潮汐破壊について　佐藤創太

1 エピサイクル近似

z 軸について対称なポテンシャルを持つ銀河と、その中を運動する星の運動について考える。座標は、銀河の中心を原点とする円筒座標系(R,ϕ,z)とする。

1.1 子午面上の運動

$z=0$の面について対称なポテンシャル$\Phi(R,z)$を考える。z 成分の運動量の保存について調べることで、三次元の運動を子午面上の二次元の運動に帰着させる。

この時、ラグランジアンは、

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{R}^2+\left(R\dot{\phi}\right)^2+\dot{z}^2\right)-\Phi(R,z) \tag{1}$$

となる。この時運動量は

$$p_R=\dot{R}, p_\phi=R^2\phi, p_z=\dot{z} \tag{2}$$

となる。

またハミルトニアンは、H=T+V で、(2)式を用いて、

$$H=\frac{1}{2}\left(p_R^2+\frac{p_\phi^2}{R^2}+p_z^2\right)+\Phi(R,z) \tag{3}$$

となる。ハミルトンの正準方程式は、qを一般化座標、pを一般化運動量として、

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}$$

であるから、運動方程式は、

$$\dot{p_R}=\ddot{R}=\frac{p_\phi^2}{R^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{R}} \tag{4}$$

$$\dot{p_\phi}=\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\right)=0 \tag{5}$$

$$\dot{p_z}=\ddot{z}=-\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}} \tag{6}$$

となる。

(5)式は z 軸について角運動量保存を示している。そのためL_zを定数として、$p_z=L_z$と置く。

(4)、(6)式は、それぞれ R 方向と z 方向での振動を示している。

ここで、有効ポテンシャルを

$$\Phi_{\mathrm{eff}} \equiv \Phi(R,z) + \frac{\mathrm{L_z}^2}{2\mathrm{R}^2} \tag{7}$$

とすると、(4)、(6)式は以下のように書き換えることができる。

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial \mathrm{R}}, \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial \mathrm{z}} \tag{8}$$

このようにして、軸対称なポテンシャル$\Phi(R,z)$中の三次元の星の運動を、Φ_{eff}中を運動する 2 次元の運動に帰着させることができた。

ここで、ハミルトニアンは、

$$H_{eff} = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{\mathrm{eff}}(R,z) \tag{9}$$

H_{eff}は方位角成分の運動量p_ϕが一定値L_zをとるときのハミルトニアンである。

したがってH_{eff}は軌道運動の全エネルギーE となる。$E - \Phi_{\mathrm{eff}}$は(R,z)平面上の運動エネルギーであり、正の値をもつので、軌道は$E \geq \Phi_{\mathrm{eff}}$を満たす領域に制限される。この領域を囲む曲線をゼロ速度曲線と呼ぶ。Φ_{eff}の最小値は、

$$0 = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial \mathrm{R}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{R}} - \frac{\mathrm{L_z}^2}{\mathrm{R}^3} \tag{10}$$

$$0 = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial \mathrm{z}} \tag{11}$$

を共に満たす点において存在する。Φが z=0 の面において対称という仮定の上では、赤道面においてはどの点であっても(11)式を満たす。(10)式は、次に示すようなガーディングセンターR_g(guiding-center radius)によって満たされる。

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{R}}\right)_{(R_g,0)} = \frac{\mathrm{L_z}^2}{\mathrm{R}^3} = R_g \dot{\phi}^2 \tag{12}$$

この条件は、釣り合いを考えると、角速度$\dot{\phi}$の円軌道の条件である。したがって、Φ_{eff}の最小値は角運動量L_zを持つ円軌道の半径から得ることができ、Φ_{eff}の最小値が円軌道のエネルギーである。

1.2 エピサイクル

円盤銀河中では多くの恒星が円軌道に近い軌道で運動をしている。そのような軌道に対し

て、(8)式の近似解が得られる座標を以下のように定義する。

$$x = R - R_g \tag{13}$$

R_gは角運動量L_zの軌道についてのガーディングセンター半径である。((12)式)

$R = R_g$で、$z = 0$、つまり$(x, z) = (0,0)$はΦ_{eff}が最小となる子午面上の座標である。

Φ_{eff}を$(x, z) = (0,0)$周りでテイラー展開すると、

$$\Phi_{\mathrm{eff}} = \Phi_{\mathrm{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0\}} x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0\}} z^2 + O(xz^2) \tag{14}$$

となる。x と z についての一次の項は、(10),(11),(12)によって消える。xz, x^2zに比例する項はΦ_{eff}が$z = 0$に関して対称であるため消える。またここで、xz^2と x と z の 3 次以上の項を無視をするエピサイクル近似を用いる。そして、以下の二つの量を定義すると(8)式は単純化することができる。

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0)}, v^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0)} \tag{15}$$

すると、(8)の運動方程式は、

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x \tag{16}$$

$$\ddot{\mathrm{z}} = -v^2 \mathrm{z} \tag{17}$$

となる。 (16),(17)式はそれぞれ角振動数κとvを持つ調和振動子の変位とみなすことができる。角振動数κとvはそれぞれ、エピサイクリック振動数、垂直振動数と呼ばれる。
(7)式から、

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0)} + \frac{3{L_z}^2}{R^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)_{(R_g,0)} + \frac{3}{R_g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{(R_g,0)} \tag{18}$$

$$v^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{(R_g,0)} \tag{19}$$

を得る。半径 R における角周波数は、釣り合いを考えると、

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{(R_g,0)} = \frac{{L_z}^2}{R^4} \tag{20}$$

である。

ここでv_cを$v_c(R) = R\Omega(R)$である半径 R における回転速度とし、以下の二つの関数を定義

する。

$$A(R) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR}\right) = -\frac{1}{2}R\frac{d\Omega}{dR} \tag{21}$$

$$B(R) \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR}\right) = -\left(\Omega + \frac{1}{2}R\frac{d\Omega}{dR}\right) \tag{22}$$

これらの関数は、角速度Ω、エピサイクル振動数κと

$$\Omega = A - B, \kappa^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega \tag{23}$$

のような関係にある。銀河系での太陽の位置における A と B の値は、太陽近傍の恒星の運動から求まり、オールト定数と呼ばれる。

(16)(17)の両辺をそれぞれ積分すると、一次元ハミルトニアンと呼ばれる以下を得ることができる。

$$H_R = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \kappa^2 x^2\right), H_z = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^2 + \kappa^2 z^2\right) \tag{24}$$

したがって、(14)式で行った近似が有効である、円軌道に近い軌道であれば、3 つのそれぞれ独立した運動積分$(H_R.H_z,p_z)$が与えられる。

(13),(15),(16),(17),(24)式よりそのような星のハミルトニアンは下式のように 3 つの成分になることがわかる。

$$H = H_R(R,p_R) + H_z(z,p_z) + \Phi_{eff}(R_g,0) \tag{25}$$

したがって、3 つの運動の積分は、$(H_R.H_z,p_z)$または(H,H_z,p_z)として選ぶことができる。また、(H,H_z,p_z)においては、H_zが古典積分の第三積分に当たる。

実際の銀河で、$\rho_{disk} \simeq constant.$であるような十分小さい$z(\ll 300pc)$ において(17)式は、

$$z = Zcos(\nu t + \zeta) \tag{26}$$

を一般解として持つ。Zとζは任意定数である。しかし、ディスク星軌道の大半は 300pc の面を超えていくためエピサイクル近似は円盤の垂直方向を向くディスク星について正しい運動を記述できない。よって、エピサイクル近似は円盤面上の恒星運動について良い近似となる。ここまでは動径方向成分の運動を扱ってきたが、ここからは方位角成分についての運動について考察する。

動径方向の運動方程式である、(16)は一般解

$$x(t) = Xcos(\kappa t + \alpha) \tag{27}$$

を持つ。$X \geq 0$とαは任意定数である。$\Omega_g = L_z/R_g^2$を角運動量L_zの円軌道の角速度とする。

$p_\phi = L_z$は定数であるから、

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{R^2} = \frac{L_z}{R_g^2}\left(1 + \frac{x}{R_g}\right)^{-2} \simeq \Omega\left(1 - \frac{2x}{R_g}\right) \tag{28}$$

を得る。x に(27)に代入すると、

$$\dot{\phi} = \Omega_g - 2\Omega \frac{X}{R_g} cos(\kappa t + \alpha) \tag{29}$$

となり、この両辺を積分すると、

$$\phi = \Omega_g t + \phi_0 - \gamma \frac{X}{R_g} sin(\kappa t + \alpha) \tag{30}$$

$$\gamma \equiv \frac{2\Omega_g}{\kappa} = -\frac{\kappa}{2B} \tag{31}$$

を得る。(31)式では(23)を用いた。これらの方程式によって記述される運動の性質は、ガイディングセンター$(R, \phi) = \left(R_g, \Omega_g t + \phi_0\right)$を原点にとった直行座標系$(x, y, z)$を設定することで知ることができる。x 座標、z 座標について既に定義されてあるため、y 座標はそれらと直行し、かつ回転運動の方向に設定する。一次のパラメーターX/R_gについて

$$\begin{aligned} y &\equiv -\gamma X sin(\kappa t + \alpha) \\ &\equiv -Y sin(\kappa t + \alpha) \end{aligned} \tag{32}$$

を得る。(27)と(32)はエピサイクル近似での楕円軌道の完全解である。z 方向の運動は x,y 方向の運動から独立している。(x, y)平面では、恒星はガイディングセンター周りのエピサイクルと呼ばれている楕円上を運動する。エピサイクルの軸比は

$$\frac{X}{Y} = \gamma^{-1} = \frac{\kappa}{2\Omega} \tag{33}$$

となる。

1.2 High-speed encounters と distant-tide approximation

恒星同士の作用の概念として、high-speed encounters がある。high-speed とは、重力が作用する時間が、それぞれの横断時間よりも短い接近を意味する。

質量M_sの恒星系(subject system: satellite system)と質量M_pの perturber(host system)の接近について考える。二つの系が最も接近する時の、互いの系の中心同士の距離を b、相対速度を V とする。V が十分大きい時、以下の二つのことがいえる。

1. 二つの系の相対運動の運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりもはるかに大きいため、系の中心は一定速度で横断する。

2. 本来、二つの系が接近する時、恒星系に含まれる恒星は、接近前の位置からわずかにずれてしまう。しかし、V が十分に大きい時、host からの重力を、それぞれの恒星の位置を変化させない、短時間の衝撃と考えることができる。（速度は変化させる。）これを撃力近似という。

以下では恒星系の速度が host を通過することによってどのように変化するかを考える。こ

こでは、接近前の satellite system の重心を原点にとった座標系を考える。m_iを satellite system 中の i 番目の星の質量、$\dot{v_i}$ を host から受ける力による i 番目の星の速度変化率とする。また、この時、重心の速度変化率は、以下である。

$$\dot{\boldsymbol{v}_{cm}} = \frac{1}{M_s}\sum_i m_i \dot{v_i} \quad , M_s \equiv \sum_i m_i \tag{34}$$

重心に対する相対的な i 番目の星の加速度は以下である。

$$\dot{\boldsymbol{v}_i} \equiv \dot{\boldsymbol{v}_i} - \dot{\boldsymbol{v}_{cm}} \tag{35}$$

$\Phi(x,t)$を host の重力ポテンシャルとすると

$$\dot{\boldsymbol{v}_i} = -\boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x_i},t) \tag{36}$$

と書くことができ、(35)は

$$\dot{\boldsymbol{v}_i} = -\boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x_i},t) + \frac{1}{M_s}\sum_{\boldsymbol{i}} m_i \boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x_i},t) \tag{37}$$

とかくことができる。

撃力近似を用いると、$\boldsymbol{x_i}$は接近において一定であるため、

$$\Delta v_i = \int_{-\infty}^{\infty} dt\dot{\boldsymbol{v}_i} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[-\boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x_i}.t) + \frac{1}{M_s}\sum_i m_i \boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x_i},t)\right] \tag{38}$$

となる。

接近の効果の計算は、satellite system の大きさが衝突パラメーターb よりも十分に小さい場合に、簡単に行うことができる。衝突パラメータが、satellite system の大きさに比べて十分に大きい場合、satellite system に作用する重力ポテンシャルは satellite system 内においてなめらかあるといえる。$-\boldsymbol{\nabla\Phi}(\boldsymbol{x},t)$を原点周りでテーラー展開すると、

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x_j}}(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{\Phi}_j(t) - \sum_k \boldsymbol{\Phi_{jk}}(t)x_k + O(|\boldsymbol{x}|^2) \tag{39}$$

となる。ここで$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})$であり、また

$$\Phi \equiv \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right|_{x=0}, \Phi_{\mathrm{jk}} \equiv \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right|_{x=0}$$

である。

テイラー展開した項の二字以上の項$\left(O(|\boldsymbol{x}|^2)\right)$を落とすことを distant-tide approximation という。これは、上でも述べた host までの距離が satellite system の大きさに比べて大きい場合に、この近似が適用できる。撃力近似と distant-tide approximation の二つの近似が有効な接近を潮汐ショック(tidal shocks)という。これらの式を式を(34)(36)式に代入し、重心を原点にとると$\sum_i m_i \boldsymbol{x_i} = 0$となることから、$\boldsymbol{\Phi_{jk}}$重心の加速度$\dot{\boldsymbol{v}_{cm}}$寄与しないことがわかる。また、(37)式を(39)式に代入すると、$M_s = \sum_i m_i$となるため、$\boldsymbol{\Phi}_j$が$\dot{\boldsymbol{v}_i}$に寄与しないことが

わかる。したがって、

$$\dot{\boldsymbol{v}_\iota} = -\sum_{j,k=1}^{3} \widehat{\boldsymbol{e}_j} \boldsymbol{\Phi}_{jk} \boldsymbol{x}_{ik} \tag{40}$$

となる。

host が球状で中身を$\boldsymbol{X}(t)$とした場合、ポテンシャルを host 中心からの距離で評価できる。この時ポテンシャルは、$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, t) = \Phi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(t)|)$であり、

$$\Phi_{\ j} = -\Phi^{\prime\ \prime} \ \frac{X_j}{X}, \Phi_{\ jk} = \left(\Phi^{\prime\ \prime} \ -\frac{\Phi^{\prime}}{X}\right)\frac{X_j X_k}{X^2} + \frac{\Phi^{\prime}}{X}\delta_{jk} \tag{41}$$

となる。ここで、$X = |\boldsymbol{X}|$である。これより、全ての Φ の導関数は X で評価される。