سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی
تکلیف سری دوم

تاریخ تحویل: 2 / 8 / 01

مسئله ۱. می‌دانیم x, y متغیرهای تصادفی مشترک نرمال اند. a) $f_{xy}(x,y) \sim N(\eta_x, \eta_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho_{xy})$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-\eta_x)(y-\eta_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma_y^2} \right]\right\}$$

می‌خواهیم $f_{x|y}(x|y)$ ، $f_{y|x}(y|x)$ را پیدا کنیم. به این منظور داریم:

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

برای یافتن توزیع‌ها حاشیه‌ای، یک راه حل به انتگرال‌گیری می‌باشد.

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

امّا چون x, y مشترک نرمال هستند، پس x, y نیز هرکدام توزیع نرمال دارند. لذا داریم

$$x \sim (\eta_x, \sigma_x^2) \qquad y \sim (\eta_y, \sigma_y^2)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(x-\eta_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

حال توزیع‌های شرطی مطلوب را به دست می‌آوریم.

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-\eta_x)(y-\eta_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-\eta_y)^2}{2\sigma_y^2}}}$$

$$\Rightarrow f_{x|y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)}} \exp\left\{-\frac{[x-\eta_x-\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\eta_y)]^2}{2\sigma_x^2(1-\rho_{xy})^2}\right\}$$

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-\eta_x)(y-\eta_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

$$\Rightarrow f_{y|x}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(1-\rho_{xy}^2)}} \exp\left\{-\frac{[y-\eta_y-\rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\eta_x)]^2}{2\sigma_y^2(1-\rho_{xy})^2}\right\}$$

b) در این قسمت می‌خواهیم به محاسبه میانگین شرطی $E_{x|y}\{x|y=y\}$ ، پس واریانس شرطی $(E_{xy}\{x^2|y=y\}-(E_{xy}\{x|y=y\})^2)$ را محاسبه کنیم. در قسمت قبل به دست آوردیم که

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)}} \exp\left\{-\frac{[x-\eta_x-\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\eta_y)]^2}{2\sigma_x^2(1-\rho_{xy})^2}\right\}$$

به خاطر داریم که متغیر تصادفی گاوسی به صورت زیر است:

$$x \sim N(m_x, \sigma_x^2), \quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

پس برای محاسبه میانگین شرطی و واریانس شرطی نیازی به انتگرال‌گیری نداریم، چون که تابع چگالی شرطی خودش به صورت گاوسی درآمده است، با مقایسه آن با فرم کلی تابع گاوسی می‌توانیم بنویسیم.

$$m_{x|y} = E\{x|y=y\} = \eta_x + \rho_x\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\eta_y)^2 , \quad \sigma_{x|y}^2 = E\{x^2|y=y\} - (E\{x|y=y\})^2$$

$$\to \sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2(1-\rho_{xy})^2$$

با انتگرال‌گیری بسیار به دردسر می‌افتیم اما پاسخ یکسان است.

2	تاریخ تحویل: ۰۱/۸/۱۲	نام درس: سری ۲ فرایندهای تصادفی تکلیف سری ۲	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

ح) در اینجا می خواهیم اثبات کنیم که هر ترکیب خطی از X، Y $\begin{cases} Z = aX + bY \\ W = cX + dY \end{cases}$ نیز مشترکاً نرمال هستند

اثبات: $U = AZ + BW = A(aX + bY) + B(cX + dY) = \underbrace{(Aa + Bc)}_{a'}X + \underbrace{(Ab + Bd)}_{b'}Y$

$\longrightarrow U = a'X + b'Y \longrightarrow$ W, Z مشترکاً نرمال

ط.) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x>0,\ y>0 \\ 0 \end{cases}$ $\quad Cov(X,Y) = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$ - حساب 2N

$\longrightarrow E\{XY\} = \int_0^\infty\int_0^\infty x^2 y e^{-x(y+1)} dxdy = \int_0^\infty y \Big(\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-x(y+1)} dx}_{I} \Big) dy$

$I = \int_0^\infty x^2 e^{-x(y+1)} dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} U = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ e^{-x(y+1)}dx = dv \rightarrow v = -\dfrac{e^{-(y+1)x}}{y+1} \end{cases} \rightarrow I = \dfrac{-x^2 e^{-(y+1)x}}{y+1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dfrac{2xe^{-x(y+1)}}{y+1} dx$

$\rightarrow I = \int_0^\infty \dfrac{2xe^{-x(y+1)}}{y+1} dx = \dfrac{2}{y+1}\int_0^\infty xe^{-x(y+1)} dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} U = x \rightarrow du = dx \\ e^{-x(y+1)}dx = dv \rightarrow V = -\dfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1} \end{cases}$

$\rightarrow I = \dfrac{2}{y+1}\Big[\dfrac{-xe^{-x(y+1)}}{y+1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1} dx \Big] = \dfrac{2}{y+1}\int_0^\infty \dfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1} dx$

$= \dfrac{2}{(y+1)}\Big[-\dfrac{e^{-x(y+1)}}{(y+1)^2}\Big]_0^\infty = \dfrac{2}{(y+1)^3}$ ، $E\{XY\} = \int_0^\infty \dfrac{2y}{(y+1)^3} dy \xrightarrow{y+1 = u}$

$= 2\int_1^\infty \dfrac{u-1}{u^3} du = 2\int_1^\infty u^{-2} du - 2\int_1^\infty u^{-3} du = 2(-u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-2})_1^\infty = 2(\frac{1}{2}) = 1$

$\rightarrow E\{XY\} = 1$, برای به دست آوردن $E\{X\}$, $E\{Y\}$ نیازمند توزیع‌های حاشیه‌ای هستیم.

$f_X(x) = \int_{-\infty}^\infty f_{XY}(x,y)dy = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)} dy = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}dy = xe^{-x}\Big[-\frac{1}{x}e^{-xy}\Big]_0^\infty$

$\Rightarrow f_X(x) = e^{-x} \quad x>0 \qquad$ test $\int_{-\infty}^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$ ✓

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f_{XY}(x,y)dx = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx \overset{\text{بالا گفته شد}}{=} \dfrac{-xe^{-x(y+1)}}{y+1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1}dx$

$= \int_0^\infty \dfrac{e^{-x(y+1)}}{y+1}dx = \dfrac{-e^{-x(y+1)}}{(y+1)^2}\Big|_0^\infty = \dfrac{1}{(y+1)^2}$, $f_Y(y) = \dfrac{1}{(y+1)^2} \quad y>0$

test: $\int_{-\infty}^\infty f_Y(y)dy = \int_0^\infty \dfrac{1}{(y+1)^2}dy \overset{u=y+1}{=} \int_1^\infty \dfrac{1}{u^2}du = -u^{-1}\Big|_1^\infty = 1$ ✓

$E\{X\} = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\infty xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^\infty = 1$

$E\{Y\} = \int_{-\infty}^\infty y f_Y(y)dy = \int_0^\infty \dfrac{y}{(y+1)^2}dy = \infty \qquad Cov(X,Y) = 1 - 1\times\infty = -\infty$

$E\{XY\} = 1$ صورت مسئله احتمالاً به اشتباه $E\{XY\}$ تبدیل شده لذا

b.) $E_{X|Y}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$, $\quad f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} (y+1)^2 x e^{-x(y+1)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

$\rightarrow f_{X|Y}(x|y) = x(y+1)^2 e^{-x(y+1)} u(x)u(y)$, $\quad E_{X|Y}(X|Y=y) = \int_0^{\infty} x^2 (y+1)^2 e^{-x(y+1)}\,dx$

$= (y+1)^2 \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-x(y+1)}\,dx}_{\text{در بخش a محاسبه شد}} = (y+1)^2 \cdot \dfrac{2}{(y+1)^3} = \dfrac{2}{y+1}$, $\quad E_{X|Y}(X|Y=y) = \dfrac{2}{y+1}$

$$E_{X|Y}(X|Y=y) = \frac{2}{y+1}$$

c.) $E_{Y|X}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy \qquad f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} x e^{-xy} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

$\rightarrow f_{Y|X}(y|x) = x e^{-xy} u(x)u(y)$, $\quad E_{Y|X}(Y|X=x) = \int_0^{\infty} y x e^{-xy}\,dy = x \int_0^{\infty} y e^{-xy}\,dy \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$

$-y e^{-yx}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy = -\dfrac{1}{x} e^{-xy}\Big|_0^{\infty} = \dfrac{1}{x}$, $\quad E_{Y|X}(Y|X=x) = \dfrac{1}{x}$

d.) $E_{Y|X}\{X^2 Y | X=x\} = x^2 E_{Y|X}\{Y|X=x\} = x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x$

مسئله 4.

$X \sim N(\eta, \sigma^2) \qquad E\{\sin(aX)\} = ?$

برای حل این مسئله از تابع مشخصه کمک می‌گیریم.

$\Phi_X(w) = E\{e^{jwX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f_X(x)\,dx$

برای به دست آوردن تابع مشخصه، به دانسته‌ها خود از تبدیل فوریه

$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$

رجوع می‌کنیم. می‌دانیم که تبدیل فوریه یک تابع گاوسی به صورت مقابل است:

$f(x) \rightarrow \text{gaussian}$

$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jwx}\,dx = e^{-jw\eta} e^{-\frac{\sigma^2 w^2}{2}}$

می‌بینیم که این انتگرال با اعمال $w \rightarrow -w$ دقیقاً

همان انتگرالی می‌شود که $\Phi_X(w)$ را به ما می‌دهد. لذا داریم:

$\Phi_X(w) = e^{jw\eta} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 w^2}$

$\Phi_X(a) = E\{e^{jaX}\} = E\{\cos(aX)\} + jE\{\sin aX\}$

$E\{\sin aX\} = \operatorname{Im}\{\Phi_X(a)\} = \sin\eta a \; e^{-\frac{1}{2}a^2\sigma^2}$

مسئله 5.

$X \sim \text{Binomial}(n,p) \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\dots,n$

$E\left\{\dfrac{1}{X+1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \dfrac{1}{k+1} \overset{q=1-p}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ می‌دانیم: $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

$\rightarrow E\left\{\dfrac{1}{X+1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{p(n+1)}\binom{n+1}{k+1} p^{k+1} q^{n-k}$ می‌دانیم: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\rightarrow E\left\{\dfrac{1}{X+1}\right\} = \dfrac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+1}{k+1} p^{k+1} q^{n-k} = \dfrac{1}{p(n+1)}(1-q^{n+1}) \rightarrow E\left\{\dfrac{1}{X+1}\right\} = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$

4	تاریخ تحویل: ۰۱/ 8/2	نام درس: فرآیندهای تصادفی — تکلیف درسی ۴م	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

سوال 3 - a) $\{x_1, x_2, \ldots x_n \ldots\}$ دنباله متغیرهای تصادفی iid، $Z = \sum_{k=1}^{N} x_k$

با توجه به این که N خودش یک متغیر تصادفی است، باید از قضیه Iterated Expectations استفاده کنیم.

Iterated expectation theorem: $E\{x\} = E_z\{E_{x|z}\{x|z\}\}$

پس داریم $E\{e^{j\omega z}|N=i\} = E\{e^{j\omega(x_1+x_2+\cdots+x_i)}\} = E\{e^{j\omega x_1}\} \ldots E\{e^{j\omega x_i}\}$

$\overset{iid}{=} (E\{e^{j\omega x_1}\})^i = \Phi_{x_1}^i(\omega)$, $\Phi_z(\omega) = E\{e^{j\omega z}\} = E_N\{\underbrace{E\{e^{j\omega z}|N\}}_{\Phi_x^N(\omega)}\}$

$= E_N\{\Phi_x^N(\omega)\}$ و داریم: $\Gamma_x(z) = E\{z^n\}$, $E\{e^{j\omega z}\} = E_N\{\Phi_x^N(\omega)\} = \Gamma_N(\Phi_x(\omega))$

$\rightarrow \Phi_z(\omega) = \Gamma_N(\Phi_x(\omega))$

b) و داریم: $\frac{\partial^k}{\partial \omega^k}\Phi_x(\omega)\Big|_{\omega=0} = j^k E\{x^k\}$, $\rightarrow \frac{\partial}{\partial\omega}\Phi_z(\omega)\Big|_{\omega=0} = jm_z$

$\rightarrow m_z = -j\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi_z(\omega)\Big|_{\omega=0} \rightarrow m_z = -j\frac{\partial}{\partial\omega}\Gamma_N(\Phi_x(\omega))$

$\Gamma_N(\Phi_x(\omega)) = \sum_i [\Phi_x(\omega)]^i P\{N=i\}$, $m_z = -j\sum_i j\,i\,m_x P\{N=i\} = m_N m_x$

$Var(z) = E\{z^2\} - m_z^2$ $E\{z^2\} = -\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Phi_z(\omega)\Big|_{\omega=0} = -\sum[(-iE\{x^2\} + i(i-1)m_x^2)]$

$P\{N=i\} \rightarrow Var(z) = \sum_i iE\{x^2\}P(N=i) - \sum_i i m_x^2 P(N=i) + \sum_i i^2 m_x^2 P(N=i)$

$\rightarrow Var(z) = E\{x^2\}m_N - m_x^2 m_N + E\{N^2\}m_x^2 = \sigma_x^2 m_N + m_x^2 m_N - m_x^2 m_N + \sigma_N^2 m_x^2 + m_N^2 m_x^2$

$- m_x^2 m_N^2 \rightarrow Var(z) = \sigma_x^2 m_N + \sigma_N^2 m_x^2$

c) $N \sim Geom(P)$ x_i's $\sim N(\eta, \sigma^2)$ for N: $m_N = \frac{1}{P}$, $\sigma_N^2 = \frac{1-P}{P^2}$

با توجه به اثباتی که در بخش a کردیم، در حالت کلی داریم:

$\Phi_z(\omega) = \Gamma_N(\Phi_x(\omega))$

$\Phi_x(\omega) = E\{e^{j\omega x}\} \xrightarrow{\text{نرمال}} \Phi_x(\omega) = e^{j\omega\eta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$ در درس بیان شد.

$\Gamma_N(z) = E\{z^N\} = \sum_k z^k \underbrace{P(N=k)}_{P(1-P)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P\underbrace{(1-P)}_{q}^{k-1} = \sum_{k=1} z^k P q^{k-1}$

$= Pq^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} z^k q^k = \frac{P}{q}\cdot\frac{qz}{1-qz}$ $|qz|<1$, $\Gamma_N(z) = \frac{P}{q}\cdot\frac{qz}{1-qz}$ $|z| < 1/q$

$\rightarrow \Gamma_N(z) = \frac{Pz}{1-(1-P)z}$, $\Phi_z(\omega) = \Gamma_N(\Phi_x(\omega)) = \Gamma_N(e^{j\omega\eta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}) = \frac{P \cdot e^{j\omega\eta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}}{1-(1-P)e^{j\omega\eta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}}$

$m_z = m_N m_x = \frac{\eta}{P}$ برای به دست آوردن میانگین و واریانس، با توجه به قسمت b داریم:

$Var(z) = \sigma_z^2 = E\{z^2\} - m_z^2 = \frac{\sigma^2}{P} + \frac{\eta^2(1-P)}{P^2}$

5	تاریخ تحویل: 01 / 8 / 2	نام درس: فرآیندهای تصادفی (تکلیف سری دوم)	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 7.

a.) $Y_1=\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$ $\quad F_{Y_1}(y_1)=P(Y_1\leqslant y_1)=P(\max(X_1,\dots,X_n)\leqslant y_1)$

$$=P(X_1\leqslant y_1,\ X_2\leqslant y_1,\ \dots,\ X_n\leqslant y_1)\overset{\text{iid}}{=}P(X_1\leqslant y_1)P(X_2\leqslant y_1)\cdots P(X_n\leqslant y_1)$$

$$\Rightarrow F_Y(y_1)=[F_X(y_1)]^n \qquad f_{Y_1}(y_1)=\frac{\partial}{\partial y_1}F_{Y_1}(y_1)=n f_X(y_1)[F_X(y_1)]^{n-1}$$

b.) $Y_2=\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$, $F_{Y_2}(y_2)=P(Y_2\leqslant y_2)=P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)\leqslant y_2)$

$$=1-P(Y_2>y_2)=1-P(\min(X_1,X_2,\dots,X_n)>y_2)=1-P(X_1>y_2,X_2>y_2,\dots X_n>y_2)$$

$$=1-P(X_1>y_2).P(X_2>y_2).\cdots.P(X_n>y_2)=1-(1-F_X(y_2))^n$$

$$F_{Y_2}(y_2)=1-(1-F_X(y_2))^n\ ,\quad f_{Y_2}(y_2)=\frac{\partial}{\partial y_2}F_{Y_2}(y_2)=n f_X(y_2)[1-F_X(y_2)]^{n-1}$$

c.)

هیچ‌گونه دلیلی وجود ندارد که ما فرض کنیم Y_1، Y_2 مستقل هستند، لذا با تعریف CDF جلو می‌رویم:

$$F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=P(Y_1\leqslant y_1,\ Y_2\leqslant y_2)$$

بسته به اینکه y_1 بزرگ‌تر است یا y_2 دو حالت پیش می‌آید.

اگر $y_2<y_1 \Rightarrow F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=P(Y_1\leqslant y_1)-P(Y_2>y_2,\ Y_1\leqslant y_1)$

$$P(Y_2>y_2,\ Y_1\leqslant y_1)\overset{y_2<y_1}{=}P(\underset{\text{همه } i}{y_2<Y_i\leqslant y_1})=[F_X(y_1)-F_X(y_2)]^n$$

$$\rightarrow F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1)-[F_X(y_1)-F_X(y_2)]^n$$

اگر $y_1\geqslant y_2 \rightarrow P(Y_2>y_2,\ Y_1\leqslant y_1)=0 \rightarrow F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=F_{Y_1}(y_1)\xrightarrow{F_{Y_1}(y_1)=F_X^n(y_1)}$

$$\rightarrow F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}[F_X(y_1)]^n-(F_X(y_1)-F_X(y_2))^n & y_2<y_1\\ [F_X(y_1)]^n & y_2\geqslant y_1\end{cases}$$

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=\frac{\partial^2}{\partial y_1\,\partial y_2}F_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}n(n-1)f_X(y_1)f_X(y_2)[F_X(y_1)-F_X(y_2)]^{n-2} & y_2<y_1\\ 0 & y_2\geqslant y_1\end{cases}$$

پس در نهایت پاسخ مسئله به فرمت زیر ارائه می‌گردد.

$$f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}n(n-1)f_X(y_1)f_X(y_2)[F_X(y_1)-F_X(y_2)]^{n-2} & y_2<y_1\\ 0 & y_2\geqslant y_1\end{cases}$$

6	تاریخ تحویل: 01 / 8 / 2	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری دوم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

مسئله 6 . $0<p<1$, $k\geq 1$

a.) $\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \rightarrow$ i.i.d $\quad P\{X_i=k\} = -\dfrac{(1-p)^k}{k\log p}$

PGF of X_i? داریم: $\Gamma_X(z) = E\{z^X\} = \sum_{i=1}^{\infty} z^i P(X=i)$

$$\rightarrow \Gamma_X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} -z^i \frac{(1-p)^i}{i\log p} = \frac{-1}{\log p}\sum_{i=1}^{\infty} z^i \frac{(1-p)^i}{i} \quad \underline{1-p=q} \quad \frac{-1}{\log p}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z^i q^i}{i}$$

سیگما حاصل شبیه بسط تیلور با مقدار ، با مراجعه به جدول بسط های مکلوران معروف داریم:

$$\begin{cases}\log(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i}(-1)^{i+1} \\ \log(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i} \quad * \end{cases}$$

از رابطه * استفاده خواهیم کرد.

$$\rightarrow \Gamma_X(z) = \frac{+1}{\log p}\log(1-qz) = \frac{1}{\log p}\log(1-(1-p)z)$$

b.) $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$, $N \sim$ Poisson(λ), independent of X_i for $i=1,2,\dots$

$$\Gamma_Y(z) = E\{z^Y\} = \sum_{i=1}^{\infty} y^i \underbrace{P(Y=x^i)}_{\text{محاسبه آن سخت است.}}$$

$\Gamma_Y(z) = E_N\{E\{z^Y|N\}\} = E_N\{E\{z^{\sum_{k=1}^{N}X_k}|N\}\}$ از قضیه iterated expectation استفاده می‌کنیم.

$E\{z^{\sum_{k=1}^{N}X_k}\} = E\{z^{X_1}\}E\{z^{X_2}\}\dots E\{z^{X_N}\} = (\Gamma_X(z))^N$ با توجه به استقلال X ها از یکدیگر داریم

$$\rightarrow \Gamma_Y(z) = E_N\{(\Gamma_X(z))^N\} = \Gamma_N(z)\Big|_{z=\Gamma_X(z)} \rightarrow \Gamma_Y(z) = \Gamma_N(\Gamma_X(z))$$

$$\rightarrow \Gamma_Y(z) = e^{\lambda\left(\frac{1}{\log p}\log(1-(1-p)z) - 1\right)} \rightarrow \Gamma_Y(z) = e^{\lambda\left(\frac{\log(1-(1-p)z)-\log p}{\log p}\right)}$$