

2020 年度 修士論文

超伝導量子ビット間における
CZ ゲートの研究

2021 年 2 月 18 日

東京理科大学大学院 理学研究科物理学専攻 蔡研究室
(学籍番号 1219506)

亥埜 創太

東京理科大学大学院 理学研究科物理学専攻

序章

現在のコンピュータを上回る計算性能を秘めているとして近年注目を集めている量子コンピュータは、大規模化・高精度化が進んでいる。非常に限定された分野においてのみではあるが、ここ数年ではスーパーコンピュータが 100 年以上掛かって解ける問題を数分の間に解けるような実機も登場している。一昨年、53 個の超伝導量子ビットを実装した量子計算機による Quantum supremacy(量子超越性) が Google の研究チームにより報告された。^[1] またこちらは実装手段に光を用いているが、昨年 12 月に中国の研究グループによりガウシアンボソンサンプリングという問題に関しての量子超越性が報告された。^[2]

量子コンピュータ内で行われる計算の方式には大きく分けて 2 通りが存在する。その一つのゲート型方式は、一個または複数個の量子ビットに対し「量子ゲート」と呼ばれる演算を逐次実行し計算を行う。もう一つはアニーリング方式とよばれる、解く問題をイジングモデルに帰着させそのエネルギーが最小となるパラメータを求める方式である。

前者のゲート型は、論理ゲートを用いる現在の Neumann 型コンピュータに近い回路モデルで計算を行う。そのためアニーリング型に比べ汎用性の高い方式とみられている一方で、ゲート型ならではの課題もある。量子ゲートは論理ゲートと異なり、目的とする演算を常に 100% 再現することはできず本紙では、量子ビット数の拡張を行う上で鍵となる 2 量子ビット間 CZ ゲートについて行ったシミュレーション、及び超伝導体を用いて作成したサンプルに関する測定を行って得られた結果について報告する。断熱的・非断熱的な CZ ゲートについて述べる。

目次

序章	1
第 1 章 目的	4
1.1 CZ ゲートの実現・精度向上	4
第 2 章 原理	5
2.1 量子ビット	5
2.1.1 量子ビットの表現	5
2.1.2 量子ビットの時間発展	8
2.2 超伝導素子による量子ビットの実装	9
2.2.1 調和振動子系のハミルトニアン	10
2.2.2 ジョセフソン接合	12
2.2.3 SQUID による量子ビットの実装	14
2.2.4 他素子との結合	19
2.2.5 デコヒーレンス	22
2.3 量子ビットゲート	23
2.3.1 1qubit ゲート	23
2.3.2 CZ ゲート	24
2.3.3 Adiabatic な CZ ゲート	24
第 3 章 波形のシミュレーション	25
3.1 Net-Zero Pulse の最適化シミュレーション	25
第 4 章 サンプル作製	26
4.1 Overview	26
4.2 設計値・留意した点	27
4.3 電磁界シミュレーション	28
4.4 作製手順	28
4.4.1 パッケージング	30
第 5 章 測定	32
5.1 解析手法	32
5.2 測定環境	32

第 6 章	結果	33
6.1	周波数領域測定	33
6.1.1	セットアップ	33
6.2	時間領域測定	33
6.2.1	セットアップ	33
第 7 章	考察	34
7.1	非断熱的・断熱的量子ゲートの比較	34
7.2	ゲート忠実度低下の要因	34
第 8 章	結論	35
8.1	解析を終えて	35
第 9 章	展望	36
9.1	今後の展望	36
9.1.1	結合可変な CZ ゲートの実現	36
9.1.2	パラメトリック量子回路の最適化	36
第 10 章	謝辞	37
第 11 章	補遺	38
11.1	ハミルトニアンの基底変換	38
11.2	マスター方程式	39
11.3	2 点相関関数	39
参考文献		39

第1章

目的

1.1 CZ ゲートの実現・精度向上

本紙における一連のシミュレーション・実験の目的は、2量子ビット間ゲートの一種である CZ ゲートの再現および断熱過程・非断熱過程の 2 種類の CZ ゲートの掛け方によるゲート忠実度の違いを比較することである。最終的には、高忠実度 (90% 以上) での CZ ゲート操作を実現することを目指とする。

第2章

原理

本章ではまず、量子計算に用いられる一部の量子力学の公理について紹介する。

2.1 量子ビット

2.1.1 量子ビットの表現

古典コンピュータが電気信号の ON, OFF を古典ビットの 0,1 に対応させるように、量子計算の基本単位を担う量子ビット (Quantum bit, 略して Qubit とも呼ばれる) は、ある量子系の固有状態をヒルベルト空間 (内積を定義できるベクトル空間) $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^2$ 上の

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

に対応させることで表現される。 $|0\rangle, |1\rangle$ の元となる量子状態はスピンのアップ・ダウン、偏光の回転方向など様々にとることができるが本論文では後述する非線形調和振動子の光子数 0 個, 1 個の状態を $|0\rangle, |1\rangle$ に対応させる。量子ビットの大きな特徴は、 $|0\rangle, |1\rangle$ の重ね合わせ状態が存在することである。状態 $|0\rangle, |1\rangle$ の確率振幅をそれぞれ $\alpha, \beta \leq 1$ とすると 1 量子ビットの状態は

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.2)$$

と記述できる。1 量子ビットの観測を行ったときに状態が $|0\rangle$ に収束する確率は $|\alpha|^2$, $|1\rangle$ に収束する確率は $|\beta|^2$ であり $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす。() のように状態が基底ベクトル (この場合は $|0\rangle, |1\rangle$) の重ね合わせによって単位ベクトルで表現できるとき、この状態を純粹状態であるという。

プロッホ球

先ほどの確率振幅による量子ビットの表現を視覚的に分かり易いものに置き換えてみる。適当な実数の位相 γ, ϕ, θ を用いて、(2.2) は次のように書き換えられる。

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2.3)$$

全体にかかる位相である γ はゼロとして差し支えない。図のような $|0\rangle$ を北極, $|1\rangle$ を南極とした球を

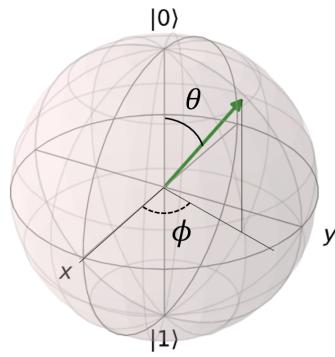


図 2.1: ブロッホ球

考えると、(2.3) は球面上のベクトルとして図示できる。このとき、 θ は状態ベクトルが z 軸となす角、 ϕ は xy 平面上に射影した状態ベクトルが x 軸となす角とみなせる。状態ベクトルが x 軸正方向に向くとき、 $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ であり、状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ が等確率で重ねあわされており ($|+\rangle$ 状態)、 y 軸正方向を向くときには先ほどの重ね合わせ状態から z 軸周りの位相が $\frac{\pi}{2}$ 変化した状態となる。 $(|-\rangle$ 状態) $|0\rangle$ 状態と $|1\rangle$ 状態の重ね合わせで表される純粋状態はすべて Bloch 球上の単位ベクトルとして表すことができる。

状態・期待値の測定

量子ビットの典型的な測定は $|0\rangle, |1\rangle$ による基底測定^{*1}であり、測定により得られる状態は必ず 0 か 1 にランダムに収束する。状態が $|\psi\rangle$ のとき、測定値 $i=0,1$ を得る確率は

$$P = |\langle \psi | i \rangle|^2 \quad (2.4)$$

で与えられる。このとき、先のブロッホ球における ϕ 、すなわち状態の位相の情報は失われる。このためブロッホ球上の ϕ のみが異なる状態は測定によりすべて同じ状態として扱われる。

また我々は量子ビットの状態だけでなく、準備した量子状態によって特定の物理量の期待値を測定するときがある。量子系における物理量はエルミート演算子 A によって与えられ、状態 $|\psi\rangle$ のもとの A の期待値 $\langle A \rangle$ は量子力学の公式より

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A \psi \rangle \quad (2.5)$$

で与えられる。

密度演算子

環境系との結合や複数の量子ビットが存在する状況下での 1 量子ビット状態には、混合状態という状態が存在する。例えば量子ビット $|0\rangle, |1\rangle$ をそれぞれ 1 つずつ用意して箱に入れ、1 つを取り出す場合、 $|0\rangle$ を取り出す確率、 $|1\rangle$ を取り出す確率はそれぞれ 50% である。しかしこの場合、取り出す 1 量子ビットの状態を重ね合わせを用いて $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$ と書くことはできない。系全体で見

^{*1} 測定に際して選ぶ基底は完全性を有する正規直交基底であれば何でもよいので、例として $|+\rangle$ 状態と $|-\rangle$ 状態の組み合わせを選ぶこともできる。

たときに0,1の割合が50:50であることは既知であるが、1量子ビットについては0,1である確率がどのような割合で重ねあわされているか分からぬいためである。実際、状態 $|+\rangle$ は基底 $|+\rangle$ による測定で確率1を与えるが、上述の状態は必ず0か1かのどちらかであり、 $|+\rangle$ による測定でどちらの場合も確率1/2を与えるはずである。このような重ね合わせとは異なる、確率的に状態が与えられる状態を混合状態という。

この混合状態を含めて量子ビットの状態を記述するために密度演算子というものを導入する。

状態 ψ のとりうる基底状態が $\{|\psi_i\rangle\}_{i=0}^N$ であり、確率 p_i で状態 $|\psi_i\rangle$ をとるとすると、その密度演算子 ρ は

$$\rho_\psi = \sum_i^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.6)$$

で与えられる。基底 $|\phi_0\rangle$ による状態 ρ_ψ の測定結果は

$$\langle \phi_0 | \rho_\psi | \phi_0 \rangle$$

となる。また、物理量Aを状態 ρ で測定した期待値は

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(A\rho) \quad (2.7)$$

で与えられる。

先ほど例にあげた状態を密度演算子で記述すると、 $p_0 = 1/2, p_1 = 1/2$ より

$$\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり、 $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = 1/2, \langle 1 | \rho | 1 \rangle = 1/2$ 、さらに $\langle + | \rho | + \rangle = 1/2$ であることから系の状態を正しく記述できている。重ね合わせ状態の密度演算子による表現は

$$\rho = 1 \cdot |+\rangle \langle +| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり、両者が明確に異なる状態であることがわかる。

密度演算子は、いかなる状態の測定を行っても確率は0以上でありその総和は1という要請から

$$\rho \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (2.9)$$

という性質を持つ。純粹状態に加え、単位ベクトルでは記述できない混合状態を表せる密度演算子は量子状態の最も一般的な表現を与える演算子である。

多量子ビット系の表現

ここでは2つ以上の量子ビットが存在する系(合成系)の表現について説明する。

2つの量子ビットが存在しそれぞれの量子系にヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が付随する場合、2量子ビット合成系に付随するヒルベルト空間 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (2.10)$$

n量子ビット系なら

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n \quad (2.11)$$

に拡張される。ここで \otimes はテンソル積を表す。2量子ビット系の基底は互いの $|0\rangle, |1\rangle$ 基底から1つずつを選んだ組み合わせのテンソル積を羅列し

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。 $(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$ を $|\psi\phi\rangle$ と略記する)

状態については、互いの量子ビット間に後述する量子エンタングルメントがない場合、密度演算子 ρ_1, ρ_2 のテンソル積が合成系の状態

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \otimes \rho_2 \\ \text{両者が純粋状態 } |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \text{ の場合は } |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

を与える。

状態の確率および物理量の期待値は 1qubit のときと同様、式 $(\cdot), (\cdot)$ により得られる。

量子ビット合成系を考えるとき重要なのが、量子エンタングルメント（量子もつれ）という現象である。例として、以下のような2量子ビット系の状態ベクトル

$$|\phi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

について考える。この状態は2量子ビット系の基底 $|00\rangle, |11\rangle$ が等確率で重ねあわされた純粋状態であるが、 (\cdot) もしくは (\cdot) のように1量子ビット系の単位ベクトルまたは密度演算子どうしのテンソル積の形に分解することができない。

いま、量子ビット1と2のそれぞれに対し、この状態が $|0\rangle$ なのか $|1\rangle$ なのかの測定を行うとする。量子ビット1の測定結果が $|0\rangle$ であったとすると、 $|\phi\rangle$ は $|00\rangle$ に収束するので、量子ビット2の測定結果も必ず $|0\rangle$ になる。同様に、量子ビット1の測定結果が $|1\rangle$ であったとすると、量子ビット2の測定結果も必ず $|1\rangle$ になる。量子ビット1と2がどれだけ離れていくとも、互いのビットの測定結果は常に同じになる。さらにこの関係は、量子ビット1と2の観測者が同じ基底で測定を行う限り成立する。（計算は記さないが、例えば測定の基底を $|+\rangle, |-\rangle$ として (\cdot) の状態が $|+\rangle$ か、 $|-\rangle$ かの測定を行った結果も量子ビット1,2両方で同じとなる。）このような古典系では考えられない強い相関は量子相関とよばれ、 (\cdot) のような状態（エンタングル状態）のもつ大きな特徴である。後述する2量子ビットゲートの目的はエンタングル状態を作り出すことになり、この状態は量子計算アルゴリズムや量子テレポーテーションにおいて大きな有用性がある。

2.1.2 量子ビットの時間発展

時間発展演算子

量子系の Hamiltonian が $\hat{H}(t)$ で表され、状態の波動関数が $|\psi(t)\rangle$ である場合、Schrödinger 方程式により系の時間発展は

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.14)$$

と表される。 \hat{H} が時間に依存しないとしてこれを解くと、

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) |\psi(0)\rangle \quad (2.15)$$

という解が得られる。このとき $|\psi(t)\rangle$ は $|\psi(0)\rangle$ を

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (2.16)$$

という演算子によって変換した形になっていることがわかる。この演算子を時間発展演算子という。Hamiltonian はエルミート演算子であるため U のエルミート共役は

$$U^\dagger = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \quad (2.17)$$

となり、 U の逆行列となる。自身のエルミート行列が逆行列となる演算子をユニタリ演算子といい、一般的な量子系の時間発展はユニタリ行列により与えられる。ユニタリ行列のベクトルへの作用を強調する場合は単に変換ともいう。

また、ユニタリ行列を物理量に作用する演算子と考えると、状態は変化せず物理量のみが時間変化するという時間発展のしかたを考えることができる (Heisenberg 描像)。この場合、ハミルトニアン \hat{H} は

$$\hat{H} \rightarrow U^\dagger \hat{H} U \quad (2.18)$$

と変換される。

Pauli 行列

量子ビットに対し行われる変換及び、量子ビットを記述するハミルトニアン (次節で後述) の中に頻繁に表れる演算子である Pauli 行列について説明する。単位行列 I および Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は以下の形で表される。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

σ_x は $\sigma_x |0\rangle = |1\rangle, \sigma_x |1\rangle = |0\rangle$ を与えることからビット反転 (bit flip) の操作を行っており、 σ_z は $\sigma_z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ を与えることから位相回転ゲート (phase flip) の操作を行う。

ブロッホ球上のベクトルに Pauli 行列が作用した際どのような状態変化を起こすかを図 () に示す。単位行列 I の作用は量子ビットの状態が変化しないことを表す。なお、1 量子ビットについて $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の期待値の測定を行うことで状態密度 ρ を

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \sum_{i=x,y,z} b_i \sigma_i) \quad (2.20)$$

$(b_i : \text{Pauli 演算子 } \sigma_i (i = x, y, z) \text{ の期待値})$

のように求めることができる。(Bloch ベクトルを、1 量子ビット状態の Pauli 行列の期待値を成分にもつベクトルとして定義することもできる)

2.2 超伝導素子による量子ビットの実装

この節では、先述した量子ビット系をどのように超伝導体素子を用いて実装したかについて説明する。超伝導量子ビットは超伝導体特有の非線形性を持たせた調和振動子によって構成される。

2.2.1 調和振動子系のハミルトニアン

最初に最も簡単な調和振動子について説明する。解析力学における一般的な調和振動子のハミルトニアンは p, q を一般化運動量、一般化座標を表す正準変数として

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (2.21)$$

m : 質量, ω : 固有周波数

と記述される。この Hamiltonian を量子化するために正準変数 q, p を交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.22)$$

をもつ演算子 \hat{q}, \hat{p} に置き換える。昇降演算子(生成消滅演算子) \hat{a}, \hat{a}^\dagger を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \quad (2.23)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \quad (2.24)$$

のように導入すると \hat{a}, \hat{a}^\dagger 間には

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}([\hat{q}, \hat{q}] - \frac{i}{m\omega}[\hat{q}, \hat{p}] + \frac{i}{m\omega}[\hat{p}, \hat{q}] + \frac{1}{m\omega^2}[\hat{p}, \hat{p}]) \\ &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}, \hat{p}] \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

という関係があり、これを用いると \hat{q}, \hat{p} は

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.26)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.27)$$

と書ける。これをもとに先ほどの Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \frac{\hbar\omega}{4}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

と記述される。さらに定数項の部分をエネルギーの基準点に対応させ無視することで最終的には

$$\mathcal{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.29)$$

と書くことができる。

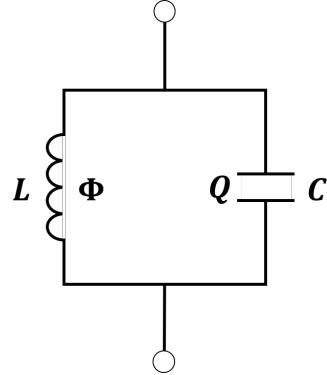


図 2.2: LC 共振器

LC 共振器

先ほどの調和振動子系は、工学的には LC 共振器の形で実装される。図 () のような LC 共振器について考える。一般化座標として磁束 Φ を用いることとすると、Faraday の法則及びインダクタンス L の定義式から

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}, \quad (2.30)$$

$$\Phi = -LI \quad (2.31)$$

が導かれる。回路の運動エネルギー T 及びポテンシャルエネルギー U は、

$$T = C \int V dV = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2, \quad (2.32)$$

$$U = L \int I dI = \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.33)$$

で与えられ、これより Lagrangian \mathcal{L} は

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = T - U = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.34)$$

と記述される。したがって一般化運動量 Q は

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} \quad (2.35)$$

となる。Hamiltonian は Lagrangian を Legendre 変換して

$$\mathcal{H}(\Phi, Q) = Q \dot{\Phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} \Phi^2 \quad (2.36)$$

と求まる。() 式は () 式において

$$\begin{aligned} q &\rightarrow Q, p \rightarrow -\Phi, \\ m\omega^2 &\rightarrow \frac{1}{C}, m \rightarrow L, \omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

と置き換えたものと等価であり、調和振動子の場合と同様にこの系も量子化が可能である。正準変数 $\hat{Q}, \hat{\Phi}$ と昇降演算子 \hat{a}, \hat{a}^\dagger は

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}\omega C}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.38)$$

$$\hat{\Phi} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\omega C}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.39)$$

という関係式で結ばれ、最終的には定数項を落とすことで Hamiltonian を () 式同様

$$\mathcal{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.40)$$

の形に書くことができる。

2.2.2 ジョセフソン接合

2つの超伝導体の間に絶縁体もしくは常伝導体などの極めて薄い障壁をさしはさむことにより、2つの超伝導体間には超伝導電流が流れる。1962年にB. D. Josephsonによって発見されたこの効果をジョセフソン効果、超伝導体-障壁-超伝導体の接合をジョセフソン接合という。

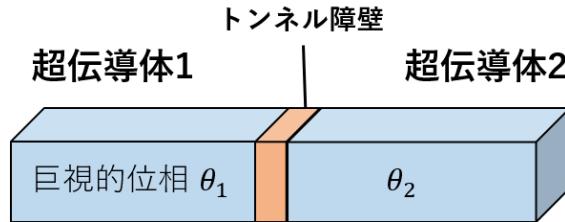


図 2.3: ジョセフソン接合

金属が超伝導体となるとき、すべての電子が同じふるまいをする巨視的量子状態が出現し、電子の波動関数は粒子数 N と巨視的位相 θ によって記述される。超伝導体 1,2 の巨視的位相をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると、流れる電流 I は位相差 $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ を用いて

$$I = I_c \sin \varphi \quad (2.41)$$

という式で表される(直流ジョセフソン効果)。ここで、 I_c はジョセフソン接合を流れる最大の電流であり、臨界電流と呼ばれる。 I_c は Ambegaokar-Baratoff の式より以下のように求められ

$$I_c = \frac{\pi\Delta(T)}{2eR_n} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right) \quad (2.42)$$

T : 絶対温度, $\Delta(T)$: 超伝導体のバンドギャップ, R_n : 障壁の抵抗

温度依存性を有するが、実験での量子ビット系は $T \sim 10\text{mK}$ の温度領域におかれるため上式は

$$I_c = \frac{\pi\Delta(0)}{2eR_n} \quad (2.43)$$

と近似できる。式(2.43), (2.44)から分かるように、流れる臨界電流は超伝導体間の電位差に関係なく、位相差のみによって決定される。

ジョセフソン接合における電位 V と位相差 φ の間には以下の関係があり、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (2.44)$$

で表せることが知られている（交流ジョセフソン効果）。(2.43)式、(2.44)式を用いると、ジョセフソン接合が持つポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \int IV dt \\ &= \frac{\hbar I_c}{2e} \int \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= -E_J \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.45)$$

となり、非線形な項で表されることになる。ここで、

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e} \quad (2.46)$$

はジョセフソンエネルギーと呼ばれる量である。

ジョセフソン接合の回路記号を以下図(a)のように表す。なお実際のジョセフソン接合には(2.43)式中の障壁の抵抗 R_n の他にキャパシタンス C_J が存在し、図(b)のように接合に並列に含まれていると考える。

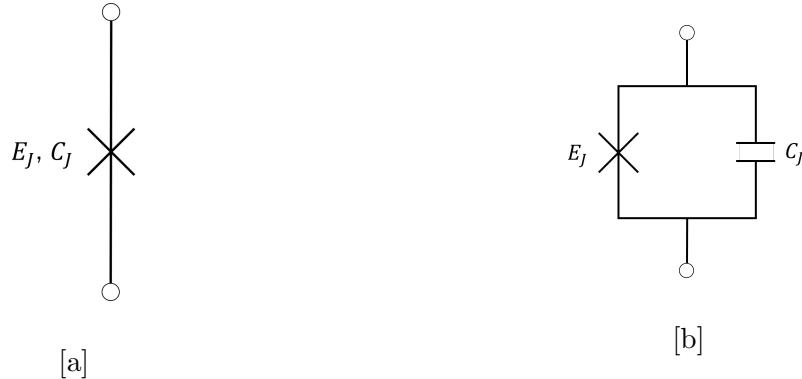


図 2.6: ジョセフソン接合の回路記号

DC-SQUID

次に、ジョセフソン接合を利用した素子である SQUID(Superconducting quantum interference device)について説明する。DC-SQUID は図(a)のような、ジョセフソン接合が 2 つ挿入された超伝導体ループから形成される。Josephson 接合のときと同様、ポテンシャルエネルギーを計算すると

$$\begin{aligned} U &= -\frac{E_J}{2} \cos \varphi_1 - \frac{E_J}{2} \cos \varphi_2 \\ &= -E_J \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

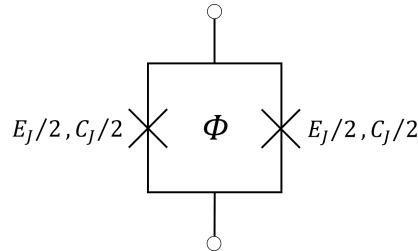


図 2.7: DC-SQUID

となる。ここで、超伝導ループにおける磁束の量子化の条件より

$$\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad \Phi_0 = 2\pi\frac{\hbar}{2e} \quad (2.48)$$

Φ_0 : 磁束量子 (fluxquanta)

を利用し、(2) 式は

$$U = -E_J \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (2.49)$$

と書き換えられる。(2) 式と比較すると、

$$E_J \rightarrow E_J \cos\left(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad \varphi \rightarrow \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (2.50)$$

という対応関係があることが分かる。これによって SQUID は外部からの磁束 Φ によってジョセフソンエネルギーを変化させられるジョセフソン接合として扱うことができる。

2.2.3 SQUID による量子ビットの実装

ジョセフソン接合によりポテンシャルエネルギーに非線形性を持たせ、おかげで SQUID の導入によりそれを外部磁束で制御できるようになることを示した。ここからは LC 共振器と SQUID によって量子ビットを実装する方法について説明する。図 (2) のようにキャパシタンス C_g を介してジョセフソン接合に電圧 V_g がかかっている系を考える。

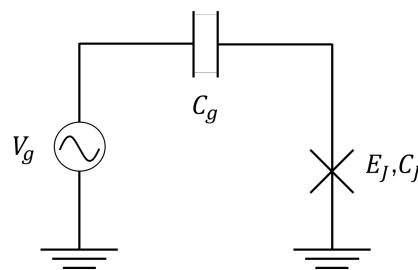


図 2.8: 電荷量子ビット

運動エネルギー T , ポテンシャルエネルギー U は磁束 Φ を一般化座標として

$$T = \frac{1}{2}C_J \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}C_g(\dot{\Phi} - V_g)^2$$

$$U = -E_J \cos(\phi) \quad (2.51)$$

となる。ここでジョセフソン接合における位相差 ϕ はジョセフソン効果の式から磁束 Φ と

$$\dot{\Phi} = \frac{\hbar}{2e}\dot{\phi} \quad (2.52)$$

という関係を持つ。一般化座標を ϕ におきかえると Lagrangian は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} C_g \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} - V_g \right)^2 + E_J \cos \phi \quad (2.53)$$

となり、位相差 ϕ に共役な変数 q は

$$q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_J \dot{\phi} + \frac{\hbar}{2e} C_g \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} - V_g \right) = \frac{\hbar}{2e} Q \quad (2.54)$$

という関係にある。以上より Legendre 変換を用いて Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi, q) &= q \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right) C_J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C_g \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} C_g V_g^2 - E_J \cos \phi \end{aligned} \quad (2.55)$$

と求められる。

超伝導体内における電荷は、2つの電子が電子-格子相互作用によって対をなした Cooper 対と呼ばれるものであり超伝導体の電荷数 n を

$$n = \frac{Q}{2e} = \frac{q}{\hbar} \quad (2.56)$$

と定める。またゲート電圧 V_g が掛かっている部分の電荷数について

$$n_g = -\frac{C_g V_g}{2e} \quad (2.57)$$

と定めれば

$$\mathcal{H}(\phi, q) = \frac{(2e)^2}{2(C_J + C_g)} (n - n_g)^2 - \frac{(2e)^2}{2C_g} n_g^2 - E_J \cos \phi \quad (2.58)$$

と書ける。ここで量子ビットの帶電エネルギー、すなわちジョセフソン帶電エネルギーを

$$E_C = \frac{e^2}{2C_\Sigma}, \quad C_\Sigma = C_J + C_g \quad (2.59)$$

で定義する。以上により定数項を落としたハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos \phi \quad (2.60)$$

のように記述される。

この Hamiltonian の量子化のため、正準変数 ϕ, q に対し交換関係

$$[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar \quad (2.61)$$

を導入する。ここで $\hat{n} = \hat{q}/\hbar$ であるため

$$[\hat{\phi}, \hat{n}] = \frac{1}{\hbar} [\hat{\phi}, \hat{q}] = i \quad (2.62)$$

が成立する。電荷数 \hat{n} はエルミート演算子であるため固有状態 $|n\rangle$ と固有値 n を用いて

$$\hat{n} = \sum_n n |n\rangle\langle n| \quad (2.63)$$

と書くことができる。このとき $e^{\pm i\hat{\phi}}$ は昇降演算子となることが知られており

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n+1\rangle\langle n|, \quad e^{-i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle\langle n+1| \quad (2.64)$$

と書ける。これにより

$$\cos \hat{\phi} = \frac{1}{2}(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}) = \frac{1}{2} \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) \quad (2.65)$$

となるので電荷量子ビットの Hamiltonian は

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi} \\ &= 4E_C \sum_n (n - n_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{E_J}{2} \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) \end{aligned} \quad (2.66)$$

となる。

このハミルトニアンの固有エネルギーを数値計算で求め、 n_g に対してプロットした結果を図 () に示す。(電荷数 n は 0 ~ 2 までとした。)

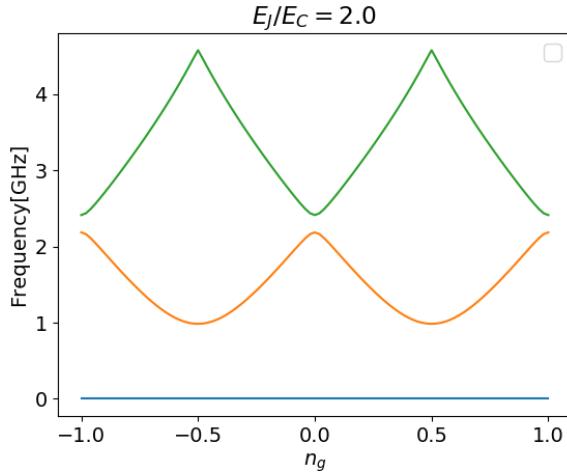


図 2.9: 電荷量子ビットの準位 ($E_J/E_C = 2$)

放物線が交わる箇所において、エネルギーの縮退が解け準位同士のエネルギー交換が起きていることが分かる。この作用は $E_J=0$ の時には現れず、ジョセフソン接合を含む素子に特有の現象である。また、 $n_g \sim 0.5$ において 3 準位目のエネルギーが高くなることが分かる。したがって $n_g \sim 0.5$ となるようにゲート電圧を調整することにより系を電荷数 $n = 0, 1$ までの 2 準位系に近似することができる。() の Hamiltonian で系の状態を $|0\rangle, |1\rangle$ に限定すると

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= 4E_C[n_g^2 |0\rangle\langle 0| + (1 - n_g)^2 |1\rangle\langle 1|] - \frac{E_J}{2}(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \\ &= -\frac{E_J}{2}\sigma_x + 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_z + 2E_C[(1 - n_g)^2 + n_g^2]I \end{aligned} \quad (2.67)$$

となり、定数項を除くと

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{E_J}{2}\sigma_x + 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_z \quad (2.68)$$

と定義される。電荷量子ビットは $n_g \sim 0.5$ で動作させることを考えると

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{E_J}{2}\sigma_x \quad (2.69)$$

となり、固有状態は

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.70)$$

となる。固有状態は $|0\rangle, |1\rangle$ であったほうが都合が良いので、Hadamard 変換

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

を作用させる。すると

$$H^\dagger \sigma_x H = \sigma_z, \quad H^\dagger \sigma_z H = \sigma_x \quad (2.72)$$

であるので変換後の Hamiltonian は

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{E_J}{2}\sigma_z + 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_x \quad (2.73)$$

となる。以下、1量子ビットの Hamiltonian として上式を用いる。

Transmon

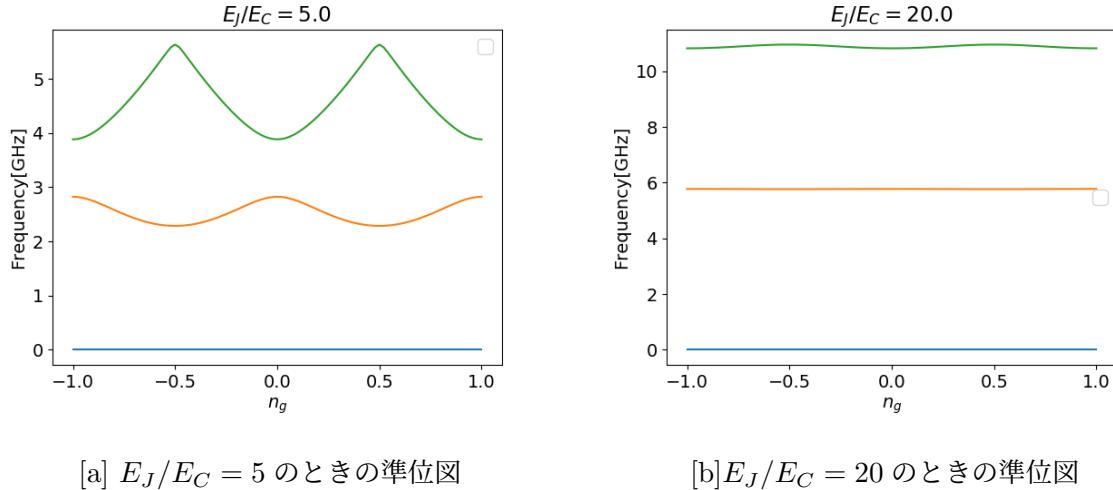
先ほどの電荷量子ビットを拡張したものがトランズモンと呼ばれる量子ビットになる。このトランズモンは電荷量子ビットのジョセフソン接合にキャパシタンス C_S をシャントした構造を持っている。電荷量子ビット同様にハミルトニアンを求めていくとジョセフソン接合のキャパシタンス C_J が $C_J \rightarrow C_J + C_S$ に置き換わり

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi} \\ E_C &= \frac{e^2}{2C_\Sigma}, \quad C_\Sigma = C_J + C_g + C_S \end{aligned} \quad (2.74)$$

となる。 C_g, C_J より比較的大きなキャパシタンスを用意することで E_C は E_J に対して小さくなる。図 ()[a], [b] に E_J/E_C を変化させた際の n_g に対するエネルギー準位図を示す。 E_J が E_C に対して大きくなるにしたがって、ゲート電荷 n_g に対する準位のエネルギー変化は小さくなり、電荷ゆらぎに対して強い準位系が形成されることになる。反面、3準位目のエネルギーが下がることで、量子系への操作を行う際にこの準位への励起が起こりやすくなるという欠点がある。励起の起こりやすさの指標として非調和性

$$\alpha = (E_{|2\rangle} - E_{|1\rangle}) - (E_{|1\rangle} - E_{|0\rangle}) \quad (2.75)$$

があり、 α の絶対値が大きいほど3準位目への励起が起こりにくいことを表す。

図 2.12: E_J/E_C の比の変化に対する準位図の遷移

Tunable な Transmon

ここまで示した電荷量子ビットはゲート電圧 V_g によって準位のエネルギーを変化させることができた。しかし Transmon は電荷揺らぎに耐性を持った結果 V_g に対してほとんど準位のエネルギーが変化しなくなる。そこで、ジョセフソン接合の代わりに SQUID を利用することを考える。() 式の E_J が $E_J \cos(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0})$ に置き換わると考えればよく、量子ビットのハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= -\frac{E_J}{2} \cos(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) \sigma_z + 4E_C(n_g - \frac{1}{2})\sigma_x \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_q \sigma_z + \frac{1}{2}\epsilon \sigma_x \end{aligned} \quad (2.76)$$

ω_q : 量子ビットの固有周波数, ϵ : ゲート電圧 V_g によって制御可能なエネルギー

となり、外部磁束 Φ を制御することで Transmon の固有周波数は変調可能 (Tunable) になる。 Φ の変化に対する Transmon のエネルギー準位の変化を図 () に示す。

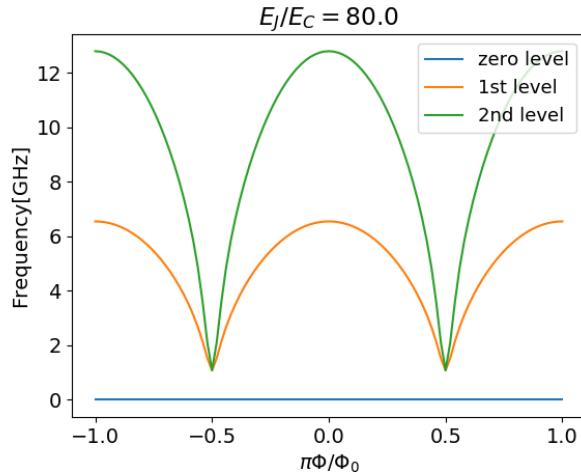


図 2.13: 磁束の変化に対する Tunable な Transmon のエネルギー準位図 ($E_J/E_C = 80$)

$\frac{d\omega}{dt} = 0$ となる点 (上の図におけるエネルギー準位上の磁束 0 の点) を最適動作点といい、状態がこの点上にあるとき量子ビットは磁束の変化に最も強い。Tunable な量子ビットでは固有周波数が磁束に応じて変化するが、通常固有周波数というときには最適動作点における $|0\rangle$ 状態と $|1\rangle$ 状態の固有エネルギー差を示す。以下、特に断らない限り「量子ビット」はこの Tunable な Transmon をさすこととする。

2.2.4 他素子との結合

共振器との結合

図 () のような、トランズモンと LC 共振器がキャパシタンス C_g によって結合した系を考える。

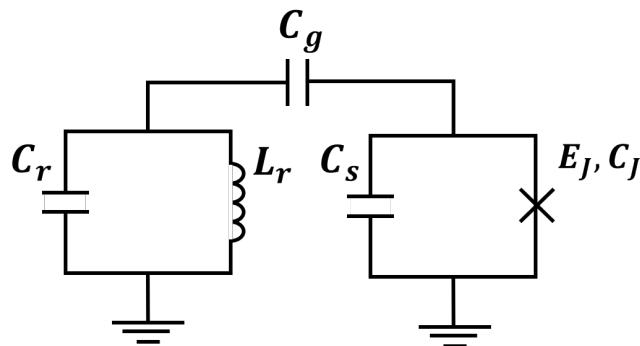


図 2.14: 共振器と結合した量子ビット

この系の Hamiltonian は以下のように記述される。(詳細な導出は () に示す)

$$\mathcal{H}/\hbar = \sum_j \omega_j |j\rangle \langle j| + \omega_r a^\dagger a + \sum_{i,j} g_{i,j} |j\rangle \langle j| (a + a^\dagger) \quad (2.77)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= 2\beta V_{rms}^0 \langle i | n | j \rangle \\
 \omega_j &= \left(\omega_q^{01} - \frac{\alpha}{2} \right) j + \frac{\alpha}{2} j^2 \\
 V_{rms}^0 &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{2C_r}} \\
 \beta &= \frac{C_g}{C_\Sigma} \\
 C_\Sigma &= C_S + C_g + C_J
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

行列要素 $\langle i | n | j \rangle$ についてはトランズモンの隣接準位以外の共振器との結合は実効的に無視する事ができる。よって結合をトランズモンの隣接準位に限り回転波近似を行いトランズモンの消滅演算子 c も定義すると

$$\begin{aligned}
 c &= \sum_j \sqrt{j+1} |j\rangle \langle j+1| \\
 H_{JC}/\hbar &= \sum_j \omega_j |j\rangle \langle j| + \omega_r a^\dagger a + g_{01} (ca^\dagger + c^\dagger a)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

となる。この式は Jayens-Cummings ハミルトニアンと呼ばれている。またこのハミルトニアンを二準位近似で表現すると

$$\mathcal{H}/\hbar = \frac{1}{2}\omega_q \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g_{01} (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \tag{2.80}$$

となる。第一項は量子ビットのみ、第2項は共振器のみ、第3項は相互作用項である。最適動作点における量子ビットの周波数 ω_q^{01} が ω_r より大きい場合には、Jayens-Cummings ハミルトニアンの磁束に対するエネルギーバンド図は図 () のようになる。

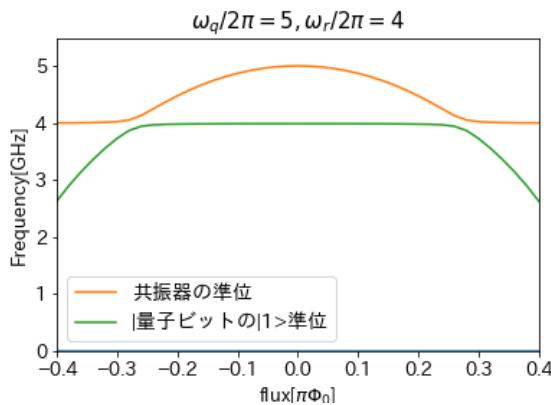


図 2.15: $\omega_r < \omega_q^{01}$ の場合の準位図

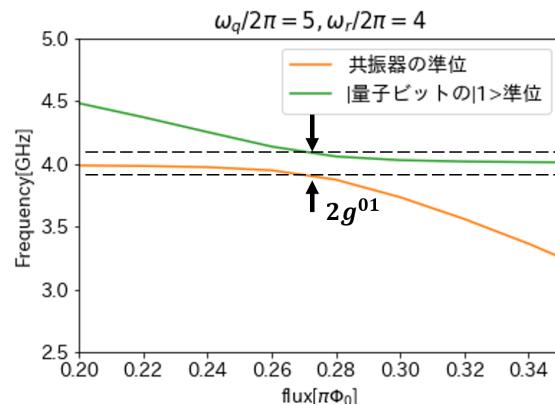


図 2.16: 拡大:スプリッティング

$\omega_r = \omega_q^{01}$ となる磁束量において準位のスプリッティングが起こっていることがわかる。スプリッティング幅は $2g^{01}$ に等しく、実験的にはスプリッティングの観測から結合定数 $2g^{01}$ を知ることができる。一方、 $\omega_q^{01} < \omega_r$ となる場合にはスプリッティングは起こらない。(図 ())

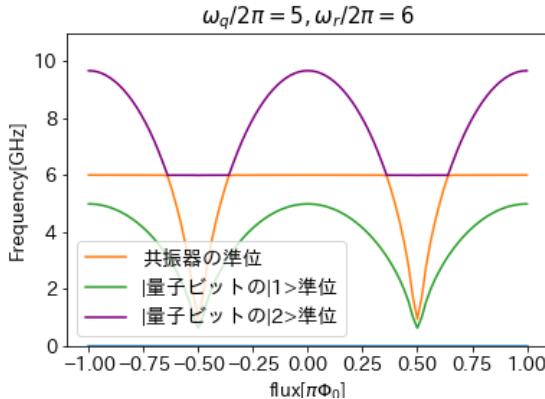
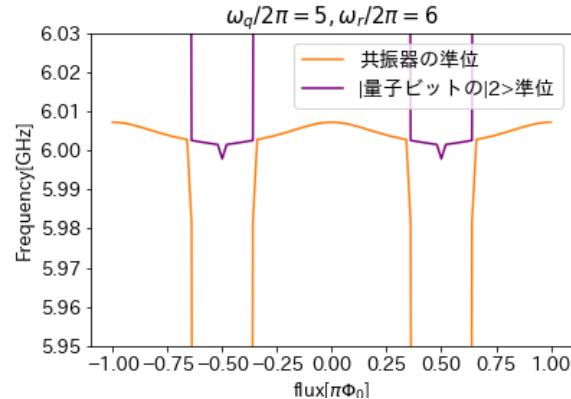
図 2.17: $\omega_r > \omega_q^{01}$ の場合の準位図

図 2.18: 拡大:共振器準位の周期的变化

共振器-量子ビット結合を利用した分散読み出し

次に量子ビットを読み出す方法として分散読み出しが上げられる。共振器の共振周波数と量子ビットの周波数の差 Δ が結合定数よりも十分離れた分散領域 ($\Delta = |\omega_r - \omega_q| \gg g$) において有効になる。式 (2.80) に対してユニタリ行列

$$U = \exp [\gamma (a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+)], \quad \gamma = \frac{g_{01}}{\omega_q - \omega_r} \quad (2.81)$$

による変換を行うと

$$U^\dagger \mathcal{H} U / \hbar = \left(\omega_r + \frac{g^2}{\omega_q - \omega_r} \sigma_z \right) a^\dagger a + \frac{1}{2} \left(\omega_q + \frac{g^2}{\omega_q - \omega_r} \right) \sigma_z \quad (2.82)$$

となる。このハミルトニアンにおいて、

$$\chi = \frac{g^2}{\omega_q - \omega_r} \quad (2.83)$$

とすると

$$\omega_r \rightarrow \omega_r + \chi \sigma_z \quad (2.84)$$

と読み出し周波数が χ だけシフトする。このシフトの方向は σ_z の期待値、すなわち量子ビットの状態によって変化するため共振器の周波数を通じて量子ビットが 0 か 1 かの測定を行うことができる。

量子ビットとの結合

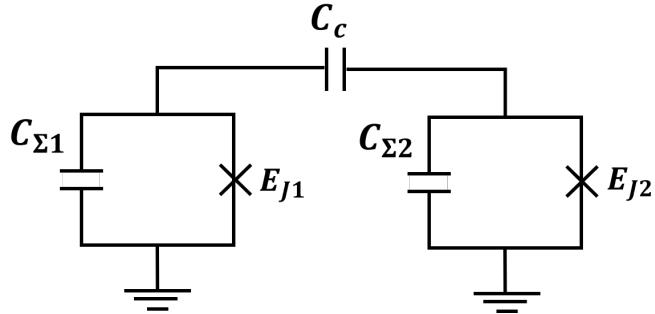


図 2.19: 2 量子ビット直接結合

図 () のように量子ビット 2 つがキャパシタンス C_c によって直接結合された系を考える。^{*2} 詳しい計算は割愛するが、この系の Hamiltonian は先ほどの Jayens-Cummings hamiltonian のうち共振器のみの項を量子ビット項に置き換え、相互作用項における共振器の昇降演算子を量子ビットの昇降演算子に置き換えることで記述される。キャパシタンス C_c による結合定数を g とおくと Hamiltonian は

$$\mathcal{H}/\hbar = \frac{1}{2}\omega_{q1}\sigma_{z1} + \frac{1}{2}\omega_{q2}\sigma_{z2} + g(\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2}) \quad (2.85)$$

と求まる。相互作用項の $(\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2})$ は

$$\sigma_{+1}\sigma_{-2} + \sigma_{-1}\sigma_{+2} = \frac{1}{2}(\sigma_{x1}\sigma_{x2} + \sigma_{y1}\sigma_{y2}) \quad (2.86)$$

と書けるため、XX+YY 相互作用と呼ばれる。

2.2.5 デコヒーレンス

T_1

理想的な量子ビットは状態を $|1\rangle$ におくと次の状態変化を与えるまでは $|1\rangle$ の状態を維持し続ける。しかし実際の量子ビットにおいては、外部環境への自然放出によって徐々に励起状態のエネルギーは減衰し、0 になっていく。これをエネルギー緩和もしくは Depolarizing という。量子ビットの $|1\rangle$ 状態の存在確率が $1/e$ になるまでの時間をエネルギー緩和時間といい T_1 で表す。減衰レート (depolarizing rate) Γ_1 とは以下の関係にある。

$$\frac{1}{T_1} = \Gamma_1 \quad (2.87)$$

超伝導量子ビットの T_1 を大きくする工夫は近年進んできており、2020 年 12 月現在では ()[μ s] 程度である。状態のエネルギーがこの時間スケールで緩和することを考えると、多数回量子ビットゲート (次節) を作用させる際には 1 回の操作にかかる時間は短いほうが望ましい。

^{*2} ここで説明するキャパシタンスによる直接結合以外に、量子ビット同士の結合には共振器 (bus resonator) を介した結合がある。また本研究では C_c は固定されているが、可変結合器を用いて C_c の大きさを変えることができるものもある。

, T_2, T_2^E

エネルギー緩和以外の状態の

2.3 量子ビットゲート

この節では、量子回路モデルの中で演算に用いられる 1,2qubit ゲート及びその実装・制御方法について述べる。

量子回路モデル

ゲート型量子コンピュータにおける演算は、初期状態として n ビットの量子ビット（通常 $|0\rangle^{\otimes N}$ ）を用意し行わせる演算に対応するユニタリ変換を行わせ（図左）、最後に n 量子ビット全て（または一部ビット）を測定する量子回路モデルに則って行われる。ビット数の増加に伴い、ユニタリ演算 U の表現は複雑になることが予想されるが、実は任意のユニタリ演算は Solovay-Kitaev の定理により後述する特定の 1 量子ビット操作と 2 量子ビット操作の組に分解できることが知られている。（図右）複数の操作 U_1, U_2, \dots, U_k が量子ビットに対して順次実行される場合、ユニタリ演算 U は

$$U = U_k \dots U_3 U_2 U_1 \quad (2.88)$$

と書ける。量子回路モデルの中で行われるユニタリ演算を特に量子ゲートと呼ぶ。

2.3.1 1qubit ゲート

1 量子ビットのゲートはすべて、前節で示した Bloch ベクトルを x 軸,y 軸,z 軸周りに回転させる回転ゲート

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ R_y(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ R_z(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.89)$$

からなる。 θ はその軸周りの回転角を表す。

X,Y 軸回転

X 軸回転ゲートを実装するには、Hamiltonian が () 式で与えられる量子ビット系においてゲート電圧 V_g に代わって電磁波による振幅 Ω , 周波数 ω , 位相 ϕ の交流電圧を与えることで実現される。すなわち () 式において $\epsilon \rightarrow \hbar\Omega \cos(\omega t + \phi)$ と変化することで実験室系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}/\hbar = \frac{1}{2}\omega_q\sigma_z + \Omega \cos(\omega t + \phi)\sigma_x \quad (2.90)$$

このハミルトニアンに回転座標系に移行するユニタリ行列 $U = e^{-i\omega t}$ を作用させると

$$\begin{aligned} &U^\dagger \sigma_x U \\ &= \sigma_x + (i\omega t/2)[\sigma_z, \sigma_x] + \frac{1}{2!} \end{aligned} \quad (2.91)$$

また X ゲート,Y ゲートを組み合わせてできる重要な 1 量子ビットゲートとして、前節で σ_x 項と σ_z 項の入れ替えを行う際にも作用させた変換である Hadamard ゲート

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

がある。これは Bloch 球上のベクトルを X 軸周りに 45 度,Y 軸周りに 45 度回転させるゲートである。 $|0\rangle, |1\rangle$ に対して作用させると

$$H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle \quad (2.93)$$

となり、確率振幅 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ずつの重ね合わせ状態が生成される。このため、重ね合わせ状態を作るために Hadamard ゲートは頻繁に利用される。

Z 軸回転

2.3.2 CZ ゲート

CZ ゲートの理論

実装上の課題 1.CZ ゲートの断熱・非断熱過程

ここまでで、CZ ゲートが SQUID 近傍に流れる電流パルスの制御によって実現できることを述べた。しかし上記のようなパルスを実装するにあたっては課題もある。その一つが、パルス電流値の急な立ち上げに伴う Non-Adiabatic Error と呼ばれるエラーの発生である。簡単のため、Hamiltonian が \hat{H} が () 式で表される 1 量子ビットを例に考える。 \hat{H} を図 () のように固有値エネルギー $E = \sqrt{H_x^2 + H_z^2}$ を持つベクトルとして考え、 H_x, H_z 成分に分解、 H_z 成分は固定され H_x 成分が可変とする。ブロッホ球の x 軸,z 軸とハミルトニアンの x 軸,z 軸を重ねると、ハミルトニアンが変化しない場合において状態ベクトルはハミルトニアンの固有ベクトルと同じ向きを向く。ハミルトニアンを表すベクトルと z 軸がなす角を θ とし、このベクトルが角度 $\Delta\theta$ でのラーモア歳差運動を起こす。Rotating frame に移行し、なおかつハミルトニアンの固有ベクトルの向きが変化することを考えた座標系上で考えるとハミルトニアンの固有ベクトルと状態ベクトルのなす角は

と表される。Non-Adiabatic エラーは $\Delta\theta$ を用いて

$$a \quad (2.94)$$

と表されるため、

通常、電流パルス発生器内部において電流値が変化する際には有限の立ち上げ時間 t_{ramp} を伴って電流値が変化する。 t_{ramp} が小さい場合にはハミルトニアンの固有ベクトルの変化

実装上の課題 2. 低周波磁束ノイズ

2.3.3 Adiabatic な CZ ゲート

第3章

波形のシミュレーション

3.1 Net-Zero Pulse の最適化シミュレーション

前章で説明したああああ

第4章

サンプル作製

4.1 Overview

今回測定したサンプルは2章で述べた量子ビット-量子ビット直接結合系を作ることを想定して作製した。図()にサンプル(チップのみ)の全体図を示す。

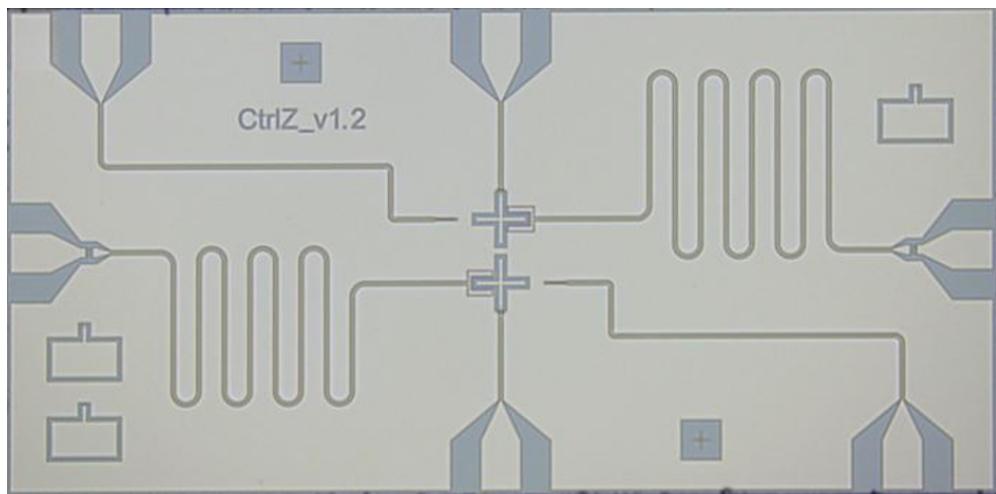


図 4.1: 作製したサンプル

本サンプルは厚さ 450um のシリコン基板に厚さ 50nm の Nb をスパッタした縦 2.5× 横 5mm のチップに加工を施し作製した。周囲のコンポーネントとの配線のしやすさ、コヒーレンス時間の長さから電荷量子ビットベースの量子コンピュータで主流の形状である。^{*1} 量子ビット同士はキャパシティブに結合されている。量子ビットにつながる配線のうち、蛇行している配線は CPW(後述) である。図の垂直方向に Xmon に向かって配線されているラインは量子ビットに磁束バイアスを与

^{*1} 他にも繋げられる配線数を重視した Transmon として多脚の Starmon, 円形の Concentric Qubit などのデザインも研究されている

えるためのバイアスラインである。この図では見えづらいが、量子ビットのバイアスライン側には Al-AlOx-Al からなる SQUID がついており、バイアスラインから流す直流電流で SQUID 内の磁束を調整する。チップ左上および右下から伸びている配線は 1qubit 回転ゲートのためのマイクロ波を Xmon に送り込むコントロールラインとなっている。その他左下、右上に配置された凸型の素子は各々の量子ビットのテスト用ジャンクションであり、バイアスラインのポートとコントロールラインのポート間にあるのはアライメントマークである。

CPW

CPW (Coplanar Waveguide, コプレーナ共振器) は図のような構造をした共振器である。誘電率 ϵ_r の基板上には接地導体を挟んで中央に導体の線路が通っている。共振周波数は中央導体の幅 w , スロット幅 s , 電磁波の伝播方向への長さ l , そして ϵ_r を用いて

$$\omega_r = \frac{c\pi}{l\sqrt{\epsilon_{eff}}} \quad (4.1)$$

と与えられる。共振器の Q 値は t と

4.2 設計値・留意した点

図 () のモデル中の各種コンポーネントの周波数、キャパシタンス等の値の決定にあたっては、状態操作及び読み出しを適切に行うために、いくつかの制約が存在する。

共振器の設計

まず共振器については、我々の研究室が所有するローパスフィルタが 4 ~ 8GHz, 8 ~ 12GHz のレンジにあるため 4 または 8GHz の上下にまたがる周波数は避けるべきである。また共振器の周波数が低すぎると () 式から共振器長を延長しなければならずチップの限られたスペースを圧迫するため好ましくない。最後に、分散読み出しの条件 ($\Delta = |\omega_r - \omega_q| \gg g$) を達成するために共振器と量子ビットの周波数を 1GHz 程離す必要があり、結合定数 g_{01} も大きくて 100MHz 台に抑制される。

量子ビットの設計

量子ビットの固有周波数 ω_q は, E_J, E_C を用いて以下のように表される。

$$\omega_q = \sqrt{8E_J E_C - E_C} \quad (4.2)$$

このとき

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{e^2}{2C_\Sigma} \\ C_\Sigma &= C_B + C_g + C_J \\ E_J &= E_{J,max} |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)| \\ E_{J,max} &= \frac{I_C}{2e} \\ J_C &= \frac{\pi\Delta(T)}{2eR_n A} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

2量子ビット直接結合系の場合、量子ビット同士の周波数が近すぎると一方のビットに送られたマイクロ波で他方のビットが状態操作される可能性があるため^{*2}そのため、設計の上では量子ビットの周波数を 800MHz ほど離調している。量子ビット同士の結合定数 J は強くなるほど式 () よりゲート時間が短くなるが状態操作を行わない状態での量子ビット間のエネルギー交換も行われやすくなるため大きくても 20MHz 台に設計する。

4.3 電磁界シミュレーション

共振器の周波数、各種キャパシタンスは CAD 上で図面を設計し、AWR Microwave office というソフトウェアを用いてシミュレートした。Microwave office では 2 次元図面に厚みを設定して誘電体と金属の層に対する設定を行うことで 3 次元に近い状況でのシミュレーションを行う。また、超伝導体については電気抵抗がほぼない導体(電気伝導度=10²⁰⁰)に近似した。

まず共振器については図 () のようにポートを配置し、ポート 1 からグラウンドポート-1 に向けて送信するマイクロ波の反射係数 S11 を見ることで周波数特性を解析した。量子ビット 1,2 にそれぞれ接続された共振器 R1,R2 の周波数特性は図 () のとおりである。この曲線を Resonator-tools を用いて fitting した結果、共振周波数は $f_{r1} = 6.4682, f_{r2} = 7.4102$ となった。また、ポート間のアドミタンス Y の周波数特性を見ることでコンポーネント間のキャパシタンスを見積もることもできる。インピーダンスを Z とすると

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (4.4)$$

$$Y = 1/Z$$

であり、超伝導体では $R \rightarrow 0$ となる。さらに ω が小さい領域では L を含む項の寄与は無視できるため

$$Y \sim j\omega C \quad (4.5)$$

と表現される。アドミタンスの虚部を f に対してプロットすると傾き $2\pi C$ が得られ、ここから C の値が得られる。(Im[Y] えを測る周波数領域は f=0 1.0GHz までとした。)

4.4 作製手順

チップの作製にあたっては理化学研究所内クリーンルームにてパッケージングを除く全作業を行った。このうちの大まかな工程について述べる。

1.Photolithography

デザインにおけるジョセフソン接合以外の部分(共振器、量子ビット本体)をチップ上にパターニングする工程。ここでは $2 \times 2\text{cm}$ のチップに $2.5 \times 5\text{mm}$ のデザインを 8×4 個配置したパターンを一遍に描画した。レジストとして ZEP520A-7 をスピンドルコーターを用いて塗布し、マスクレス UV 露光装置を用いて UV を照射。現像後、CF4 ガスによるエッチングを施し、残留レジストを剥離液で洗い流す。

^{*2} 原理の章での説明を省いたが、この作用を積極的に利用する、CR(Cross-Resonance) ゲートと呼ばれる 2 量子ビット ゲートも存在する。CR ゲートは特定のゲート時間だけ一方の量子ビットを他方の量子ビットの共振周波数のマイクロ波で駆動することにより、CNOT のユニタリ演算を実現できる。

2.EBL

続いて電子ビーム描画装置によりジョセフソン接合部分のパターンを描画した。先ほどの UV を照射する Photolithography と比較してビーム径が小さいので、より精緻なデザインを描画できる。2層のレジスト ZEP520A-7, Copolymer を塗布しホットプレートで焼き固め、ビーム照射後に上層の ZEP のみを現像した。その後 IPA(イソプロピルアルコール) と超純水 93:7 溶液で ZEP に穴が空いた箇所の Copolymer を現像した。ここまででの作業により SQUID 付近には図 () に示す、ジョセフソン接合を蒸着するための空洞が形成される。

3.PLASSYS

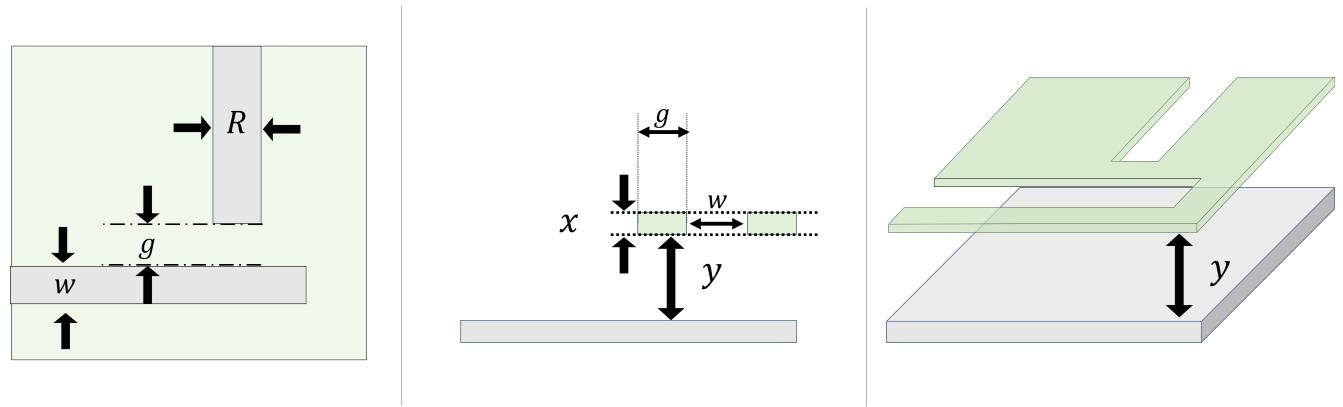


図 4.2: EBL 終了後のレジストによる空洞

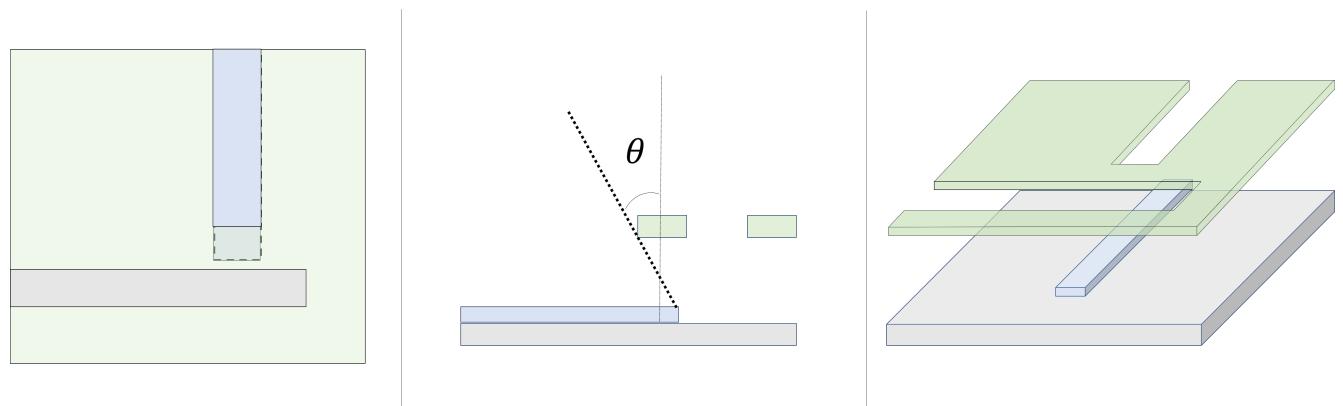


図 4.3: 2角度蒸着法:一回目のアルミ蒸着後

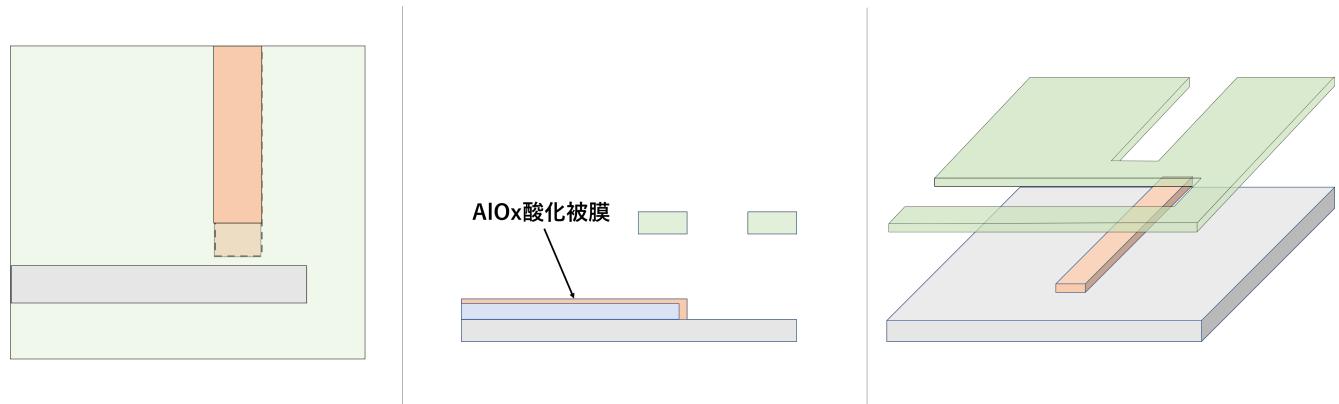


図 4.4: アルミの酸化被膜形成

ジョセフソン接合は Al-AlO_x-Al の重なりを作るために 2 角度蒸着法という工程によって形成される。最初に少し角度 θ をつけた状態で一層目のアルミが蒸着され、10 分程 O₂ ガスによって酸化されたのち二層目のアルミが先ほどとは逆向きに同じ角度で蒸着される。一層目の酸化被膜がジョセフソン接合の薄膜障壁の役割を果たし、この被膜と 2 層目のアルミの重なり面積によりここを通るジョセフソン電流の臨界電流値が決定される。蒸着後、接合部ではない箇所のアルミを剥離液で剥がし、ジャンクションが形成されていることを確認した。SEM による撮影の結果を図 () に示す。

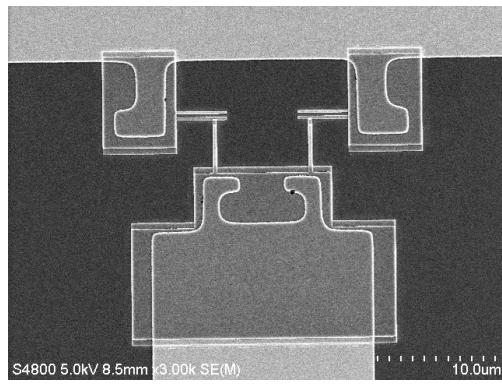


図 4.5: 2 角度蒸着法で形成されたジョセフソン接合

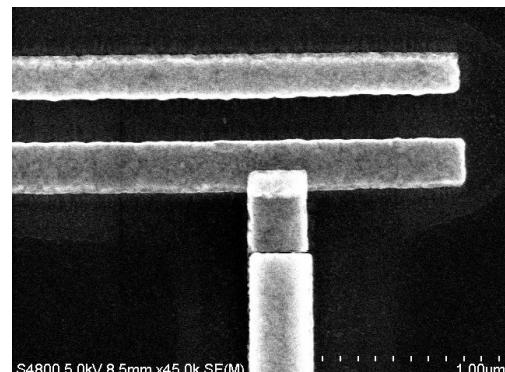


図 4.6: 接合部の拡大図

4. Dicing

UV レジストを塗布・焼き固めたのち、チップを $2.5 \times 5\text{mm}$ に切り出す。アセトンと IPA でレジスト剥離、洗浄を行いチップが完成する。

4.4.1 パッケージング

完成したサンプルは専用のサンプルホルダー (図 ()) に装着される。

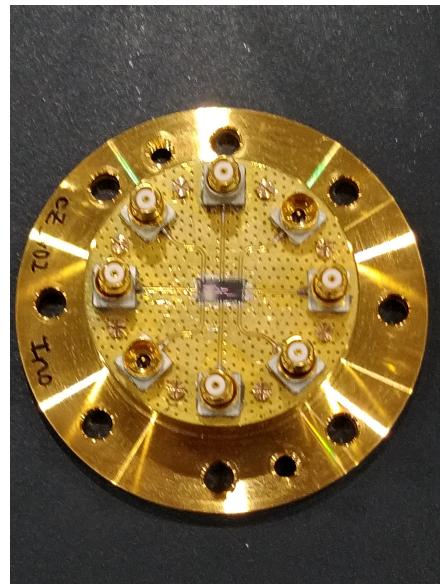


図 4.7: サンプルホルダーに装着されたチップ

サンプルホルダー上面は PCB(Printed Circuit Board, プリント基板) となっておりチップの固定ならびに接続された SMA コネクタ経由で送られてくる信号をチップ上のポートに伝送する役割を担う。

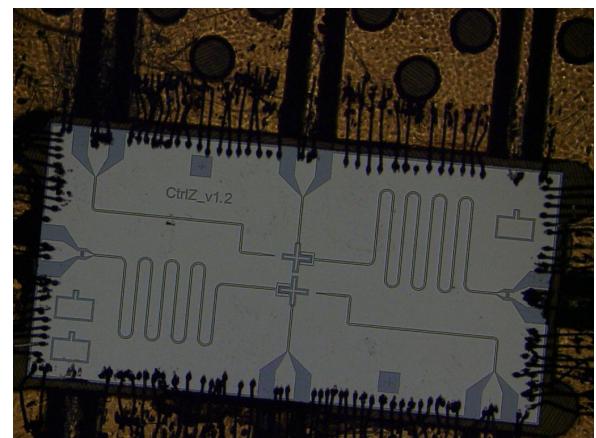
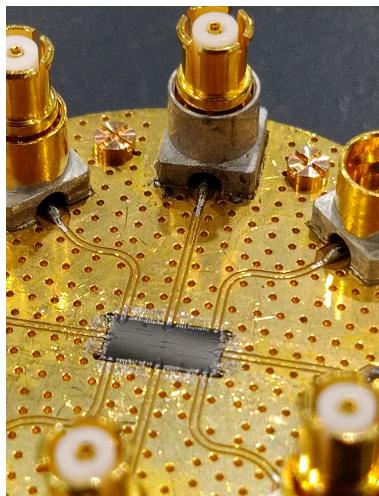


図 4.8: サンプルを装着した PCB(拡大)

図 4.9: Bonding されたチップ

サンプルをホルダーに装着しただけではポートに信号が流れないと、チップのポートと PCB のポート、及びチップの Ground と PCB の Ground はアルミニウム細線により複数箇所で接続 (Bonding) される。Bonding 終了後はスペーサーと呼ばれるカバーを装着し希釈冷凍機に導入される。

第 5 章

測定

5.1 解析手法

5.2 測定環境

第 6 章

結果

6.1 周波数領域測定

6.1.1 セットアップ

6.2 時間領域測定

6.2.1 セットアップ

第7章

考察

7.1 非断熱的・断熱的量子ゲートの比較

7.2 ゲート忠実度低下の要因

第8章

結論

8.1 解析を終えて

第 9 章

展望

9.1 今後の展望

9.1.1 結合可変な CZ ゲートの実現

9.1.2 パラメトリック量子回路の最適化

第 10 章

謝辞

謝辞

本研究を行うにあたり、様々なご指導および研究の進め方に関する助言を頂きました指導教員の蔡兆申教授に感謝致します。また、サンプル作製を引き受けていただき、測定に関してご助力を頂きました朝永さん、日頃の議論にお付き合いいただいた Kwon さん、同期の白井君、山本君ならびに研究室の皆様に感謝致します。

第 11 章

補遺

11.1 ハミルトニアンの基底変換

ここでは、Hamiltonian の変換を行う。

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger & \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_a & g(\Phi) \\ g(\Phi) & \tilde{\omega}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

$$= \hbar \tilde{\omega}_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \tilde{\omega}_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g(\Phi) \left(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger \right) \quad (11.2)$$

$$\hat{c}_\pm = \frac{\hat{a} \pm \hat{b}}{\sqrt{2}} \quad \hat{c}_+^\dagger = \frac{\hat{a}^\dagger \pm \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (11.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{c}_+^\dagger + \hat{c}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{b} = \frac{\hat{c}_+^\dagger - \hat{c}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (11.4)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{c}_+ + \hat{c}_-}{\sqrt{2}} \quad \hat{b} = \frac{\hat{c}_+ - \hat{c}_-}{\sqrt{2}} \quad (11.5)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} (\hat{c}_+^\dagger + \hat{c}_-^\dagger) (\hat{c}_t + \hat{c}_-) \quad \hat{a}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} (\hat{c}_t^\dagger + \hat{c}_-^\dagger) (\hat{c}_+ - \hat{c}_-) \quad (11.6)$$

$$\hat{b} \hat{b} = \frac{1}{2} (\hat{c}_t + \hat{c}_-^\dagger) (\hat{c}_+ - \hat{c}_-) \quad \hat{a} \hat{b}^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{c}_t + \hat{c}_-) (\hat{c}_t^\dagger - \hat{c}_-^\dagger) \quad (11.7)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} [\hat{c}_t^\dagger \hat{c}_+ + \hat{c}_t^\dagger \hat{c}_- + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_t + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_-] \quad (11.8)$$

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} [\hat{c}_t^* \hat{c}_t - \hat{c}_t^n \hat{c}_- - \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_t + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_-] \quad (11.9)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2} [\hat{c}_t + \hat{c}_t - \hat{c}_t \hat{c}_- + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_t - \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_-] \quad (11.10)$$

$$\hat{a}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{2} [\hat{c}_+ \hat{c}_+^4 - \hat{c}_+ \hat{c} \pm + \hat{c} - \hat{c}_+^2 - \hat{c} - \hat{c}_-] \quad (11.11)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \hat{w}_a [\hat{c}_t^+ \hat{c}_+ + \hat{c}_t^+ \hat{c} + \hat{c}_-^+ \hat{c}_t + \hat{c}_-^+ \hat{c}_-] \quad (11.12)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} \hat{\omega}_b [\hat{c}_+^+ \hat{c}_+ - \hat{c}_+^+ \hat{c}_- - \hat{c}_-^+ \hat{c}_+ + \hat{c}_-^+ \hat{c}_-] \quad (11.13)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} g [2\hat{c} + \hat{c}_+ - 2\hat{c}_- \hat{c}] \quad (11.14)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} (\hat{\omega}_a + \hat{\omega}_b + 2g(\Phi)) \hat{c}_t^+ \hat{c}_+ + \frac{\hbar}{2} (\hat{w}_a + \hat{w}_b - 2g(\Phi)) \hat{c}_-^+ \hat{c}_- \quad (11.15)$$

$$+ \frac{\hbar}{2} A (\hat{w}_a - \hat{w}_b) (\hat{c}_t + \hat{c}_- + \hat{c}_+ \hat{c}_-) \quad (11.16)$$

$$\omega_a + \bar{c}_b + 2g(\Phi) = \Omega + \quad (11.17)$$

$$\omega_a + \bar{c}_b - 2g(\Phi) = \Omega - \quad (11.18)$$

$$\hat{\omega}_a - \hat{w}_b = \Delta \quad (11.19)$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \Omega + \hat{c} + \hat{c} + \frac{\hbar}{2} \Omega - \hat{c} \pm \hat{c} + \frac{\hbar}{2} \Delta (\hat{c} + \hat{c} + \hat{c}_+ \hat{c}_-^+) \quad (11.20)$$

$$- \frac{\hbar}{2} (\begin{array}{cc} \hat{c}_+ & \hat{c} \pm \end{array}) \left(\begin{array}{cc} \Omega_1 & \Delta \\ 2 & \Omega_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{array} \right) \quad (11.21)$$

11.2 マスター方程式

11.3 2 点相関関数

参考文献

- [1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, et al., “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor”, *Nature* **574**, 505 (2019).
- [2] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, et al., “Quantum computational advantage using photons”, *Science* **370**, 1460 (2020).