Задачи по геометрии для подготовки к Всероссийской олимпиаде школьников

Г. Р. Соснов

28 августа 2023 г.

1 Задачи

1. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательная к Ω, проведенная в точке A пересекает прямую BC в точке P. Пусть M и N — середины сторон AB и AC. Прямая MN пересекает Ω в точках X и Y. Докажите, что $\angle XPA = \angle YPC$.

2. Дана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Точки L на отрезке AB и K на отрезке DC таковы, что $\frac{AL}{LB} = \frac{DK}{KC}$. Точки P и Q на отрезке KL таковы, что $\angle DPC = \angle ABC$ и $\angle AQB = \angle DCB$. Докажите, что P, Q, C и B - лежат на одной окружности.

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Пусть BB_1 — его симедиана. Луч BB_1 вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L. Пусть H_A, H_B, H_C - основания высот треугольника ABC. Луч BH_B вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Докажите, что H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности. (Двенадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина №12)

4. Пусть ABC - треугольник с ортоцентром H, а M — середина BC. Пусть P и Q - различные точки на окружности с диаметром AH, отличные от A, такие что M лежит на прямой PQ. Докажите, что ортоцентр APQ лежит на описанной окружности ABC.

5. Пусть ABC - остроугольный разносторонний треугольник, а M, N, P - середины BC, CA и AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают луч AM в точках D и E соответственно, а прямые BD и CE пересекаются в точке F внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F и P лежат на одной окружности.

6. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; M – середина стороны AB. В описанной окружности Ω треугольника ABC, проведён диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Перпендикуляр к прямой AC', проведённый через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведённый через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что описанная окружность ω треугольника Δ касается окружности Ω. (Всерос 2016 10.8)

2 Решения

1. Проведём прямую l параллельную BC через точу A. Пусть l пересекает BC в бесконечно удалённой точке T_∞. Так как $YX \parallel BC \parallel AT_\infty$, то $\angle AT_\infty Y = \angle PT_\infty X$. Так как AP касательная к Ω, то $\angle XAP = \angle XYA$, а так как $XY \parallel AT_\infty$, то $\angle XAP = \angle XYA = \angle YAT_\infty$. Значит точки X и Y - изогонально сопряжены в треугольнике $T_\infty AP$, поэтому $\angle YPT_\infty = \angle XPA$ (см. рис. 1). $\square$

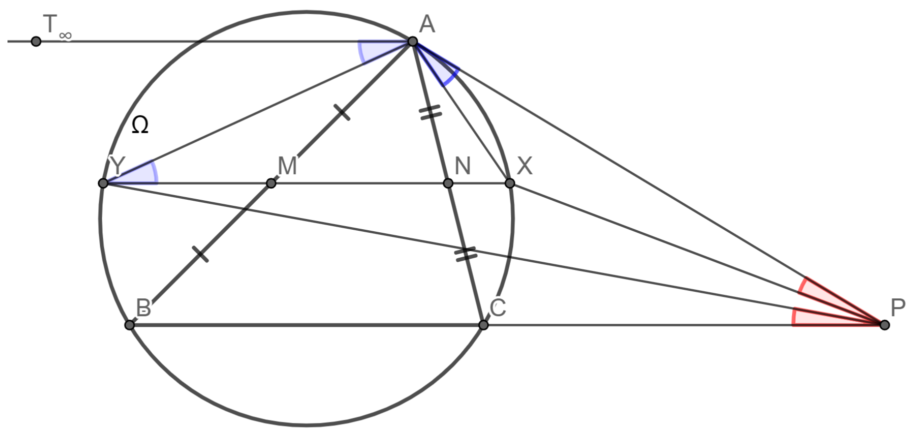

Рис. 1:

2. Пусть AD и BC пересекаются в точке F, тогда K, L и F - лежат на одной

прямой. Действительно, сделаем гомотетию с центром в точке F переводящую AB в DC, она переводит L в K, а значит F, L и K - лежат на одной прямой. Пусть гомотетия с центром в точке F, переводящая K в L, переводит P' в P, а Q в Q'. Тогда $PC \parallel P'B$, $QB \parallel Q'C$, $AP'BQ$ и $DPCQ'$ - вписаны. Также описанные окружности $AP'BQ$ и $DPCQ'$ касаются FB в точках B и C соответственно, так как $\angle AQB = \angle ABF$ и $\angle DQ'C = \angle DCF$. Так как $\angle FQ'C + \angle P'BC = \angle FQB + \angle P'BA + \angle ABC = \angle FQB + \angle AQF + \angle ABC = \angle DCB + \angle ABC = 180°$, то $P'BCQ'$ - вписанный. Тогда $P'B$ и $Q'C$ - антипараллельны относительно $\angle KFC$, но тогда и параллельные им прямые QB и PC - антипараллельны относительно $\angle KFC$, то есть $PQBC$ - вписан (см. рис. 2). □

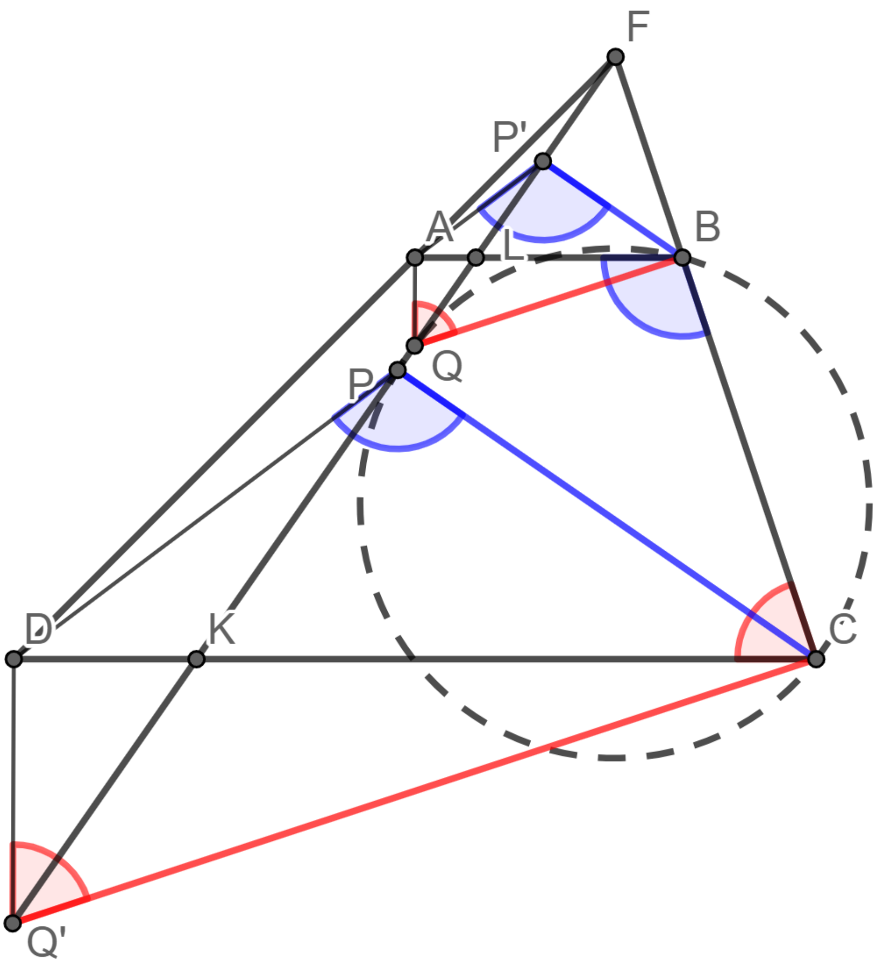

Рис. 2:

3. Докажем, что AC, H_CH_A и LT - пересекаются в одной точке. Пусть $LT \cap AC = P$ и $H_CH_A \cap AC = Q$. Широко известен факт, что $(A, C; H_B, Q) = -1$. Спроецируем из точки T гармоническую четвёрку A, C, B и L на прямую

AC, получим, что $-1 = (A, C; B, T) = (A, C; H_B, P)$, значит $P = Q$, что и требовалось доказать. Тогда, из вписанности AH_CH_AC и $ACLT$: $PA \cdot PC = PH_C \cdot PH_A = PT \cdot PL$, значит H_CH_ATL - вписанный (см. рис. 3). □

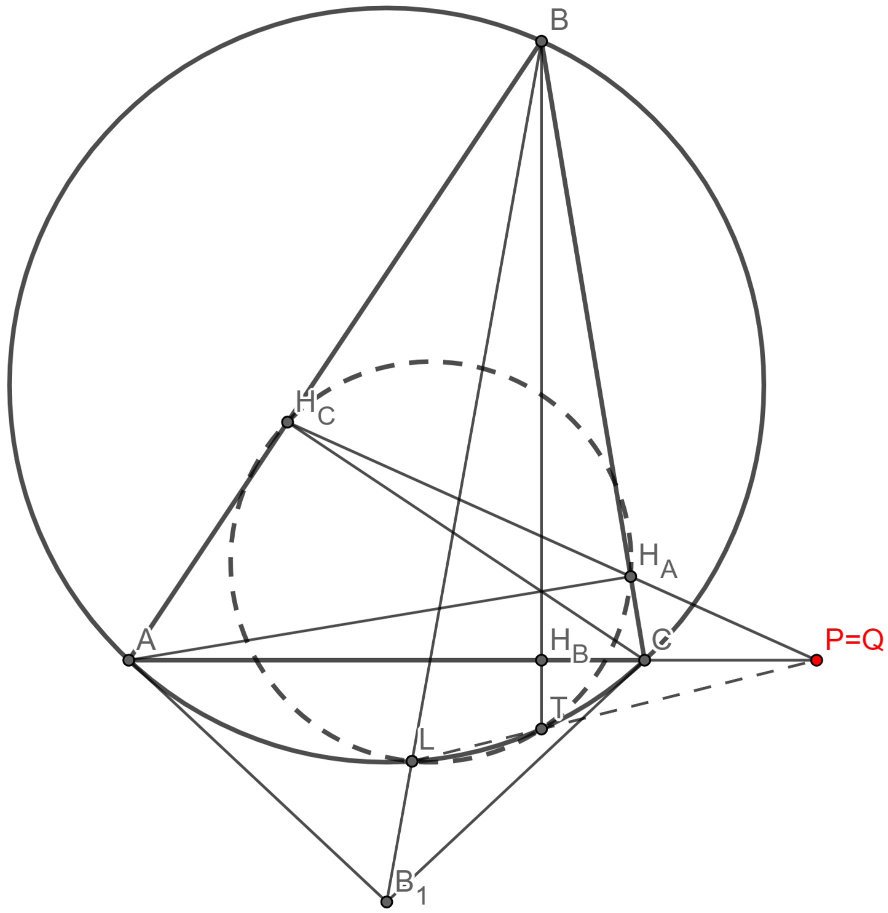

Рис. 3:

4. Пусть R - ортоцентр $\triangle PAQ$, K и N - середины AH и HR - соответственно. Пусть Ω и Γ - описанные окружности треугольников ABC и PAQ, соответственно, а ω - окружность Эйлера $\triangle ABC$. Так как при центральной симметрии ортоцентра R относительно N он переходит в точку диаметрально противоположную точке A относительно Γ - точку H, то $AR \parallel KN$, тогда $KN \perp MN$. Так как $\angle KNM = 90^\circ = \angle KH_AM$, то KNH_AM - вписан в ω. Рассмотрим гомотетию с центром в точке H и коэффициентом 2, при ней ω переходит в Ω, а N - в R, то есть R - лежит на Ω (см. рис. 4). □

5. Заметим, что F - точка Болтая $\triangle ABC$ вершины A, действительно, пусть R - точка Шалтая $\triangle ABC$ вершины A, тогда: $\angle FBA = \angle BAR = \angle RBC$ и $\angle FCA = \angle RAC = \angle RCB$, то есть R и F - изогонально сопряжены,

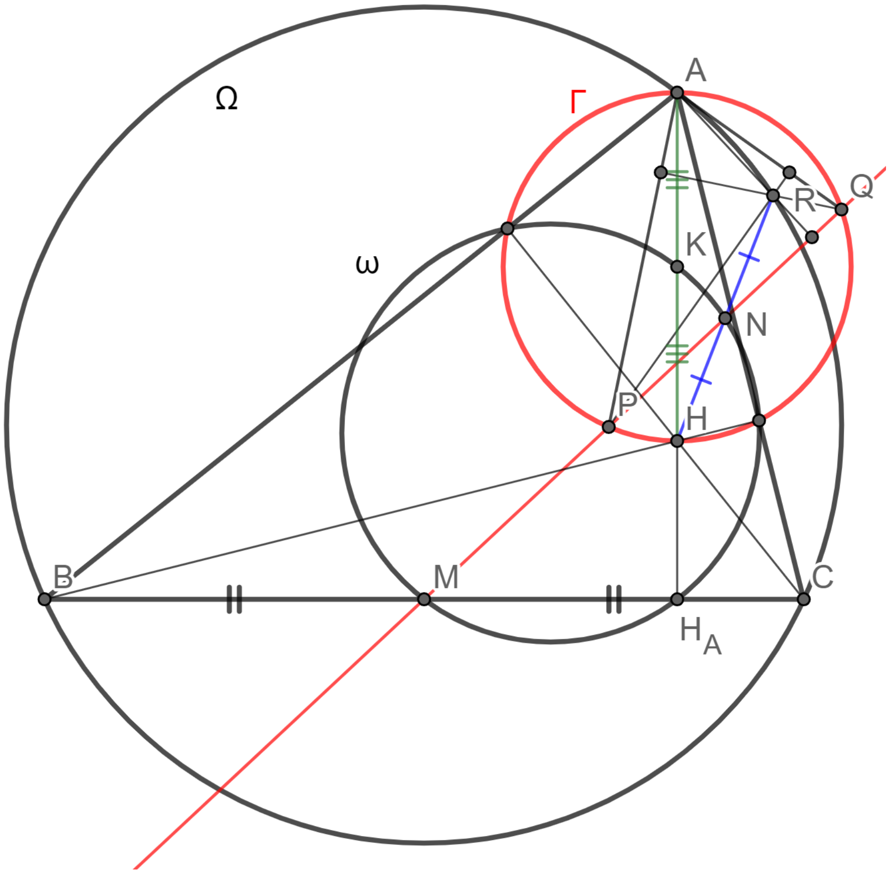

Рис. 4:

то есть F - точка Болтая. Тогда $\angle FAC = \angle BAR$, $\angle FAB = \angle RAC$, то есть $\triangle BFA \sim \triangle AFC$. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке F переводящую $\triangle BFA$ в $\triangle AFC$, она переводит FP в FN, то есть $\angle PFN = \angle AFC = 180^\circ - \angle FAN - \angle FCA = 180^\circ - \angle BAC$, то есть $PFNA$ - вписанный (см. рис. 5). $\square$

6. Пусть перпендикуляр к AC' восстановленный из точки K пересекает AB в A_1, а перпендикуляр к BC' восстановленный из точки L пересекает AB в B_1, $KA_1 \cap LB_1 = C_1$, $CM \cap \Omega = U$. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в ω. Пусть $C'C_1$ пересекает Ω в точке X. Докажем, что ω и Ω касаются в точке X. Заметим, что $LC_1 \parallel BC$ и $KC_1 \parallel AC$, а также, что KC_1LC' - вписанный, поэтому: $\angle XCA = \angle XC'A = \angle C_1LC = \angle UCB$, то есть CX и CU - изогонали $\angle ACB$. Получаем, что $AXUB$ - трапеция, и $XU \parallel AB$. Пусть $AU \cap BX = R$. $\angle RML = 90^\circ - (180^\circ - \angle BAC - \angle UCA) = \angle BAC + \angle ACB - \angle XBA - 90^\circ = 90^\circ - \angle XBA - \angle ABC = \angle LBR$, то есть $LBMR$ - вписанный. Получаем: $\angle RLB = 180^\circ - \angle RMB = 90^\circ = \angle C_1LB = \angle B_1LB$,

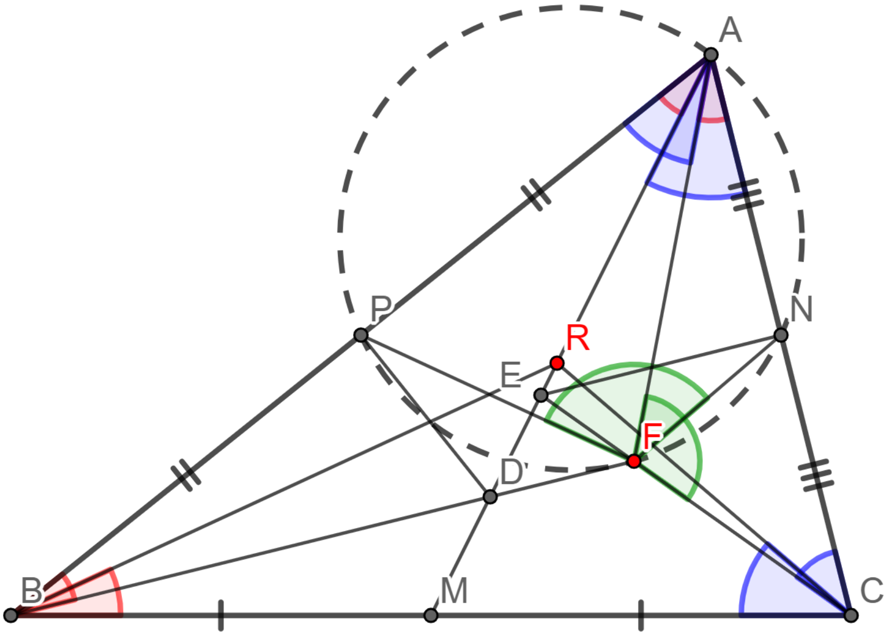

Рис. 5:

то есть LB_1, XB и UA - конкурентны. Заметим, что $\angle ULB_1 = \angle XCA = \angle UAB_1$, то есть LUB_1A - вписанный. Так как R - лежит на радикальной оси описанных окружностей LUB_1A и ABC, то $BR \cdot RX = AR \cdot RU = LR \cdot RB_1$, то есть LXB_1B - вписанный и $\angle B_1XB = \angle B_1LB = 90°$. $\angle C'XB_1 = \angle C'XB + \angle BXB_1 = 90° - \angle BAC + 90° = 180° - \angle C_1A_1B_1$, то есть $C_1A_1B_1X$ - вписанный. Пусть прямая l - касательная к Ω в точке X. $\angle lXC' = \angle C'BX = \angle LB_1C_1$, то есть l касается ω (см. рис. 6). $\square$

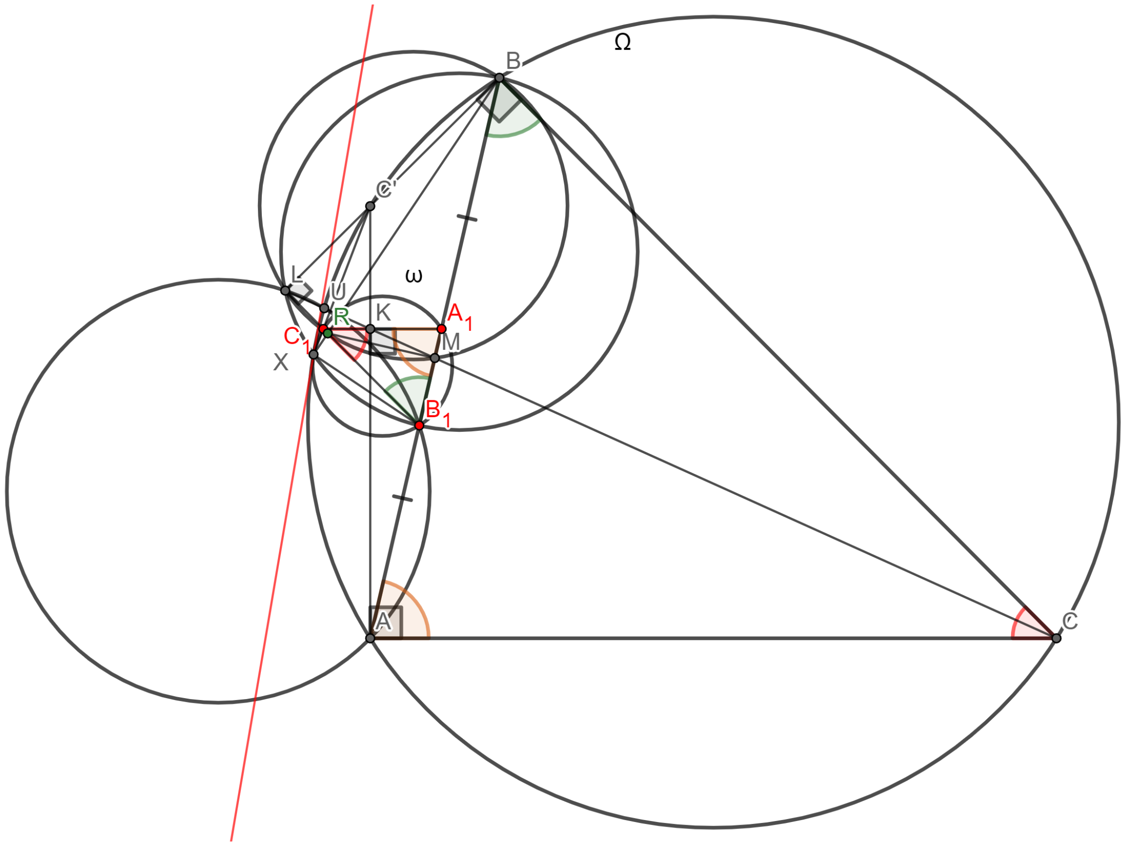

Рис. 6: