

## 4.2 激しい緩和

201910854 佐藤創太

銀河系は無衝突系であり、星同士の衝突による緩和時間は宇宙年齢よりもはるかに長い。しかし、楕円銀河の密度分布はなめらかである。これは重力散乱による緩和の他に、何らかの力学的緩和が起こっていることを意味している。

この力学的緩和を説明するために、リンデンベルは**激しい緩和**と呼ばれるものを考えた。

無衝突系において、星は銀河ポテンシャルのみに作用されて運動をする自由粒子である。また、平衡状態では、星は閉じた軌道を描き、ジーンズの定理から、球対称な系を考えると、エネルギーと角運動量は運動の積分である。

しかし、重力ポテンシャル  $\phi$  が時間変化する非平衡状態で、エネルギーの時間変化を考えると、

単位質量あたりの全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi$$

であるので、この時間微分を考えると、

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= v \frac{dv}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \\ &= v \left( \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\end{aligned}$$

二行目への変換は、全微分で

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\ &= v \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\end{aligned}$$

を用いた。

三行目への変換は、運動方程式より、

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

を用いた。

となり、エネルギー保存が破れていることがわかる。

この重力ポテンシャルの変化  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$  によって激しい緩和が起こるとされる。

この激しい緩和について理解するために、ある密度分布の銀河を仮定し、その星のエネルギーや運動について考える。

まず、次のような密度分布の銀河を考える。

$$\rho_o(r) = \rho_{b0} \left( \frac{r}{R} \right)^{-1} \quad r \leq R$$

外側にいくにつれ、 $\frac{1}{r}$  で密度が小さくなっていくような分布である。

半径  $r$  内の質量は

$$\begin{aligned} M_0(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_o(r) dr \\ &= \int_0^r 4\pi \rho_{b0} r R dr \\ &= 2\pi \rho_{b0} R r^2 \end{aligned}$$

(厚さ  $dr$  の球殻の質量を考えると、球殻の体積は表面積  $4\pi r^2$  と厚さ  $dr$  の席であり、一行目の式はそれに密度  $\rho_o(r)$  をかけ積分したもの)

重力ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_0(r) &= \frac{GM_0(r)}{r} - \frac{2GM_0(R)}{R} \\ &= 2\pi G \rho_{b0} R (r - 2R) \end{aligned}$$

一銀河表面、つまり、 $r=R$  の時、ポテンシャルが  $-\frac{GM_0(R)}{R}$  となる境界条件にした。

また角運動量が 0 である動径方向の運動を考えると、動径方向の星の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{GM_0(r)}{r^2} \\ &= -2\pi G R \rho_{b0} \\ &\equiv \alpha \end{aligned}$$

となり、右辺は定数であるから等加速度運動することがわかる。

星の座標位置を位相  $\theta$  により、 $r = R \cos \theta$  とすると、上式を二回積分し、初期半径を  $r_i$ 、初期速度を  $v_i$  をすると、

$$R\cos\theta = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_i t + r_i$$

となる。束縛された星では、重力ポテンシャルが運動エネルギーに勝るため、 $E < 0$  であり、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}v^2 + \phi_0 \\ &= \frac{1}{2}v^2 + 2\pi G\rho_{b0}R(r - 2R) \\ &= \frac{1}{2}v^2 + 2\pi G\rho_{b0}R^2(\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

二行目への変換は  $\phi_0(r) = 2\pi G\rho_{b0}R(r - 2R)$

三行目への変換は  $r = R\cos\theta$  である

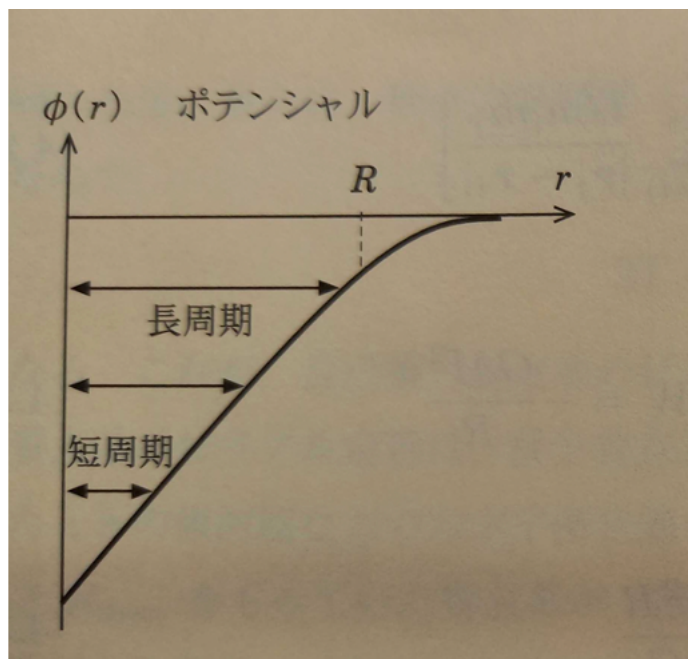
この重力ポテンシャルの中では、 $E$  の小さい星は、より短い周期でポテンシャル内を往復する。

これは、 $E$  が小さくなると、 $\phi_0$  が小さくなることから、

$$\phi_0(r) = 2\pi G\rho_{b0}R(r - 2R)$$

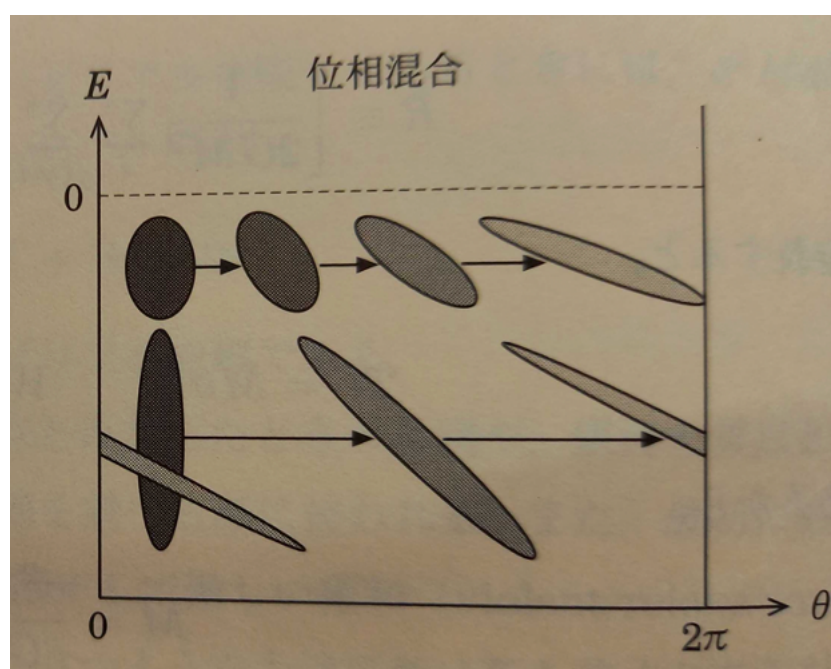
より  $r$  が小さくなるためである。

図にすると下図のようである。



ここでエネルギー  $E$  と位相  $\theta$  の空間で局所した粒子群を考えてみる。

エネルギーの小さい粒子は他の粒子よりも早く位相が変化する。  
 しかし、リュービュの定理より位相空間密度は一定であるため、この粒子群の面積は  $E-\theta$  空間で一定となる。(リュービュの定理は座標と運動量での位相空間で考えたが、 $E-\theta$  空間でも同じことが言える?)  
 位相空間で代表点 (今回は粒子) が作る面積 (粒子群の面積) は変わらない、ということを考えている。  
 これを繰り返すと、この粒子群は  $E-\theta$  空間で補足引き伸ばされ、元の位相に帰ってくる。つまり折り畳まれた分布が形成される。(同じ粒子群で違う位相のものが混同していることから)、これを位相混同という。



(縦軸エネルギーの低い部分が一周して帰ってきているため、  
 位相が混同している。)

位相混同の結果、位相空間の中で局在化していた、分布が  $E-\theta$  空間全体を埋める分布へと変化している。

これを  $[\theta, \theta + \Delta \theta]$  で粗視化してみると、(ある  $\Delta \theta$  で切ってみると、) その  $\Delta \theta$  における面積は小さくなっているため、位相空間密度は減少したことになる。またその時、空間の各点でさまざまなエネルギーの粒子が混ざり合っている。

以上は重力ポテンシャルの変化が無視できるような微小な局在化が起こった時の変化である。つまり、 $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  であったため、 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  が微小であるということは、考えていた激しい緩和がほとんど起こっていない時の変化になる。

ここからは、重力ポテンシャル変化が大きな変化が伴う場合を考える。つまり  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  が大きい、激しい緩和が起こるであろう変化を考える。

上の銀河モデルでは、この変化は、密度が  $\rho_{b0} \rightarrow \rho_{b1}$  に大きく変化し、銀河の質量が  $M_0 \rightarrow M_1$  に変わった場合を考える。質量変化  $\Delta M \rightarrow M_1 - M_0$  を微小変化

$\delta M$  の和として考えると、 $\Delta M = \sum \delta M$  である。

$$\begin{aligned}\phi_0(r) &= \frac{GM_0(r)}{r} - \frac{2GM_0(R)}{R} \\ &= 2\pi G \rho_{b0} R(r - 2R)\end{aligned}$$

より、質力変化に対する重力エネルギーの変化は位相によって異なる。(一行目右辺第一項の位相  $r$  によって異なることがわかる)。例えば、

$\theta = 0$ 、つまり、 $r = R$  のとき、 $\delta E_g = -\frac{Gm\delta M}{R}$  であり、

$\theta = \frac{2}{\pi}$ 、つまり  $r = 0$  のとき、 $M_0(r) = 2\pi \rho_{b0} R r^2$  を考慮すると、 $\delta E_g = -\frac{2Gm\delta M}{R}$  となる。

もし、常に位相が同じところで  $\delta M$  の変化が起こったとすると、一度にその位相で  $\Delta M$  の変化が起こった場合と最終的なエネルギーの変化量は変わらない。

しかし、実際には位相を変化させながら運動をし、ポテンシャルが変化しているので、どの位相でポテンシャルが変化したかによって、最終的な星の全エネルギー変化が異なる。

もし、きわめてゆっくり(断続的に)質量が変化した場合は、すべての位相をなめつくしながら少しずつエネルギー変化が起こるため、最終的な星のエネルギー変化は異ならない。(すべての位相で均一にエネルギーが変化するため)

しかし、一度に  $\Delta M$  変化した場合は、それぞれの粒子の位相によって、エネルギー変化はことなる。位相によってエネルギーが変わるということは、 $E$ - $\theta$  空間でエネルギー方向に引き伸ばされることになる。よってこの効果を考慮すると、考慮しない場合よりも、位相混合が加速するため定常状態により早い時間で推移する。この効果が**激しい緩和**である。

この激しい緩和が起こる時間スケールについて考える。激しい緩和は重力ポテンシャルの変化による粒子の動的緩和であり、ポテンシャルの変化が微小になったとき、終息する。

前 4.12 式  $t_{\text{relax}} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{dyn}}$  より ( $t_{\text{relax}}$  : 緩和時間、 $t_{\text{dyn}}$  : 力学的時間)

重力ポテンシャルが変化する時間スケールは力学的時間であるから、激しい緩和も力学的時間（星が系内を一回通過する時間）で進行する。

また。定常な状態が達成されると、ビリアル比が

$$\frac{2T}{|W|} = 1$$

に近づく。実際に  $N$  体計算によって平衡が大きく外れた状態から、重力的な緩和過程を計算すると、力学時間の数倍で、ビリアル比が 1 に近づくことが確かめられている。また数値実験によると、十分に長い時間が経っても、流体系での熱的緩和と異なり、位相空間内では完全に混同されず、初期条件の影響が多少のこることがわかっている。

## 4.3 重力多体系の平衡形状

無衝突の重力多体系は激しい緩和によって定常状態に達することが示された。ジーンズの定理から、分布関数は運動の積分（エネルギー積分や角運動量積分）によって決定される。

ここでは、定常状態にある、重力多体系の平衡状態を考える。

質点系が重力的に束縛されている系では、全エネルギーや重力ポテンシャルが負であることを、考慮し、のちのために正の定数を定義する。

$$\varepsilon \equiv -E = -\left(\frac{1}{2}v^2 + \phi\right) \quad \psi \equiv -\phi$$

分布関数  $f$  はエネルギー  $\varepsilon (\equiv -E)$  と角運動量  $L$  で書くことができるので、この束縛された系では、 $\varepsilon$  が正の粒子は存在し得ないので、

$$f(\varepsilon, L) \begin{cases} > 0 & \varepsilon > 0 \\ = 0 & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

を満たす。

また、ポアソン方程式より

$$\Delta \psi = -4\pi G\rho = -4\pi Gm \int f(\varepsilon, L) d^3 v$$

$\rho$  の変換について、

分布関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  はある位置  $\mathbf{r}$  と速度  $\mathbf{v}$  を持った粒子の位相空間密度であるから、この分布関数を速度空間で積分すると、粒子の個数密度  $n(\mathbf{r}, t)$  となる。

$$n = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v$$

またここで、粒子の質量を  $m$  とすると  
質量密度は  $\rho = nm$  となる。

$\mathcal{E} = \psi - \frac{v^2}{2}$  であるから、

$$\Delta \psi = -4\pi G \rho = -4\pi G m \int f(\mathcal{E}, L) d^3 v$$

は  $\psi$  の関数微分方程式であることがわかる。

### 4.3.1 球対称系の平衡形状

球対称な系を考える。そのため、ポアソン方程式も球座標のものを用いる。  
球対称な球座標  $(r, \theta, \varphi)$  では、(3.10) 式より、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho = -4\pi G m \int f(\mathcal{E}, L) d^3 v \quad (4.43)$$

である。球対称系の平衡形状では、いくつかの解が知られており、プラマーモデルと等温球モデルについて説明する。

#### (1) プラマーモデル

プラマーモデルは中心で密度一様なコアを持つ分布である。この分布では十分遠方では、コアを質点と見なし、質量  $M$  のポテンシャル  $(\phi = -\frac{GM}{r})$  に漸近すると考えることができる。

$r_0$  をコアの大きさとして、プラマーモデルのポテンシャルは以下で与えられる。

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}$$

$r \rightarrow \infty$  で  $\phi = -\frac{GM}{r}$  に漸近することがわかる。

このポテンシャルを与える密度分布は、ポアソン方程式から

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 4\pi G \\ \Delta \phi &= \frac{d^2}{dr^2} \frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} \\ &= 3MGr_0^2 (r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

よって、

$$\rho(r) = \frac{3Mr_0^2}{4\pi}(r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}}$$

二行目から三行目の計算に関して、

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{d^2}{dr^2} \frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{GM}{\sqrt{x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2}}\end{aligned}$$

x に関して、 $X^2 = x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2$ として、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{GM}{\sqrt{x^2 + X^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} GMx(x^2 + X^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= GM(x^2 + X^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2 GM(x^2 + X^2)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

$$GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2 GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{5}{2}}$$

x,y の場合も同様に、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{GM}{\sqrt{y^2 + Y^2}} =$$

$$GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{3}{2}} - 3y^2 GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{GM}{\sqrt{z^2 + Z^2}} =$$

$$GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 GM(x^2 + x_0^2 + y^2 + y_0^2 + z^2 + z_0^2)^{-\frac{5}{2}}$$

それぞれ足すと、

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{d^2}{dr^2} \frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} \\ &= \frac{GM}{(r^2 + r_0^2)^{-\frac{3}{2}}} - \frac{GM r^2}{(r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{GM r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

となる。



また、

$$\begin{aligned}
 M_0(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_o(r) dr \\
 &= \int_0^r 3Mr_0^2 r^2 (r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}} dr \\
 &= 3Mr_0^2 \left[ -r^2 (r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \int_0^r r^2 (r^2 + r_0^2)^{-\frac{5}{2}} dr \\
 &= 3Mr_0^2 \left( \left[ -\frac{1}{3} (r^2 + r_0^2)^{-\frac{3}{2}} \right]_0^r + \int_0^r \frac{1}{3} (r^2 + r_0^2)^{-\frac{3}{2}} dr \right) \\
 \int_0^r (r^2 + r_0^2)^{-\frac{3}{2}} dr &= \frac{1}{r_0^2} \frac{r}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \text{となるので、} (r = r_0 \tan \theta \text{で置換して計算}) \\
 &= Mr_0^2 \left( -\frac{r}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_0^2} \frac{r}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= Mr_0^2 r \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{-r_0^2 + r^2 + r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \frac{Mr^3}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{M}{\left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

プラマーモデルは、球状星団の密度分布を表すのに用いられる。

プラマーモデルは、次の位相空間分布関数  $f$  と対応する ( $A$  は実数)

$$f(\varepsilon) \begin{cases} A\varepsilon^{N-\frac{3}{2}} & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

数密度  $n$  は速度空間での積分で与えられるから (前述)、 $\varepsilon > 0$  の積分範囲を考

える  $\varepsilon$  は正の値であり、 $\varepsilon = 0$  で、 $v = \sqrt{2\psi}$  なので、 $\varepsilon \equiv -\left(\frac{1}{2}v^2 - \psi\right)$

$$n = \int_0^\infty f(\varepsilon) 4\pi v^2 dv = \int_0^{\sqrt{2\psi}} A \left(\frac{1}{2}v^2 - \psi\right)^{N-\frac{3}{2}} 4\pi v^2 dv$$

ここで、 $v = \sqrt{2\psi} \cos \theta$  と変数変換すると、

$$\begin{aligned}
n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 A(\psi \cos \theta - \psi)^{N-\frac{3}{2}} 4\pi 2\psi \cos^2 \theta (-\sqrt{2}\psi \sin \theta d\theta) \\
&= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 A 8\sqrt{2}\pi \psi^N (\sin^2 \theta)^{N-1} \cos^2 \theta d\theta \quad * \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 A 8\sqrt{2}\pi \psi^N (\sin \theta)^{2N-2} (\sin^2 \theta - 1) d\theta \\
&= \psi^N A 8\sqrt{2}\pi \left[ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin \theta)^{2N} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin \theta)^{2N-2} d\theta \right] \\
&= \psi^N 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} A \frac{\Gamma\left(N - \frac{1}{2}\right)}{N \Gamma(N)} \quad (4.50)
\end{aligned}$$

$$a_n = 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} A \frac{\Gamma\left(N - \frac{1}{2}\right)}{N \Gamma(N)} \text{として、}$$

$$n = a_N \psi^N$$

となる。

4.50 式の導出について、\*式-  $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 A 8\sqrt{2}\pi \psi^N (\sin \theta)^{2N-2} \cos^2 \theta d\theta$ からはじめて、

ベータ関数の三角積分を用いた公式、

$$B(s, t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1} \theta \cos^{2t-1} \theta d\theta$$

を用いると、s を  $N - \frac{1}{2}$ 、t を  $\frac{3}{2}$  となるので、

$$* = \psi^N 8\sqrt{2}\pi A \frac{1}{2} B\left(N - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

ガンマ関数とベータ関数の関係、 $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ を用いて、

$$= \psi^N 8\sqrt{2}\pi A \frac{\Gamma\left(N - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \Gamma(N+1)}$$

また、 $\Gamma(N+1) = N \Gamma(N)$ 、 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ 、を用いて

$$n = \psi^N 2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} A \frac{\Gamma\left(N - \frac{1}{2}\right)}{N \Gamma(N)}$$

$n = \int f(\mathcal{E}, L) d^3 \mathbf{v}$ であったから  $\int f(\mathcal{E}, L) d^3 \mathbf{v} = a_N \psi^N$  を 4.43 式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho = -4\pi G m \int f(\mathcal{E}, L) d^3 \mathbf{v} \quad (4.43)$$

に代入して、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G m a_N \psi^N$$

が得られる。

これは  $N$  をポリトロップ指数としたときのエムデン方程式(3.5.3)、

$$= \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi}$$

と同型である。 $N=5$  の絵画プラマーモデルに対応する。 $N=5$  の時の解析解は、

$$\psi = \psi_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}}$$

で与えられる。 $\psi \equiv -\phi$ であるから、

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}$$

で  $\psi_0 = \frac{GM}{r_0}$  とした場合に等しい。

つまり、位相空間分布から得られた式でポリトロップ指数をプラマーモデルに当てはめて考えた時の解が、初めに与えたポテンシャルの式と合致していることが確かめられた。

## (2)等温球モデル

3 章の自己重力ガス球の場合と同様に、ガスの温度がどこでも一定、すなわち等温の場合を考える。理想気体の状態方程式より、圧力  $P$  が密度  $\rho$  に比例する。

ポリトロピック関係

$$P = K\rho^\gamma \quad , \quad \gamma = 1 + \frac{1}{N}$$

で考えると、 $\gamma = 0, N \rightarrow \infty$ の状態に対応する。

$$f(\mathcal{E}) = \frac{n_c}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}}$$

という分布を考えると、 $\mathcal{E}$  に代入して、

$$n = \int_0^\infty f(\mathcal{E}) 4\pi v^2 dv = n_c e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}}$$

である。よって

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G\rho = -4\pi Gm \int f(\mathcal{E}, L) d^3 v \quad (4.43)$$

より、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi Gm n_c e^{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}}$$

となる。

:

$$n = \int_0^\infty f(\mathcal{E}) 4\pi v^2 dv = n_c e^{\frac{\phi}{\sigma^2}}$$

について、

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty f(\mathcal{E}) 4\pi v^2 dv \\ &= \int_0^\infty \frac{n_c}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}} 4\pi v^2 dv \\ &= \frac{4\pi n_c e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} v^2 dv \end{aligned}$$

ガウス積分  $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  を用いて、

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi n_c e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{2\sigma^2}{4} \sqrt{2\sigma^2\pi} \right) \\ &= n_c e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

これは等温ガスのエムデン方程式 $= \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi}$  (3.5.3)対応する。

$n \propto r^{-2}$ のときに特快を持ち、

$$\rho(r) = mn(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$

で与えられる。これを特異等温球という。

このときの、質量、ポテンシャル、速度分散はそれぞれ、

$$\begin{aligned} M_0(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr = \int_0^r \frac{2\sigma^2}{G} dr = \frac{2\sigma^2 r}{G} \\ \phi(r) &= - \int_r^{r_b} \frac{GM(r)}{r^2} dr = - \int_r^{r_b} \frac{2\sigma^2}{r} dr = 2\sigma^2 \ln \left( \frac{r}{r_b} \right) \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{1}{n} \int_0^\infty f(\mathcal{E}) v^2 4\pi v^2 dv = 3\sigma^2 \end{aligned}$$

となる。 $(\sigma$ は1次元方向の速度分散に対応している。 $r_b$ は外側の境界の半径)

特異等温球は中心で密度が発散する解となっている ( $r \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$ であるため)

が、中心で密度が発散せず、密度勾配が0になる解は、数値発散しないため

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G m n_c e^{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}}$$

を解くことで求めることができる。

このようなモデルでは、中心に密度変化が小さいコアがあり、(中心で発散しない)、外側では、特異等温球に漸近する分布を持つ。

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty f(\mathcal{E}) v^2 4\pi v^2 dv = 3\sigma^2$$

の計算について、

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty f(\mathcal{E}) v^2 4\pi v^2 dv$$

$$= \frac{n_c}{n} \frac{e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} v^4 dv$$

$n = n_c e^{\frac{-\phi}{\sigma^2}}$ であったため、

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} v^4 dv$$

ここで、 $\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx$ について考え、

$x^4 e^{-ax^2}$ を $x^3 \cdot x e^{-ax^2}$ とみて、部分積分をして、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx \\ &= \left[ -x^3 \frac{e^{-ax^2}}{2a} \right]_0^\infty + 3 \int_0^\infty x^2 \frac{e^{-ax^2}}{2a} dx \end{aligned}$$

一項目は0であるから、 $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いて、

$$= \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

よって、

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-v^2}{2\sigma^2}} v^4 dv \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{3\sigma^4}{2} \sqrt{2\sigma^2\pi} \\ &= 3\sigma^2 \end{aligned}$$

となった。