Московский Физико-Технический Институт

Кафедра вычислительной математики

Прямой быстрый метод решения СЛАУ уравнения Пуассона

Студент:
Константин Сошин
611 группа

Преподаватель:
Николай Борисович
Явич

13 мая 2019 г.

1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Пуассона, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате,

$$-\Delta u = f$$

в $\Gamma = (0,1)^2$. И $u = 0$ на Γ.

Возьмем решение

$$u(x,y) = (x-1)(y-1)xy\sin(x)$$

Тогда

$$f(x,y) = (x^2(y^2-y-2) + x(-y^2+y+2) - 2(y-1)y)\sin x - 2(2x-1)(y-1)y\cos x$$

Найдем аппроксимацию решения методом конечных разностей второго порядка на сетке $n \times n$ с шагом h и найдем евклидово расстояние между найденным решением и точным. Точность работы продемонстрируем на сетке размером 100×100

2 Метод решения

Система линейных алгебраических уравнений

$$Au_h = f_h$$

возникающая после аппроксимации методом конечных разностей второго порядка на сетке $n \times n$ с шагом h имеет размерность $N = (n-1)^2$. Реализуем метод решения этой СЛАУ на основе двойного быстрого синус-преобразования с ассимптотической сложностью $O(N\log N)$. Опишем мдею метода. Если у матрицы A известно спектральное разложение,

$$A = WDW^{-1}$$

то решение можно было бы вычислить так:

$$u_h = WD^{-1}W^{-1}f_h$$

где D – диагональная матрица с собственными значениями, W – собственные вектора. Значения собственных чисел можно найти следующим образом:

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2}\sin(\frac{\pi kh}{2})^2 + \frac{4}{h^2}\sin(\frac{\pi mh}{2})^2$$

где k и m горизонтальные и вертикальные индексы узлов сетки. Собственные векторы будем находить с помощью двойного быстрого синус-преобразования:

$$W_{km,ij} = C\sin(\pi ikh)\sin(\pi jmh)$$

Таким образом, сначала для вычисления $v = W^{-1}F_h$ используем быстрое обратное двойное синус-преобразование. Вычисление $p = D^{-1}v$ является умножением на диагональную матрицу и выполняется за $O(N)$. Для вычисления $u = Wp$ используем прямое быстрое двойное синус-преобразование. Получаем решение поставленной задачи, ассимптотическая сложность которого составляет $O(N\log N)$.

3 Результаты

Для сетки 100×100 получено решение разность которого с истинным имеет евклидову норму 0.64.

4 Вывод

Таким образом, была приведена реализация алгоритма решения СЛАУ с использованием двойного синус-преобразования, ассимптотическая сложность которого составляет $O(N \log N)$. Ошибка найденного решения по сравнению с истинным по норме составила 0.64 для сетки 100×100.