潮汐破壊について　佐藤創太

1エビサイクル近似

z軸について対称なポテンシャルを持つ銀河と、その中を運動する星の運動について考える。座標は、銀河の中心を原点とする円筒座標系とする。

1.1子午面上の運動

の面について対称なポテンシャルを考える。z成分の運動量の保存について調べることで、三次元の運動を子午面上の二次元の運動に帰着させる。

この時、ラグランジアンは、

となる。この時運動量は

となる。

またハミルトニアンは、H=T+Vで、(2)式を用いて、

となる。ハミルトンの正準方程式は、を一般化座標、を一般化運動量として、

であるから、運動方程式は、

となる。

(5)式はz軸について角運動量保存を示している。そのためを定数として、と置く。

(4)、(6)式は、それぞれR方向とz方向での振動を示している。

ここで、有効ポテンシャルを

とすると、(4)、(6)式は以下のように書き換えることができる。

このようにして、軸対称なポテンシャル中の三次元の星の運動を、中を運動する2次元の運動に帰着させることができた。

ここで、ハミルトニアンは、

は方位角成分の運動量が一定値をとるときのハミルトニアンである。

したがっては軌道運動の全エネルギーEとなる。は平面上の運動エネルギーであり、正の値をもつので、軌道はを満たす領域に制限される。この領域を囲む曲線をゼロ速度曲線と呼ぶ。の最小値は、

を共に満たす点において存在する。がz=0の面において対称という仮定の上では、赤道面においてはどの点であっても(11)式を満たす。(10)式は、次に示すようなガーディングセンター(guiding-center radius)によって満たされる。

この条件は、釣り合いを考えると、角速度の円軌道の条件である。したがって、の最小値は角運動量を持つ円軌道の半径から得ることができ、の最小値が円軌道のエネルギーである。

1.2 エピサイクル

円盤銀河中では多くの恒星が円軌道に近い軌道で運動をしている。そのような軌道に対して、(8)式の近似解が得られる座標を以下のように定義する。

は角運動量の軌道についてのガーディングセンター半径である。((12)式)

で、、つまりが最小となる子午面上の座標である。

を周りでテイラー展開すると、

となる。xとzについての一次の項は、(10),(11),(12)によって消える。に比例する項はがに関して対称であるため消える。またここで、とxとzの3次以上の項を無視をするエピサイクル近似を用いる。そして、以下の二つの量を定義すると(8)式は単純化することができる。

すると、(8)の運動方程式は、

となる。(16),(17)式はそれぞれ角振動数とを持つ調和振動子の変位とみなすことができる。角振動数とはそれぞれ、エピサイクリック振動数、垂直振動数と呼ばれる。

(7)式から、

を得る。半径Rにおける角周波数は、釣り合いを考えると、

である。

ここでをである半径Rにおける回転速度とし、以下の二つの関数を定義する。

これらの関数は、角速度、エピサイクル振動数と

のような関係にある。銀河系での太陽の位置におけるAとBの値は、太陽近傍の恒星の運動から求まり、オールト定数と呼ばれる。

(16)(17)の両辺をそれぞれ積分すると、一次元ハミルトニアンと呼ばれる以下を得ることができる。

したがって、(14)式で行った近似が有効である、円軌道に近い軌道であれば、3つのそれぞれ独立した運動積分が与えられる。

(13),(15),(16),(17),(24)式よりそのような星のハミルトニアンは下式のように3つの成分になることがわかる。

したがって、3つの運動の積分は、またはとして選ぶことができる。また、においては、が古典積分の第三積分に当たる。

実際の銀河で、であるような十分小さい において(17)式は、

を一般解として持つ。とは任意定数である。しかし、ディスク星軌道の大半は300pcの面を超えていくためエピサイクル近似は円盤の垂直方向を向くディスク星について正しい運動を記述できない。よって、エピサイクル近似は円盤面上の恒星運動について良い近似となる。ここまでは動径方向成分の運動を扱ってきたが、ここからは方位角成分についての運動について考察する。

動径方向の運動方程式である、(16)は一般解

を持つ。とは任意定数である。を角運動量の円軌道の角速度とする。は定数であるから、

を得る。xに(27)に代入すると、

となり、この両辺を積分すると、

を得る。(31)式では(23)を用いた。これらの方程式によって記述される運動の性質は、ガイディングセンターを原点にとった直行座標系を設定することで知ることができる。x座標、z座標について既に定義されてあるため、y座標はそれらと直行し、かつ回転運動の方向に設定する。一次のパラメーターについて

を得る。(27)と(32)はエピサイクル近似での楕円軌道の完全解である。z方向の運動はx,y方向の運動から独立している。平面では、恒星はガイディングセンター周りのエピサイクルと呼ばれている楕円上を運動する。エピサイクルの軸比は

となる。

1.2 High-speed encounters と distant-tide approximation

恒星同士の作用の概念として、high-speed encountersがある。high-speedとは、重力が作用する時間が、それぞれの横断時間よりも短い接近を意味する。

質量の恒星系(subject system: satellite system)と質量のperturber(host system)の接近について考える。二つの系が最も接近する時の、互いの系の中心同士の距離をb、相対速度をVとする。Vが十分大きい時、以下の二つのことがいえる。

1. 二つの系の相対運動の運動エネルギーがポテンシャルエネルギーよりもはるかに大きいため、系の中心は一定速度で横断する。

2. 本来、二つの系が接近する時、恒星系に含まれる恒星は、接近前の位置からわずかにずれてしまう。しかし、Vが十分に大きい時、hostからの重力を、それぞれの恒星の位置を変化させない、短時間の衝撃と考えることができる。（速度は変化させる。）これを撃力近似という。

以下では恒星系の速度がhostを通過することによってどのように変化するかを考える。ここでは、接近前のsatellite systemの重心を原点にとった座標系を考える。をsatellite system中のi番目の星の質量、 をhostから受ける力によるi番目の星の速度変化率とする。また、この時、重心の速度変化率は、以下である。

重心に対する相対的なi番目の星の加速度は以下である。

をhostの重力ポテンシャルとすると

と書くことができ、(35)は

とかくことができる。

撃力近似を用いると、は接近において一定であるため、

となる。

接近の効果の計算は、satellite systemの大きさが衝突パラメーターbよりも十分に小さい場合に、簡単に行うことができる。衝突パラメータが、satellite systemの大きさに比べて十分に大きい場合、satellite systemに作用する重力ポテンシャルはsatellite system内においてなめらかあるといえる。を原点周りでテーラー展開すると、

となる。ここでであり、また

である。

テイラー展開した項の二字以上の項を落とすことをdistant-tide approximationという。これは、上でも述べたhostまでの距離がsatellite systemの大きさに比べて大きい場合に、この近似が適用できる。撃力近似とdistant-tide approximationの二つの近似が有効な接近を潮汐ショック(tidal shocks)という。これらの式を(34)(36)式に代入し、重心を原点にとるととなることから、**が**重心の加速度寄与しないことがわかる。また、(37)式を(39)式に代入すると、となるため、がに寄与しないことがわかる。したがって、

となる。

hostが球状で中身をとした場合、ポテンシャルをhost中心からの距離で評価できる。

この時ポテンシャルは、であり、

となる。ここで、である。これより、全てのの導関数はXで評価される。