CÁLCULO DA DISTÂNCIA AO PONTO L2 DE LAGRANGE: A POSIÇÃO DO TELESCÓPIO JWST NO ESPAÇO

Marcos Kolland Junior [1]

Elaine Cristina Ferreira Silva Fortes [2]

Resumo:

O telescópio espacial JWST (James Webb Space Telescope) foi planejado e está sendo construído para ser o grande sucessor dos telescópios espaciais de nova geração, principalmente do telescópio Hubble. Seu lançamento está previsto para acontecer em outubro de 2018, na Guiana Francesa, e assim é dada continuidade a nova era de telescópios espaciais (Stockman et al. 1997). O Webb como é chamado popularmente, será transportado pelo veículo espacial Ariane-5 e posteriormente será levado a uma distância de aproximadamente 0,01 UA, até o ponto de Lagrange L2 (Gardner, 2008). O motivo do lançamento da nave espacial ser localizado na faixa equatorial deve-se ao fato de querer se beneficiar da velocidade de rotação da Terra em sentido favorável a rota a ser percorrida pela nave. As técnicas conhecidas como "estilingue gravitacional", "órbita de halo" e suas implicações em missões espaciais são apresentadas em (Taubes, 1999). A posição do telescópio no segundo ponto de Lagrange (L2) é estratégica em questões de interferência física, porém o translado até esse ponto é difícil e não será possível a realização de manutenção sobre tal telescópio. O ponto L2 é beneficiado em alguns aspectos naturais, como, por exemplo, a proteção da radiação solar e a proteção contra impactos de corpos sólidos. O local é privilegiado para a observação da radiação infravermelha vinda do espaço. O problema clássico da interação gravitacional entre corpos celestes e seus movimentos é de extrema importância no contexto da Física e da Astronomia. Um dos maiores contribuintes para a gravitação foi Isaac Newton, que formulou e desenvolveu os estudos iniciais de gravitação, e posteriormente, desenvolveu preposições a respeito da interação gravitacional entre corpos celestes e seus movimentos. Esta abordagem ficou conhecida como problema restrito dos três corpos, e posteriormente foi estudada no âmbito científico da época, final do século XVII e XVIII (Frank, 2006). Podemos fazer o estudo do problema restrito de três corpos inicialmente fazendo um balanceamento das forças envolvidas nas interações e depois aplicando um método matemático numérico de aproximação para se obter um valor aceitável da distância até os pontos de equilíbrio L1 e L2. O objetivo deste trabalho é utilizar um método matemático numérico para demonstrar o cálculo da posição L2 para o sistema Terra-Sol, e também, apresentar o problema e outras possibilidades de cálculos para outras estrelas, exoplanetas, e seus satélites.

Palavras-chave: JWST, L2, LAGRANGE, SIGNIFICADO FÍSICO

Modalidade de Participação: Iniciação Científica

CÁLCULO DA DISTÂNCIA AO PONTO L2 DE LAGRANGE: A POSIÇÃO DO TELESCÓPIO JWST NO ESPAÇO

[1] Aluno de graduação. mkolland2@gmail.com. Autor principal

[2] Docente. elainefortes@gmail.com. Orientador

CÁLCULO DA DISTÂNCIA AO PONTO L2 DE LAGRANGE: A POSIÇÃO DO TELESCÓPIO JWST NO ESPAÇO.

1. INTRODUÇÃO

O telescópio espacial JWST (James Webb Space Telescope) foi planejado e está sendo construído para ser o grande sucessor dos telescópios espaciais de nova geração, principalmente do telescópio Hubble. Seu lançamento está previsto para acontecer em outubro de 2018, na Guiana Francesa, e assim será dada continuidade a uma nova era de telescópios espaciais (Stockman et al. 1997). O “Webb” como é chamado popularmente, será transportado pelo veículo espacial Ariane-5 e posteriormente será levado a uma distância de aproximadamente 0,01 UA, até o ponto de Lagrange L2 (Gardner, 2008). O motivo do lançamento da nave espacial ser localizado na faixa equatorial deve-se ao fato de querer se beneficiar da velocidade de rotação da Terra em sentido favorável a rota a ser percorrida pela nave. Para o lançamento serão utilizadas as técnicas conhecidas como “estilingue gravitacional” e “órbita de halo”, suas implicações em missões espaciais são apresentadas em (Taubes, 1999). A posição do telescópio no segundo ponto de Lagrange (L2) é estratégica por questões de interferência física, seu translado até esse ponto L2 é difícil, além disso, não será possível a realização de manutenção sobre tal telescópio. O ponto L2 é beneficiado em alguns aspectos naturais, como por exemplo, a proteção da radiação solar e a proteção contra impactos de corpos sólidos. O local é privilegiado para a observação da radiação infravermelha vinda do espaço.

O problema clássico da interação gravitacional entre corpos celestes e seus movimentos é de extrema importância no contexto da Física e da Astronomia. Um dos maiores contribuintes para a gravitação foi Isaac Newton, que formulou e desenvolveu os estudos iniciais de gravitação, e posteriormente, desenvolveu preposições a respeito da interação gravitacional entre corpos celestes e seus movimentos. Esta abordagem ficou conhecida como problema restrito dos três corpos, e posteriormente foi estudada em outro contexto científico da época, final do século XVII e XVIII (Frank, 2006). Podemos fazer o estudo do problema restrito de três corpos fazendo um balanceamento das forças envolvidas nas interações e depois aplicando um método matemático numérico de aproximação para se obter o valor da distância até os pontos de equilíbrio L1 e L2. O objetivo deste trabalho é utilizar um método matemático numérico para demonstrar o cálculo da posição L2 para o sistema Terra-Sol, e também, apresentar o problema e outras possibilidades de cálculos para outras estrelas, exoplanetas, e seus satélites.

2. METODOLOGIA

Tomamos como exemplo o sistema Sol-Terra, mas, cálculos semelhantes podem ser feitos para outros sistemas envolvendo outros planetas e seus satélites, etc. Esse cálculo é válido quando a massa de um dos astros é muito menor do que a massa do outro, como no caso a ser exemplificado Sol-Terra.

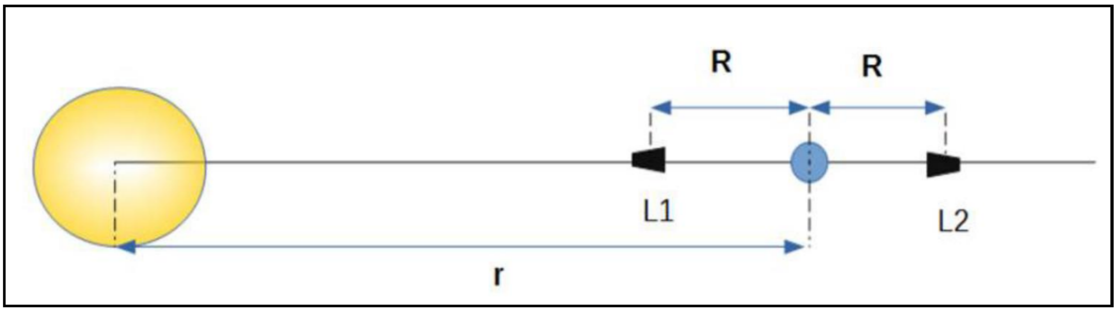

Figura 1. Ilustração das órbitas L1 e L2 para o sistema Sol-Terra (2017) fonte: Autores.

Sendo assim, seja M a massa do Sol, m a massa da Terra, r a distância da Terra ao Sol, v a velocidade da Terra, v_s a velocidade do satélite, T o período que a Terra leva para dar a volta ao Sol, R a distância do satélite até a Terra. O satélite está localizado na linha que conecta o Sol à Terra, na posição L2 em relação ao Sol-Terra. Logo, o satélite sofrerá influência das forças gravitacionais combinadas (F_G) exercidas pelo Sol e pela Terra. Veja a equação (1) da Figura 2.

$$F_G = \frac{GMm_s}{(r+R)^2} + \frac{Gmm_s}{R^2} \quad (1)$$

$$\frac{GMm_s}{(r+R)^2} + \frac{Gmm_s}{R^2} = \frac{m_s v_s^2}{(r+R)}; \quad (2)$$

$$\frac{GM}{(r+R} + \frac{Gm(r+R)}{R^2} = v_s^2$$

$$\frac{GM}{(r+R)} + \frac{Gm(r+R)}{R^2} = \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T_s^2} \quad (3)$$

$$\frac{GM}{(r+R)^3} + \frac{Gm}{R^2(r+R)} = \frac{4\pi^2}{T_s^2} \quad (4)$$

$$\frac{GM}{(r+R)^3} + \frac{Gm}{R^2(r+R)} = \frac{GM}{r^3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{(r+R)^3} + \frac{x}{R^2(r+R)} = \frac{1}{r^3} \quad (6)$$

$$\frac{1}{(1+z)^3} + \frac{x}{z^2(1+z^2)} = 1 \quad (7)$$

Figura 2. Desenvolvimento das formulações para o cálculo do ponto L2, e seus respectivos índices.

O satélite acompanhará a Terra e, portanto descreverá uma órbita praticamente circular em torno do Sol. Essa aproximação é válida neste caso, visto que a excentricidade da Terra é muito pequena, e o círculo é um caso especial de uma elipse cuja excentricidade é nula. Fazendo com que a força centrípeta balanceie a força da gravidade (F_G) teremos a Eq. (2).

Seja a expressão para a velocidade de satelização dada por $v_s=2\pi(r+R)/T_s$, onde nesta última expressão T_s denota o período do satélite. A substituição de v_s na Eq. (2) resulta na Eq. (3). Se dividirmos novamente a Eq. (3) por $(r+R)^2$, teremos a Eq. (4).

Agora queremos que os períodos da Terra e do satélite sejam iguais e fazemos $T_s=T$. Utilizamos a lei de Kepler para órbitas circulares, e fazendo $4\pi^2/T^2=GM/r^3$ teremos a equivalência da Eq. (4) e da Eq. (5). Dividindo ambos os lados da Eq. (5) por GM e fazendo $x=m/M$ teremos a Eq. (6). Se dividirmos e multiplicarmos a Eq. (6) por r^3 e se ainda fizermos $z=R/r$, teremos como expressão resultante a Eq. (7).

3. RESULTADOS e DISCUSSÃO

$$\begin{aligned}(1\pm z)^n &= 1\pm\frac{nz}{1!}+\frac{n(n-1)z^2}{2!}+\ldots\\(1\pm z)^{-n} &= 1\mp\frac{nz}{1!}+\frac{n(n-1)z^2}{2!}+\ldots\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^3} &\sim 1-3z\\\frac{y}{z^2(1+z)} &\sim \frac{x}{z^2}(1-z)\end{aligned} \quad (9)$$

$$3z^3\sim x(1-z) \quad 10)$$

Figura 3. Desenvolvimento do teorema binomial de Newton.

Como z < 1, é um valor muito pequeno, podemos resolver a Eq. (7) utilizando o teorema binomial. Assim, como uma boa aproximação teríamos como resultado a Eq. (8). Considerando somente a primeira ordem da série obtemos a Eq. (9). E novamente fazendo a substituição das aproximações anteriores na Eq. 5, teremos o resultado na Eq. (10).

Tendo em vista que z é muito pequeno, podemos ir além deste resultado e dizer que $3z^3{\sim}x$ e logo $R=r\sqrt[3]{m/3M}$. Uma vez que x é a razão entre as massas da Terra (m= 5,98 x10^{24} kg) e do Sol (M=1,98 x10^{30} kg) que também é um número muito pequeno, então a razão entre as distâncias z da Terra até o L2 é igual a aproximadamente 0,01 UA ao longo da linha que une Terra ao Sol.

No caso do cálculo da distância L2, podemos usar o método da esfera de Hill porque a massa da Terra (m) é muito menor que a massa do Sol (M), logo tanto L1 como L2 estão aproximadamente a distâncias iguais a R do menor objeto, que será igual ao raio da esfera de Hill dado pela Eq. (11) (Cheboratev, 1964). Esse resultado coincide com o resultado obtido anteriormente pela aproximação binomial.

$$R=r\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \quad (11) \qquad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (12) \qquad R=a(1-e)\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \quad (13)$$

Figura 4. Equações do método da esfera de Hill.

Sabemos que a Terra descreve uma órbita quase circular em torno do Sol. Mas, para planetas com excentricidade não nula é necessário usar a elipse como referência. Em coordenadas polares, uma das maneiras de descrever a posição da elipse é considerando a origem em um dos seus focos. Podemos adotar essa descrição para generalizar o resultado obtido. Sendo assim, no caso de uma órbita elíptica, teríamos a variável r sendo expressa na forma da Eq. (11). Onde o parâmetro "*a*" denota um dos semieixos da elipse, e "*e*" denota a excentricidade da mesma.

Se substituirmos a Eq. (12) na Eq. (11) considerando este igual à distância do periélio ao foco (Sol) teremos r= a(1-*e*) na Eq. (13).

$$0 = f(z) = f(z_0 + h) \approx f(z_0) + hf'(z_0) \quad (14)$$

$$z = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad (15) \qquad z_1 = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad (16) \qquad z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} \quad (17) \qquad z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (18)$$

Figura 5. Equações do método de Newton-Raphson suas iterações e forma generalizada.

Considerando esses cálculos, temos que a razão R/r para o cálculo de L2 é z= 0,01 UA. Note que numericamente o cálculo através da esfera de Hill coincide com a aproximação dada pelo teorema binomial.

Para melhorar a precisão do resultado acima, podemos ainda usar o método de Newton-Raphson para a resolução da Eq. (6). O método de Newton-Raphson estima numericamente as raízes de uma função escolhendo-se uma aproximação inicial para o valor de z.

Seja z_0 =0,01 uma boa estimativa de z e, portanto z = z_0+h e h=z-z_0, neste caso h mensura quão distante z_0 está da solução. Como h é pequeno e denota uma pequena correção no valor de z, conclui-se a Eq. (14). Logo $h \approx -f(z_0)/f'(z_0)$ e assim uma nova estimativa do valor procurado z_1 é dada pela Eq. (16). Uma nova estimativa envolvendo o valor procurado pode ser obtida da mesma maneira, realizando iterações consecutivas, veja a Eq. (18).

Com o uso deste método e utilizando a aproximação inicial de z_0=0,01, obtivemos que z= 0,01000559686.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como proposto, foi desenvolvido o cálculo da distância até o ponto L2 do sistema Terra-Sol, de uma forma mais didática. Foram feitos cálculos com os métodos de aproximação binomial da esfera de Hill (órbitas circulares e elípticas). Os resultados foram coincidentes.

Vale ressaltar que estes cálculos poderiam ser reproduzidos para outros sistemas além do sistema solar, ou para outras configurações, como por exemplo: Terra-Lua, Júpiter-Europa, Trappist eTrappist-1-b. Bastaria conhecer a relação das massas entre as estrelas, planetas e seus satélites.

Este trabalho dá início às investigações do problema restrito dos três corpos e dos pontos de Lagrange na Universidade Federal do Pampa. É objetivo dos autores dar continuidade ao trabalho aqui apresentado, explorando: cálculos para exoplanetas.

5. REFERÊNCIAS

CHEBOTAREV, G. A. Gravitational Spheres of the Major Planets, Moon and Sun. Soviet Astronomy, Vol. 7, p.618, 1964.

FRANK, J. The Three-Body Problem. PHYS, Louisiana, State University, v. 7221 bulletin.

GARDNER, J. P.; JWST Science Working Group. The Scientific Capabilities of the James Webb Space Telescope. NASA's Goddard Space Flight Center, code 665., 2008.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de física básica. v. 1,3. Editora Edgard Blucher, 4ª edição, São Paulo, 2002.

STOCKMAN, E. J. W.; ILLINGWORTH, G. D.; ALGEL, J. R; BECKERS, M.; GUNN, J. E.; HALL, N. B.; LONGAIR, M.; WEILER, E. J. The next generation space telescope. Baltimore-Maryland, Space Telescope Science Institute, 1989. 368p.

TAUBES, G. *The art of orbit*. Science, v. 283, n.1, p. 620-622, 1999.