} + E\{x_2^2\} + 2tE\{x_2x_3\} = t^2+1+2t\,R(0.5) = t^2+1+2t\,\text{sinc}^2(0.5)$

$\to Z_3(t) \overset{\text{Normal Process}}{\sim} N(0,\ t^2+1+2t\,\text{sinc}^2(0.5))$

$$f_{Z_3}(z;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Z_3}^2}}\, e^{-\frac{(z-m_{Z_3})^2}{2\sigma_{Z_3}^2}},$$

$$\to f_{Z_3}(z;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2+2t\,\text{sinc}^2(0.5))}}\, e^{-\frac{z^2}{2(1+t^2+2t\,\text{sinc}^2(0.5))}}$$

e.) $W = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{2}),\quad Var(W) = ?\qquad Var(W) = E\{W^2\} - m_W^2 = E\{W^2\}$

$\to Var(W) = E\{[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k/2)]^2\} = E\{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x(i/2)x(j/2)\}$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\{x(i/2)x(j/2)\}$, we know $R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\}$

$\to Var(W) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_x(i/2 - j/2) \Rightarrow Var(W) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \text{sinc}^2(i/2 - j/2)$