دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

# مخابرات بی‌سیم

دکتر صباغیان

# تمرین کامپیوتری دوم

سروش مس‌فروش مشهد

ش.د:۸۱۰۱۹۸۴۷۲

بهار ۰۲

# فهرست مطالب


**۱ بخش اول: کانال باند باریک ۴**

۱.۱ پرسش ۱ . . . . . ۴

۱.۱.۱ الف . . . . . ۴

۲.۱.۱ ب . . . . . ۴

۳.۱.۱ ج . . . . . ۵

۲.۱ پرسش ۲ . . . . . ۶

۱.۲.۱ الف . . . . . ۶

۲.۲.۱ ب . . . . . ۸

۳.۲.۱ ج . . . . . ۹

۳.۱ پرسش ۳ . . . . . ۱۰

۱.۳.۱ الف . . . . . ۱۰

۲.۳.۱ ب . . . . . ۱۱

۳.۳.۱ ج . . . . . ۱۳

۴.۱ پرسش ۴ . . . . . ۱۳

۱.۴.۱ الف . . . . . ۱۳

۲.۴.۱ ب . . . . . ۱۶

۵.۱ پرسش ۵ . . . . . ۱۷

۱.۵.۱ الف . . . . . ۱۷

۲.۵.۱ ب . . . . . ۱۷

۶.۱ پرسش ۶ . . . . . ۲۰

۱.۶.۱ الف . . . . . ۲۰

۲.۶.۱ ب . . . . . ۲۰

۳.۶.۱ ج . . . . . ۲۲

**۲ بخش دوم: کانال فرکانس گزین ۲۲**

۱.۲ پرسش ۱ . . . . . ۲۲

۲.۲ پرسش ۲ . . . . . ۲۳

۳.۲ پرسش ۳ . . . . . ۲۳

۴.۲ پرسش ۴ . . . . . ۲۳

۵.۲ پرسش ۵ . . . . . ۲۵
۶.۲ پرسش ۶ . . . . . ۲۷
۷.۲ پرسش ۷ . . . . . ۲۸
۸.۲ پرسش ۸ . . . . . ۳۰

# ۱ بخش اول: کانال باند باریک

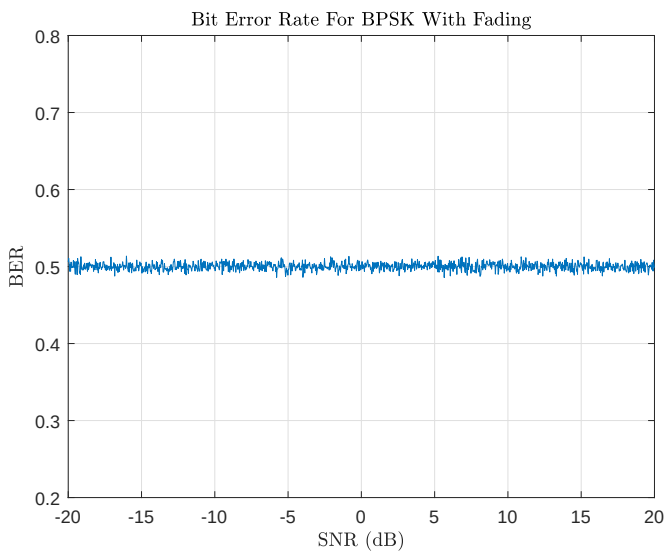
توجه شما را به فرمولاسیون مساله که به شکل زیر است جلب می‌کنم.

$$y[m] = h[m]x[m] + w[m], \quad w[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0), \quad h[m] \sim \mathcal{CN}(0, 1)$$

## ۱.۱ پرسش ۱

### ۱.۱.۱ الف

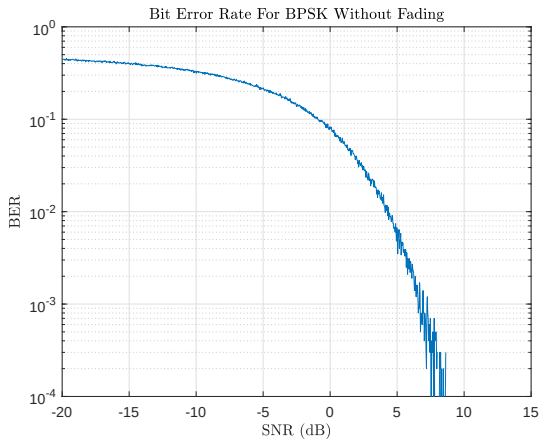
در این قسمت با BPSK طرف هستیم و داده‌هایی که ارسال شه است به شکل $x[m] = \pm a$ هست که من $a = 1$ در نظر گرفتم. با توجه به وجود محوشدگی انتظار داریم که نمودار حول $0.5$ نوسان کند(چون BPSK است.)



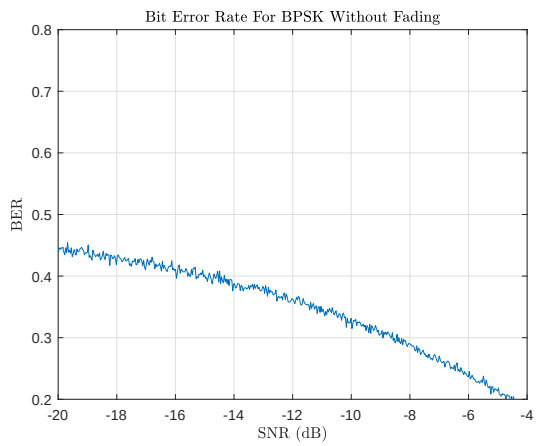

شکل ۱: احتمال خطا برای BPSK با محوشدگی

### ۲.۱.۱ ب

در این قسمت اثر محوشدگی را حذف می‌کنیم، منطقا باید BER در ازای بزرگ شدن نسبت سیگنال به نویز کم شود که چنین نیز می‌شود.




شکل ۲: احتمال خطا برای BPSK بدون محوشدگی




شکل ۳: احتمال خطا برای BPSK بدون محوشدگی

### ۳.۱.۱ ج

در قسمت ب عملا کانال را از بین بردیم، لذا تنها چیزی که در محاسبه احتمال خطا برای ما مهم است جز حقیقی سیگنال دریافتی یا همان $\Re(Y)$ است. در درس مخابرات ۱ استاد گرامی واریانس نویز را

عموما به شکل $\frac{N_0}{2}$ بیان کردند پس داریم:

$$y = x + w, \quad P_e = P(y > 0|x = -1)P(x = -1) + P(y < 0|x = 1)P(x = 1)$$
$$= \frac{1}{2}\left(P(y > 0|x = -1) + P(y < 0|x = 1)\right) = \frac{1}{2}(P(-1 + w > 0|x = -1)$$
$$+ P(1 + w < 0|x = 1)) = \frac{1}{2}\left(P(w > 1|x = -1) + P(w < -1|x = 1)\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N_0}{2}}} e^{-\frac{w^2}{N_0}} dw + \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N_0}{2}}} e^{-\frac{w^2}{N_0}} dw\right) = Q\left(\sqrt{2\text{SNR}}\right)$$
$$P_e = 10^{-6} = Q\left(\sqrt{2\text{SNR}}\right) \xrightarrow{Q^{-1}} \sqrt{2\text{SNR}} = 4.7534 \longrightarrow \text{SNR} = 11.2975$$
$$\longrightarrow \text{SNR}_{dB} = 10\log(11.2975) = 10.5298235dB$$

## ۲.۱ پرسش ۲

### ۱.۲.۱ الف

در این قسمت دو سمبل فرستاده می‌شوند که به ترتیب $0$ و $a$ هستند. حال به محاسبه احتمال خطا خواهیم پرداخت.

باید دقت کنیم که اگر ابتدا سمبل $0$ و سپس سمبل $a$ فرستاده شود به معنای ارسال بیت $1$ و حالت عکس آن به معنای ارسال بیت $0$ است، لذا بر پایه این موضوع می‌توانیم تصمیم بگیریم. دقت شود که احتمال فرستادن دو سمبل مختلف در یک بازه زمانی برابر و به مقدار $0.5$ هست.

$$y = hx + w, \quad y_1 = hx_1 + w_1, \quad y_2 = hx_2 + w_2$$
$$P_e = \frac{1}{2}\left(P(y_1 > y_2|x_1 = 0, x_2 = a) + P(y_2 > y_1|x_2 = 0, x_1 = a)\right)$$

در ادامه می‌توان رابطه احتمال خطا را به صورت زیر عرضه کرد.(عملا دو تا عبارت احتمال را در یکی گنجاندیم)

$$P_e = P(|y_1|^2 > |y_2|^2|x_1 = 0, x_2 = a)$$

مطابق آنچه در درس فرآیندهای تصادفی آموختیم و راهنمایی های موجود در مراجع می‌توانیم بنویسیم:
با توجه به آنچه از درس فرآیندهای تصادفی آموختیم داریم:

$$|y_1| \sim \exp(\frac{1}{N_0}), \quad |y_2| \sim \exp(\frac{1}{N_0 + a^2})$$

پس در نهایت به زیبایی خواهیم داشت:

$$P_e = P_e = P(|y_1|^2 > |y_2|^2 | x_1 = 0, x_2 = a) = \frac{1}{2 + \frac{a^2}{N_0}}$$

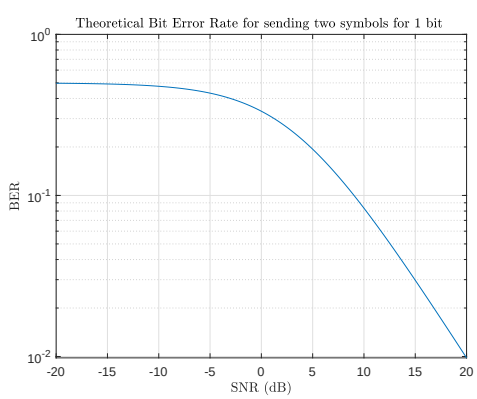
در اینجا دو مورد را می‌توانیم در تعریف سیگنال به نویز لحاظ کنیم، یکی این است که آن را برابر با $\frac{a^2}{N_0}$ در نظر گرفته و دیگری این است که در برخی کتب مرجع به شکل زیر عرضه شده است.

$$\text{SNR} = \frac{\text{میانگین انرژی سیگنال دریافتی بر زمان سمبل}}{\text{انرژی نویز بر زمان سمبل}}$$

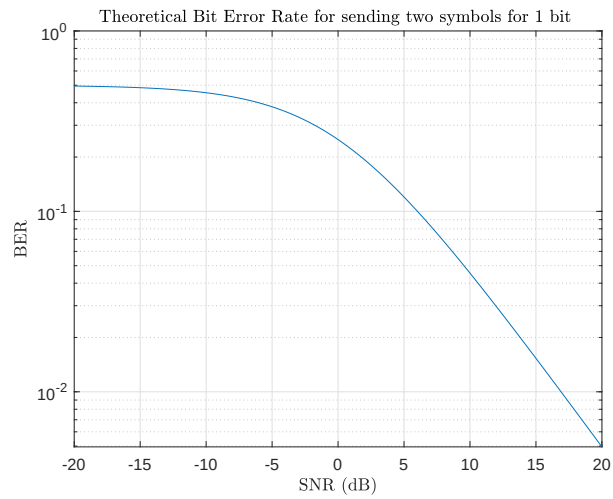
در این حالت نسبت سیگنال به نویز برابر با $\frac{a^2}{2N_0}$ خواهد شد پس در نهایت داریم.

$$\text{if SNR} = \frac{a^2}{N_0} \longrightarrow P_e = \frac{1}{2 + \text{SNR}}$$
$$\text{if SNR} = \frac{a^2}{2N_0} \longrightarrow P_e = \frac{1}{2 + 2\text{SNR}}$$

هر دو حالت بالا در نظر گرفته خواهد شد و به ترسیم خواهیم پرداخت، برای ترسیم فرض می‌کنیم که $a = 1$ باشد.



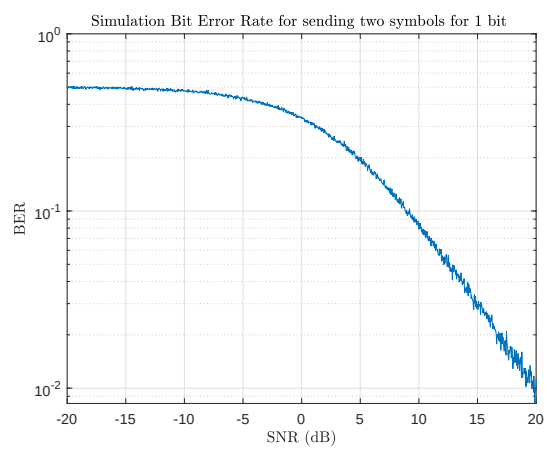

شکل ۴: نمودار احتمال خطا برای حالت فرستادن دو سمبل به صورت تئوری



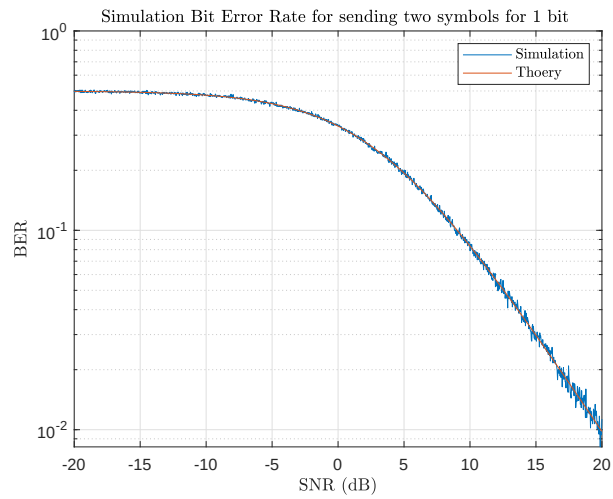

شکل ۵: نمودار احتمال خطا برای حالت فرستادن دو سمبل به صورت تئوری

### ۲.۲.۱ ب

در ادامه به شبیه‌سازی پرداختیم، مشاهده می‌کنیم که نتایج مطلوب است.




شکل ۶: نمودار احتمال خطا برای حالت فرستادن دو سمبل به صورت شبیه‌سازی




شکل ۷: نمودار احتمال خطا برای حالت فرستادن دو سمبل به صورت شبیه‌سازی و تئوری

مشاهده می‌شود که دقیقا نمودارها روی هم میفتند.

### ۳.۲.۱ ج

مشابه سوال قبلی خواهیم داشت.

$$P_e = \frac{1}{2+\text{SNR}}, \quad P_e = 10^{-6}, \quad = \text{SNR}\frac{1-2\times 10^{-6}}{10^{-6}} = 999998$$
$$\longrightarrow \text{SNR}_{dB} = 59.9999913141dB$$

مشاهده می‌شود که در این حالت نسبت سیگنال به نویز نسبت به مساله قبلی افزایش پیدا کرده است که به این معناست که برای رسیدن به یک احتمال خطای خاص توان بیشتری باید مصرف کنیم.
شایان ذکر است که این تفاوت چیزی در حد 58.5 دسی‌بل است.[۱]

[۱] از تعبیر اول سیگنال به نویز استفاده کردیم

## ۳.۱ پرسش ۳

### ۱.۳.۱ الف

با توجه به این که از وضعیت کانال در گیرنده خبر داریم، بر ما واضح است که می‌توانیم به سادگی و به شکل زیر اثر کانال را از بین ببریم.

$$y = hx + w \xrightarrow{\times \frac{h^\star}{|h|^2}} y' = \frac{h^\star}{|h|^2} w$$

قاعده تصمیم، مانند پرسش ۱ خواهد بود، در ادامه به محاسبه نسبت سیگنال به نویز می‌پردازیم.

$$P_n = E\left(|\frac{h^\star}{|h|^2} w|^2\right) = E\left(|w|^2\right) E\left(\frac{1}{|h|^2}\right) = \frac{\frac{N_0}{2}}{|h|^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مراجعه به سوال ۱}} P_e = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{\frac{\frac{N_0}{2}}{|h|^2}}}\right) = Q\left(\frac{a|h|\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right)$$

با توجه به گاوسی مختلط بودن توزیع کانال، طبق آنچه در درس خواندیم توزیع اندازه آن ریله خواهد بود، پس می‌دانیم:

$$f_H(h) = he^{-\frac{h^2}{2}} u(h)$$

حال داریم:

$$P_e = \int f_H(h) P_{e|h} dh = \int_{-\infty}^{\infty} he^{-\frac{h^2}{2}} u(h) Q\left(\frac{a|h|\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) dh$$

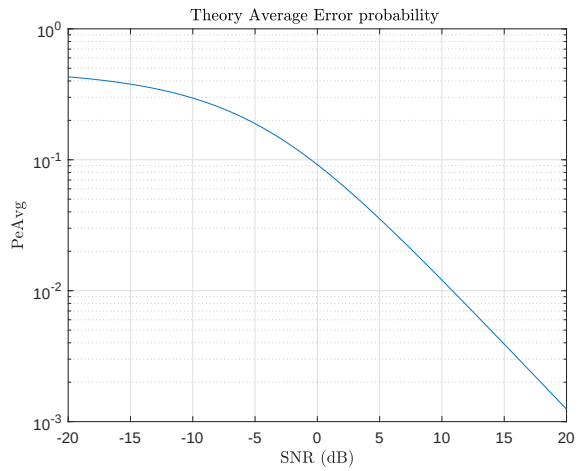
$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \longrightarrow P_e = \int_0^{\infty} he^{-\frac{h^2}{2}} \int_{\frac{a|h|\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du dh$$

محاسبه انتگرال بالا سخت است، لیکن با استفاده از روش جز به جز قابل انجام است، داری:

$$x = \int_{\frac{a|h|\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du, \quad dv = he^{-\frac{h^2}{2}}, \quad \int x dv = xv - \int v dx$$

$$P_e = Q(0) - \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{N_0}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\frac{\sqrt{2}ha}{\sqrt{N_0}}}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{SNR}}{1+\text{SNR}}}$$

نمودار آن به شکل زیر است.

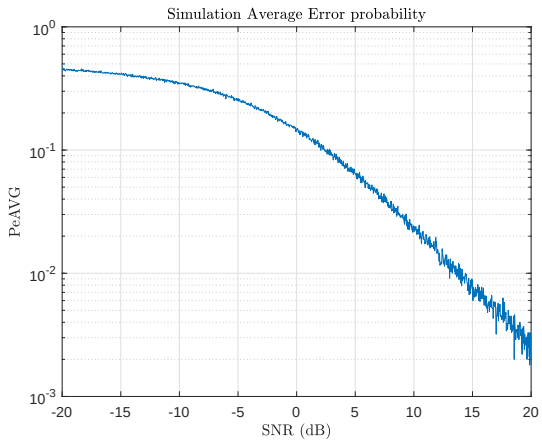



شکل ۸: احتمال خطا متوسط به صورت تئوری

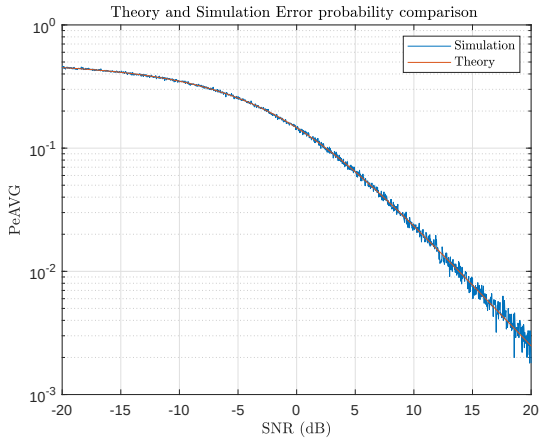
$$P_e = 10^{-6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{SNR}}{1+\text{SNR}}} = 10^{-6}$$
$$\text{SNR} = 2.5 \times 10^5 \longrightarrow \text{SNR_dB} \approx 54dB$$

### ۲.۳.۱ ب

در این قسمت به شبیه‌سازی و مقایسه می‌پردازیم.



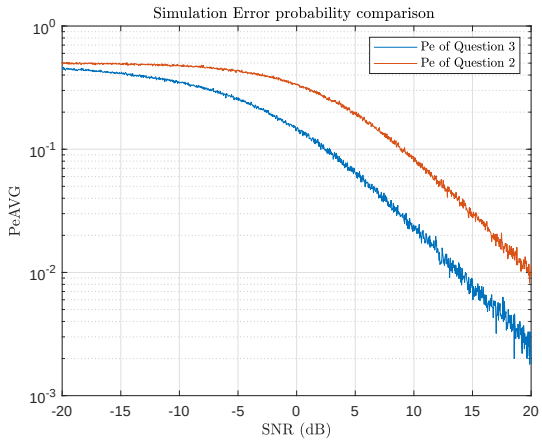

شکل ۹: احتمال خطا متوسط به صورت شبیه‌سازی




شکل ۱۰: احتمال خطا متوسط به صورت شبیه‌سازی و تئوری

مشاهده تطابق بسیار خوبی بین شبیه‌سازی و تئوری هستیم.

در ادامه به قیاس قسمت دوم می‌پردازیم.




شکل ۱۱: مقایسه احتمال خطا شبیه‌سازی سوال دوم و سوم

### ۳.۳.۱ ج

مسلم است که اگر اطلاعات کانال را در گیرنده داشته باشیم و کانال هم محوشدگی داشته باشد، وضعیت بهتری نسبت به زمانی که اطلاعات کانال را نداریم خواهیم داشت، این موضوع با توجه به تفاوتی که میان احتمال خطا ها واضح است. پس دانستن وضعیت کانال مزیت دارد.

## ۴.۱ پرسش ۴

### ۱.۴.۱ الف

در این قسمت به بررسی مدولاسیون QPSK خواهیم پرداخت. مجددا فرض می‌کنیم اطلاعات کانال را در گیرنده داریم.

با توجه به آنچه در مخابرات دیجیتال مطالعه کردیم، می‌دانیم که احتمال خطا برای آشکارسازی بیت به بیت در QPSK و BPSK یکسان است، اما در آشکارسازی سمبل به سمبل عملا در یک صفحه دو

بعدی که از دو PAM متعامد تشکیل شده، قرار می‌گیریم. در این حالت داشتیم:

$$P_{e,s}^{\text{QPSK}} = 1 - P_{c,s}^{\text{QPSK}} = 1 - P\left(\text{هر دو بیت متناظر با سمبل صحیح آشکارسازی شوند}\right)$$

$$P_{e,s}^{\text{QPSK}} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{a|h|2}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 \longrightarrow P_{e,s}^{\text{QPSK}} \approx Q\left(\frac{a|h|2}{\sqrt{N_0}}\right)$$

روندی که از این‌جا به بعد طی می‌شود دقیقا مشابه سوال قبلی است، اما می‌توان به جای محاسبه مجدد انتگرال از این نکته استفاده کنیم که نسبت سیگنال به نویز برای حالتی که از QPSK استفاده می‌کنیم نصف جالت BPSK است. لذا به سادگی خواهیم داشت

$$P_e^{\text{BPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{SNR}}{1+\text{SNR}}} \xrightarrow{\text{SNR}^{\text{QPSK}}=2\text{SNR}^{\text{BPSK}}} P_e^{\text{QPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{\text{SNR}}{2}}{1+\frac{\text{SNR}}{2}}}$$

$$P_e^{\text{QPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2+\text{SNR}}}$$

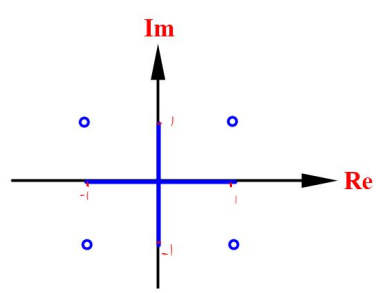
در ادامه به شبیه سازی می‌پردازیم، برای شبیه‌سازی به نقاط منظومه‌ای این نوع مدولاسیون توجه داریم و می‌دانیم که ناحیه تصمیم به صورت صلیب مانند خواهد بود، همچنین در درس آزمایشگاه مخابرات دیجیتال دیدیم که از کدینگ گری در این مدولاسیون می‌توان استفاده کرد.

درروندی که در پیش گرفتیم استفاده از نقاط منظومه‌ای این مدولاسیون به شکل زیر است.

$$\text{QPSK}_{\text{Alphabet}} = \{a+aj, a-aj, -a+aj, -a-aj\}$$

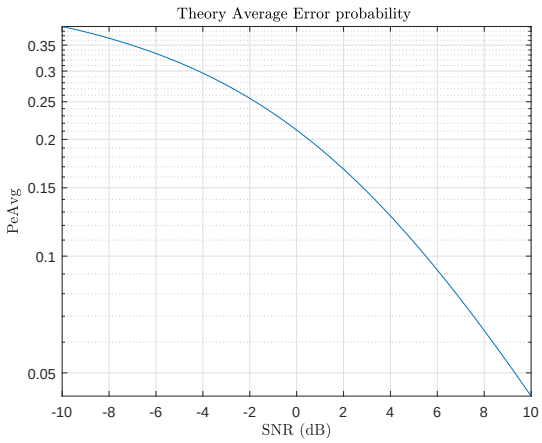
حال هر کدام از موارد بالا را به صورت کدینگ گری در می‌آوریم.

$$a+aj \xrightarrow{Map} 00, \quad a-aj \xrightarrow{Map} 01, \quad -a+aj \xrightarrow{Map} 11, \quad -a-aj \xrightarrow{Map} 10$$

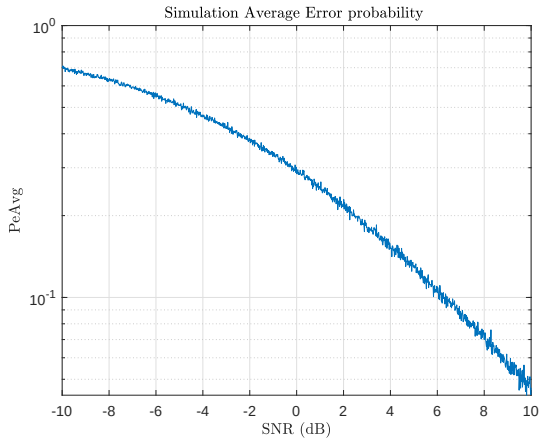



شکل ۱۲: شکل منظومه‌ای مدولاسیون QPSK

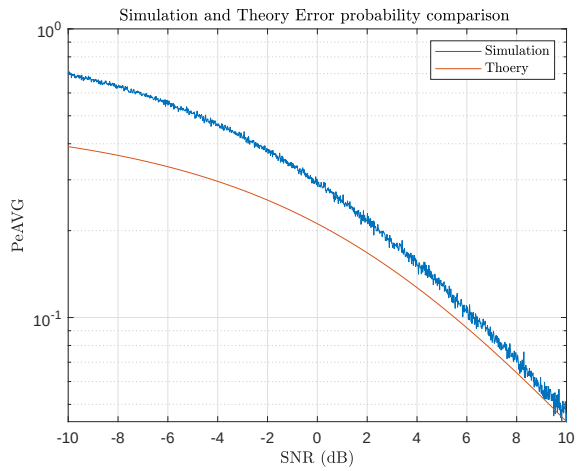
برای شبیه‌سازی آمدیم و نگاشت لازم را بر حسب نوع ورودی انجام دادیم و سپس با استفاده از حلقه‌ها، خروجی آشکار شده را به دست آوردیم، سپس با شمارش این که هر بار چند بیت دچار خطا شده است، به محاسبه BER پرداختیم. حال نمودارها به شکل زیر عرضه می‌شوند.(دقت شود که بنا به خواسته سوال در بازه $-10$ تا 10 دسی‌بل ترسیم انجام شده است.)




شکل ۱۳: احتمال خطا QPSK به صورت تئوری




شکل ۱۴: احتمال خطا QPSK به صورت شبیه‌سازی

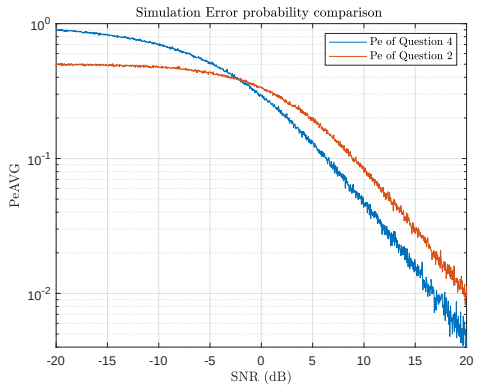



شکل ۱۵: احتمال خطا QPSK به صورت شبیه‌سازی و تئوری

علت این اختلاف در شبیه‌سازی و تئوری، قطعا تقریبی بودن فرمول خواهد بود.

### ۲.۴.۱ ب

در این قسمت به مقایسه شبیه‌سازی این سوال و سوال دوم می‌پردازیم.




شکل ۱۶: مقایسه احتمال خطا شبیه‌سازی سوال دوم و چهارم

مشاهده می‌شود که احتمال خطای QPSK مقداری می‌تواند بهتر باشد، اما تفاوت در احتمال خطاهای بکسان و نسبت سیگنال به نویز به اندازه کافی بزرگ در حد دو الی سه دسی‌بل است و پیچیدگی این پیاده‌سازی شاید صرفه نداشته باشد، اما به طور کلی این احتمال خطا ها در زمانی که سیگنال به نویز به بی‌نهایت میل‌کند یکی خواهند شد.

## ۵.۱ پرسش ۵

در این مساله، با دایورسیتی زمانی مواجه هستیم، یعنی برای ارسال سمبل $x$، باید به تعداد $L$ بار این سمبل ارسال گردد و سپس آشکارسازی انجام شود یعنی سیگنال در ارسال $i$ام به شرح زیر است.

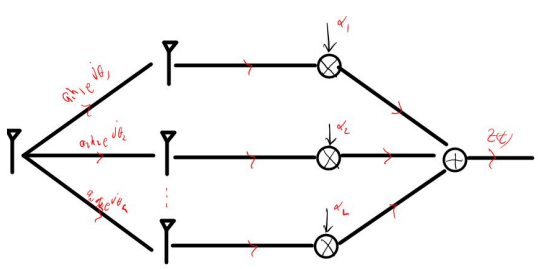
$$y_i = h_i x + w_i, \quad 1 \leq i \leq L$$

### ۱.۵.۱ الف

در این قسمت باید فاصله زمانی میان ارسال سمبل‌ها را تعیین کنیم، استاد در درس فرمودند که زمان همدوسی یا Coherence Time که آن را با $T_c$ نشان می‌دهیم، زمانی است که در طی آن کانال تغییر خاصی ندارد، پس از آن کانال آپدیت می‌گردد، لذا باید حداقل به اندازه $T_c$ منتظر بمانیم و بعد سمبل بعدی را ارسال کنیم. شایان ذکر است اگر مقداری Guard Time داشته باشیم در دنیای واقعی منطقی تر است.

### ۲.۵.۱ ب

فرض می‌کنیم که از مدولاسیون BPSK استفاده می‌کنیم. ایده‌ای که برای دایورسیتی زمانی داریم، Maximal Ratio Combining و یا همان MRC است. جهت یادآوری، شکل آن را رسم می‌کنیم.



شکل ۱۷: Maximal Ratio Combining

حال، یک سمبل را چند بار می‌فرستیم، برای این منظور خواهیم داشت:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}x + \mathbf{w}$$

شایان ذکر است که $\mathbf{y}$ ، $\mathbf{h}$ و $\mathbf{w}$ جملگی بردار هستند.

مشابه سوال سوم اثر کانال را از بین می‌بریم و در نهایت احتمال خطای BPSK را محاسبه می‌کنیم که به شرح زیر است.

$$P_{e|\mathbf{h}} = Q\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{L}|h_i|^2\frac{a^2}{N_0}}\right) \xrightarrow{\text{SNR}=\frac{a^2}{N_0}} Q\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{L}|h_i|^2\text{SNR}}\right)$$

همانگونه که در درس دیدیم داریم

$$\sum_{i=1}^{L}|h_i|^2 \sim \chi^2_{2L}, \quad P_e = \int f_H(h)P_{e|h}dh$$

قابل اثبات است که انتگرال مربوطه پس از محاسبه به صورت زیر عرضه می‌شود.

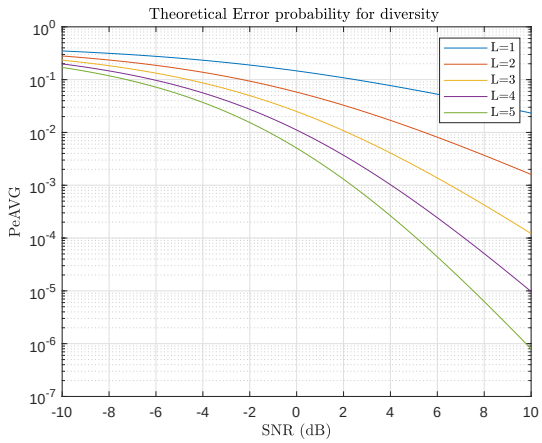
$$P_e = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^L \sum_{i=0}^{L-1}\binom{L+i-1}{i}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^i, \quad \beta \triangleq \sqrt{\frac{\text{SNR}}{\text{SNR}+1}}$$

شایسته است عنوان کنیم که برای نسبت سیگنال به نویز بالا رابطه فوق به شکل زیر در می‌آید.

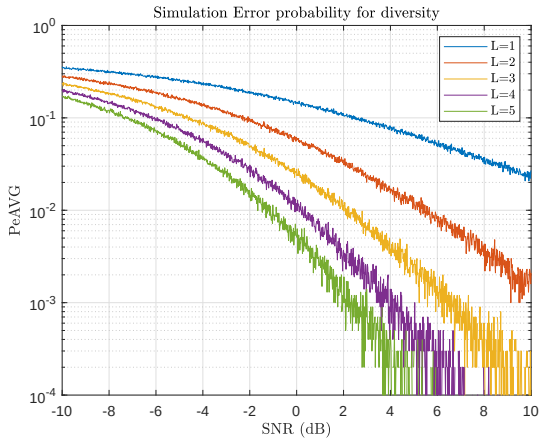
$$P_e \approx \binom{2L-1}{L}\frac{1}{(4\text{SNR})^L}$$

در ادامه به رسم نمودارهای تئوری و شبیه‌سازی خواهیم پرداخت.[۲]

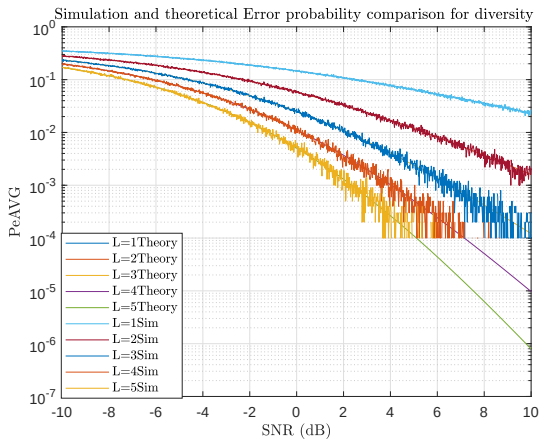
[۲] روابط این قسمت از کتاب Fundamentals of Wireless Communications وام گرفته شده است.




شکل ۱۸: احتمال خطا دایورسیتي به صورت تئوری




شکل ۱۹: احتمال خطا دایورسیتي به صورت شبیه‌سازی




شکل ۲۰: احتمال خطا دایورسیتی به صورت شبیه‌سازی و تئوری

همانطور که در نمودارها مشخص است، با افزایش $L$ یعنی تعداد دفعاتی که داده را می‌فرستیم، احتمال خطا کم و کمتر می‌شود، این موضوع هم در شبیه‌سازی و هم در تئوری معین گردیده است. همجنین تطابق شبیه‌سازی و تئوری نشان‌دهنده صحت شبیه‌سازی ماست.

## ۶.۱ پرسش ۶

در این مساله هدف ما استفاده از دایورسیتی در مکان است. ذر این حالت $M$ آنتن در فرستنده و یک آنتن در گیرنده داریم.

### ۱.۶.۱ الف

در این مساله در واقع دنبال این هستیم که از دایورسیتی مکانی به دایورسیتی در زمان برسیم. برای انجام این مهم، دقت ویژه داشته باشیم که داده‌هایی که در هر آنتن فرستنده می‌فرستیم باید یکسان باشند سایر موارد نظیر هم‌فازسازی و... مشابه است.

### ۲.۶.۱ ب

در این قسمت می‌خواهیم کدینگ الموتی را برای حالت دو آنتنه و برای مدولاسیون BPSK انجام دهیم.
با توجه به راهنمایی موجود در سوال، کدینگ الموتی را بررسی می‌کنیم.

| | $t_{s2}$ | $t_{s1}$ |
|---|---|---|
| $Tx_1$ | $s_1$ | $-s_2^\star$ |
| $Tx_2$ | $s_2$ | $s_1^\star$ |

حال خواهیم داشت.

$$y_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2 + n_1, \quad y_1 = -h_1 s_2^\star + h_2^\star s_1 + n_2^\star$$

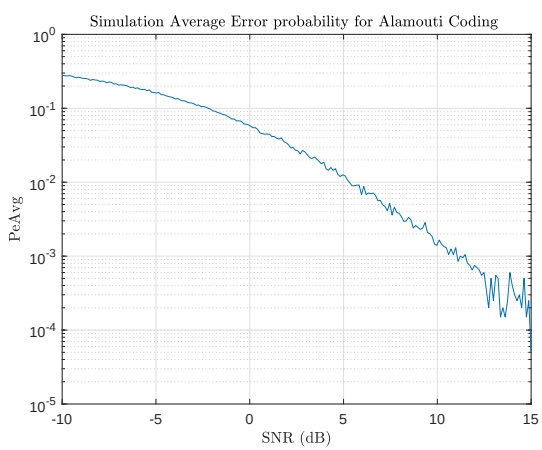
در نهایت اگر معادلات را ماتریسی دسته‌بندی کنیم خواهیم داشت.

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^\star & -h_1^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2^\star \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = H_c \underline{s} + \underline{n}$$

$$H_c^H H_c = \begin{pmatrix} h_1^\star & h_2 \\ h_2^\star & -h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^\star & -h_1^\star \end{pmatrix} = \left(|h_1|^2 + |h_2|^2\right) I \underline{s}$$

$$\underline{Z} = H_c^H \underline{y} = H_c^H H_c \underline{s} + H_c^H \underline{n} = \left(|h_1|^2 + |h_2|^2\right) I \underline{s} + \tilde{\underline{n}}$$

پس از این به شبیه‌سازی خواهیم پرداخت.




شکل ۲۱: احتمال خطا کدینگ الموتی به صورت شبیه‌سازی و تئوری

### ۳.۶.۱ ج

در زمان‌هایی که کانال به شدت دارای محوشدگی باشد، تکنیک الموتی بهتر پاسخ خواهد داد، در این روش چون چند آنتن فرستنده داریم، به اصطلاح داده بیشتری به گیرنده داده می‌شود و احتمال خطا را برای ما کاهش می‌دهد. همچنین، روش الموتی اجازه ارسال همزمان اطلاعات مستقل از هم را می‌دهد که باعث می‌شود نرخ ارسال داده بالاتر رود. شایان ذکر است که گیرنده روش الموتی از پیچیدگی کمتری نیز برخوردار است.

# ۲ بخش دوم: کانال فرکانس گزین

در این قسمت کانال پهن‌باند است، رابطه مهمی که داریم به شرح زیر است.

$$y[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h_i[k]x[k-i] + w[k], \quad h_i[k] \sim \mathcal{CN}(0, N_0), \quad L \triangleq \text{Channel Taps}$$

هدف ما طراحی یک سیستم OFDM می‌باشد، برای این منظور اطلاعات زیر در اختیار ماست.

$$W = 20MHz, \quad T_c = 5ms, \quad T_d = 10\mu s, \quad N = 10^8$$

مدولاسیون BPSK خواهد بود و همچنین احتمال ارسال 0 و 1 یکسان و برابر با $\frac{1}{2}$ است. همچنین تپ‌های کانال جهت سهولت ثابت است.

## ۱.۲ پرسش ۱

در این قسمت به محاسبه تعداد تپ های کانال و طول پیشوند گردشی خواهیم پرداخت.

$$L = W \times T_d = 200$$

شایان ذکر است که طول پیشوند گردشی یکی کمتر از تعداد تپ‌هاست زیرا در غیر این صورت ممکن است تداخل داشته باشیم پس داریم.

$$\text{Cyclic Prefix Length} = 199$$

## ۲.۲ پرسش ۲

با توجه به راهنمایی‌های انجام شده و همچنین منطق سیستم OFDM درباره تعداد زیرحامل‌ها یک کران بالا و پایین وجود دارد که به شکل زیر عرضه می‌شود.

$$T_d \times W \leq n_c \leq W \times T_c$$
$$200 \leq n_c \leq 10^5$$

در شبیه‌سازی $n_c = 0.8W \times T_c$ در نظر گرفته شده است.

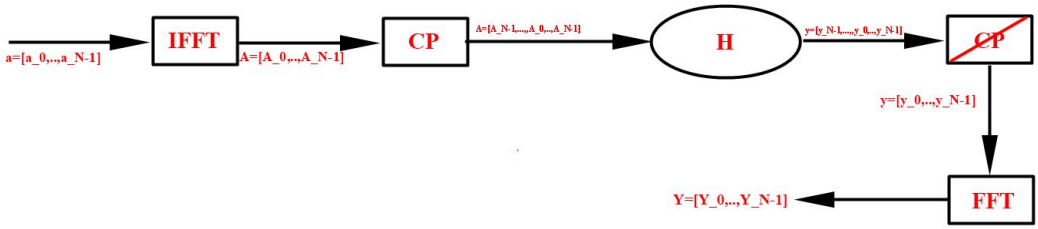
## ۳.۲ پرسش ۳

مسلم است که این مقدار از رابطه زیر عرضه می‌شود.

$$N_{\text{Block}} = \frac{N}{n_c}, \quad N = 10^8, \quad \text{شبیه‌سازی} N = 2 \times 10^6$$

## ۴.۲ پرسش ۴

بلوک دیاگرام سیستم OFDM به شکل زیر ارائه می‌شود.




شکل ۲۲: بلوک دیاگرام سیستم OFDM

- **FFT and IFFT**

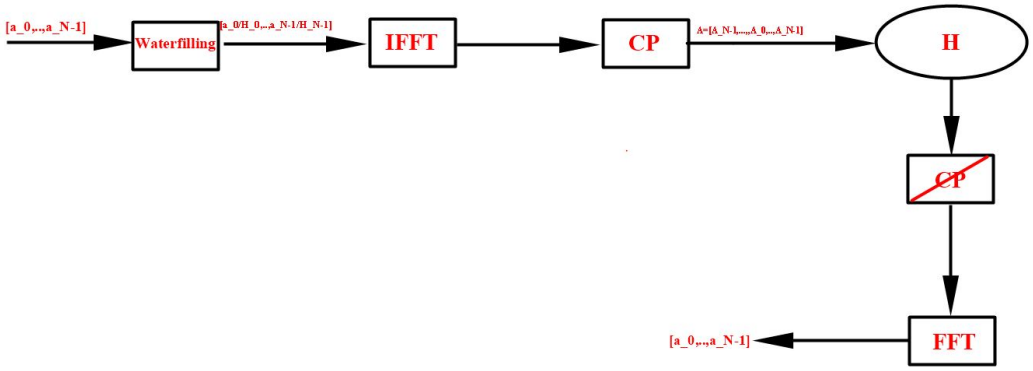
با توجه به این که سیستم OFDM عملا یک کانال فرکانس گزین را به $N$ کانال Flat تبدیل می‌کند برای انجام نگاشت از حوزه زمان به فرکانس و برعکس به این بلوک‌ها نیاز است.

- **CP**

برای ایجاد پیشوند گردشی از این بلوک استفاده می‌شود و همچنین در گیرنده با بلوکی مشابه پیشوند گردشی حذف می‌شود، اهمیت پیشوند گردشی در تبدیل کانولوشن معمولی به کانولوشن گردشی است.

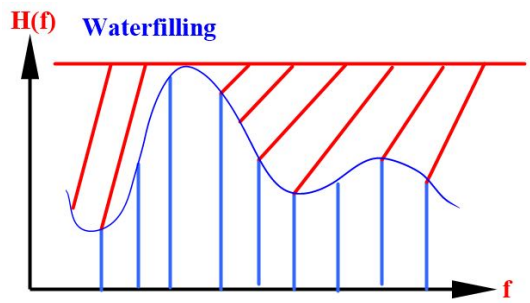
$$\underline{y} = \underline{A} \star \underline{h} = \underline{A} \circledast \underline{h} \xrightarrow{\text{FFT}} \underline{Y} = \underline{a}\,\underline{H} \longrightarrow Y_k = a_k H_k, \quad \forall k = 0, \ldots, N-1$$

سیستم ارائه شده یک نمونه ساده از OFDM بود، ممکن است سیستم کامل تر باشد مثلا بلوک Waterfilling اضافه شود.




شکل ۲۳: بلوک دیاگرام سیستم OFDM

کاربرد Waterfilling برای آشکارسازی $a_k$ است و از دسته تکنیک‌های تخصیص توان می‌باشد که خود زیرمجموعه‌ای از تخصیص منابع است. برای انجام این کار باید در فرستنده پاسخ فرکانسی کانال را داشته باشیم و توان سمبل $k$ ام را متناسب با $\frac{1}{H_k}$ در نظر می‌گیریم، گویی همه کانال‌ها تا یک سطح یکسان پر از آب شوند.




شکل ۲۴: Waterfilling

## ۵.۲ پرسش ۵

در این قسمت مساله‌ای که باید حل شود را عرضه می‌کنیم. در واقع هدف یافتن $\lambda$ تحت مساله و قیود زیر است.

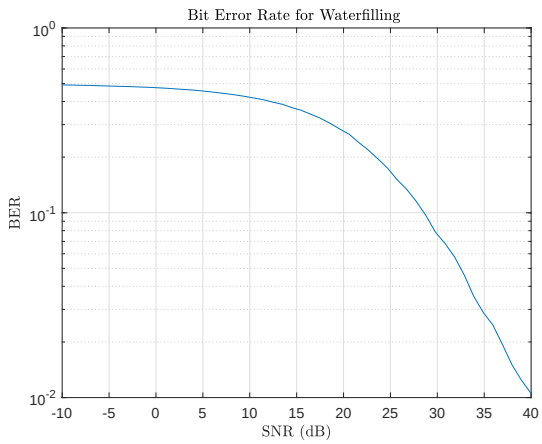
$$\text{Maximize} \sum_{i=0}^{n_c-1} \log\left(1+\frac{P_i|H_i|^2}{N_0}\right)$$
$$\text{Subject to} \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i = P_{max}, \quad P_i = \left(\frac{1}{\lambda}-\frac{N_0}{|H_i|^2}\right)$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که معادله زیر از کجا آمده است.

$$C(\underline{P}) = \sum_{i=0}^{n_c-1} \log\left(1+\frac{P_i|H_i|^2}{N_0}\right), \quad g(\underline{P}) = \sum_{i=1}^{n} P_i - P_{max}, \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

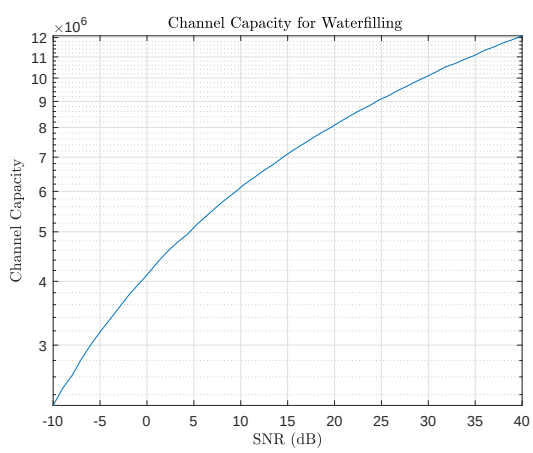
$$L(\lambda, \underline{P}) = C(\underline{P}) - \lambda g(\underline{P})$$
$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial P_i} L(\lambda, \underline{P}) = \frac{\partial}{\partial P_i} \sum_{i=0}^{n_c-1} \log\left(1+\frac{P_j|H_j|^2}{N_0}\right) + \frac{\partial}{\partial P_i}\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} P_j - P_{\max}\right)$$
$$\longrightarrow \frac{N_0+P_i|H_i|^2}{|H_i|^2} = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow P_i = \left(\frac{1}{\lambda}-\frac{N_0}{|H_i|^2}\right)$$

پس از این با توجه به قید مساله $\lambda$ قابل محاسبه است. در ادامه نموداری که با کمک دستور Waterfill پس از کش و قوس فراوان به دست آمد عرضه می‌شود.




شکل ۲۵: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از Waterfilling

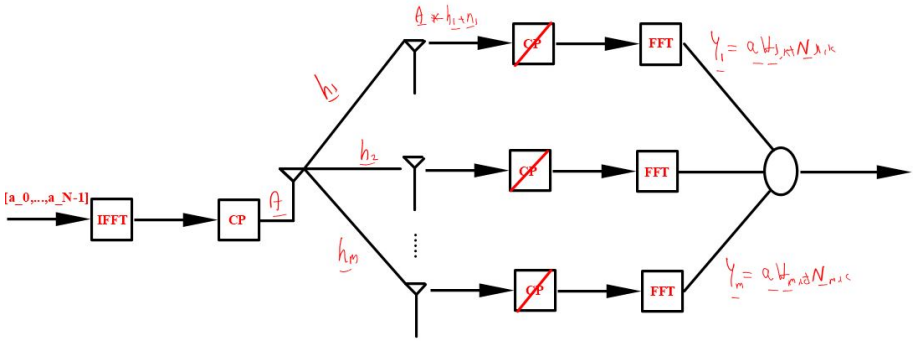
همچنین نمودار ظرفیت به شکل زیر است.




شکل ۲۶: نمودار ظرفیت کانال

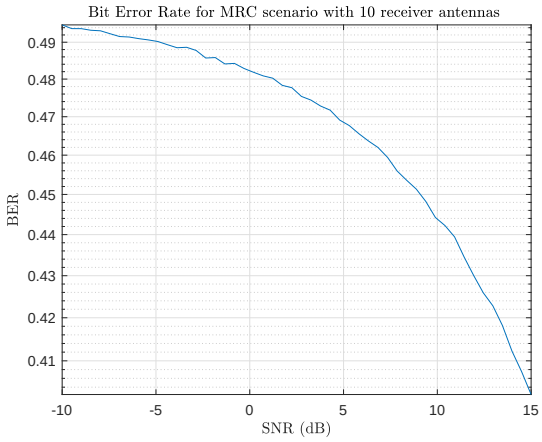
## ۶.۲ پرسش ۶

در این مساله از دایورسیتی در مکان بهره می‌گیریم،به یادآوری دایورسیتی برای سیستم OFDM می‌پردازیم.




شکل ۲۷: دیاگرام دایورسیتی در OFDM

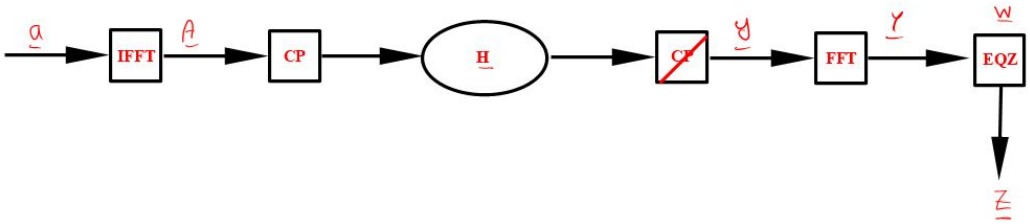
در ادامه به پیاده سازی و رسم نمودار مربوطه و پرداختیم.




شکل ۲۸: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از Diversity

## ۷.۲ پرسش ۷

در این قسمت به بررسی دو نوع همسان‌ساز در سیستم OFDM خواهمی پرداخت. پیش از آن بلوک دیاگرام سیستم OFDM را در حضور همسان‌ساز بررسی می‌کنیم.

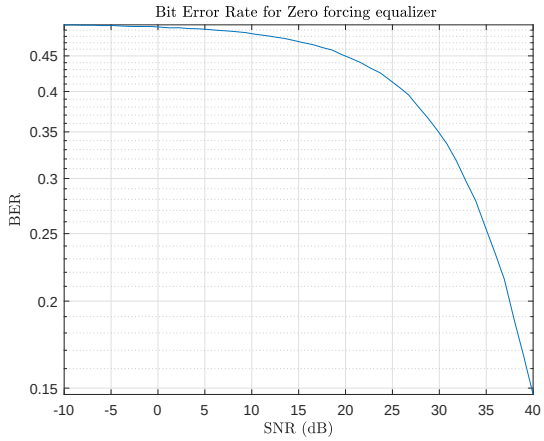



شکل ۲۹: بلوک دیاگرام سیستم OFDM در حالت استفاده از همسان‌ساز

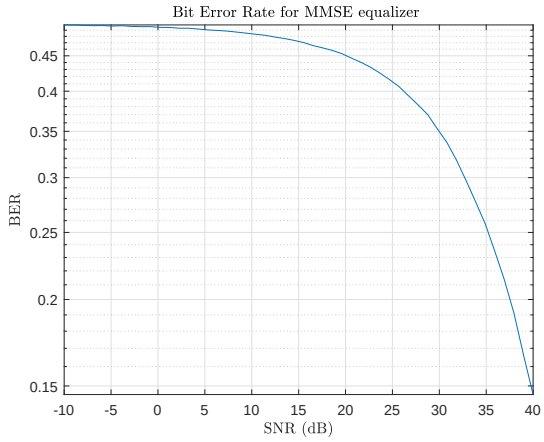
در ادامه به بررسی دو نوع همسان‌ساز Zero Forcing و MMSE می‌پردازیم که به شکل زیر ارائه می‌شود.

$$\text{Zero Forcing} \quad W_k = \frac{1}{H_k}, \qquad \text{MMSE}, \quad W_k = \frac{H_k^\star}{|H_k|^2 + \sigma_n^2}$$

شبیه‌سازی برای هر دو این حالت‌ها انجام گردیده و نتایج به شکل زیر عرضه می‌شود.




شکل ۳۰: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز ZF




شکل ۳۱: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز MMSE

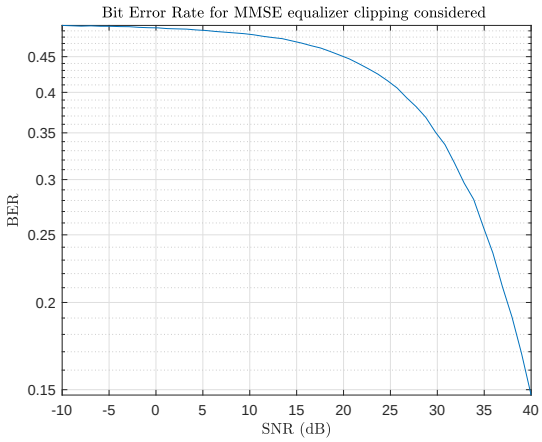
مشاهده می‌گردد که نتایج مناسب می‌باشند.

## ۸.۲ پرسش ۸

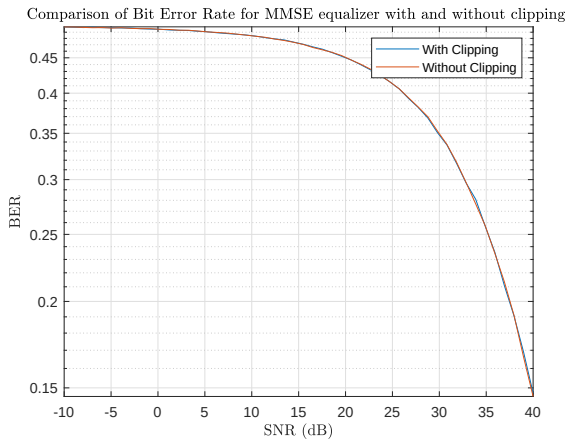
در این قسمت می‌خواهیم به سیستم OFDM عملیات Clipping را اضافه کنیم، ابتدا به بیان مزایا Clipping می‌پردازیم.

- **سادگی پیاده‌سازی**
- **عدم نیاز به ارسال اطلاعات اضافه**

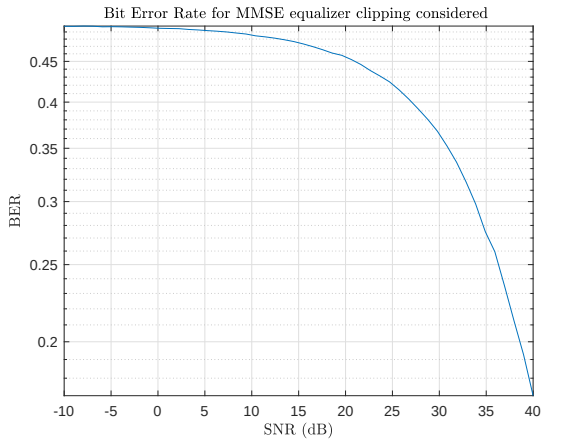
برای پیاده‌سازی، در خروجی IFFT نام بزرگترین $X_k$ را $M_k$ می‌گذاریم و هر جا که $X_k$ از $0.8|M_k|$ بزرگتر باشد به جای آن $0.8|M_k|$ را می‌گذاریم، البته باید توجه کنیم که به فاز آن دست نزنیم، شایان ذکر است که نتایج به ازای ضریب $0.8$ خیلی محرز نیست اما به ازای $0.4$ واضح تر است و هر دو حالت ضمیمه شده است.



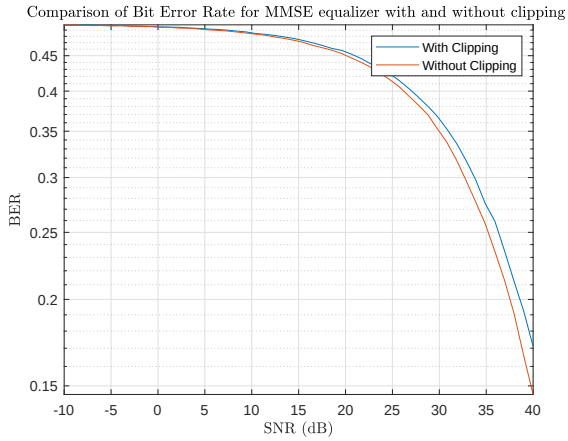

شکل ۳۲: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز MMSE و در نظر گرفتن Clipping با ضریب $0.8$




شکل ۳۳: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز MMSE و در نظر گرفتن Clipping با ضریب 0.8




شکل ۳۴: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز MMSE و در نظر گرفتن Clipping با ضریب 0.4




شکل ۳۵: نمودار احتمال خطا برای حالت استفاده از همسان‌ساز MMSE و در نظر گرفتن Clipping با ضریب 0.4

# مراجع

[1] Maryam Sabbaghian, *Wireless Communications, Lecture Notes, Spring 02*

[2] David Tse, Pramod Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications, 1st edition, CUT Press, 2005*

[3] Andrea Goldsmith, *Wireless Communications, 1st edition, CUT Press, 2005*

[4] Ali Olfat, *Principles of Communication Systems, Lecture Notes, Fall 00*

[5] Ali Olfat, *Stochastic Processes, Lecture Notes, Fall 01*

[6] Ali Olfat, *Detection and Estimation Theory, Lecture Notes, Spring 02*