
بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان پروژه: بررسی رویکردهای دقیق برای حل مسأله‌ی افراز گراف به مثلث‌ها

استاد راهنما: دکتر حسین فلسفین

دانشجو: سروش وحیدی

بهمن۹۸

تشکر و قدردانی:

بدین وسیله از اساتید بزرگوارم به ویژه جناب آقای دکتر فلسفین و همچنین خانواده‌ام که محیط مناسبی برای تحقیق و پژوهش را برایم فراهم آوردند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تشکر و قدردانی ٤

چکیده ٦

فصل اول: مقدمه ۷

مسأله‌ی صدق‌پذیری مدار(circuit-satistiability problem) ۷

مسأله‌ی پوشش دقیق(exact cover problem) ۷

فصل دوم:رویکردهای حل مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی ۹

الگوریتم شماره ۱: رویکرد اصل شمول و عدم شمول ۹

الگوریتم شماره۲: یک رویکرد بازگشتی جدید برای حل مسأله ۱۲

الگوریتم شماره ۳: حل مسأله‌ی مثلث‌بندی گراف‌های با بیشینه درجه‌ی ٤ از طریق مسأله‌ی SAT ١٤

فصل سوم: شبیه‌سازی و نتایج ۲۵

منابع و مراجع ۲۸

چکیده

مسأله‌ی تجزیه‌ی یالی یا رأسی گراف به تعدادی زیرگراف خاص، پیشینه‌ای طولانی دارد و هنوز هم روی آن تحقیق می‌شود. در سال۱۹۶۶، مسأله‌ی H-decomposition توسط اردوش و دو تن از همکارانش مطرح شد. هدف آن‌ها در این مسأله، افراز یال‌های یک گراف مشخص به تعدادی زیرگراف همریخت با گراف H بود. این مسأله هنوز هم در حالت کلی حل‌نشده است، اگرچه برای دسته‌های زیادی از گراف‌ها بررسی شده و به نتیجه‌ی قطعی رسیده‌است. حدس زده میشود که اگر گرافH مولفه‌ی همبندی با حداقل ۳یال داشته باشد این مسأله NPکامل است و در غیر این صورت در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود.

مسأله‌ی دیگری که به مسأله‌ی H-decomposition شباهت دارد، مسأله‌ی H-factorization است. هدف این مسأله، افراز رأس‌های گراف به تعدادی زیرگراف یکریخت با گرافH و یا اثبات عدم امکان انجام این کار است.

در سال ۱۹۷۸ ثابت شد که اگر حداقل یکی از مولفه‌های همبندی گراف H بیش از دو رأس داشته باشد، مسأله‌ی H-factorization یک مسأله‌ی NPکامل است و در غیر این صورت می‌توان آن را در زمان چند جمله‌ای حل کرد [1]. در این پروژه، ما حالت خاصی از مسأله‌ی H-factorization که در آن $H=K_3$ است را مورد بررسی قرار دادیم.

NPکامل بودن این حالت خاص در سال ۲۰۰۴ به روشی متفاوت از روش قبلی ثابت شد. در ادامه، رویکردهای مختلف برای حل این مسأله و همچنین رابطه‌ی این مسأله با مسأله‌ی EXACT-3SAT را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل اول: مقدمه

در ابتدا به معرفی برخی مسائل و مفاهیم که در ادامه با آن ها سروکار خواهیم داشت می‌پردازیم:

مسأله‌ی صدق‌پذیری مدار(circuit-satistiability problem)

یک متغیر دودویی، متغیری است که می‌تواند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را بگیرد. یک لیترال، یک متغیر دودویی و یا نقیض آن است. برای مثال، A یک لیترال و $\bar{A}$ (نقیض A) یک لیترال دیگر است. یک کلاوز(clause) از تعدادی لیترال تشکیل شده است که با یکدیگر or منطقی شده اند. or منطقی را با علامت "|" نمایش میدهیم، به عنوان مثال، $A|B|\bar{C}$ یک کلاوز است. یک فرمول دودویی در حالت ترکیب نرمال عطفی(conjunctive normal form) است اگر از تعدادی کلاوز(clause) تشکیل شده باشد که بین آن ها and منطقی(&) وجود دارد؛ به عنوان مثال، $(\bar{D}\,|E)\&(A|B|\bar{C})$ یک فرمول دودویی در حالت ترکیب نرمال عطفی است. مسأله‌ی صدق‌پذیری مدار می‌پرسد که آیا برای یک فرمول دودویی خاص، حالتی از مقداردهی متغیرها وجود دارد که باعث شود آن فرمول ارزش درستی(true) به خود بگیرد؟

در سال ۱۹۷۱، استفن کوک[1] ثابت کرد که این مسأله جزو دسته مسائل NPکامل می‌باشد. مسأله‌ی صدق‌پذیری مدار انواع مختلفی دارد. مثلا اگر هر یک از کلاوزهای فرمول CNF داده شده دقیقا دارای K لیترال باشند، آن‌وقت می‌توانیم بگوییم که با یک مسأله‌ی K-SAT مواجه هستیم. اگر بخواهیم طوری به متغیرها مقدار بدهیم که دقیقا یکی از لیترالهای هر یک از کلاوزهای یک فرمول دودویی ارزش درستی به خود بگیرد، مسأله به حالت خاصی از مسأله‌ی صدق‌پذیری مدار تبدیل می‌شود که EXACT-SAT نام دارد.

مسأله‌ی پوشش دقیق(exact cover problem)

نمونه‌ی (X,F) از مسأله‌ی پوشش مجموعه، شامل مجموعه‌ی متناهی X و خانواده‌ی F از زیرمجموعه‌های X است به‌طوری‌که هر عنصر X متعلق به حداقل یک زیرمجموعه در F است؛ هدف مسأله یافتن زیرمجموعه‌ای از اعضای F است به طوری که اولاً اجتماع اعضای آن برابر با X باشد و ثانیاً اشتراک هر دو زیر مجموعه از آن مجموعه تهی باشد.

برای مثال این مثال را در نظر بگیرید:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

F= {N, O, P, E}

O = {1, 3}

P = {2, 3}

E = {2, 4}

---

[1] Stephen Arthur Cook

مجموعه‌ی $\{O, E\}$ یک پوشش دقیق برای مجموعه‌ی X است زیرا اولا اجتماع O و E برابر با X است و ثانیا اشتراک O و E برابر با تهی است.

ریچارد کارپ[۲] در سال ۱۹۷۲ ثابت کرد که این مسأله NP کامل می‌باشد.

---

[۲] Richard M. Karp

فصل دوم:رویکردهای حل مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی

الگوریتم شماره ۱: رویکرد اصل شمول و عدم شمول[۳]

اولین رویکردی که آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد، رویکرد شمول و عدم شمول خواهدبود که از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کند:

قضیه‌ی۱: تعداد راه‌های پوشاندن مجموعه‌ی N با استفاده از k عضو از مجموعه‌ی F برابر است با:

$$\sum_{X \subseteq N} -1^{|X|} \alpha(X)^k$$

به طوری که $\alpha(X)$ بیانگر تعداد اعضای F است که با زیر مجموعه‌ی X از N هیچ اشتراکی ندارند [2].

با استفاده از این فرمول می‌توان تعداد مثلث‌بندی‌های یک گراف را به دست آورد چرا که مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف را می‌توان حالت خاصی از مسأله‌ی exact covering در نظر گرفت:

گرافی 3n راسی داریم. آیا می‌توان nتا از مثلث‌های آن‌را انتخاب کرد به‌طوری که همه‌ی رأس‌های گراف را بپوشانند؟

با استفاده از تعداد مثلث‌بندی‌های گراف می‌توان خود مثلث‌بندی‌ها را با استفاده از الگوریتمی که در ادامه آن را معرفی می‌کنیم یافت:

لم ۱: اگر تعداد مثلث‌بندی‌های گراف G برابر با $n_1 > 0$ و تعداد مثلث‌بندی‌های گراف $G \setminus e$ برابر با ۰ باشد به طوری که e یکی از یال های G است، آنگاه یال e در همه‌ی مثلث‌بندی‌های گراف G وجود دارد.

الگوریتم یافتن مثلث‌بندی گراف با استفاده از تعداد مثلث‌بندی‌ها:

۱-اگر تعداد مثلث‌بندی های گراف G برابر با ۰ است این گراف هیچ مثلث‌بندی ندارد. به مرحله‌ی آخر برو.

۲-یکی از یال‌های گراف G مثل e را که قبل از این انتخاب نشده است انتخاب کن.

۳-تعداد مثلث‌بندی‌های گراف $G \setminus e$ را در k بریز.

۴-اگر k بزرگتر از ۰ است G را برابر با $G \setminus e$ قرار بده، وگرنه یال e را به مجموعه‌ی E اضافه کن.

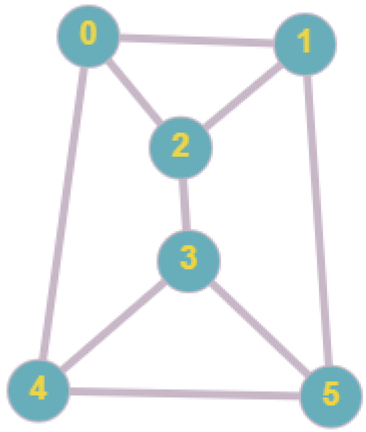
۵-اگر تعداد اعضای مجموعه‌ی E برابر با $n/3$ است که n تعداد رأس‌های گراف است به مرحله‌ی آخر برو وگرنه به مرحله‌ی ۲ برو.

۶-پایان.

---

[۳] Inclusion-exclusion

در پایان الگوریتم بالا اگر مثلث‌بندی رأسی برای گراف وجود داشته باشد، مجموعه‌ی یال‌های یکی از آن ها در E ذخیره شده است. الگوریتم را با استفاده از یک مثال، توضیح می‌دهیم. گراف شکل ۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱

$N(w)$ را برابر با تعداد زیرمجموعه‌هایی از مثلث‌های گراف که شامل هیچ‌کدام از رأس‌های عضو مجموعه‌ی w نباشند در نظر می گیریم:

اگر $|w|$ برابر با ۰ باشد بدین معنی است که $w = \emptyset$ است و در نتیجه هیچ‌کدام از زیرمجموعه‌های مثلث‌های گراف هیچ اشتراکی با آن ندارند. از آنجایی که تعداد مثلث‌های گراف 2 تا است($\{3,4,5\}$ و $\{0,1,2\}$) پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر با $2^2 = 4$ است . در نتیجه $N(0) = 4$ است.

اگر $|w|$ برابر با ۱ باشد بدین معنی است که فقط یک رأس از گراف عضو w است پس مجموعه‌ی w دقیقا ۶ حالت مختلف دارد که در هرکدام از حالت‌ها چون که دقیقاً هر رأس از این گراف عضو ۱ مثلث است پس به ازای هر کدام از حالات مختلف w دقیقا $2^1 = 2$ زیرمجموعه از مثلث‌ها وجود دارند که با آن‌ها هیچ اشتراکی ندارند و در نتیجه $N(1) = 2 * 6 = 12$ است.

اگر $|w| = 2$ باشد،۳ حالت داریم: اولی این که هر دو عضو w عضو $\{0,1,2\}$ باشند، دوم این که هر دو عضو w عضو $\{3,4,5\}$ باشند و سوم این که یک عضو w عضو $\{0,1,2\}$ و دیگری عضو $\{3,4,5\}$ باشد. به ازای هر یک از حالات اول و دوم، مجموعه‌ی w می‌تواند $\binom{3}{2}$ حالت داشته باشند و به ازای هر کدام از این حالات، دقیقا ۲ زیرمجموعه از مثلث‌های گراف هستند که با اعضای w هیچ اشتراکی نداشته باشند. همچنین اگر w عضو دسته‌ی‌سوم باشد، $3 * 3 = 9$ حالت مختلف برای w وجود دارد که به ازای هر یک از آن‌ها فقط زیرمجموعه‌ی $\emptyset$ از مثلث‌های گراف هیچ اشتراکی با w نخواهد داشت. پس $N(2) = 2 * \binom{3}{2} * 2 + 3 * 3 * 3 = 21$ است.

اگر $|w| = 3$ باشد،۲ حالت داریم: اولی این که هر سه عضو w عضو $\{0,1,2\}$ یا هر سه عضو $\{3,4,5\}$ باشند و حالت دوم زمانی است که حالت اول برقرار نباشد. حالت اول دقیقا دو زیرحالت دارد که به ازای هر یک از آن‌ها ۲ زیرمجموعه از مثلث‌های گراف وجود دارد که اشتراکی با w نداشته باشند. حالت دوم نیز $\binom{6}{3} - 2 = 18$ زیرحالت دارد که به ازای هر یک از آن‌ها فقط زیرمجموعه‌ی $\emptyset$ از مثلث‌های گراف با w هیچ اشتراکی ندارد و در نتیجه $N(3) = 2 * 2 + \left(\binom{6}{3} - 2\right) * 1 = 22$ است.

و در نهایت اگر $|w| > 3$ باشد آنگاه برای w دقیقا $\binom{6}{w}$ زیرحالت مختلف ممکن است که به ازای هر یک از آن‌ها فقط زیرمجموعه‌ی $\emptyset$ از مثلث‌های گراف با w هیچ اشتراکی نخواهد داشت. بنابر قضیه‌ی تعداد مثلث‌بندی های این گراف که در آن هر رأس دقیقا یکبار ظاهر شده باشد برابر با کلاوز زیر خواهد بود:

$$4 - 12 + 21 - 22 + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1$$

درستی نتیجه‌ی بالا نیز واضح است زیرا فقط مثلث‌بندی$\{\{0,1,2\}.\{3,4,5\}\}$ هر رأس گراف را دقیقا یکبار شامل می‌شود.

اگر گرافی t مثلث داشته‌باشد این الگوریتم از $O(2^t)$ برای آن گراف عمل می‌کند و با توجه به این که t در بدترین حالت از $O(\binom{n}{3})$ برای گراف n رأسی است پس این الگوریتم در بدترین حالت از مرتبه‌ی$O\left(2^{\binom{n}{3}}\right)$ است بنابراین نسبت به الگوریتم‌هایی که در ادامه معرفی خواهیم‌کرد بسیار ضعیف‌تر است.

الگوریتم شماره۲: یک رویکرد بازگشتی جدید برای حل مسأله

در این روش، ما از رویکرد backtrack برای حل مسأله بهره می‌گیریم. روند الگوریتم به زبان ساده به صورت زیر است:

۱-اگر تعداد رأس‌های گراف G بر ۳ بخش‌پذیر نیست و یا رأس از درجه‌ی ۰ یا ۱ دارد مقدار false را برگردان و اگر گراف دارای هیچ رأسی نیست مقدار true را برگردان. یک مثلث‌بندی برای گراف ورودی اولیه در بردار t ذخیره شده است.

۲-رأس v را رأس با درجه‌ی کمینه در گراف G در نظر بگیر. اگر v عضو هیچ مثلثی نیست مقدار false را برگردان وگرنه به ازای هر مثلث q شامل v مرحله‌ی ۳ را انجام بده.

۳-مثلث q را در بردار t قرار بده و الگوریتم را برای G\q اجرا کن. اگر پاسخ برابر true بود مقدار true را برگردان و اعلام کن که یک مثلث‌بندی برای گراف ورودی اولیه در t ذخیره شده است و گرنه q را از t حذف کن.

۴-G قابل مثلث بندی رأسی نیست. مقدار false را برگردان.

شبه‌کد زیر نشان دهنده‌ی رویکرد توصیف‌شده در بالا است:

```
Vector <triangle> t;
Bool find_partition (graph G){
If number of nodes of G is not divisible by 3 return false;
If G has a vertex of degree equal to 0 or 1 return false;
If G has no vertices return true;
Choose a vertex v of minimum degree;
For all triangles  q that contain v{
t.push(q);
if (find_partition(G\q))
return true;
else
t.pop();
```

```
}
return false;
}
```

اگر تابع بالا به ازای یک ورودی خاص، مقدار درست برگرداند، به این معنی است که آن ورودی قابل مثلث‌بندی بوده و یک نمونه از مثلث‌بندی‌های ممکن برای آن در t ذخیره شده است، وگرنه به این معنی است که گراف ورودی قابل مثلث‌بندی نیست.

دلیل انتخاب رأس v با کمترین درجه نیز این است که تا جای ممکن، شاخه‌های کمتری در درخت جستجو ایجاد شود. در حقیقت، اگر رأس v عضو r مثلث باشد، این تابع باید r بار در خودش فراخوانی شود و طبیعتاً سعی ما بر این است که r را تاجای ممکن کم کنیم. به عنوان نمونه اگر v یک رأس از درجه‌ی ۰ یا ۱ باشد قطعاً عضو هیچ مثلثی نیست و می‌توانیم بدون چک کردن بقیه‌ی رأس‌ها اعلام کنیم که این گراف قابل مثلث‌بندی رأسی نیست و اگر درجه‌ی v برابر با k باشد به طوری که $k \geq 2$ است آنگاه r حداکثر برابر $\binom{k}{2}$ خواهد بود و هرچه که k کوچک‌تر باشد، کران بالای r کوچکتر خواهد بود.

الگوریتم شماره ۳: حل مسأله‌ی مثلث‌بندی گراف‌های با بیشینه درجه‌ی ۴ از طریق مسأله‌ی SAT
در این بخش، مثلث‌بندی گراف‌های از درجه‌ی حداکثر ۴ را بررسی می کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف‌های با درجه‌ی حداکثر ۳ در زمان خطی قابل حل است [3]:

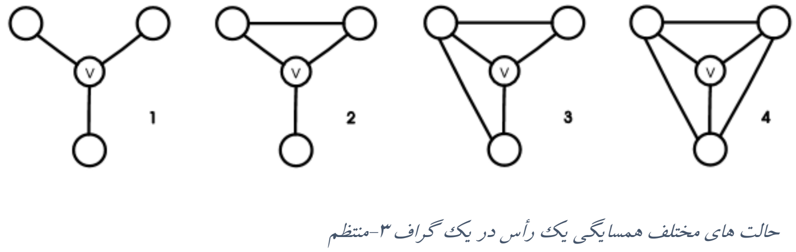
ابتدا مفهوم همسایگی یک رأس مانند v از گراف G را تعریف می کنیم: به زیرگراف القایی که مجموعه‌ی رأس‌های آن برابر با رأس v و همسایه‌های آن در گراف G باشد، همسایگی v می گوییم.

لم ۱: فرض می کنیم که گراف $G = (V,E)$ رأسی از درجه‌ی حداکثر ۲ داشته باشد. در $O(1)$ می‌توانیم تعیین کنیم که این گراف قابل مثلث‌بندی نیست و یا آن‌را به یک گراف معادل همین گراف با تعداد رأس‌های کمتر تبدیل کنیم.

اثبات: اگر گراف G رأسی از درجه‌ی ۰ یا ۱ داشته باشد طبیعتاً آن رأس عضو هیچ مثلثی نیست و در نتیجه گراف قابل مثلث‌بندی نیست. فرض می کنیم که این گراف رأس درجه ۲ مانند v دارد که رأس v با رأس‌های u و w مجاور است. اگر $\{u,w\} \in E$ آنگاه مثلث $\{v,u,w\}$ تنها مثلثی است که شامل رأس v می‌باشد و اگر این گراف دارای مثلث‌بندی باشد حتماً $\{v,u,w\}$ یکی از مثلث‌های آن است و در نتیجه جواب مسأله به‌ازای گراف G دقیقاً یکسان با جواب مسأله به ازای $G\backslash\{v,u,w\}$ است. اگر رأس‌های u و w مجاور نباشند بدین معنی است که رأس v عضو هیچ مثلثی نبوده و در نتیجه این گراف قابل مثلث‌بندی نیست.

قضیه‌ی ۲: فرض می کنیم که درجه‌ی هر رأس گراف $G=(V,E)$ حداکثر برابر با ۳ باشد. مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی این گراف در زمان خطی قابل حل است.

اثبات: اگر گراف G رأسی از درجه‌ی حداکثر ۲ داشته باشد آنگاه مسأله از طریق لم ۱ قابل حل است؛ پس فرض می کنیم که همه‌ی رأس‌های گراف از درجه‌ی ۳ باشند. در این صورت همسایگی هر رأس v از گراف مطابق یکی از حالات زیر است:

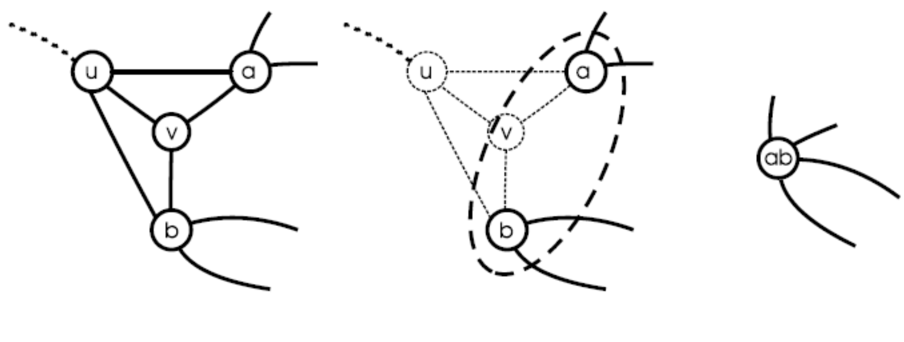


شکل ۲ حالت های مختلف همسایگی یک رأس در یک گراف ۳-منتظم

اگر همسایگی رأس v از نوع ۱ باشد آنگاه این گراف قابل مثلث‌بندی نیست زیرا رأس v عضو هیچ مثلثی نیست. همچنین اگر همسایگی رأس v از نوع ۳ یا ۴ باشد نیز این گراف قابل مثلث‌بندی نیست زیرا به‌ازای هر مثلث شامل رأس v که انتخاب شود حداقل یکی از همسایگانش نخواهد توانست عضو هیچ مثلثی شود. اگر همسایگی رأس v از نوع ۲ باشد آنگاه فقط یک مثلث شامل رأس v وجود دارد که با حذف آن از گراف، یک نمونه ی کوچک‌تر از مسأله که n-3 رأس دارد به دست خواهد آمد و کافیست که مسأله را به‌ازای آن حل کنیم.

لم ۳: فرض می‌کنیم که درجه‌ی هر رأس گراف $G = (V,E)$ حداکثر برابر با ۴ باشد و رأس v از این گراف دارای درجه‌ی حداکثر ۳ باشد. در زمان ثابت می‌توانیم بفهمیم که مثلث‌بندی برای این گراف وجود ندارد و یا آن را به یک گراف معادل کوچکتر که ۴-منتظم است تبدیل کنیم.

اثبات: می‌توانیم فرض کنیم که درجه‌ی رأس v برابر با ۳ است وگرنه می‌توانیم از لم۱ استفاده کنیم. همانند اثبات قضیه‌ی ۲، همسایگی رأس v به یکی از ۴حالت ذکرشده در شکل۱ است. اگر این همسایگی از نوع حالت۱ باشد آنگاه هیچ‌کدام از یال‌های مجاور رأس v عضو هیچ مثلثی نمی‌تواند باشد. اگر همسایگی رأسv از نوع ۲ باشد آنگاه یال بین v و رأس پایینی عضو هیچ مثلثی نیست. در این دو حالت، ما این یال ها را از گراف حذف کرده و سپس لم ۱ را روی رأسv که درجه‌ای حداکثر برابر با ۲ دارد اعمال می‌کنیم. اگر همسایگی از نوع ۴ باشد، آنگاه از آنجایی که درجه‌ی هر رأس G حداکثر برابر با ۴ است، انتخاب هر مثلث شامل v باعث به وجود آمدن رأسی از درجه‌ی حداکثر ۱ می‌شود: نتیجه می‌گیریم که این گراف قابل مثلث‌بندی نیست. همین اتفاق برای حالت ۳ هم می‌افتد مگر این‌که a و b (شکل۲ را ببینید) دارای درجه‌ی ۴ باشند(شکل ۲ را ببینید):



شکل ۳-ساده سازی یک گراف دارای یک راس درجه ۳ با ادغام کردن همسایه های آن رأس

در این حالت، ما گراف را به گونه‌ای که در شکل ۳ نشان داده شده است به یک گراف با تعداد رأس‌های کمتر تبدیل می‌کنیم. یکی از رأس‌های a و b باید همراه با u و v تشکیل یک مثلث بدهند. اگر مثلث {a,u,v} را در یک راه‌حل در نظر بگیریم، آنگاه رأس b باید به همراه دو همسایه‌ی دیگرش در یک مثلث قرار بگیرد. همین قضیه برای حالتی که

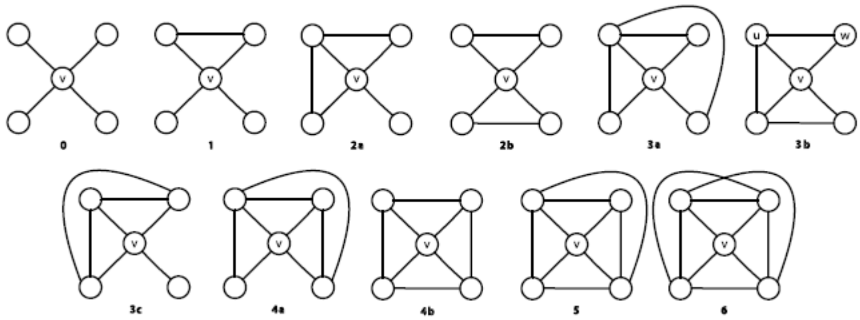
جای a و b را عوض کنیم اتفاق می افتد. در نتیجه ما ۳ حالت مختلف را بر اساس تعداد همسایه‌های مشترک a و b تعریف می‌کنیم:

حالت اول: فرض می‌کنیم که a و b هیچ همسایه‌ی مشترکی به جز u و v ندارند. بدیهی است که اگر یالی بین یکی از همسایه‌های a و یکی از همسایه‌های b وجود داشته باشد که در شکل۲ نیست، آن یال عضو هیچ مثلثی نمی‌تواند باشد و در نتیجه می‌توانیم آن را حذف کنیم. بعد از آن، دو رأس a و b را با یکدیگر ادغام می‌کنیم و یک رأس به جایشان می‌گذاریم و u و v را حذف می‌کنیم. هم‌اکنون رأس جدید عضوی از فقط دو مثلث است، که هر کدام از آن‌ها متناظر با یکی از دو حالت مثلث شامل v در گراف اصلی است. همچنین با توجه به این که یال‌های اضافه‌ی بین همسایه‌های a و همسایه‌های b را حذف کردیم، هیچ مثلث جدیدی به وجود نمی‌آید و این گراف با تعداد رأس‌های کمتر، دقیقا مطابق با گراف اصلی است.

حالت دوم: فرض کنید که a و b دقیقا ۳ همسایه‌ی مشترک داشته باشند که w سومین همسایه‌ی مشترکشان است. ما باید یک مثلث شامل رأس‌های u و v و یکی از دو رأس a و b انتخاب کنیم. در نتیجه، دو یالی که با a مجاورند ولی با هیچ یک از u و v مجاور نیستند به شرطی که مثلثی شامل هر دو آن‌ها نباشد، بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توانند حذف شوند. اگر چنین حالتی اتفاق بیافتد، یک رأس از درجه‌ی ۲ به وجود می‌آید که می‌توانیم لم ۱ را روی آن اعمال کنیم. همین قضیه برای دو یالی که با b مجاور باشند ولی با هیچ یک از u و v مجاور نباشند به وجود می‌آید. در نتیجه، می‌توانیم فرض کنیم که a و b و w تشکیل یک مثلث می‌دهند. یکی از دو رأس a و b باید با u و v تشکیل یک مثلث بدهد و دیگری باید با w در یک مثلث باشد. حالا ما u و v را حذف کرده و رأس‌های a و b را ادغام می‌کنیم و یال‌های چندگانه‌ی به‌وجودآمده را حذف می‌کنیم. در گراف به‌وجودآمده، یال بین رأس حاصل از ادغام a و b و رأس w می‌تواند عضو دو مثلث باشد که این دو حالت دقیقا متناظر با این است که مثلث $\{a,v,u\}$ را انتخاب کنیم و رأس‌های b و w با یکدیگر عضو یک مثلث دیگر باشند یا این که مثلث $\{b,v,u\}$ را انتخاب کنیم و رأس‌های a و w با یکدیگر عضو یک مثلث دیگر باشند.

حالت سوم: فرض کنیم که a و b دقیقا ۴ همسایه‌ی مشترک دارند که u و v و w و x می‌باشند. همانند حالت قبل، دو جفت یال مجاور a و b که با هیچ یک از u و v مجاور نیستند را در نظر می‌گیریم. اگر مثلثی شامل هر دو آن‌ها موجود نباشد همانند حالت قبل آن‌ها را حذف کرده و از لم ۱ استفاده می‌کنیم و در غیر این صورت، هر یک از این دو جفت یال با یال بین w و x تشکیل یک مثلث می‌دهد. حال ما باید یا جفت مثلث $\{u,v,a\}$ و $\{b,w,x\}$ و یا جفت مثلث $\{u,v,b\}$ و $\{a,w,x\}$ را انتخاب کنیم. هر دو این حالت‌ها فقط روی مثلث‌بندی این ۶ رأس تأثیر می‌گذارند و از رأسی به جز این ۶ رأس استفاده نمی‌کنند پس می‌توانیم یکی از این دو حالت را برای مثلث‌بندی این ۶ رأس انتخاب کرده و سپس با حذف این ۶ رأس از گراف، نمونه‌ی کوچک‌تری که معادل با گراف اولیه است بیابیم و مسأله را برای آن حل کنیم. نتیجه می‌گیریم که در این مسأله‌ی مثلث‌بندی، هر گرافی که درجه‌ی بیشینه‌اش حداکثر ۴ باشد و حداقل

یک رأس با درجه‌ی کمتر از۴ داشته‌باشد را می‌توانیم به یک نمونه‌ی کوچک‌تر که معادل با نمونه‌ی اولیه است تبدیل کنیم. حال به بررسی مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف‌های ۴منتظم می‌پردازیم. زیرگراف القایی شامل رأس v و همسایه‌هایش در گراف ۴ منتظم همریخت با یکی از گراف‌های شکل ۴ خواهد بود:



شکل ۴- حالت های مختلف زیرگراف القایی رأس v و همسایه هایش در گراف ۴ منتظم

نشان می‌دهیم که هر نمونه را می‌توان به نمونه‌ی کوچک‌تری تبدیل کرد اگر رأسی داشته باشد که همسایگی‌اش(زیرگراف القایی شامل رأس v و همسایه‌هایش را همسایگی v می‌نامیم) یکریخت با هیچ یک از ۲ حالت $2b$ و $3\mathrm{a}$ در شکل ۴ نباشد.

لم۴: فرض می‌کنیم که گراف G یک گراف ۴ منتظم برای مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی است که همسایگی رأس v از آن با هیچ یک از گراف‌های $2b$ و $3a$ و $3b$ در شکل۳ یکریخت نیست. در زمان ثابت می‌توانیم نشان دهیم که این گراف قابل مثلث‌بندی نیست و یا آن را به یک گراف معادل گراف G با تعداد رأس‌های کمتر تبدیل کنیم.

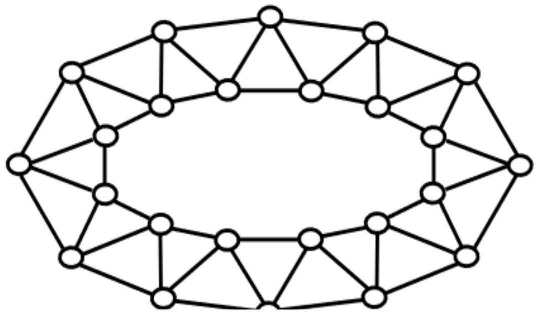
اثبات: همسایگی ممکن برای رأس v را در نظر بگیرید. اگر این همسایگی یکریخت با حالت ۰ در شکل ۳ باشد چون هیچ مثلثی شامل رأس v نمی‌شود پس گراف G قابل مثلث‌بندی نیست. همچنین اگر این همسایگی، یکریخت با حالت ۵ یا ۶ در شکل ۳ باشد نیز گراف G قابل مثلث‌بندی نخواهد بود زیرا در صورت انتخاب هر مثلث شامل رأس v و حذف آن از گراف G، باعث به وجود آمدن رأسی از درجه‌ی حداکثر۱ در گراف خواهد شد. اگر همسایگی رأس v یکریخت با یکی از حالات 1 یا $2a$ یا $3c$ باشد آنگاه یالی مجاور v وجود دارد که عضو هیچ مثلثی نیست چرا که دو سر آن هیچ همسایه‌ی مشترکی با یکدیگر ندارند. حالا حالت $4a$ را بررسی می‌کنیم: یال از رأس بالا چپ به رأس پایین راست را در نظر بگیرید. این یال عضو دو مثلث است که یکی از آن ها شامل v و دیگری شامل رأس بالا راستی است. هر یک از این دو مثلث را که انتخاب کرده و از گراف حذف کنیم باعث می‌شود که رأسی با درجه‌ی حداکثر ۱ به وجود بیاید؛ در نتیجه نباید هیچ‌یک از مثلث‌های شامل این یال انتخاب شود. پس این یال را از گراف حذف کرده و لم۳ را اعمال می‌کنیم. برای حالت$4\mathrm{b}$ بدین صورت عمل می‌کنیم: یکی از چهار یال موجود درهمسایگی v را که مجاور v نیست، در نظر بگیرید . به عنوان نمونه یال بین دو رأس بالایی را در نظر می‌گیریم . این یال عضو یک یا دو

مثلث است، یکی با v و دیگری با یک رأس ممکن‌الوجود سوم در خارج از همسایگی v. فرض کنید که مثلث را با این یال و v در یک مثلث قرار می‌دهیم، در نتیجه دو رأس باقیمانده، درجه‌ی دو خواهند گرفت و بنابراین آن‌ها می‌توانند فقط در یک مثلث در کنار هم و با یک همسایه مشترک باشند. ازاین‌رو، برای هر یک از چهار یال درهمسایگیv، اگر نقاط انتهایی هر دو یال و یال مخالف (یال بین دو رأس دیگر درهمسایگی محذوفv هیچ همسایه مشترکی به‌جز v نداشته باشند، آن‌ها را حذف می‌کنیم. توجه داشته باشید که هیچ حالتی وجود ندارد که هر چهار یال از آن باقی بماند زیرا هر یک از چهار رأس گوشه فقط یک همسایه در خارج از همسایگیv دارد. ازاین‌رو می‌تواند حداکثر دو همسایه مشترک وجود داشته باشد، و اگر دو همسایه وجود داشته باشد، باید نقاط انتهایی یال‌های مخالف را درگیر کنند. اکنون می‌توانیم لم ۳ را اعمال کنیم.

با کم کردن تعداد همسایه‌های محلی ممکن از یک رأس در یک نمونه به سه مورد، اکنون یک مورد دیگر امکان‌پذیر را حذف می‌کنیم.

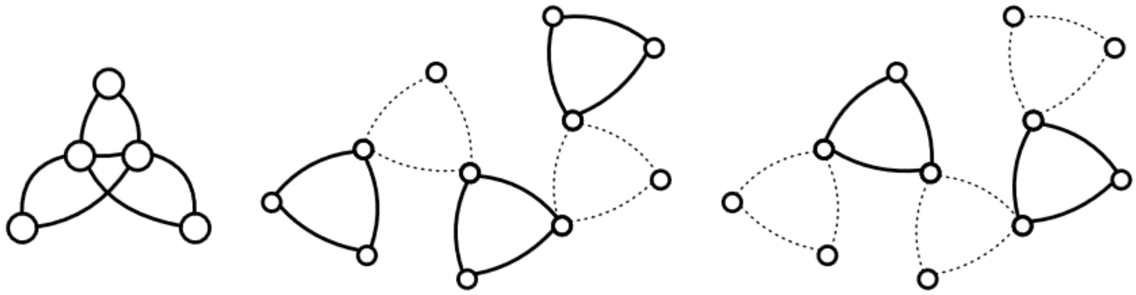
لم ۵: فرض می‌کنیم که گراف G یک گراف نمونه‌ی ۴ منتظم برای مثلث‌بندی رأسی است که در آن همسایگی هر رأس برابر با یکی از موارد 2b، 3a یا 3b در شکل ۴ است. نتیجه می‌گیریم رأس‌هایی که همسایگی آن‌ها مطابق مورد 3b است تشکیل مؤلفه‌ی همبندی مستقل از بقیه‌ی گراف می‌دهند. در زمان خطی، می‌توانیم تصمیم بگیریم که G قابل مثلث‌بندی رأسی نیست یا این که این مؤلفه‌ها را حذف کنیم تا نمونه‌ی کوچک‌تر معادل به دست آوریم.

اثبات: رأس v رابه‌عنوان یک رأس که همسایگی آن مطابق با مورد 3b در شکل ۴ باشد، فرض کنید. رأس چپ بالاییv در شکل را u می‌نامیم. همسایگی u را در نظر بگیرید. این همسایگی نمی‌تواند با مورد 2b از شکل ۴ یکریخت باشد زیرا حاوی یک رأس مجاور با دو رأس دیگر در همسایگی رأسv است. این همسایگی همچنین نمی‌تواند با مورد 3a یکریخت باشد، زیرا v از درجه‌ی ۴ است و بنابراین نمی‌تواند یال اضافی درهمسایگی u در خارج از همسایگیv داشته باشد. نتیجه می‌گیریم که همسایگی u باید با مورد 3b در شکل ۴ برابر باشد. بنابراین، دو رأس بالایی نیز یک همسایه مشترک در خارج از همسایگیv دارند. ما می‌توانیم این استدلال را تکرار کنیم و از آن برای u استفاده کنیم تا نتیجه بگیریم که رأس سمت راست بالا در تصویرکه آن را w می‌نامیم نیز دارای همان همسایگی است. این نشان می‌دهد که w و رأس جدید شناخته‌شده در مرحله قبل باید همسایه مشترک دیگری داشته باشند. به‌این‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که هر رأس در مؤلفه‌ی همبندی شاملv دارای این همسایگی است. نمونه‌ای از چنین مؤلفه‌ی همبندی را در شکل۵ نشان‌داده‌ایم. به‌آسانی می‌توان فهمید که رأس‌های چنین مؤلفه‌ی همبندی را می‌توان مثلث‌بندی کرد، اگر و فقط اگر تعداد رأس‌های آن مضربی از ۳ باشد. بنابراین، ما می‌توانیم تصمیم بگیریم که اگر این خاصیت برقرار نباشد، دارای نمونه‌ای غیر قابل مثلث‌بندی رأسی هستیم و در غیر این صورت می‌توانیم آن را در زمان خطی حذف کنیم تا نمونه‌ای کوچک‌تر و معادل گراف اصلی به دست آوریم.



شکل ۵- مولفه ی همبندی که در آن همسایگی همه‌ی رأس ها مطابق حالت 3b در شکل ۳ است.

پس ما مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف‌های با درجه‌ی بیشینه‌ی ۴ را به نمونه‌هایی که هیچ یک از لم‌های ۳ و ۴ و۵ راجع به آن‌ها قابل اعمال نیست و همسایگی هر رأس آن‌ها مطابق حالت 2b یا 3a در شکل۴ می‌باشد کاهش دادیم. v را یک رأس در یک نمونه‌ی کاهش‌یافته با همسایگی برابر با حالت 3a قرار دهید. توجه داشته باشید که v یک رأس مجاور با همان همسایگی دارد و دارای سه رأس مجاور است که همسایگی آن‌ها همریخت با حالت 2b است. ما یک جفت رأس مجاورکه همسایگی حالت 3a دارد را فن خواهیم نامید ، و به تعدادی رأس مجاور که همسایگی همه‌ی آن‌ها یکریخت با حالت 2b است را ابر مثلث می‌نامیم. شکل ۶ را ببینید.

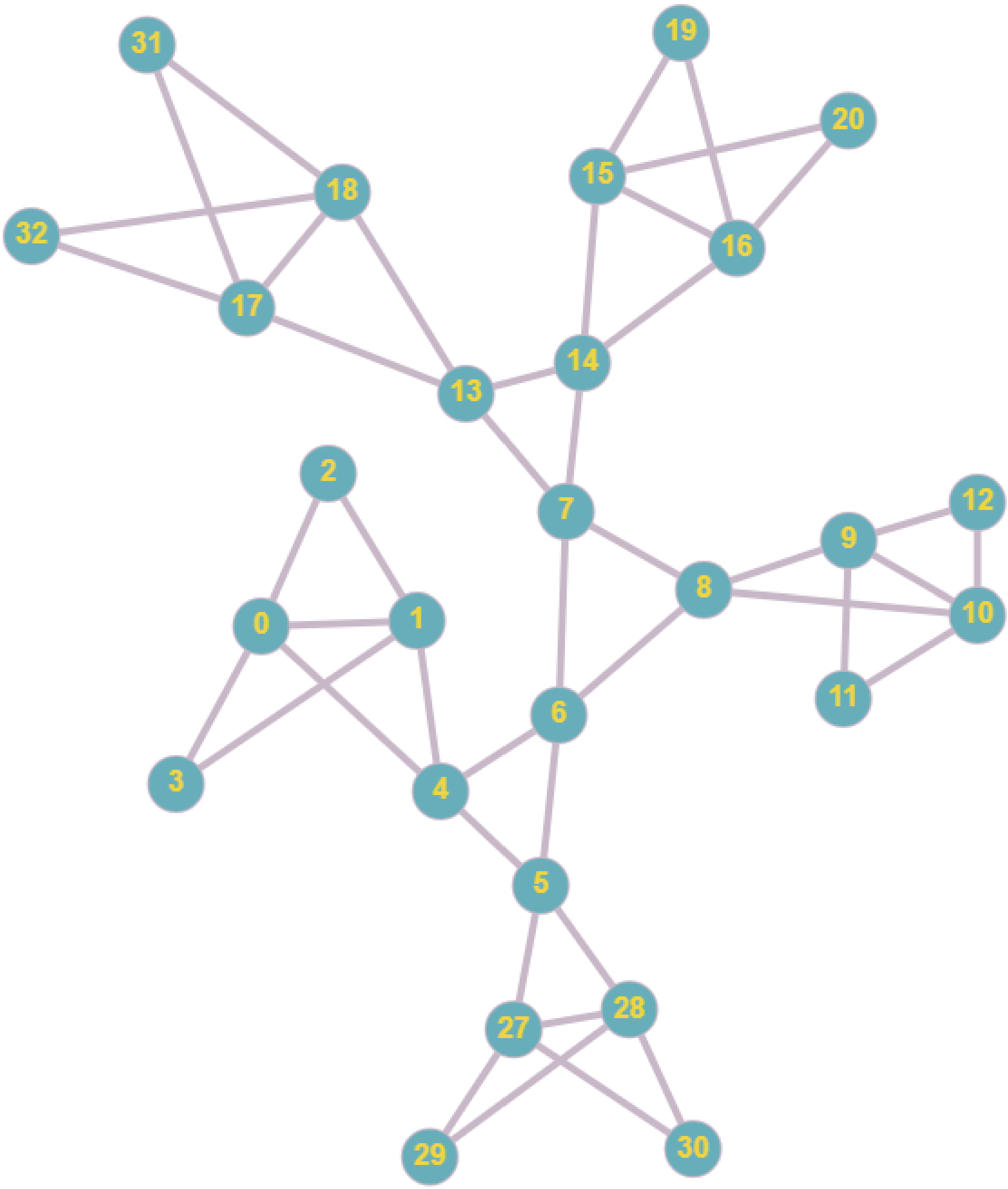


شکل ۶-سمت راست:دو حالت مختلف مثلث‌بندی رأس‌های یک ابرمثلث سمت چپ: یک فن(شامل دو رأس اصلی و سه رأس کناری)

توضیح می‌دهیم که چگونه این نمونه‌های کاهش‌یافته می‌توانند مثلث‌بندی شوند. در یک فن، باید مثلثی را که شامل دو رأس میانی و دقیقاً یکی از سه رأس کناری است، انتخاب کنیم. در یک ابرمثلث، هر مثلث انتخاب می‌شود یا مثلث‌های همسایه‌ی آن (از نوع ابرمثلث یا فن) انتخاب می‌شوند. ازاین‌رو، مثلث‌های مجاور بین انتخاب و عدم انتخاب در یک مثلث‌بندی از یک ابرمثلث، متضاد هم خواهند بود. شکل ۵ را ببینید. اگر یک سری مثلث‌های مجاور، چرخه‌ای شامل تعدادی فرد از این مثلث‌ها را تشکیل دهند، نمونه آن یک نمونه‌ی غیرقابل مثلث‌بندی است زیرا مثلث‌های یک دور از مثلث‌ها با طول فرد نمی‌توانند دقیقا یکی در میان انتخاب شوند. اگر ابرمثلث، دوری با تعداد فرد از مثلث‌های مجاور نداشته باشد، آنگاه دارای دو گروه از رأس‌های مرزی است که آن را به فن وصل می‌کند: از هر راه‌حل، تمام مثلث‌های فن متصل به یک گروه انتخاب می‌شوند و تمام مثلث‌های فن متصل به گروه دیگر انتخاب نخواهند شد (به

شکل ۵ نیز مراجعه کنید). تنها استثناء، ابرمثلث یکریخت با تک رأس است که به‌طور مستقیم دو فن را به هم وصل می‌کند. در اینجا رأس تک عضو هر دو گروه رأس‌های کناری است.

حالا رابطه‌ی‌بین مثلث‌بندی رأسی گراف‌های با حداکثر درجه‌ی ۴ و مسأله‌ی EXACT 3-SATISFIABILITY پدیدار می‌شود. یعنی، ما می‌توانیم یک نمونه کاهش‌یافته از گراف‌های مثلث‌بندی شده با حداکثر درجه‌ی۴ را به‌عنوان نمونه EXACT 3-SATISFIABILITY به روشی که ذکر می‌کنیم تفسیر کنیم: ما یک فن را به‌عنوان یک کلاوز دارای۳ لیترال تفسیر می‌کنیم که متغیرهای مربوط به آن‌ها توسط ابرمثلث‌های مجاور این فن نشان داده‌شده است. دقیقاً یک مثلث از فن باید انتخاب شود و این انتخاب دقیقاً مشخص می‌کند که کدام مثلث‌ها در ابرهای مجاور انتخاب می‌شوند. به‌این‌ترتیب، هر ابرمثلث را به‌عنوان متغیری تعبیر می‌کنیم که می‌تواند بر اساس این که کدام مثلث ها در مثلث‌بندی رأسی آن انتخاب می‌شوند، مقدار درست یا غلط بگیرد. هر یک از دو روش تخصیص مقدار درستی با یکی از دو روش ممکن برای مثلث‌بندی رأسی ابرمثلث متناظرند. اگر یکی از دو روش ممکن برای تقسیم یک ابر به مثلث را داشته باشیم و مقدار درستی تخصیص‌داده‌شده به متغیر مربوطه را با مقدار درست متناظر کنیم، می‌توانیم لیترال‌های مثبت و منفی این متغیر را تعریف کنیم. یعنی، اگر در مثلث‌بندی این ابرمثلث، مثلثی از یک فن خاص انتخاب شود، در حقیقت به معنی مقدار درست‌گرفتن متغیر متناظر با آن ابر مثلث در آن کلاوز خواهد بود. در غیر این صورت، به معنی ظاهر شدن متغیر در آن کلاوز با مقدار نادرست بود. بگذارید روی یک مثال بررسی کنیم:



شکل ۷-یک ابر مثلث نمونه که نشانگر متغیری است که در ۵ کلاوز مختلف که هر یک از کلاوز ها متناظر با یک فن در این شکل هستند ظاهر شده است.

شکل۷ شامل یک ابرمثلث است که از رأس‌های$\{4,5,6,7,8,13,14\}$ تشکیل شده است. فرض می‌کنیم که این ابرمثلث متناظر با متغیر a باشد. در این صورت، مجموعه‌ی رأس‌های$\{4,5,8,13,14\}$ لیترال‌های متغیر a خواهند بود چرا که هر یک از آن‌ها هم عضو ابرمثلث مربوط به متغیر a و هم عضو یک فن هستند. در مثلث‌بندی احتمالی گراف شامل شکل۷ به عنوان یک زیرگراف القایی، دو حالت ممکن است:

حالت اول: مثلث$\{6,7,8\}$ انتخاب شده باشد: در این صورت، مثلث‌های $\{\{14,15,16\},\{13,17,18\},\{5,27,28\},\{0,1,4\}\}$ نیز باید انتخاب شوند. این بدین معنی است که لیترال‌های متناظر با رأس‌های$\{4,5,13,14\}$ در کلاوز متناظرشان مقدار درستی یافته‌اند چرا که با دو رأس اصلی یک فن تشکیل مثلث داده‌اند ولی لیترال متناظر با رأس 8 مقدار نادرستی گرفته است چرا که با دو رأس مرکزی فنی که عضو آن است تشکیل مثلث نداده است. از این اتفاق، دو تعبیر می‌توانیم بکنیم: یکی این که رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ متناظر با لیترالa و رأس8 متناظر با لیترال$\bar{a}$ است و به متغیرa مقدار درستی نسبت داده‌ایم؛ و دیگری این‌که رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ متناظر با لیترال$\bar{a}$ و رأس8 متناظر با لیترالa است و به متغیرa مقدار نادرستی تخصیص داده‌ایم. از نظرمفهومی این دو تعبیر هم‌معنی‌اند.

حالت دوم: مثلث$\{6,7,8\}$ انتخاب نشده باشد: در این صورت، مثلث‌های$\{\{13,17,18\},\{14,15,16\},\{8,9,10\},\{4,5,6\}\}$ باید انتخاب شوند. . این بدین معنی است که لیترال‌های متناظر با رأس‌های$\{4,5,13,14\}$ در کلاوز متناظرشان مقدار نادرستی یافته‌اند چرا که با دو رأس اصلی فنی که عضو آن هستند تشکیل مثلث نداده‌اند ولی لیترال متناظر با رأس 8 مقدار درستی گرفته است چرا که با دو رأس مرکزی فنی که عضو آن است تشکیل مثلث داده است. از این اتفاق نیز، دو تعبیر می‌توانیم بکنیم: یکی این که رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ متناظر با لیترالa و رأس8 متناظر با لیترال$\bar{a}$ است و به متغیرa مقدار نادرستی نسبت داده‌ایم؛ و دیگری این‌که رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ متناظر با لیترال$\bar{a}$ و رأس8 متناظر با لیترالa است و به متغیرa مقدار درستی تخصیص داده‌ایم. از نظر مفهومی این دو تعبیر نیز هم‌معنی‌اند.

همان طور که مشاهده‌نمودید، مقدار گرفتن هر یک از لیترال‌ها، مقدار بقیه‌ی لیترال‌های آن ابرمثلث‌ها را مشخص میکند. مثلاً در این مثال معلوم شد که مقدار لیترال‌های متناظر با رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ با یکدیگر یکسان و مخالف با مقدار لیترال متناظر با رأس8 است. از نظر مفهومی در وجود یا عدم وجود جواب متناظر با $EXACT - 3\ SAT$ این گراف، فرقی نمی‌کند که رأس‌های $\{4,5,13,14\}$ متناظر با لیترال$\bar{a}$ و رأس8 متناظر با لیترالa باشد و یا برعکس باشد. فقط در صورت وجود جواب، مقدار تخصیص یافته به متغیر a در این دو تعبیر، با یکدیگر متفاوت خواهد بود.

اکنون ثابت خواهیم که این گراف، ویژگی شماره۶ را دارد.$f_+(x)$ به معنای تعداد رأس‌های متناظر با لیترالx و $f_-(x)$ به معنی تعداد رأس‌های متناظر با $\bar{x}$ در یک گراف مورد بحث است.

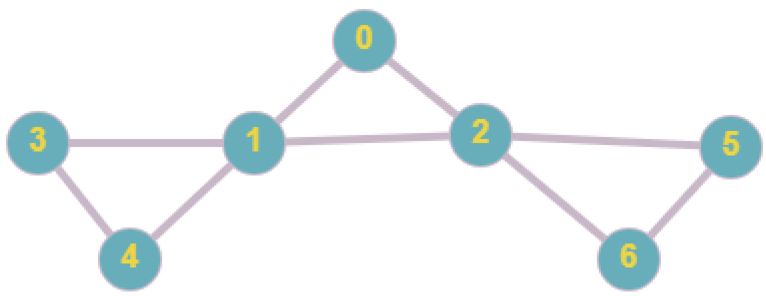
ویژگی۶: برای هر متغیر x در یک فرمول صدق‌پذیری ، اختلاف $f_+(x)$ و $f_-(x)$ مضربی از ۳ باشد.

گزاره‌ی ۷ : یک EXACT 3-SATISFIABILITY متناظر با یکی از گراف‌های مورد بحث، ویژگی ۶ را برآورده می کند.

اثبات: x را به عنوان یک متغیر در نمونه‌ای از EXACT 3-SATISFIABILITY در نظر بگیرید. ابرمثلثی که x را نشان می‌دهد در نظر بگیرید و فرض کنید که +t و -t به ترتیب تعداد مثلث‌های انتخاب‌شده در این ابرمثلث هنگامی که x برابر درست یا غلط (False or True) قرار می‌گیرد، باشد. یک ابرمثلث دارای تعداد مشخصی از رئوس است و برای هر انتساب ارزش درستی یا نادرستی به متغیر x، هر رأس یا در یک مثلث یا به عنوان یک لیترال انتخاب می‌شود، بنابراین: $3t_+ + f_+(x) = 3t_- + f_-(x)$ ازاین‌رو $f_+(\mathrm{x}) \equiv f_-(x) \ (mod\ 3)$.

لم۸: هر متغیر x در یک فرمول که ویژگی ۶ را ارضا می‌کند را می‌توان با یک ابرمثلث نشان داد. چنین ابرمثلثی از $2f(x) - 3$ رأس تشکیل‌شده است.

اثبات: بدون کاسته‌شدن از کلیت مسأله، فرض کنید $f_+(x) > 0$ باشد و $F(x) = (\mathrm{f}_+(\mathrm{x}),\mathrm{f}_-(\mathrm{x}))$ را تعریف کنید. توجه کنید که یک ابرمثلث تک‌رأسی مطابق با $F(x) = (1.1)$ است؛ یک ابر مثلث که فقط شامل یک مثلث است با $F(\mathrm{x})=(3,0)$ مطابقت دارد، دو مثلث مجاور با $F(\mathrm{x})=(2,2)$ همریخت است، و یک دنباله از چهار مثلث با $F(\mathrm{x})=(3,3)$ معادل است. همچنین گراف شکل۸ یکریخت با $F(\mathrm{x})=(4,1)$ (و یا $F(x) = (1,4)$) است.



شکل ۸

این ابرمثلث‌های کوچک را می‌توان به ابرمثلث‌های بزرگ‌تر که یکریخت با هر ترکیبی به شکل $F(x) = (\mathrm{f}_+(\mathrm{x}),\mathrm{f}_-(x))$ به‌طوری که $\mathrm{f}_+(\mathrm{x})\equiv\mathrm{f}_-(\mathrm{x}) \ (mod\ 3)$ است، تبدیل کنیم؛ بدین صورت که در هر مرحله $f_+(x)$ یا $\mathrm{f}_-(\mathrm{x})$ را به روشی که در ادامه توضیح می‌دهیم، به اندازه‌ی ۳ تا افزایش دهیم: یک رأس از درجه‌ی۲ که معادل با یک لیترال را در یک ابرمثلث معادل با $F(x) = (\mathrm{f}_+(\mathrm{x}),\mathrm{f}_-(\mathrm{x}))$ انتخاب می‌کنیم و نام آن را رأس شماره ۰ می‌گذاریم. رأس شماره‌ی ۰ را همانند شکل شماره ۸ به دو رأس جدید با شماره‌های ۱ و ۲ متصل کرده و همسایگی رأس‌های شماره ۱ و ۲ را مطابق شکل ۸ گسترش می‌دهیم. اکنون رأس ۰ دیگر یک لیترال نیست، اما رأس‌های شماره ۳ و ۴ و ۵ و ۶ دقیقا الان می‌توانند به عنوان لیترال‌هایی هم‌علامت با لیترال معادل رأس ۰ قبل از گسترش گراف، عمل کنند! بنابراین ما توانستیم $\mathrm{F}(\mathrm{x})=(\mathrm{f}_+(\mathrm{x}),\mathrm{f}_-(\mathrm{x}))$ را به $F(x) = (\mathrm{f}_+(\mathrm{x})+3,\mathrm{f}_-(\mathrm{x}))$ و یا به طور معادل به

$F(x) = (f_+(x), f_-(x))$ تبدیل کنیم و در نتیجه می‌توانیم به هر ابرمثلث با ترکیب $F(x)=(f_+(x), f_-(x)+3)$ به طوری که $f_+(x) \equiv f_-(x) \pmod 3$ باشد برسیم.

قضیه‌ی ۹: تبدیلی با زمان خطی بین مسأله‌ی مثلث‌بندی گراف‌های با حداکثر درجه‌ی ۴ و مسأله‌ی EXACT 3-SATISFIABILITY وجود دارد به طوری که ویژگی شماره۶ را دارا است و محدودیت های زیر را ارضا می‌کند:

۱-هر نمونه با با نمونه‌ی تبدیل‌شده‌ی آن نمونه، معادل است.

۲- یک نمونه‌ی EXACT 3-SATISFIABILITY با مجموعه متغیر X و مجموعه کلاوزهای C از یک نمونه‌ی n رأسی مسأله‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف‌های با حداکثر درجه‌ی ۴ به دست می‌آید به طوری که

$$2|C|+\sum_{x\in X}(2f(x)-3) \leq n$$

۳-یک‌نمونه‌ی مثلث‌بندی رأسی گراف با درجه‌ی حداکثر۴ از یک نمونه‌ی EXACT3-SATISFIABILITY با مجموعه متغیر X و مجموعه عبارات C به طوری که ویژگی ۶ را برآورده می‌کند به دست می‌آید که خاصیت روبرو را داراست: $2|C|+\sum_{x\in X}(2f(x)-3) = n$.

توجه کنید که به آسانی می‌توان هر نمونه‌ی EXACT 3-SATISFIABILITY با ۳ بار تکرار هر یک از کلاوزهای آن به نمونه‌ای از EXACT 3-SATISFIABILITY تبدیل کرد که ویژگی ۶ را دارد.

فصل سوم: شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش به بررسی بیشتر پیاده‌سازی این رویکردها برای حل مسأله و مقایسه‌ی آن‌ها با یکدیگر می‌پردازیم:

همان طور که قبلا ذکر شد، الگوریتم شماره۱ از مرتبه‌ی($O(2^{\binom{n}{3}})$ که n تعداد رأس‌های گراف است می‌باشد و در نتیجه بسیار ضعیف‌تر از دو الگوریتم دیگر عمل می‌کند بنابراین ما در این‌جا به مقایسه‌ی الگوریتم‌های شماره ۲ و ۳ که قبلاً ذکر کردیم می‌پردازیم. در شبیه‌سازی‌ها به این نتیجه رسیدیم که هر کدام از این ۲ الگوریتم، بسته به اندازه‌ی گراف ورودی و این که مثلث‌بندی‌ای برای گراف موجود باشد یا خیر، می‌توانند عملکردهای بسیار متفاوتی داشته باشند. همچنین باید توجه کنیم که الگوریتم شماره۲ برای تمامی گراف‌ها به کار می‌رود ولی الگوریتم شماره۳ فقط گراف‌هایی که بیشینه درجه‌ی آن‌ها کمتر یا مساوی ۴ باشد را به عنوان ورودی می‌پذیرد. از این رو چند دسته‌ی مختلف از تست‌ها را به این دو الگوریتم داده و خروجی آن‌ها را مشاهده می‌کنیم. دسته‌ی اول، تست‌هایی هستند که از تبدیل یک نمونه‌ی $3-SAT$ به نمونه‌ی EXACT 3-SAT و سپس تبدیل نمونه‌ی EXACT 3-SAT به نمونه‌ی گراف به دست آمده‌اند.

قضیه‌ی ۱۰: هر نمونه‌ی $3-SAT$ قابل تبدیل به یک نمونه‌ی EXACT 3-SAT معادل است.

اثبات: هر کلاوز به شکل (a,b,c) از نمونه‌ی $3-SAT$ را با ۳کلاوز به شکل $(\bar{\mathrm{a}}|\mathrm{d}|\mathrm{e})\&(\mathrm{b}|\mathrm{e}|\mathrm{f})\&(\bar{\mathrm{c}}|\mathrm{f}|\mathrm{g})$ جایگزین می‌کنیم که نمونه‌ی EXACT 3-SAT معادل به دست آید. d و e و f و g متغیرهای دودویی دلخواه هستند. به آسانی با استفاده از جدول درستی می‌توان درستی این رابطه را تحقیق کرد.

قضیه‌ی ۱۱: هر نمونه‌ی EXACT *3-SAT* قابل تبدیل به یک نمونه‌ی 3-SAT معادل است.

اثبات: هر کلاوز به شکل (a,b,c) از نمونه‌ی EXACT 3-SAT را با ۴کلاوز به شکل $(\mathrm{a}|\mathrm{b}|\mathrm{c})\&(\bar{\mathrm{a}}|\bar{\mathrm{b}}|0)\&(\bar{\mathrm{b}}|\bar{\mathrm{c}}|0)\&(\bar{\mathrm{a}}|\bar{\mathrm{c}}|0)$ جایگزین می‌کنیم که نمونه‌ی3-SAT معادل به دست آید. به آسانی با استفاده از جدول درستی می‌توان درستی این رابطه را تحقیق کرد.

در جدول شماره۱، اطلاعات مربوط به ۱۵تست که از تبدیل نمونه‌ی 3SAT ارضاپذیر دارای ۲۰ کلاوز و ۹۱ متغیر به گراف به دست آمده‌اند و نتیجه‌ی عملکرد الگوریتم‌های شماره۲ و ۳ را برای آن‌ها مشاهده می‌کنیم. گراف‌های معادل با این نمونه‌ها همگی دارای ۵۴۰۰ رأس و ۱۰۸۰۰ یال هستند.

شماره تست	زمان اجرای الگوریتم ۲	زمان اجرای الگوریتم ۳
1	58.1594s	21.702s
2	20.3461s	27.8533s
3	80.8129s	31.6241s
4	timeout	28.9615s
5	31.2647s	28.9922s
6	121.656s	28.6974s
7	68.3442s	26.5528s
8	100.877s	26.2411s
9	63.7932s	26.4909s
10	23.878s	25.3431s
11	26.0717s	25.6512s
12	32.4291s	26.6262s
13	38.0166s	29.5754s
14	76.5981s	27.47s
15	25.1596s	25.5084s

جدول ۱

همان‌طور که در جدول شماره۱ مشاهده‌می‌شود، برای تست‌هایی که از تبدیل یک‌نمونه‌ی قابل حل 3-SAT به گراف معادلشان به وجود آمده‌اند؛ الگوریتم شماره۳ در مجموع بهتر عمل می‌کند و دلیل آن نیز استفاده از نرم‌افزار قدرتمند minisat برای حل نمونه‌ی 3-SAT معادل گراف و در نتیجه یافتن مثلث‌بندی معتبر است.

جدول شماره۲، نشان‌دهنده‌ی زمان پاسخگویی الگوریتم‌های شماره۲ و ۳ برای تست‌هایی است که از تبدیل نمونه‌های 3-SAT ارضا ناپذیر شامل ۵۰ کلاوز و ۲۱۸ متغیر به گراف‌های معادلشان، به‌دست آمده‌اند. هر کدام از این گراف‌ها دارای ۱۲۹۳۰ رأس و ۲۵۸۶۰ یال می‌باشند.

شماره تست	زمان اجرای الگوریتم ۲	زمان اجرای الگوریتم ۳
1	timeout	0.233s
2	timeout	0.239s
3	timeout	0.255s
4	timeout	0.244s
5	timeout	0.246s

6	timeout	0.251s
7	timeout	0.251s
8	timeout	0.236s
9	timeout	0.234s
10	timeout	0.230s

جدول ۲

همان طور که در جدول شماره۲ مشاهده می‌شود، به ازای گراف‌هایی که از روی نمونه های بزرگ و ارضا نشدنی 3-SAT ساخته شده اند، الگوریتم شماره ۳ با استفاده از تبدیل گراف به نمونه‌ی 3-SAT و حل آن با نرم افزار minisat خیلی سریع به غیر قابل مثلث‌بندی بودن گراف پی‌می‌برد؛ در حالی که الگوریتم شماره ۲ در مدت زمان دو دقیقه نمی‌تواند مثلث‌بندی برای گراف بیابد و از طرفی نمی‌تواند به طور قاطع اعلام کند که مثلث‌بندی برای گراف وجود ندارد؛ در نتیجه timeout می‌شود.

نتیجه‌ای که ما از بررسی تعداد زیادی گراف۴منتظم که به طور تصادفی ساخته شده بودند گرفتیم، این بود که هر چه تعداد رأس‌های گراف به تصادف ساخته‌شده‌ی ۴منتظم بیشتر شود، احتمال قابل مثلث‌بندی رأسی بودن آن نیز شدیدا کاهش می‌یابد. در جدول۳ اطلاعات مربوط به ۱۰ تا تست تصادفی که همگی گراف‌های منتظم هستند آمده‌است.

شماره تست	تعداد رأس ها	درجه ی هر رأس	جواب داشتن	زمان اجرای الگوریتم ۲	زمان اجرای الگوریتم ۳
1	1002	4	NO	0.011s	0.043s
2	7002	4	NO	0.113s	0.314s
3	13002	4	NO	0.262s	0.400s
4	18	3	NO	0.001s	0.001s
5	24000	3	NO	0.291s	0.246s
6	12000	4	NO	0.201s	0.210s
7	12000	3	NO	0.110s	0.170s
8	6000	4	NO	0.097s	0.104s
9	6000	3	NO	0.095s	0.110s
10	7002	3	NO	0.078s	0.099s

همان‌طور که در جدول۳ مشاهده‌می‌شود، برای تست‌های به تصادف‌ساخته‌شده که بیشینه‌درجه‌ی آن‌ها کمتر یا مساوی۴ باشد، به احتمال بسیار زیاد امکان مثلث‌بندی رأسی وجود ندارد و الگوریتم۲ اندکی سریع‌تر از الگوریتم۳ موفق به حل مسأله برای تست مورد نظر می‌گردد.

منابع و مراجع

[1] M. EdithCohen, "NP-Completeness of graph decomposition problems," *Journal of Complexity,* 1991.

[2] T. H. M. K. Andreas Björklund, "Set Partitioning via Inclusion-Exclusion," *SIAM Journal on Computing,* 2009.

[3] M. E. v. K. N. H. L. B. Johan M. M. van Rooij, "Partition Into Triangles on Bounded Degree Graphs," *Theory of Computing Systems,* 2012.