宇宙流体力学の基礎 10.4.5、10.5 章(p295~p299)
佐藤創太

10.4.5 バー不安定

これまでの節では、回転円盤の局所的不安性をみたが、本節では、円盤全体の不安定性について考える。この不安定性は、円盤の変形時、その変形が増大しバー状に移行する不安定性であり、**バー不安定**と呼ばれる。

例えば、マクローリン円盤と呼ばれる表面密度分布が、

$$\Sigma(r) = \Sigma(0)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられる半径 R のガス円盤で厳密な解析がなされている。

この円盤がバー変形を起こす条件は、円盤全体の回転運動エネルギーを T、重力エネルギーを W とすると、

$$\frac{T}{|W|} > 0.2738$$

で与えられる。上の式はガス円盤に対してではあるが、星のような質点系からなるカルナイ円盤（一様球をある軸方向に押しつぶしてできる薄い円盤）の場合には、

$$\frac{T}{|W|} > 0.1286$$

という条件になり、カルナイ円盤の方が、回転によるバー不安定性は起きやすくなる。これは、オストライスカー-ビーブルズ条件という名で呼ばれることもある。上式より外場重力により、|W|を大きくしてやれば、バー不安定性を起こすのに必要な回転運動エネルギーが大きくなるので、円盤は安定化される。実際のケースとして、渦巻銀河の円盤は自己重力のみを考えた場合は、バー不安定が起きるが、外場重力として、ダークマター重力場を入れることで、円盤はバー変形に対して安定化する。ただし、ダークマターとバーの間の角運動量交換によってバーの回転速度が遅くなり、バーがより安定化することも知られている。

10.5 膨張宇宙における重力不安定

10.1 節でみた重力不安定性（ジーンズ不安定）を、一様膨張する媒質で考える。最も端的な例は、一様膨張する宇宙における重力不安定である。

膨張媒質での不安定性を考えるために、膨張する媒質に乗った座標系（共動座標系）で基本方程式（運動方程式、連続の式、ポアソン方程式）p267 参照：を書き換える。
媒質の膨張の時間変化を与えるスケール因子を$a(t)$とすれば、共同座標$\boldsymbol{x}$は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{x} \equiv \frac{1}{a(t)}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

この時速度は、

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{a}(t)\boldsymbol{x} + a(t)\dot{x} \tag{2}$$

である。膨張率（膨張宇宙ではハッブル定数に相当する）を、

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{3}$$

と定義し、一様膨張からのずれの速度（特異速度）を$\boldsymbol{v_1} \equiv a(t)\dot{x}$とすれば、(2)は、

$$\boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v_1} \tag{4}$$

と書ける。(膨張宇宙では右辺第1項ではハッブルの法則である。遠方の銀河が我々から遠ざかる速さはその銀河までの距離に比例するという法則)。また、空間微分の演算子$\boldsymbol{\nabla}$は、共動座標の微分演算子$\boldsymbol{\nabla_c}$と次の関係で結ばれる。

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c} \tag{5}$$

時間微分については、共動系の微分によって次のように表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} - \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla_c} \tag{6}$$

これらを用いて、基礎方程式を共動座標系で表す。

運動方程式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{P} - \boldsymbol{\nabla}\phi$$

は以下のようになる。($\boldsymbol{v} = (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1})$, $\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}$を用いる)

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla_c})\boldsymbol{v_1} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} + \ddot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}\mathrm{P} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi \tag{7}$$

連続の式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}}\right)_c + \boldsymbol{\nabla_c}\cdot(\rho\boldsymbol{v_1}) + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \tag{8}$$

ポアソン方程式：

$$\Delta_{\mathrm{r}}\phi = 4\pi G\rho$$

は以下のようになる。

$$\frac{1}{a^2}\Delta_{\mathrm{c}}\phi = 4\pi G\rho, \left(\Delta_{\mathrm{c}} \equiv (\boldsymbol{\nabla_c})^2\right) \tag{9}$$

これらの方程式に対して、 $\boldsymbol{v} = H(t)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v_1}$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$, $\phi + \phi_0 + \phi_1$
として、添字の 1 が微少量として、線形近似を行うと、
運動方程式（共動座標）：

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{\nabla_c})\boldsymbol{v_1} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} + \ddot{a}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi$$

から以下が得られる。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} = -\frac{{c_s}^2}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\delta - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\boldsymbol{\phi_1} \tag{10}$$

連続の式（共動座標）：

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}}\right)_c + \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\cdot(\rho\boldsymbol{v_1}) + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0$$

から以下が得られる

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \mathrm{t}}\right)_c + \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\cdot\boldsymbol{v_1} = 0 \tag{11}$$

ボアソン方程式（共動座標）：

$$\frac{1}{a^2}\Delta_c\phi = 4\pi G\rho, \left(\Delta_c \equiv (\boldsymbol{\nabla_c})^2\right)$$

から以下が得られる。

$$\frac{1}{a^2}\Delta_c\phi_1 = 4\pi G\rho_0\delta \tag{12}$$

ここで、δは密度コントラスト：

$$\delta \equiv \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \tag{13}$$

と呼ばれる量で、$P_1 = {c_s}^2\rho_1 = {c_s}^2\rho_0$の（$c_s$は音速）の関係を用いた。
(11)(12)式より、$\boldsymbol{v_1}$とϕ_0を消去すると、δに関する式：

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{{c_s}^2}{a^2}\Delta_c\delta + 4\pi G\rho_0\delta \tag{14}$$

を得る。この時、ドットは$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_c$である。この式から、膨張する媒質における密度コントラストの時間発展が決まる。また、(14)は膨張宇宙に限らず、一様膨張する媒質一般に適用することができる。
この式は、媒質の膨張を考えていない(10.12)式(p268 ページ参照)

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = {c_s}^2\Delta\rho_1 + 4\pi G\rho_0\rho_1 \tag{10.12}$$

上式の両辺をρ_0で割り、$\delta \equiv \frac{\rho_1}{\rho_0}$とすると、（媒質が膨張していない場合、$a=1$となることを考慮する必要あり）

$$\ddot{\delta} = {c_s}^2 \Delta \delta + 4\pi G \rho_0 \delta \tag{10.12}$$

と比べると、左辺第二項が加わっている点で異なっており、この項は膨張を妨げるように働く。（δを座標に見立てて運動方程式と見たせば、左辺第二項が入ることにより、空気抵抗を受けた運動と同じ形になっていることがわかる。）
定数を A や B で置き式を以下の様に整理するとわかりやすい

$$\ddot{\delta} = A\delta - B\dot{\delta}$$

　ここで、空間的な密度コントラストとして、平面波：

$$\delta \propto exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

を考えると、$\lambda \equiv \frac{2\pi a}{|\boldsymbol{k}|}$として、(14)式は、

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \rho_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right] \tag{15}$$

ここで、λ_Jは、$\lambda_J \equiv c_s\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$で定義されるジーンズ波長（不安定と安定の境目となっている波長）である。(p268 10.16 参照)
　$\lambda \gg \lambda_J$の場合には、時間発展は以下の式で決まる：

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \rho_0 \delta \tag{16}$$

　具体的な例として、宇宙膨張の場合を、宇宙定数を無視できる平坦なモデル、アインシュタインド・ジッター宇宙で考える。この場合、スケール因子は$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$で時間変化し、

$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3}t, 4\pi G\rho_0 = \frac{2}{3}t^2$の関係より、(16)式は、

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = \frac{2}{3t^2}\delta \tag{17}$$

となる。(17)式でδの時間依存性を$\delta \propto t^n$と置くと、$n = \frac{2}{3}, -1$が求まる。
よって、nの値により、成長モードと減衰モードが存在し、

$$\delta_+ \propto t^{\frac{2}{3}} \propto a(t) \tag{18}$$

$$\delta_- \propto t^{-1} \propto a(t)^{-\frac{3}{2}} \tag{19}$$

となることがわかる。膨張のない媒質で重力不安定が起こる場合は、分散関係式(p268 10.13,10.14 参照)にしたがって、指数関数的に成長するのであったが、膨張のある媒質を考

えると、膨張による抑制効果によって時間のベキ関数になることがわかった。

　また、$\lambda_J \gg \lambda$の場合には、振動しながら振幅がゆっくりと減少する。この振幅の減少は宇宙膨張のために平均密度が低下することによって引き起こされる。

計算メモ

(5)式の導出。以下の様に変換する。

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{1}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}$$

$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{1}{a(t)}, \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$であるため、

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{1}{a} \frac{1}{\partial \boldsymbol{x}}$$

が示される。よって

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \frac{1}{a} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}$$

となる。

(6)式の導出。（5)式の変換と同様に、以下の様に変換する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{x} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{t} \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{x} = -\frac{\dot{a}}{a^2} \boldsymbol{r}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}, \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{t} = \mathbf{1}$を代入して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} - \frac{\dot{a}}{a^2} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}$$

となる。これに、(1)式を代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} - \frac{\dot{a}}{a} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \tag{6}$$

となり、(6)式を示せた。

(7)式の導出。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{P} - \boldsymbol{\nabla}\phi$$

から、

$\boldsymbol{v} =\ (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1})$, $\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}$, $\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} - \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla_c}$を用いると、

$$(\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} - \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla_c}) \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) + \left((\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) \cdot \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\right)(\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi$$

$$\to \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) - \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla_c} \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) + \left(\frac{\dot{a}\boldsymbol{x}}{a}\boldsymbol{\nabla_c} + \frac{\boldsymbol{v_1}}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\right) \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi$$

$$\to \left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} \cdot \dot{a}\boldsymbol{x} \cancel{- \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla_c} \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1})} + \left(\cancel{\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\nabla_c}} + \frac{\boldsymbol{v_1}}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\right) \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi$$

$$\to \left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \ddot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} + \cancel{\left(a\left(\frac{\dot{\partial}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} \cdot \boldsymbol{x}\ =\ 0\right)} + \frac{\boldsymbol{v_1}}{a}\boldsymbol{\nabla_c} \cdot (\dot{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v_1}) = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi$$

整理すると、

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{c})\boldsymbol{v_1} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} + \ddot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}\mathrm{P} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi \tag{7}$$

となり、(7)式を示すことができた。
(8)(9)式に関しても同様に示すことができるので、(8)(9)式の導出は割愛します。

(10)式の導出

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla_c})\boldsymbol{v_1} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} + \ddot{a}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi$$

$\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$, $\phi = \phi_0 + \phi_1$を用いる

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{c})\boldsymbol{v_1} + \frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1} + \ddot{a}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{(\rho_0 + \rho_1)\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}(P_0 + P_1) - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}(\phi_0 + \phi_1)$$

ここで、非摂動項や微小の二次の項を落とし、

$$\ddot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho \mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P_0 - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\phi_0$$

が成り立つ（微小項を考慮せずに運動方程式を考える）ので、

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v_1}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{c})\boldsymbol{v_1} = -\frac{1}{(\rho_0 + \rho_1)\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla_c}P_1 - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi_1$$

のようになる。ここで、以下の項について考える。

$$\frac{1}{(\rho_0 + \rho_1)}$$

分母分子に$(\rho_0-\rho_1)$をかけて、近似をすると、

$$\frac{(\rho_0-\rho_1)}{({\rho_0}^2-{\rho_1}^2)}$$

$$\approx\frac{(\rho_0-\rho_1)}{{\rho_0}^2}$$

また、ここで、$P_1={c_s}^2\rho_1$とし、代入すると、

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{v_1}}{\partial\mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}+\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1}=-\frac{1}{a}\frac{(\rho_0-\rho_1)}{{\rho_0}^2}\boldsymbol{\nabla_c}{c_s}^2\rho_1-\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi_1$$

となり、微小二乗項を落とし$\delta\equiv\frac{\rho_1}{\rho_0}$とすると、

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{v_1}}{\partial\mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}+\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1}=-\frac{{c_s}^2}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\delta-\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi_1$$

(10)式が得られた。

(11)式、(12)式は(10)式と同様に得ることができるので割愛します。

(13)式の導入

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{v_1}+\frac{\dot{a}}{a}\boldsymbol{v_1}=-\frac{{c_s}^2}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\delta-\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\phi_1 \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial\mathrm{t}}\right)_c+\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\cdot\boldsymbol{v_1}=0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{a^2}\Delta_{\mathrm{c}}\phi_1=4\pi G\rho_0\delta \tag{12}$$

で(11)式から

$$\boldsymbol{v_1}=-\frac{a}{\boldsymbol{\nabla_c}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\mathrm{t}}\right)_c$$

であり、(12)式から、

$$\phi_1=4\pi G\rho_0\delta\frac{a^2}{\Delta_{\mathrm{c}}}$$

である。これらを、(10)式に代入すると、

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}\right)_{\boldsymbol{c}}\frac{a}{\boldsymbol{\nabla_c}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\mathrm{t}}\right)_c-\frac{\dot{a}}{a}\frac{a}{\boldsymbol{\nabla_c}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\mathrm{t}}\right)_c=-\frac{{c_s}^2}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\delta-\frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla_c}\cdot4\pi G\rho_0\delta\frac{a^2}{\Delta_{\mathrm{c}}}$$

となる。ドットを$\left(\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}\right)_c$とし、整理すると（第一行目は積の微分になっていることに注意)、

$$-\frac{a}{\nabla_c}\ddot{\delta}-2\frac{\dot{a}}{\nabla_c}\dot{\delta}=-\frac{{c_s}^2}{a}\boldsymbol{\nabla}_c\delta-4\pi G\rho_0\delta\frac{a}{\nabla_c}$$

となり、両辺に、$-\frac{\nabla_c}{a}$をかけると

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=\frac{{c_s}^2}{a^2}\Delta_c\delta+4\pi G\rho_0\delta \tag{14}$$

となり(14)式が得られた。

(15)式の導出

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=\frac{{c_s}^2}{a^2}\Delta_c\delta+4\pi G\rho_0\delta \tag{14}$$

に、$\delta\propto exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$として、計算のため比例定数を$b$とし、

$$\delta\equiv b\ exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

と書くことにする。これを(14)式に代入すると以下になる。

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=-\frac{{c_s}^2}{a^2}|\mathbf{k}|^2b\ exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+4\pi G\rho_0b\ exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

$\delta\equiv b\ exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$を元に戻すと

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=-\frac{{c_s}^2}{a^2}|\mathbf{k}|^2\delta+4\pi G\rho_0\delta$$

である。右辺を$4\pi G\rho_0\delta$で括ると、

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=4\pi G\rho_0\delta(1-\frac{{c_s}^2|\mathbf{k}|^2}{4\pi G\rho_0a^2})$$

ここで、$\lambda\equiv\frac{2\pi a}{|\boldsymbol{k}|}$とすると、

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=4\pi G\rho_0\delta(1-\frac{\pi{c_s}^2}{G\rho_0}\frac{1}{\lambda^2})$$

となる。ここで、$\lambda_J\equiv c_s\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$とすると、$\lambda_J^2\equiv c_s^2\frac{\pi}{G\rho_0}$なので、

$$\ddot{\delta}+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}=4\pi G\rho_0\left[1-\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right]$$

となり、(15)式が得られた。

(17 式)で、$\delta\propto t^n$と置いた時の解の導出

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} = \frac{2}{3t^2}\delta \tag{17}$$

で$\delta \propto \mathrm{t}^{\mathrm{n}}$とし、計算のために、比例定数を$b$として、$\delta \equiv b\mathrm{t}^{\mathrm{n}}$と置くと、

$$n(n-1)b\mathrm{t}^{\text{n-2}} + \frac{4}{3}nb\mathrm{t}^{\text{n-2}} = \frac{2}{3}b\mathrm{t}^{\text{n-2}}$$

となり、両辺を$b\mathrm{t}^{\mathrm{n}}$で割ると、

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n = \frac{2}{3}$$

となり、以下の様に計算していくと、

$$\rightarrow n^2 + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3} = 0$$

$$\rightarrow (n+1)\left(n - \frac{2}{3}\right) = 0$$

となり、$n = \frac{2}{3}, -1$が求まる。