Теоретическое задание 1: матричные вычисления и матричное дифференцирование

Федоров Илья Сергеевич
курс «Машинное обучение» 317 группа ВМК МГУ

27 октября 2019 г.

Задача 1. Докажем тождество по определению обратной матрицы.

$$
\begin{aligned}
&(A+UCV)(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = \\
&I-U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}+UCVA^{-1}-UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = \\
&I+UCVA^{-1}-(U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}+UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = \\
&I+UCVA^{-1}-(U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}+UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1})VA^{-1} = \\
&I+UCVA^{-1}-(U+UCVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = \\
&I+UCVA^{-1}-UC(C^{-1}+VA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = \\
&I+UCVA^{-1}-UCVA^{-1} = I
\end{aligned}
$$

Задача 2.
a)

$$
\left\|uv^T-A\right\|_F^2-\|A\|_F^2=\sum_{1\le i,j\le n}(u_iv_j-a_{ij})^2-\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}^2=\sum_{1\le i,j\le n}\left[(u_iv_j)^2-2u_ia_{ij}v_j\right]= \\
=\left\|uv^T\right\|_F^2-2u^TAv
$$

b) Воспользуемся тождеством Вудбери.

$$
\left(2I_n+aa^T\right)^{-1}=\frac{I_n}{2}-\frac{a}{2}\left(1+\frac{a^Ta}{2}\right)^{-1}\frac{a^T}{2}=\frac{I_n}{2}-\frac{aa^T}{4\left(1+\frac{a^Ta}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(I_n-\frac{aa^T}{2+\langle a,a\rangle}\right)
$$

Тогда исходное выражение примет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\left(2I_n + aa^T\right)^{-1}\left(uv^T + vu^T\right)\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\left(I_n - \frac{aa^T}{2+\langle a,a\rangle}\right)\left(uv^T+vu^T\right)\right) = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(uv^T+vu^T\right) - \frac{1}{2+\langle a,a\rangle}\left(aa^Tuv^T + aa^Tvu^T\right)\right) = \\ = \langle u,v\rangle - \frac{1}{2\left(2+\langle a,a\rangle\right)}\left(\operatorname{tr}\left(a\langle a,u\rangle v^T\right) + \operatorname{tr}\left(a\langle a,v\rangle u^T\right)\right) = \\ = \langle u,v\rangle - \frac{1}{2\left(2+\langle a,a\rangle\right)}\left(\langle a,u\rangle\operatorname{tr}\left(av^T\right) + \langle a,v\rangle\operatorname{tr}\left(au^T\right)\right) = \\ = \langle u,v\rangle - \frac{\langle a,u\rangle\langle a,v\rangle}{2+\langle a,a\rangle}\end{aligned}$$

c) Запишем определение S^{-1} и обозначим $u_i = S^{-1}a_i$:

$$I_d = S^{-1}S = S^{-1}\sum_{i=1}^n a_i a_i^T = \sum_{i=1}^n S^{-1}a_i a_i^T = \sum_{i=1}^n u_i a_i^T$$

Обозначим $u_i = S^{-1}a_i$. Тогда (по условию задачи) нас интересует сумма

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1}a_i, a_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i, a_i\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d u_{ij}a_{ij}$$

Заметим, что последнее выражение - это в точности след матрицы $\sum_{i=1}^n u_i a_i^T$. Но из первой цепочки равенств следует (учитывая линейность tr), что он равен d.

Задача 3.

a)

$$\begin{aligned}df(t) = d\det(A - tI_n) = \det\left(A - tI_n\right)\left\langle\left(A - tI_n\right)^{-T}, d\left(A - tI_n\right)\right\rangle = \\ = -\det\left(A - tI_n\right)\left\langle\left(A - tI_n\right)^{-T}, d\left(tI_n\right)\right\rangle = \\ = -\det\left(A - tI_n\right)\operatorname{tr}\left(A - tI_n\right)^{-T}dt\end{aligned}$$

Следовательно, $f'(t) = -\det(A - tI_n)\operatorname{tr}(A - tI_n)^{-T}$.

$$f''(t) = \left(-\det(A - tI_n)\operatorname{tr}(A - tI_n)^{-T}\right)' = -(\det(A - tI_n))'\operatorname{tr}\left(A - tI_n\right)^{-T} - \det(A - tI_n)\left(\operatorname{tr}(A - tI_n)^{-T}\right)'$$

$$\begin{aligned}d\operatorname{tr}(A - tI_n)^{-T} = \operatorname{tr}\left(d(A - tI_n)^{-T}\right) = \operatorname{tr}\left(-(A - tI_n)^{-1}d(A - tI_n)(A - tI_n)^{-1}\right)^T = \\ \operatorname{tr}(A - tI_n)^{-2}dt\end{aligned}$$

Подставляя все полученные значения, получаем

$$f''(t) = \det(A - tI_n)\left(\operatorname{tr}^2(A - tI_n)^{-1} - \operatorname{tr}(A - tI_n)^{-2}\right)$$

b) $f(t) = \left\|(A+tI_n)^{-1} b\right\| = \left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)^{\frac{1}{2}}$

$$d\left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)}{2\sqrt{\left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)}} = \frac{b^T d\left((A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1}\right) b}{2\sqrt{\left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)}} (=)$$

$$\begin{aligned} d\left((A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1}\right) = d\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} = \\ -\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} d\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} = \\ -\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} 2(A+tI_n)\, d(A+tI_n)\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} = \\ -2\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1}(A+tI_n)\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} dt = \\ -2(A+tI_n)^{-T}\left((A+tI_n)(A+tI_n)^T\right)^{-1} dt = \\ -2(A+tI_n)^{-2T}(A+tI_n)^{-1} dt \end{aligned}$$

Поскольку матрица A симметричная, то

$$(=)\frac{b^T - 2(A+tI_n)^{-2T}(A+tI_n)^{-1} b dt}{2\sqrt{\left(b^T (A+tI_n)^{-T} (A+tI_n)^{-1} b\right)}} = -\frac{b^T (A+tI_n)^{-3} b}{\left\|(A+tI_n)^{-1} b\right\|} dt$$

Следовательно, $f'(t) = -\frac{b^T (A+tI_n)^{-3} b}{\left\|(A+tI_n)^{-1} b\right\|} = -\frac{b^T (A+tI_n)^{-3} b}{f(t)}$.

$$f''(t) = -\frac{\left(b^T (A+tI_n)^{-3} b\right)' f(t) - \left(b^T (A+tI_n)^{-3} b\right) f'(t)}{f^2(t)} (=)$$

$$\begin{aligned} d\left(b^T (A+tI_n)^{-3} b\right) = b^T d(A+tI_n)^{-3} b = 3b^T (A+tI_n)^{-2} d(A+tI_n)^{-1} b = \\ -3b^T (A+tI_n)^{-2}(A+tI_n)^{-1} d(A+tI_n)(A+tI_n)^{-1} b = \\ -3b^T (A+tI_n)^{-4} b dt \end{aligned}$$

$$(=)\frac{3b^T\left(A+tI_n\right)^{-4}bf(t)+\left(b^T\left(A+tI_n\right)^{-3}b\right)f'(t)}{f^2(t)}=$$
$$\frac{3b^T\left(A+tI_n\right)^{-4}b}{f(t)}-\frac{\left(b^T\left(A+tI_n\right)^{-3}b\right)^2}{f^3(t)}$$

Задача 4.

a)

$$df(x)=\frac{1}{2}d\operatorname{tr}\left(xx^T-A\right)^T\left(xx^T-A\right)=\operatorname{tr}\left(xx^T-A\right)^T d\left(xx^T-A\right)=2\operatorname{tr}\left(\left(xx^T-A\right)^T x(dx)^T\right)=$$
$$\langle 2\left(xx^T-A\right)^T x,dx\rangle$$

Учитывая, что xx^T и A - симметричные матрицы, получаем $\nabla f=2\left(xx^T-A\right)x$. Найдем теперь матрицу Гессе. В следующем выражении используем, что

$$A=A^T=>\langle Adx_2,dx_1\rangle=\langle Adx_1,dx_2\rangle.$$

$$d\langle 2\left(xx^T-A\right)x,dx_1\rangle=2d\left(\langle xx^Tx,dx_1\rangle-\langle Ax,dx_1\rangle\right)=2\left(\langle d\left(xx^Tx\right),dx_1\rangle-\langle Adx_2,dx_1\rangle\right)=$$
$$2\left(\langle\langle x,x\rangle dx_2,dx_1\rangle+\langle xd\langle x,x\rangle,dx_1\rangle-\langle Adx_2,dx_1\rangle\right)=$$
$$2\left(\langle x,x\rangle\langle dx_2,dx_1\rangle+\langle 2x\langle x,dx_2\rangle,dx_1\rangle-\langle Adx_2,dx_1\rangle\right)=$$
$$2\left(\langle x,x\rangle\langle dx_1,dx_2\rangle+2\langle x,dx_1\rangle\langle x,dx_2\rangle-\langle Adx_1,dx_2\rangle\right)=$$
$$2\langle\langle x,x\rangle dx_1+2x\langle x,dx_1\rangle-Adx_1,dx_2\rangle=$$
$$2\langle\left(\langle x,x\rangle I+2xx^T-A\right)dx_1,dx_2\rangle$$

Значит, матрица Гессе равна $\nabla^2 f=2\left(\langle x,x\rangle I+2xx^T-A\right)$

b)

$$df(x)=e^{\langle x,x\rangle\ln\langle x,x\rangle}d\left(\langle x,x\rangle\ln\langle x,x\rangle\right)=e^{\langle x,x\rangle\ln\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle d\langle x,x\rangle+\langle x,x\rangle d\ln\langle x,x\rangle\right)=$$
$$e^{\langle x,x\rangle\ln\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+\frac{\langle x,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\right)d\langle x,x\rangle=e^{\langle x,x\rangle\ln\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)\langle 2x,dx\rangle$$

Следовательно, $\nabla f=2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)x$.

$$
\begin{aligned}
d\langle 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)x,dx_1\rangle = 2\langle d\left(\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\right)\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)x,dx_1\rangle+\\
2\langle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)dx_2,dx_1\rangle+2\langle d\ln\langle x,x\rangle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}x,dx_1\rangle=\\
2\langle\langle 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)x,dx_2\rangle\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)x,dx_1\rangle+\\
2\langle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)dx_1,dx_2\rangle+\\
2\langle\langle 2x,dx_2\rangle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle-1}x,dx_1\rangle=\\
4\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)^2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\langle x,dx_1\rangle\langle x,dx_2\rangle+\\
2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)\langle dx_1,dx_2\rangle+\\
4\langle x,dx_1\rangle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle-1}\langle x,dx_2\rangle=\\
\langle\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(4\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)^2xx^T+\frac{4xx^T}{\langle x,x\rangle}+2\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)I\right)dx_1,dx_2\rangle
\end{aligned}
$$

Значит, матрица Гессе равна $\nabla^2 f=\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(4\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)^2xx^T+\frac{4xx^T}{\langle x,x\rangle}+2\left(\ln\langle x,x\rangle+1\right)I\right)$

c)

$$
\begin{aligned}
df(x)=\frac{p}{2}\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}d\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)=\\
p\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}(Ax-b)^TAdx
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\nabla f=p\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}A^T(Ax-b)$.

$$
\begin{aligned}
\langle d\left(p\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}A^T(Ax-b)\right),dx_1\rangle=\\
\langle pd\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}A^T(Ax-b),dx_1\rangle+\langle p\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}A^TAdx_2,dx_1\rangle(=)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-2}{2}}=\frac{p-2}{2}\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-4}{2}}d\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)=\\
(p-2)\left((Ax-b)^T(Ax-b)\right)^{\frac{p-4}{2}}(Ax-b)^TAdx_2
\end{aligned}
$$

$$
(=)\langle p\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}A^T(Ax-b)(Ax-b)^TA+\|Ax-b\|^{p-2}A^TA\right)dx_2,dx_1\rangle
$$

Значит, меняя dx_1 и dx_2 местами (матрица в скалярном произведении симметричная), получим

$$
\nabla^2 f=p\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}A^T(Ax-b)(Ax-b)^TA+\|Ax-b\|^{p-2}A^TA\right)
$$

Задача 5.

a) Сначала найдем первую производную.

$$df(X) = d\operatorname{tr}\left(X^{-1}\right) = \operatorname{tr}(dX{-1}) = -\operatorname{tr}\left(X^{-1}dXX^{-1}\right) = -\operatorname{tr}\left(X^{-2}dX\right) = \langle -X^{-2T}, dX\rangle$$

Теперь найдем вторую производную.

$$d\langle -X^{-2T}, dX_1\rangle = -\langle \left(2X^{-1}dX^{-1}\right)^T, dX_1\rangle = 2\langle \left(X^{-1}X^{-1}dX_2X^{-1}\right)^T, dX_1\rangle = 2\operatorname{tr}\left(X^{-1}X^{-1}dX_2X^{-1}dX_1\right) = 2\operatorname{tr}\left(X^{-1}dX_2X^{-1}dX_1X^{-1}\right)$$

Поскольку $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, то $X^{-1} \in \mathbb{S}^n_{++}$. Пусть $dX_1 = dX_2 = H \in \mathbb{S}^n$. Также известно, что $\forall X \in \mathbb{S}^n_{++}\ \exists Y : Y^TY = X$. В итоге получаем:

$$2\operatorname{tr}\left(X^{-1}dX_2X^{-1}dX_1X^{-1}\right) = 2\operatorname{tr}\left(X^{-1}HY^TYHX^{-1}\right) = 2\operatorname{tr}\left(X^{-T}H^TY^TYHX^{-1}\right) = 2\operatorname{tr}\left(\left(YHX^{-1}\right)^TYHX^{-1}\right) = 2\langle YHX^{-1}, YHX^{-1}\rangle > 0 \quad \forall H \neq 0$$

b) Сначала найдем первую производную.

$$df(X) = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}-1} d\det X = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}-1}\det X \operatorname{tr}\left(X^{-1}dX\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}X^{-1}dX\right) = \langle \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}X^{-T}, dX\rangle$$

Теперь найдем вторую производную.

$$d\langle \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}X^{-T}, dX_1\rangle = \frac{1}{n}\langle d\left((\det X)^{\frac{1}{n}}X^{-T}\right), dX_1\rangle = \frac{1}{n}\left(\langle\langle \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}X^{-T}, dX_2\rangle X^{-T}, dX_1\rangle - \langle (\det X)^{\frac{1}{n}}\left(X^{-1}dX_2X^{-1}\right)^T, dX_1\rangle\right) (=)$$

Поскольку $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, по критерию Сильвестра $\det X > 0$. Пусть $dX_1 = dX_2 = H \in \mathbb{S}^n$.

$$(=)\frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\langle \operatorname{tr}\left(X^{-1}H\right)X^{-T}, H\rangle - \operatorname{tr}\left(X^{-1}HX^{-1}H\right)\right) = \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}^2\left(X^{-1}H\right)) - \operatorname{tr}\left(X^{-1}H\right)^2\right) = \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\langle X^{-T}, H\rangle^2 - \operatorname{tr}\left(X^{-1}H\right)^2\right) \leq^{CB}$$
$$\frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\left\|X^{-T}H\right\|^4 - \operatorname{tr}\left(X^{-1}H\right)^2\right) = \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\left\|X^{-T}H\right\|^4 - \langle I, X^{-1}H\rangle^2\right) \leq^{CB}$$
$$\frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\left\|X^{-T}H\right\|^4 - n\left\|X^{-1}H\right\|^2\right) \leq \frac{(\det X)^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{n}\left\|X^{-T}H\right\|^4 - n\left\|X^{-1}\right\|^2\|H\|^2\right) = \ldots$$

Задача 6.

a)

$$df(x) = c^T dx + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{3}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} 2\langle x, dx\rangle = c^T dx + \sigma\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle x, dx\rangle = \langle c + \sigma\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} x, dx\rangle$$

Значит, $\nabla f = c + \sigma\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} x$. Условие стационарности $\nabla f = 0$.

$$\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} x = -\frac{c}{\sigma} \quad |x|x = -\frac{c}{\sigma}$$

Взяв модуль от левой и правой части второго уравнения, получим, что

$$|x|^2 = |\frac{c}{\sigma}|$$

Значит, $|x| = \sqrt{|\frac{c}{\sigma}|}$. В итоге получаем стационарную точку (которая существует всегда)

$$x = -\frac{c}{\sigma}\frac{\sqrt{|\frac{c}{\sigma}|}}{|\frac{c}{\sigma}|} = -\frac{c}{\sigma\sqrt{|\frac{c}{\sigma}|}}$$

b)

$$df(x) = a^T dx - \frac{d\left(1 - \langle b, x\rangle\right)}{1 - \langle b, x\rangle} = a^T dx + \frac{b^T dx}{1 - \langle b, x\rangle} = \langle a + \frac{b}{1 - \langle b, x\rangle}, dx\rangle$$

Значит, $\nabla f = a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle}$. Условие стационарности $\nabla f = 0$.

$$a + \frac{b}{1 - \langle b, x\rangle} = 0 \quad -a\left(1 - \langle b, x\rangle\right) = b \quad a\langle b, x\rangle = a + b \quad a\left(\langle b, x\rangle - 1\right) = b$$

Итак, если векторы a и b линейно независимы, то решений нет. Если же они линейно зависимы, то мы знаем коэффициент пропорциональности (здесь мы также учли, что $a, b \neq 0$, поэтому коэффициент единственен). Обозначим его за $\alpha \neq 0$. Получаем уравнение на x: $\langle b, x\rangle - 1 = \alpha$. Если $\alpha \geq 0$, то решений в множестве E нет. Если же $\alpha < 0$, то получаем уравнение: $\sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \alpha + 1$. Если b имеет лишь единственную ненулевую компоненту (а она всегда есть, т.к. $b \neq 0$), то решение единственно. В ином случае решений будет бесконечно много. Все описанные решения будут стационарными точками исходной функции.

c)

$$df = \langle e^{-\langle Ax, x\rangle} c, dx\rangle - \langle c, x\rangle e^{-\langle Ax, x\rangle}\langle\left(A + A^T\right) x, dx\rangle$$

Значит, $\nabla f = e^{-\langle A,x\rangle}(c - 2\langle c,x\rangle Ax)$. Условие стационарности $\nabla f = 0$. Ниже также учитываем, что $A \in S^n_{++}$ => $\det A \neq 0$.

$$2\langle c,x\rangle Ax = c \quad \langle c,x\rangle x = \frac{A^{-1}c}{2} \quad xx^Tc = \frac{A^{-1}c}{2}$$

Домножим последнее равенство на c^T слева. Получим

$$c^Txx^Tc = \frac{c^TA^{-1}c}{2}$$

$$c^Txx^Tc = \langle x^Tc, x^Tc\rangle = \left(x^Tc\right)^2 = \frac{c^TA^{-1}c}{2}$$

Поскольку $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, то $A^{-1} \in \mathbb{S}^n_{++}$, а значит выражение в правой части равенства положительное (с учетом того что $c \neq 0$). Получаем

$$x^Tc = \pm\sqrt{\frac{c^TA^{-1}c}{2}}$$

Таким образом, мы получили совокупность из двух систем линейных алгебраических уравнений (каждая система состоит лишь из 1 уравнения). Она обязательно разрешима, число решений оценивается так же, как в прошлом пункте, поскольку $c \neq 0$. Однако не каждое решение этой совокупности обязательно является точкой стационарности, поскольку действие домножения на c^T не всегда является равносильным. Чтобы получить решения исходной задачи, подставим x^Tc в исходное уравнение.

$$\frac{A^{-1}c}{2} = xx^Tc = x\sqrt{\frac{c^TA^{-1}c}{2}}$$

$$\frac{A^{-1}c}{2} = xx^Tc = -x\sqrt{\frac{c^TA^{-1}c}{2}}$$

Отсюда получаем выражение для x:

$$x = \pm\left(\sqrt{\frac{c^TA^{-1}c}{2}}\right)^{-1}\frac{A^{-1}c}{2}$$