

2020 年度 修士論文

超伝導量子ビット間における CZゲートの研究

2021 年 2 月 9 日

東京理科大学大学院 理学研究科物理学専攻 蔡研究室
(学籍番号 1219506)

亥埜 創太

東京理科大学大学院 理学研究科物理学専攻

序章

現在のコンピュータを上回る計算性能を秘めているとして近年注目を集めている量子コンピュータは、大規模化・高精度化が進んでいる。非常に限定された分野においてのみではあるが、ここ数年ではスーパーコンピュータが 100 年以上掛かって解ける問題を数分の間に解けるような実機も登場している。一昨年、53 個の超伝導量子ビットを実装した量子計算機による Quantum supremacy(量子超越性) が Google の研究チームにより報告された。[1] またこちらは実装手段に光を用いているが、昨年 12 月に中国の研究グループによりガウシアンボソンサンプリングという問題に関しての量子超越性が報告された。[2]

量子コンピュータ内で行われる計算の方式には大きく分けて 2 通りが存在する。その一つのゲート型方式は、一個または複数個の量子ビットに対し「量子ゲート」と呼ばれる演算を逐次実行し計算を行う。もう一つはアニーリング方式とよばれる、解く問題をイジングモデルに帰着させそのエネルギーが最小となるパラメータを求める方式である。

前者のゲート型は、論理ゲートを用いる現在の Neumann 型コンピュータに近い回路モデルで計算を行う。そのためアニーリング型に比べ汎用性の高い方式とみられている一方で、ゲート型ならではの課題もある。量子ゲートは論理ゲートと異なり、目的とする演算を常に 100% 再現することはできず本紙では、量子ビット数の拡張を行う上で鍵となる 2 量子ビット間 CZ ゲートについて行ったシミュレーション、及び超伝導体を用いて作成したサンプルに関する測定を行って得られた結果について報告する。断熱的・非断熱的な CZ ゲートについて述べる。

目次

序章	1
第 1 章 目的	4
1.1 CZ ゲートの実現・精度向上	4
第 2 章 原理	5
2.1 量子ビット	5
2.1.1 量子ビットの表現	5
2.1.2 量子ビットの時間発展	8
2.2 超伝導素子による量子ビットの実装	9
2.2.1 調和振動子系のハミルトニアン	9
2.2.2 ジョセフソン接合	12
2.2.3 SQUID による量子ビットの実装	14
2.2.4 他素子との結合	16
2.2.5 デコヒーレンス	16
2.3 量子ビットゲート	16
2.3.1 1qubit ゲート	16
2.3.2 CZ ゲート	16
第 3 章 サンプル作製	17
3.1 設計	17
第 4 章 測定	18
4.1 解析手法	18
4.2 測定環境	18
第 5 章 結果	19
5.1 周波数領域測定	19
5.1.1 セットアップ	19
5.2 時間領域測定	19
5.2.1 セットアップ	19
第 6 章 考察	20

6.1	非断熱的・断熱的量子ゲートの比較	20
6.2	ゲート忠実度低下の要因	20
第 7 章	結論	21
7.1	解析を終えて	21
第 8 章	展望	22
8.1	今後の展望	22
8.1.1	結合可変な CZ ゲートの実現	22
8.1.2	パラメトリック量子回路の最適化	22
第 9 章	謝辞	23
第 10 章	補遺	24
10.1	ハミルトニアンの基底変換	24
10.2	マスター方程式	25
10.3	2 点相関関数	25
参考文献		25

第 1 章

目的

1.1 CZ ゲートの実現・精度向上

本紙における一連のシミュレーション・実験の目的は、2 量子ビット間ゲートの一種である CZ ゲートの再現および断熱過程・非断熱過程の 2 種類の CZ ゲートの掛け方によるゲート忠実度の違いを比較することである。最終的には、高忠実度 (90% 以上) での CZ ゲート操作を実現することを目指す。

第2章

原理

本章ではまず、量子計算に用いられる一部の量子力学の公理について紹介する。

2.1 量子ビット

2.1.1 量子ビットの表現

古典コンピュータが電気信号の ON,OFF を古典ビットの 0,1 に対応させるように、量子計算の基本単位を担う量子ビット (Quantum bit, 略して Qubit と呼ばれる) は、ある量子系の固有状態をヒルベルト空間 (内積を定義できるベクトル空間) $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^2$ 上の

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

に対応させることで表現される。 $|0\rangle, |1\rangle$ の元となる量子状態はスピンのアップ・ダウン、偏光の回転方向など様々にとることができるが本論文では後述する非線形調和振動子の光子数 0 個, 1 個の状態を $|0\rangle, |1\rangle$ に対応させる。量子ビットの大きな特徴は、 $|0\rangle, |1\rangle$ の重ね合わせ状態が存在することである。状態 $|0\rangle, |1\rangle$ の確率振幅をそれぞれ $\alpha, \beta \leq 1$ とすると 1 量子ビットの状態は

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (2.2)$$

と記述できる。1 量子ビットの観測を行ったときに状態が $|0\rangle$ に収束する確率は $|\alpha|^2$, $|1\rangle$ に収束する確率は $|\beta|^2$ であり $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす。() のように状態が基底ベクトル (この場合は $|0\rangle, |1\rangle$) の重ね合わせによって単位ベクトルで表現できるとき、この状態を純粋状態であるという。

ブロッホ球

先ほどの確率振幅による量子ビットの表現を視覚的に分かり易いものに置き換えてみる。適当な実数の位相 γ, ϕ, θ を用いて、(2.2) は次のように書き換えられる。

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2.3)$$

全体にかかる位相である γ はゼロとして差し支えない。図のような $|0\rangle$ を北極, $|1\rangle$ を南極とした球を

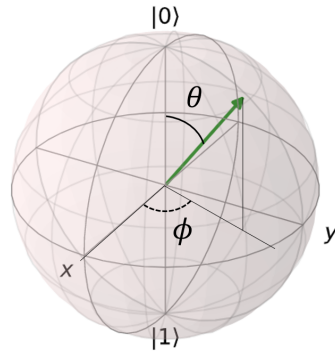


図 2.1: ブロッホ球

考えると、(2.3) は球面上のベクトルとして図示できる。このとき、 θ は状態ベクトルが z 軸となす角、 ϕ は xy 平面上に射影した状態ベクトルが x 軸となす角とみなせる。状態ベクトルが x 軸正方向に向くとき、 $|\psi\rangle = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}}$ であり、状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ が等確率で重ねあわされており ($|+\rangle$ 状態)、 y 軸正方向に向くときには先ほどの重ね合わせ状態から z 軸周りの位相が $\frac{\pi}{2}$ 変化した状態となる。 ($|-\rangle$ 状態) $|0\rangle$ 状態と $|1\rangle$ 状態の重ね合わせで表される純粋状態はすべて Bloch 球上の単位ベクトルとして表すことができる。

状態・期待値の測定

量子ビットの典型的な測定は $|0\rangle, |1\rangle$ による基底測定^{*1}であり、測定により得られる状態は必ず 0 か 1 にランダムに収束する。状態が $|\psi\rangle$ のとき、測定値 $i=0,1$ を得る確率は

$$P = |\langle\psi|i\rangle|^2 \quad (2.4)$$

で与えられる。このとき、先のブロッホ球における ϕ 、すなわち状態の位相の情報は失われる。このためブロッホ球上の ϕ のみが異なる状態は測定によりすべて同じ状態として扱われる。

また我々は量子ビットの状態だけでなく、準備した量子状態によって特定の物理量の期待値を測定するときがある。量子系における物理量はエルミート演算子 A によって与えられ、状態 $|\psi\rangle$ のもとの A の期待値 $\langle A \rangle$ は量子力学の公式より

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad (2.5)$$

で与えられる。

密度演算子

環境系との結合や複数の量子ビットが存在する状況下での 1 量子ビット状態には、混合状態という状態が存在する。例えば量子ビット $|0\rangle, |1\rangle$ をそれぞれ 1 つずつ用意して箱に入れ、1 つを取り出す場合、 $|0\rangle$ を取り出す確率、 $|1\rangle$ を取り出す確率はそれぞれ 50% である。しかしこの場合、取り出す 1 量子ビットの状態を重ね合わせを用いて $|\psi\rangle = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} = |+\rangle$ と書くことはできない。系全体で見

^{*1} 測定に際して選ぶ基底は完全性を有する正規直交基底であれば何でもよいので、例として $|+\rangle$ 状態と $|-\rangle$ 状態の組み合わせを選ぶこともできる。

たときに 0,1 の割合が 50:50 であることは既知であるが、1 量子ビットについては 0,1 である確率があるような割合で重ねあわされているか分からないためである。実際、状態 $|+\rangle$ は基底 $|+\rangle$ による測定で確率 1 を与えるが、上述の状態は必ず 0 か 1 かのどちらかであり、 $|+\rangle$ による測定でどちらの場合も確率 1/2 を与えるはずである。このような重ね合わせとは異なる、確率的に状態が与えられる状態を混合状態という。

この混合状態を含めて量子ビットの状態を記述するために密度演算子というものを導入する。

状態 ψ のとりうる基底状態が $\{|\psi_i\rangle\}_{i=0}^N$ であり、確率 p_i で状態 $|\psi_i\rangle$ をとるとすると、その密度演算子 ρ は

$$\rho_\psi = \sum_i^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.6)$$

で与えられる。基底 $|\phi_0\rangle$ による状態 ρ_ψ の測定結果は

$$\langle \phi_0 | \rho_\psi | \phi_0 \rangle$$

となる。また、物理量 A を状態 ρ で測定した期待値は

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(A \rho) \quad (2.7)$$

で与えられる。

先ほど例にあげた状態を密度演算子で記述すると、 $p_0 = 1/2, p_1 = 1/2$ より

$$\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり、 $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = 1/2, \langle 1 | \rho | 1 \rangle = 1/2$, さらに $\langle + | \rho | + \rangle = 1/2$ であることから系の状態を正しく記述できている。重ね合わせ状態の密度演算子による表現は

$$\rho = 1 \cdot |+\rangle \langle +| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり、両者が明確に異なる状態であることがわかる。

密度演算子は、いかなる状態の測定を行っても確率は 0 以上でありその総和は 1 という要請から

$$\rho \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (2.9)$$

という性質を持つ。純粋状態に加え、単位ベクトルでは記述できない混合状態を表せる密度演算子は量子状態の最も一般的な表現を与える演算子である。

多量子ビット系の表現

ここでは 2 つ以上の量子ビットが存在する系 (合成系) の表現について説明する。

2 つの量子ビットが存在しそれぞれの量子系にヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が付随する場合、2 量子ビット合成系に付随するヒルベルト空間 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (2.10)$$

n 量子ビット系なら

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n \quad (2.11)$$

に拡張される。ここで \otimes はテンソル積を表す。2 量子ビット系の基底は互いの $|0\rangle, |1\rangle$ 基底から 1 つずつを選んだ組み合わせのテンソル積を羅列し

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。 $(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$ を $|\psi\phi\rangle$ と略記する)

状態については、互いの量子ビット間に後述する量子エンタングルメントがない場合、密度演算子 ρ_1, ρ_2 のテンソル積が合成系の状態

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \quad (2.12)$$

両者が純粋状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の場合は $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

を与える。

状態の確率および物理量の期待値は 1qubit のときと同様、式 (), () により得られる。

量子ビット合成系を考えると重要になるのが、量子エンタングルメント (量子もつれ) という現象である。例として、以下のような 2 量子ビット系の状態ベクトル

$$|\phi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

について考える。この状態は 2 量子ビット系の基底 $|00\rangle, |11\rangle$ が等確率で重ねあわされた純粋状態であるが、() もしくは () のように 1 量子ビット系の単位ベクトルまたは密度演算子どうしのテンソル積の形に分解することができない。

いま、量子ビット 1 と 2 のそれぞれに対し、この状態が $|0\rangle$ なのか $|1\rangle$ なのかの測定を行うとする。量子ビット 1 の測定結果が $|0\rangle$ であったとすると、 $|\phi\rangle$ は $|00\rangle$ に収束するので、量子ビット 2 の測定結果も必ず $|0\rangle$ になる。同様に、量子ビット 1 の測定結果が $|1\rangle$ であったとすると、量子ビット 2 の測定結果も必ず $|1\rangle$ になる。量子ビット 1 と 2 がどれだけ離れていようとも、互いのビットの測定結果は常に同じになる。さらにこの関係は、量子ビット 1 と 2 の観測者が同じ基底で測定を行う限り成立する。(計算は記さないが、例えば測定の基底を $|+\rangle, |-\rangle$ として () の状態が $|+\rangle$ か、 $|-\rangle$ かの測定を行った結果も量子ビット 1, 2 両方で同じとなる。) このような古典系では考えられない強い相関は量子相関とよばれ、() のような状態 (エンタングル状態) のもつ大きな特徴である。後述する 2 量子ビットゲートの目的はエンタングル状態を作り出すことにあり、この状態は量子計算アルゴリズムや量子テレポーテーションにおいて大きな有用性がある。

2.1.2 量子ビットの時間発展

時間発展演算子

量子系の Hamiltonian が $\hat{H}(t)$ で表され、状態の波動関数が $|\psi(t)\rangle$ である場合、Schrödinger 方程式により系の時間発展は

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.14)$$

と表される。 \hat{H} が時間に依存しないとしてこれを解くと、

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) |\psi(0)\rangle \quad (2.15)$$

という解が得られる。このとき $|\psi(t)\rangle$ は $|\psi(0)\rangle$ を

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (2.16)$$

という演算子によって変換した形になっていることがわかる。この演算子を時間発展演算子という。Hamiltonian はエルミート演算子であるため U のエルミート共役は

$$U^\dagger = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (2.17)$$

となり、 U の逆行列となる。自身のエルミート行列が逆行列となる演算子をユニタリ演算子といい、一般的な量子系の時間発展はユニタリ行列により与えられる。ユニタリ行列のベクトルへの作用を強調する場合は単に変換ともいう。

Pauli 行列

量子ビットに対し行われる変換及び、量子ビットを記述するハミルトニアン (次節で後述) の中に頻繁に表れる演算子である Pauli 行列について説明する。単位行列 I および Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は以下の形で表される。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

σ_x は $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle, \sigma_x|1\rangle = |0\rangle$ を与えることからビット反転 (bit flip) の操作を行っており、 σ_z は $\sigma_z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ を与えることから位相回転ゲート (phase flip) の操作を行う。ブロッホ球上のベクトルに Pauli 行列が作用した際どのような状態変化を起こすかを図 () に示す。単位行列 I の作用は量子ビットの状態が変化しないことを表す。なお、1 量子ビットについて $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の期待値の測定を行うことで状態密度 ρ を

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \sum_{i=x,y,z} b_i \sigma_i\right) \quad (2.19)$$

(b_i : Pauli 演算子 $\sigma_i (i = x, y, z)$ の期待値)

のように求めることができる。(Bloch ベクトルを、1 量子ビット状態の Pauli 行列の期待値を成分にもつベクトルとして定義することもできる)

2.2 超伝導素子による量子ビットの実装

この節では、先述した量子ビット系をどのように超伝導素子を用いて実装したかについて説明する。超伝導量子ビットは超伝導体特有の非線形性を持たせた調和振動子によって構成される。

2.2.1 調和振動子系のハミルトニアン

最初に最も簡単な調和振動子について説明する。解析力学における一般的な調和振動子のハミルトニアンは p, q を一般化運動量、一般化座標を表す正準変数として

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (2.20)$$

m : 質量, ω : 固有周波数

と記述される。この Hamiltonian を量子化するために正準変数 q, p を交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.21)$$

をもつ演算子 \hat{q}, \hat{p} に置き換える。昇降演算子 (生成消滅演算子) \hat{a}, \hat{a}^\dagger を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (2.22)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (2.23)$$

のように導入すると \hat{a}, \hat{a}^\dagger 間には

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar} ([\hat{q}, \hat{q}] - \frac{i}{m\omega} [\hat{q}, \hat{p}] + \frac{i}{m\omega} [\hat{p}, \hat{q}] + \frac{1}{m\omega^2} [\hat{p}, \hat{p}]) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}, \hat{p}] \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

という関係があり、これを用いると \hat{q}, \hat{p} は

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.25)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} m\omega (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.26)$$

と書ける。これをもとに先ほどの Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar\omega}{4} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{\hbar\omega}{4} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

と記述される。さらに定数項の部分をエネルギーの基準点に対応させ無視することで最終的には

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.28)$$

と書くことができる。

LC 共振器

先ほどの調和振動子系は、工学的には LC 共振器の形で実装される。図 () のような LC 共振器について考える。一般化座標として磁束 Φ を用いることとすると、Faraday の法則及びインダクタンス L の定義式から

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}, \quad (2.29)$$

$$\Phi = -LI \quad (2.30)$$

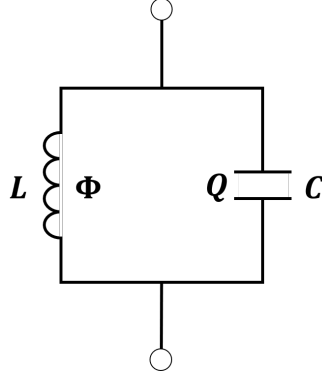


図 2.2: LC 共振器

が導かれる。回路の運動エネルギー T 及びポテンシャルエネルギー U は、

$$T = C \int V dV = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2, \quad (2.31)$$

$$U = L \int I dI = \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.32)$$

で与えられ、これより Lagrangian \mathcal{L} は

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = T - U = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.33)$$

と記述される。したがって一般化運動量 Q は

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} \quad (2.34)$$

となる。Hamiltonian は Lagrangian を Legendre 変換して

$$\mathcal{H}(\Phi, Q) = Q \dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.35)$$

と求まる。() 式は () 式において

$$\begin{aligned} q &\rightarrow Q, p \rightarrow -\Phi, \\ m\omega^2 &\rightarrow \frac{1}{C}, m \rightarrow L, \omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

と置き換えたものと等価であり、調和振動子の場合と同様にこの系も量子化が可能である。正準変数 $\hat{Q}, \hat{\Phi}$ と昇降演算子 \hat{a}, \hat{a}^\dagger は

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \omega C (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.37)$$

$$\hat{\Phi} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{1}{\omega C} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.38)$$

という関係式で結ばれ、最終的には定数項を落とすことで Hamiltonian を () 式同様

$$\mathcal{H} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.39)$$

の形に書くことができる。

2.2.2 ジョセフソン接合

2つの超伝導体の間に絶縁体もしくは常伝導体などの極めて薄い障壁をさしはさむことにより、2つの超伝導体間には超伝導電流が流れる。1962年に B. D. Josephson によって発見されたこの効果をジョセフソン効果、超伝導体-障壁-超伝導体の接合をジョセフソン接合という。

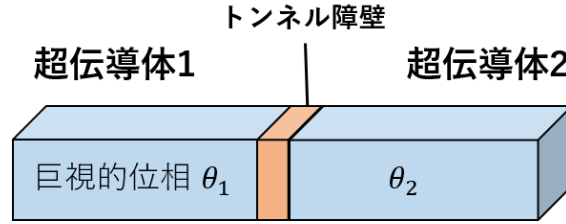


図 2.3: ジョセフソン接合

金属が超伝導体となるとき、すべての電子が同じふるまいをする巨視的量子状態が出現し、電子の波動関数は粒子数 N と巨視的位相 θ によって記述される。超伝導体 1,2 の巨視的位相をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると、流れる電流 I は位相差 $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ を用いて

$$I = I_c \sin \varphi \quad (2.40)$$

という式で表される (直流ジョセフソン効果)。ここで、 I_c はジョセフソン接合を流れる最大の電流であり、臨界電流と呼ばれる。 I_c は Ambegaokar-Baratoff の式より以下のように求められ

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right) \quad (2.41)$$

T : 絶対温度, $\Delta(T)$: 超伝導体のバンドギャップ, R_n : 障壁の抵抗

温度依存性を有するが、実験での量子ビット系は $T \sim 10\text{mK}$ の温度領域におかれるため上式は

$$I_c = \frac{\pi \Delta(0)}{2eR_n} \quad (2.42)$$

と近似できる。式 (2.40) から分かるように、流れる臨界電流は超伝導体間の電位差に関係なく、位相差のみによって決定される。

ジョセフソン接合における電位 V と位相差 φ の間には以下の関係があり、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (2.43)$$

で表せることが知られている (交流ジョセフソン効果)。() 式、() 式を用いると、ジョセフソン接合が持つポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \int IV dt \\ &= \frac{\hbar I_c}{2e} \int \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= -E_J \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.44)$$

となり、非線形な項で表されることになる。ここで、

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e} \quad (2.45)$$

はジョセフソンエネルギーと呼ばれる量である。

ジョセフソン接合の回路記号を以下図 () のように表す。なお実際のジョセフソン接合には () 式中の障壁の抵抗 R_n の他にキャパシタンス C_J が存在し、図 () のように接合に並列に含まれていると考える。

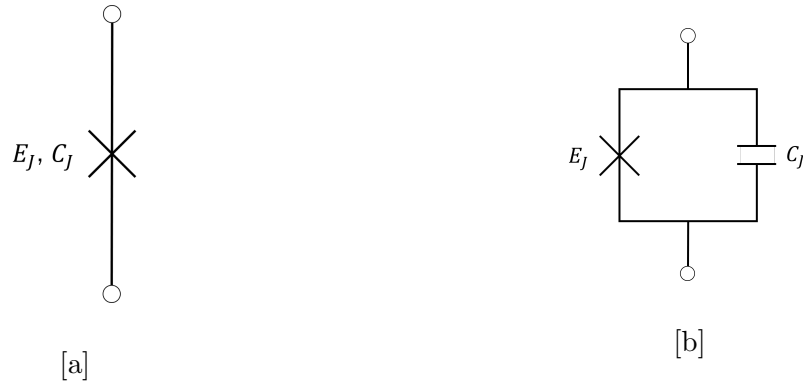


図 2.6: ジョセフソン接合の回路記号

DC-SQUID

次に、ジョセフソン接合を利用した素子である SQUID (Superconducting quantum interference device) について説明する。DC-SQUID は図 () のような、ジョセフソン接合が 2 つ挿入された超伝導ループから形成される。Josephson 接合のときと同様、ポテンシャルエネルギーを計算すると

$$\begin{aligned} U &= -\frac{E_J}{2} \cos \varphi_1 - \frac{E_J}{2} \cos \varphi_2 \\ &= -E_J \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

となる。ここで、超伝導ループにおける磁束の量子化の条件より

$$\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad \Phi_0 = 2\pi \frac{\hbar}{2e} \quad (2.47)$$

Φ_0 : 磁束量子 (fluxquanta)

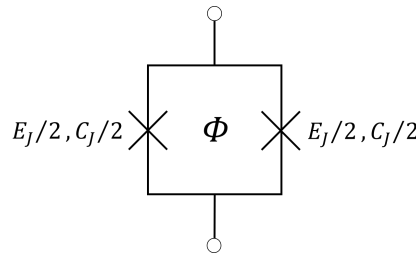


図 2.7: DC-SQUID

を利用し、() 式は

$$U = -E_J \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (2.48)$$

と書き換えられる。() 式と比較すると、

$$E_J \rightarrow E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad \varphi \rightarrow \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (2.49)$$

という対応関係があることが分かる。これによって SQUID は外部からの磁束 Φ によってジョセフソンエネルギーを変化させられるジョセフソン接合として扱うことができる。

2.2.3 SQUID による量子ビットの実装

ジョセフソン接合によりポテンシャルエネルギーに非線形性を持たせ、なおかつ SQUID の導入によりそれを外部磁束で制御できるようになることを示した。ここからは LC 共振器と SQUID によって量子ビットを実装する方法について説明する。図 () のようにキャパシタンス C_g を介してジョセフソン接合に電圧 V_g がかかっている系を考える。

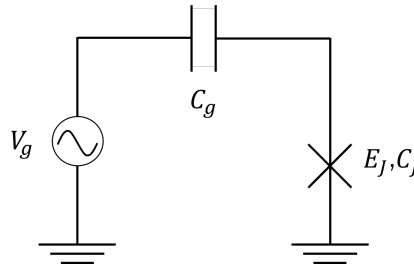


図 2.8: クーパー対箱

運動エネルギー T , ポテンシャルエネルギー U は磁束 Φ を一般化座標として

$$T = \frac{1}{2} C_J \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} C_g (\dot{\Phi} - V_g)^2 \quad (2.50)$$

$$U = -E_J \cos(\phi) \quad (2.51)$$

となる。ここでジョセフソン接合における位相差 ϕ はジョセフソン効果の式から磁束 Φ と

$$\dot{\Phi} = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} \quad (2.52)$$

という関係を持つ。一般化座標を ϕ におきかえると Lagrangian は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} C_g \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} - V_g \right)^2 + E_J \cos \phi \quad (2.53)$$

となり、位相差 ϕ に共役な変数 q は

$$q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_J \dot{\phi} + \frac{\hbar}{2e} C_g \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} - V_g \right) = \frac{\hbar}{2e} Q \quad (2.54)$$

という関係にある。以上より Legendre 変換を用いて Hamiltonian は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\phi, q) &= q\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right) C_J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_g \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} C_g V_g^2 - E_J \cos \phi\end{aligned}\quad (2.55)$$

と求められる。

超伝導体内における電荷は、2つの電子が電子-格子相互作用によって対をなした Cooper 対と呼ばれるものであり超伝導体の電荷数 n を

$$n = \frac{Q}{2e} = \frac{q}{\hbar} \quad (2.56)$$

と定める。またゲート電圧 V_g が掛かっている部分の電荷数について

$$n_g = -\frac{C_g V_g}{2e} \quad (2.57)$$

と定めれば

$$\mathcal{H}(\phi, q) = \frac{(2e)^2}{2(C_J + C_g)} (n - n_g)^2 - \frac{(2e)^2}{2C_g} n_g^2 - E_J \cos \phi \quad (2.58)$$

と書ける。ここで量子ビットの帯電エネルギー、すなわちジョセフソン帯電エネルギーを

$$E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma}, \quad C_\Sigma = C_J + C_g \quad (2.59)$$

で定義する。以上により定数項を落としたハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos \phi \quad (2.60)$$

のように記述される。

この Hamiltonian の量子化のため、正準変数 ϕ, q に対し交換関係

$$[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar \quad (2.61)$$

を導入する。ここで $\hat{n} = \hat{q}/\hbar$ であるため

$$[\hat{\phi}, \hat{n}] = \frac{1}{\hbar} [\hat{\phi}, \hat{q}] = i \quad (2.62)$$

が成立する。電荷数 \hat{n} はエルミート演算子であるため固有状態 $|n\rangle$ と固有値 n を用いて

$$\hat{n} = \sum_n n |n\rangle \langle n| \quad (2.63)$$

と書くことができる。このとき $e^{\pm i\hat{\phi}}$ は昇降演算子となることが知られており

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n+1\rangle \langle n|, \quad e^{-i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle \langle n+1| \quad (2.64)$$

と書ける。これにより

$$\cos \hat{\phi} = \frac{1}{2} (e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}) = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.65)$$

となるので電荷量子ビットの Hamiltonian は

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi} \\ &= 4E_C \sum_n (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|)\end{aligned}\quad (2.66)$$

となる。

2.2.4 他素子との結合

共振器との結合

量子ビットとの結合

2.2.5 デコヒーレンス

T_1, T_2, T_2^E

2.3 量子ビットゲート

2.3.1 1qubit ゲート

X,Y 軸回転

Z 軸回転

その他の重要 1qubit ゲート

2.3.2 CZ ゲート

CZ ゲートの理論

実装上の課題 1. CZ ゲートの断熱・非断熱過程

実装上の課題 2. 低周波磁束ノイズ

パルス制御

第 3 章

サンプル作製

3.1 設計

今回測定したサンプルは 3 つで作成時期順に列挙すると、基本形となる rf-SQUID を共振器間に配置した LCC。そして rf-SQUID と共振器間の結合部にジョセフソン接合を導入した JLCC、最後に接合部をミアンダインダクタンスに変更した MLCC である。まずは基本型の構造は先行論文がとっている手法と全く同じである。

第 4 章

測定

4.1 解析手法

4.2 測定環境

第 5 章

結果

5.1 周波数領域測定

5.1.1 セットアップ

5.2 時間領域測定

5.2.1 セットアップ

第 6 章

考察

6.1 非断熱的・断熱的量子ゲートの比較

6.2 ゲート忠実度低下の要因

第 7 章

結論

7.1 解析を終えて

第 8 章

展望

8.1 今後の展望

8.1.1 結合可変な CZ ゲートの実現

8.1.2 パラメトリック量子回路の最適化

第 9 章

謝辞

謝辞

本研究を行うにあたり、様々なご指導および研究の進め方に関しての助言を頂きました指導教員の蔡兆申教授に感謝致します。また、サンプル作製を引き受けていただき、測定に関してご助力を頂きました朝永さん、日頃の議論にお付き合いいただいた Kwon さん、同期の白井君、山本君ならびに研究室の皆様に感謝致します。

第 10 章

補遺

10.1 ハミルトニアン基底変換

ここでは、Hamiltonian の変換を行う。

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger & \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_a & g(\Phi) \\ g(\Phi) & \tilde{\omega}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

$$= \hbar \tilde{\omega}_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \tilde{\omega}_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g(\Phi) (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \quad (10.2)$$

$$\hat{c}_\pm = \frac{\hat{a} \pm \hat{b}}{\sqrt{2}} \quad \hat{c}_\pm^\dagger = \frac{\hat{a}^\dagger \pm \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (10.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{c}_+^\dagger + \hat{c}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{b} = \frac{\hat{c}_+^\dagger - \hat{c}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (10.4)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{c}_+ + \hat{c}_-}{\sqrt{2}} \quad \hat{b} = \frac{\hat{c}_+ - \hat{c}_-}{\sqrt{2}} \quad (10.5)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} (\hat{c}_+^\dagger + \hat{c}_-^\dagger) (\hat{c}_+ + \hat{c}_-) \quad \hat{a}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} (\hat{c}_+^\dagger + \hat{c}_-^\dagger) (\hat{c}_+ - \hat{c}_-) \quad (10.6)$$

$$\hat{b} \hat{b}^\dagger = \frac{1}{2} (\hat{c}_+ + \hat{c}_-) (\hat{c}_+^\dagger - \hat{c}_-^\dagger) \quad \hat{a} \hat{b}^\dagger = \frac{1}{2} (\hat{c}_+ + \hat{c}_-) (\hat{c}_+^\dagger - \hat{c}_-^\dagger) \quad (10.7)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} [\hat{c}_+^\dagger \hat{c}_+ + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_+^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_+] \quad (10.8)$$

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} [\hat{c}_+^\dagger \hat{c}_+ - \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_+^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_+] \quad (10.9)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} [\hat{c}_+^\dagger \hat{c}_+ - \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_+^\dagger \hat{c}_- - \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_+] \quad (10.10)$$

$$\hat{a}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{2} [\hat{c}_+ \hat{c}_+^4 - \hat{c}_+ \hat{c} \pm + \hat{c} - \hat{c}_+^2 - \hat{c} - \hat{c}_-] \quad (10.11)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \hat{w}_a [\hat{c}_t^+ \hat{c}_+ + \hat{c}_t^+ \hat{c} + \hat{c}_-^+ \hat{c}_t + \hat{c}_-^+ \hat{c}_-] \quad (10.12)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} \hat{w}_b [\hat{c}_+^+ \hat{c}_+ - \hat{c}_+^+ \hat{c}_- - \hat{c}_-^+ \hat{c}_+ + \hat{c}_-^+ \hat{c}_-] \quad (10.13)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} g [2\hat{c} + \hat{c}_+ - 2\hat{c}_- \hat{c}] \quad (10.14)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} (\hat{\omega}_a + \hat{\omega}_b + 2g(\Phi)) \hat{c}_t^+ \hat{c}_+ + \frac{\hbar}{2} (\hat{w}_a + \hat{w}_b - 2g(\Phi)) \hat{c}_-^+ \hat{c}_- \quad (10.15)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} A (\hat{w}_a - \hat{w}_b) (\hat{c}_t + \hat{c}_- + \hat{c}_+ \hat{c}_-) \quad (10.16)$$

$$\omega_a + \bar{c}_b + 2g(\Phi) = \Omega + \quad (10.17)$$

$$\omega_a + \bar{c}_b - 2g(\Phi) = \Omega - \quad (10.18)$$

$$\hat{\omega}_a - \hat{w}_b = \Delta \quad (10.19)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \Omega + \hat{c} + \hat{c} + \frac{\hbar}{2} \Omega - \hat{c} \pm \hat{c} + \frac{\hbar}{2} \Delta (\hat{c} + \hat{c} + \hat{c}_+ \hat{c}_-^+) \quad (10.20)$$

$$- \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{c}_+ & \hat{c}_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Delta \\ 2 & \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

10.2 マスター方程式

10.3 2点相関関数

参考文献

- [1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, et al., “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor”, *Nature* **574**, 505 (2019).
- [2] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, et al., “Quantum computational advantage using photons”, *Science* **370**, 1460 (2020).