1	تاریخ تحویل: 01 / 8 / 24	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری چهارم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

تمرین 2

(a.) $X_n(\omega)=e^{-n\omega}$, $n\geq 1$ $\quad \omega=0 \to X_1(0)\ X_2(0) \dots X_n(0) \to 1$ همگرا به 1

$0<\omega\leq 1 \to X_n(\omega)=e^{-n\omega}$ $\quad e^{-\omega}, e^{-2\omega}, \dots, e^{-n\omega}$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n\omega}=0$ همگرا به 0

$P(0<\omega\leq 1)=1-0=1$, تعریف می‌کنیم: $X(\omega)=0$ for all $\omega\in[0,1]$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} X_n \to X \quad 0<x\leq 1$

$X_n \xrightarrow{a.e} X$

پس $X_n(\omega)$ به صورت تقریبا همه جا به X همگرا می‌باشد. پس به مفاهیم احتمال و توزیع نیز به X همگرا خواهد بود. حال باید همگرایی به صورت میانگین مربعات را بررسی کنیم.

$\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n-X|^2\} \overset{?}{=} 0$

$$E\{|X_n-X|^2\}=E\{|X_n|^2\}=\int_0^1 e^{-2n\omega}d\omega=\frac{-1}{2n}e^{-2n\omega}\Big|_0^1=\frac{1}{2n}(1-e^{-2n})$$

$$\to \lim_{n\to\infty} E\{|X_n-X|^2\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-e^{-2n}}{2n}\right)=0 \qquad X_n \xrightarrow{m.s} X$$

(b.) $X_n(\omega)=\sin(\omega+\frac{1}{n})$, $n\geq 1$ $\quad \omega=0 \to X_n(0)=\sin(\frac{1}{n})$, $X_1(0)\ X_2(0) \dots X_n(0)$: $\sin(1)\ \sin(0.5) \dots \sin(1/n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(1/n)=0$ همگرا به 0 $\quad 0<\omega\leq 1 \to X_n(\omega)=\sin(\omega+1/n)=\sin\omega\cos\frac{1}{n}$

$+\sin\frac{1}{n}\cos\omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(\omega)\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\cos\omega)=\sin(\omega)$

دقت شود که برای حالت $\omega=0$ نیز می‌توانیم ادعا کنیم که به $\sin\omega$ همگرا شده‌ایم. پس در اینجا همگرایی به صورت همه جا داریم. پس همگرایی تقریبا همه جا، همگرایی در احتمال و همگرایی در توزیع نیز نتیجه می‌شود. به بررسی همگرایی به صورت میانگین مربعات خواهیم پرداخت.

$$E\{|X_n-X|^2\}=E\{(\sin(\omega+\tfrac{1}{n})-\sin(\omega))^2\}$$

$$=E\{(\sin\omega\cos\tfrac{1}{n}+\sin\tfrac{1}{n}\cos\omega-\sin\omega)^2\}=E\{(\sin\omega(\cos\tfrac{1}{n}-1)+\sin\tfrac{1}{n}\cos\omega)^2\}$$

$$=E\{\underbrace{\sin^2\tfrac{1}{n}\cos^2\omega}_{E_1}+\underbrace{2\sin\tfrac{1}{n}\cos\omega\sin\omega(\cos\tfrac{1}{n}-1)}_{E_2}+\underbrace{\sin^2\omega(\cos\tfrac{1}{n}-1)^2}_{E_3}\}$$

$$=E\{\sin^2\tfrac{1}{n}\cos^2\omega+\sin\tfrac{1}{n}\sin 2\omega(\cos\tfrac{1}{n}-1)+\sin^2\omega(\cos\tfrac{1}{n}-1)^2\}=E_1+E_2+E_3$$

$$=\sin^2\tfrac{1}{n}\int_0^1\cos^2\omega\, d\omega+\sin\tfrac{1}{n}(\cos\tfrac{1}{n}-1)\int_0^1\sin 2\omega\, d\omega+(\cos\tfrac{1}{n}-1)^2\int_0^1\sin^2(\omega)$$

$$=\sin^2\tfrac{1}{n}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sin 2}{4}\right]+\sin\tfrac{1}{n}(\cos\tfrac{1}{n}-1)\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{\cos 2}{2}\right]+(\cos\tfrac{1}{n}-1)^2\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sin 2}{4}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\tfrac{1}{n}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sin 2}{4}\right]+\lim_{n\to\infty}\sin\tfrac{1}{n}(\cos\tfrac{1}{n}-1)\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{\cos 2}{2}\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}(\cos\tfrac{1}{n}-1)^2\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sin 2}{4}\right]=0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{m.s} X$$

2	تاریخ تحویل: 01/ 8 /24	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری چهارم	سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472

c.) $X_n(\omega)=\cos^n(\omega),\ n\geq 0$ $\quad \omega=0,\ X_n(0)=1$ ، همگرایی به 1 $\quad 0<\omega\leq 1 \to X_n(\omega)=\cos^n(\omega)$

$\cos 1\leq \cos^n(\omega)<1 \longrightarrow \cos 1\leq X_n(\omega)<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\omega)=0$ با توجه به کران $X_n(\omega)$

$P\{0\leq\omega\leq 1\}=1$ ، تعریف می‌کنیم $X(\omega)=0$ for all $\omega\in[0,1]$ $\quad X_n(\omega)\xrightarrow{a.e.} X$

همگرایی به صورت تقریباً همه جا داریم. پس همگرایی به صورت احتمال، توزیع نیز نتیجه می‌شود. حال باید همگرایی به صورت میانگین مربعات را بررسی کنیم.

$E\{|X_n-X|^2\}=E\{|X_n|^2\}=E\{\cos^{2n}(\omega)\}$

$=\int_0^1 \cos^{2n}(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(\omega)\Big|_0^1=\frac{1}{2n+1}[\cos^{2n+1}1-1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos^{2n+1}1-1}{2n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=0$, $X_n\xrightarrow{m.s.}X$

مسئله 5.

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\longrightarrow$ i.i.d $\quad X_i\sim \text{Uniform}(0,1)$, $Y_n=n(1-\max(X_1,X_2,\dots,X_n))$ $\quad n=1,2,\dots$

$Y\sim\exp(\lambda)$, $f_Y(y)=e^{-y}u(y)$ $\quad \lambda=1$ $\qquad$ Prove: $Y_n\xrightarrow{d}Y$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}F_{Y_n}(y)\longrightarrow F_Y(y)$

$F_{Y_n}(y)=P(Y_n\leq y)=P(n(1-\max(X_1,X_2,\dots,X_n))\leq y)=P(\max(X_1,X_2,\dots,X_n)\geq 1-y/n)$

اینجا یک متغیر تصادفی $W=\max(X_1,\dots,X_n)$ تعریف خواهیم کرد. درباره PDF ، CDF آن داریم:

$F_W(w)=P(W\leq w)=P(\max(X_1,\dots,X_n)\leq w)=P(X_1\leq w, X_2\leq w,\dots,X_n\leq w)$

$=P(X_1\leq w)P(X_2\leq w)\cdots P(X_n\leq w)=[F_X(w)]^n$, $F_W(w)=F_X^n(w)$

$f_W(w)=\frac{\partial}{\partial w}F_W(w)=nF_X^{n-1}(w)f_X(w)$

حال به حل مسئله برمی‌گردیم.

$F_{Y_n}(y)=P(W\geq 1-y/n)=1-P(W<1-y/n)$

$\Rightarrow F_{Y_n}(y)=1-F_X^n(1-y/n)$ $\quad$ we know: $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\leq x\leq 1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

برای حالتی که آرگومان $F_{Y_n}(y)$ از صفر کمتر باشد یعنی $y<0$ قطعاً $F_X(1-y/n)$ آرگومان بزرگتر از 1 دارد لذا $F_{Y_n}(y)=0$ می‌شود. برای حالتی که $y\geq 0$ باشد نیز $1-y/n$ مقداری بین 0 تا 1 دارد، برای این حالت خواهیم داشت:

$F_{Y_n}(y)=1-(1-y/n)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_{Y_n}(y)=\lim\limits_{n\to\infty}[1-[1-y/n]^n]=1-e^{-y}$ for $y\geq 0$

$\to \lim\limits_{n\to\infty}F_{Y_n}(y)=(1-e^{-y})u(y)$, $\quad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{y}e^{-y}u(y)\,dy=\int_0^y e^{-y}\,dy$

$=1-e^{-y}$, $y\geq 0\to F_Y(y)=(1-e^{-y})u(y)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_{Y_n}(y)=F_Y(y)$

$\longrightarrow Y_n\xrightarrow{d}Y$

Scanned by CamScanner

سروش مس‌فروش مشهد شماره دانشجویی: 810198472	نام درس: فرآیندهای تصادفی تکلیف سری چهارم	تاریخ تحویل: 01 / 8 / 24	3

مسئله 3.

a.) $f_{X_n}(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\left(x-\frac{n-1}{n}\sigma\right)^2\right] + \frac{1}{n}\sigma\exp(-\sigma x)u(x)$

m.s ? , $\lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0$? , $E\{|X_n - X|^2\} = E\{X_n^2\} - 2E\{X_n X\} + E\{X^2\}$

$= E\{X_n^2\} - 2E\{X_n\}E\{X\} + E\{X^2\}$ چون نمی‌توانیم عبارت فوق را ساده کنیم، پس حد می‌گیریم، بسیار زشت می‌شود، لذا حدگیری را از اینجا وارد بازی می‌کنیم

$\lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = \lim_{n\to\infty} E\{X_n^2\} - 2\lim_{n\to\infty} E\{X_n\}E\{X\}$

$+ \lim_{n\to\infty} E\{X^2\} = \lim_{n\to\infty} E\{X_n^2\} - 2E\{X\}\lim_{n\to\infty} E\{X_n\} + E\{X^2\}$ X متغیر تصادفی نرمال با میانگین σ و واریانس σ^2 است پس داریم:

$\lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 2\sigma^2 - 2\sigma^2 + 2\sigma^2 = 2\sigma^2 \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 2\sigma^2 \neq 0$ همگرایی به صورت میانگین مربعات نداریم.

b.) $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$? or $\lim_{n\to\infty} P(|X_{n+k} - X_n|) = 0 \quad \forall k>0$

Markov: $P(|X_n - X| > \epsilon) = P(|X_n - X|^2 > \epsilon^2) \leq \frac{E\{|X_n - X|^2\}}{\epsilon^2} \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{2\sigma^2}{\epsilon^2}$

$\longrightarrow$ همگرایی در احتمال نداریم.

c.) $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x) \xrightarrow{\text{معادل}} \lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) \longrightarrow f_X(x)$

$\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\frac{n-1}{n}\sigma\right)^2\right\} + \frac{1}{n}\sigma\exp(-\sigma x)u(x)$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{(x-\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\} \sim N(\sigma, \sigma^2) \quad , \quad X_n \xrightarrow{d} X$

مسئله 7.

a.) $F_{X_n}(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$, $x=-\infty \to F_{X_n}(x) = 0 \longrightarrow F_X(x) = 0$

$F_X(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}}{e^{nx}} = 1$, $F_X(x) = 1$, می‌شود اما چرا که $F_X(x)$ ویژگی‌ها

ناظر بر ... یک CDF را دارد. به ازای $x>0$ مقدار 1 را اختیار می‌کند به ازای $x<0$ هم مقدار آن مشخص است، ویژگی از

if $x<0$, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) = 0$

CDF بودن نقض نمی‌شود.

b.)

در صورتی که ندانیم داریم به چه چیزی همگرا می‌شویم. از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$\lim_{n\to\infty}(F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x)) \longrightarrow 0$? $\forall k>0$, $\lim_{n\to\infty}(F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x))$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{(n+k)x}}{1+e^{(n+k)x}} - \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{(n+k)x}(1+e^{nx}) - e^{nx}(1+e^{(n+k)x})}{(1+e^{(n+k)x})(1+e^{nx})}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}.e^{kx} + e^{2nx}.e^{kx} - e^{nx} - e^{2nx}.e^{kx}}{(1+e^{nx}.e^{kx})(1+e^{nx})} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}.e^{kx} - e^{nx}}{(1+e^{nx}.e^{kx})(1+e^{nx})} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}(e^{kx}-1)}{(1+e^{nx}e^{kx})(1+e^{nx})}$$

$= 0$. $\lim_{n\to\infty} (F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x)) = 0 \quad \forall x<0$. $X_n \xrightarrow{d} X$ پس همگرایی در توزیع برقرار است

متغیر تصادفی X را به گونه‌ای تعریف می‌نماییم که باشد: $X: F_X(x) = 1 \quad x>0$, $F_X(x) = 0 \quad x<0$

مسئله 6. $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ independent Gaussian, $m_{w_i}=0$, $Var(w_i) = \sigma^2 > 0$

$X_k = \frac{1}{2}(X_{k-1} + w_k)$, $X_0 = 0$, $X_1 = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}w_1 \rightarrow X_1 = \frac{1}{2}w_1$

$X_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_2$, $X_3 = \frac{1}{2}X_2 + w_3 = \frac{1}{8}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3$

$$\longrightarrow X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i$$

حال به بررسی همگرایی ها خواهیم پرداخت.

$m.s: \lim_{n\to\infty} E\{|X_{n+k} - X_n|^2\} \longrightarrow 0 ?$ چون نمی‌دانیم به چه همگرا می‌شود از شرط کوشی استفاده می‌کنیم

$$E\{|X_{n+k} - X_n|^2\} = E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-j+1} w_i w_j\right\} + E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} w_i w_j\right\}$$

$$-2E\left\{\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} w_i w_j\right\} = \sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-j+1} E\{w_i w_j\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} E\{w_i w_j\} - 2\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} E\{w_i w_j\}$$

پس با توجه به این نکته‌ها و حساب: $E\{w_i w_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E\{w_i^2\} = \sigma^2 & i=j \end{cases}$: می‌دانیم

$$E\{|X_{n+k} - X_n|^2\} = \sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+k-i+1)}\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-i+1)}\sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-i+1)}\sigma^2$$

که در این summation به ازای $i=n+1$ تا $i=n+k$ چون $E\{w_iw_j\}$ صفر می‌شد از آن ها صرف نظر کردیم.

$$\lim_{n\to\infty} E\{|X_{n+k} - X_n|^2\} = \sigma^2 \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+k-i+1)} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-i+1)}\right)$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+k+1}\sum_{i=1}^{n+k} 4^i - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} 4^i\right] \neq 0$$

همگرایی در m.s نداریم.

حال به بررسی همگرایی در احتمال خواهیم پرداخت.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|x_{n+k} - x_n| \geq \epsilon\} \to 0 ? \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n+k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i \geq \epsilon\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n+k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i \geq \epsilon\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1-i}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}-1\right)w_i + \sum_{i=n+1}^{n+k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\right.$$

$$\left.\geq \epsilon\right) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} P\{|x_{n+k} - x_n| \geq \epsilon\} \neq 0 \longrightarrow$$ همگرایی در احتمال نیز نداریم.

- بررسی همگرایی در توزیع می‌پردازیم:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i$$

در درس آمار و احتمال مهندسی دیدیم که جمع متغیرهای تصادفی گاوسی خود نیز گاوسی خواهد بود، لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$m_{x_n} = 0 \quad E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i\right\} = 0, \quad \text{if}: Z = a x_1 + b x_2 + \dots + z x_n \quad x_i \text{ gaussian and independent}$$

$$\longrightarrow Var(Z) = a^2 Var(x_1) + b^2 Var(x_2) + \dots + z^2 Var(x_n)$$

$$\to Var(x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-i+1}\right)^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-2n} \cdot 2^{2i} \longrightarrow$$

$$Var(x_n) = 2^{-2n}\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)\sigma^2 = \frac{-2^{-2n}}{3}(1-4^n)\sigma^2$$

$$\to x_n \sim \left(0, -\frac{4^{-n}}{3}(1-4^n)\sigma^2\right) \lim_{n\to\infty} Var(x_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3}(4^{-n}-1)\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{3}\right)$$ پس x_n هنگامی که $n\to\infty$ به یک متغیر

$$x_n \xleftrightarrow{d} x$$ تصادفی گوسی با میانگین ۰، واریانس $\sigma^2/3$ همگرا می‌شود لذا داریم:

مسئله ۱.

a.) $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \to$ i.i.d Random Variables, $Z_k \sim N(0, 1)$

$$x_k = 0.5\, x_{k-1} + Z_k \qquad x_0 \perp \text{all } Z_k$$

$$x_1 = 0.5\, x_0 + z_1, \quad x_2 = 0.5\, x_1 + z_2 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}z_1 + z_2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}x_2 + z_3 = \frac{1}{8}x_0 + \frac{1}{4}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + z_3$$

$$x_k = f(x_0, z_1, \dots, z_k) = \frac{1}{2^k}x_0 + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} z_i$$

$\longrightarrow x_k = \frac{1}{2^k} x_0 + \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{2})^{k-i} z_i$

به سادگی می توانیم استنتاج کنیم اگر x_0 را گاوسی بگیریم، با توجه به این که z_i ها نیز گاوسی بوده، از هم مستقل اند و از x_0 هم مستقل خواهند بود. لذا x_k ها نیز دارای توزیع یکسان و نرمال خواهند بود.

$m_{x_k} = E\{x_k\} = \frac{1}{2^k} E\{x_0\} + \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{2})^{k-i} \underbrace{E\{z_i\}}_{0} \Rightarrow m_{x_k} = \frac{1}{2^k} E\{x_0\}$

$Var(x_k) = \sigma_{x_k}^2 = E\{x_k^2\} - m_{x_k}^2$. به محاسبه $E(x_k^2)$ خواهیم پرداخت.

$E(x_k^2) = E\{[(\frac{1}{2})^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{2})^{k-i} z_i]^2\} = E\{(\frac{1}{2})^k x_0 + (\frac{1}{2})^{k-1} z_1 + (\frac{1}{2})^{k-2} z_2$

$+ \dots + z_k)^2\}$ یادآوری: $E\{x_0 z_i\} \stackrel{\text{استقلال}}{=} E\{x_0\} E\{z_i\} = 0, \quad E\{z_i z_j\} = 0 \quad i \neq j$

$E\{z_i^2\} = 1$

$\longrightarrow E(x_k^2) = (\frac{1}{2})^{2k} E\{x_0^2\} + (\frac{1}{2})^{2(k-1)} E\{z_1^2\} + \dots + (\frac{1}{4}) E\{z_{k-1}^2\} + (\frac{1}{4})^0 E\{z_k^2\}$

$\longrightarrow E(x_k^2) = (\frac{1}{4})^k E(x_0^2) + (\frac{1}{4})^{k-1} + \dots + \frac{1}{4} + 1 \longrightarrow$

$E(x_k^2) = (\frac{1}{4})^k E(x_0^2) + \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{1}{4})^i = (\frac{1}{4})^k E(x_0^2) + \frac{1-(\frac{1}{4})^k}{3/4} = (\frac{1}{4})^k E(x_0)^2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1}$

$= (\frac{1}{4})^k E(x_0^2) + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1} + (\frac{1}{4})^k E(x_0^2)$

$\longrightarrow E(x_k^2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{k-1} + (\frac{1}{4})^k E(x_0^2)$

برای این که همه متغیرهم توزیع شود فرض زیر را می کنیم

$m_{x_0} = E\{x_0\} = 0 \longrightarrow E\{x_k\} = m_{x_k} = 0$

$E(x_0^2) = \sigma_{x_0}^2 = \frac{4}{3} \longrightarrow \sigma_{x_k}^2 = \frac{4}{3} \longrightarrow x_k \sim N(0, \frac{4}{3}) \quad k = 1, 2, \dots$

$x_0 \sim N(0, 4/3)$

$x_1 = \frac{1}{2} x_0 + z_1 \longrightarrow m_{x_1} = 0, \quad Var(x_1) = \sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{z_1}^2 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ ✓

$x_2 = \frac{1}{4} x_0 + \frac{1}{2} z_1 + z_2 \longrightarrow m_{x_2} = 0, \quad Var(x_2) = \sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{16} \sigma_{x_0}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2 = \frac{4}{3}$ ✓

$x_0 \sim N(0, 4/3)$ پس توانستیم کاری کنیم که x_k ها توزیع یکسان شوند.

b.) $E\{x_{n+k} x_k\} = E\{(\frac{1}{2} x_{n+k-1} + z_{n+k}) x_k\} = \frac{1}{2} E\{x_{n+k-1} x_k\}$

$+ E\{x_k z_{n+k}\} = \frac{1}{2} E\{x_{n+k-1} x_k\} = \frac{1}{2} E\{(\frac{1}{2} x_{n+k-2} + z_{n+k-1}) x_k\}$

$= \frac{1}{4} E\{x_{n+k-2} x_k\}$ مشاهده می شود که یک حالت loop ما شاهد داریم، هر بار ضریب $\frac{1}{2}$

سروش مس‌فروش مشهد
شماره دانشجویی: 810198472

نام درس: فرآیندهای تصادفی
تکلیف سری چهارم

تاریخ تحویل: ۰۱/۸/۲۴

پشت سر E ها ظاهر خواهند شد. لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$E\{X_{n+k}X_k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n E\{X_k^2\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

مسئله ۴. در درس اثبات کردیم که همگرایی در مفهوم m.s به ما همگرایی در مفهوم احتمال را نتیجه می‌دهد. این اثبات به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$X_n \xrightarrow{m.s} X, \quad \lim_{n\to\infty} E\{(X_n-X)^2\} \longrightarrow 0$$

$$X_n \xrightarrow{P} X, \quad \forall \epsilon>0 \quad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|>\epsilon\} \longrightarrow 0$$

$$P(|X_n-X|>\epsilon) = P(|X_n-X|^2>\epsilon^2) \leq \frac{E\{|X_n-X|^2\}}{\epsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|^2>\epsilon^2) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{E\{|X_n-X|^2\}}{\epsilon^2} = 0$$

$$\to \lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\epsilon) \leq 0 \to 0$$

در این مسئله می‌خواهیم عکس این موضوع را با شرایط خاص حساب کنیم.

$\int f_{X_n}(x) = 0$ for all $n>N$, $|x|>x_0$ and for some $N>0$

داریم: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\epsilon)=0$ or $\lim_{n\to\infty} P(|X_{n+k}-X_n|>\epsilon)=0$

We must show: $\lim_{n\to\infty} E\{|X_n-X|^2\}=0$ or $\lim_{n\to\infty} E\{|X_{n+k}-X_n|^2\}=0$

در اینجا η یک ثابت مستقل از n می‌باشد. فرض کنیم: $P(|X_n|<\eta)=1$

$$E\{|X_n-X|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}|X_n-X|^2 \xrightarrow[\text{دلخواه}]{\epsilon>0} \int_{|X_n-X|>\epsilon}|X_n-X|^2 + \int_{|X_n-X|\not>\epsilon}|X_n-X|^2$$

$$\leq \int_{|X_n-X|>\epsilon}|X_n-X|^2 + \ \leq P(|X_n-X|>\epsilon)\cdot 4\eta^2+\epsilon^2 \longrightarrow \epsilon^2$$

$$\epsilon\to 0 \to \lim_{n\to\infty} E\{|X_n-X|^2\} \longrightarrow 0 \to X_n \xrightarrow{m.s} X$$

QED