Programação Linear
Resolução Gráfica

Problemas de Otimização

- Em problemas reais de otimização busca-se maximizar ou minimizar uma quantidade específica, chamada objetivo, que depende de um número finito de variáveis de entrada.
- As variáveis de entrada podem ser:
  - Independentes uma das outras.
  - Relacionadas uma com as outras por meio de uma ou mais restrições.

Programação Matemática

- Um problema de programação matemática é um problema de otimização no qual o objetivo e as restrições são expressos como funções matemáticas e relações funcionais

$$\text{Otimizar}: \; z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeito a}: \left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right.$$

Variáveis de Decisão

- x_1 , x_2,...,x_n , são as chamadas **Variáveis de Decisão**.
- As variáveis de decisão são aqueles valores que representam a resposta do problema, e que podemos escolher (decidir) livremente.
- As variáveis de decisão representam as opções que um administrador têm para atingir um objetivo.
  - Quanto produzir para maximizar o lucro?
  - Quanto comprar de uma ação para minimizar o risco da carteira?

Programação Linear

- Um problema de programação matemática é linear se a função objetivo $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ e cada uma das funções que representam as restrições forem lineares, isto é, na forma abaixo:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

e

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

Quebrando a Linearidade

- A presença de qualquer das expressões abaixo tornam o problema não linear.
  - Exemplos:
    - $(x_1)^n$ para $n \neq 1$
    - $\log_a(x_1)$ para qualquer base a
    - a^{x_1} para qualquer valor de a

$$\max\ x_1 + x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 = 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programação Linear
Problema na Forma Padrão

- Existem 4 características para um problema na forma padrão:
  - A função objetivo é de Maximizar;
  - As restrições têm sinal de menor ou igual;
  - As constantes de todas as restrições são não negativas;
  - As variáveis podem assumir valores não negativos.

Programação Linear
Problema na Forma Padrão

$$\boxed{\text{Maximizar}} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

Sujeito a :

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \geq 0}$$

Não negativos

Exemplos

- Forma Padrão

$$\max\ x_1 + x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Forma Não Padrão

$$\min\ x_1 + 2x_2$$

s.r.

$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$180x_1 + 20x_2 = 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programação Linear
Hipótese de Aditividade

- Considera as atividades (variáveis de decisão) do modelo como entidades totalmente independentes, **não** permitindo que haja **interdependência** entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

- **Esta é a própria hipótese de linearidade do PPL**

Programação Linear
Hipótese de Proporcionalidade

- O valor da função-objetiva é proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão, isto é, o valor da função objetivo se altera de um valor constante dada uma variação constante da variável de decisão;

Programação Linear
Hipótese de Divisibilidade

- Assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor positivo fracionário.
- Esta hipótese pode ser quebrada, dando origem a um problema especial de programação linear, chamado de **problema inteiro**.

Programação Linear
Terminologia

- Solução
  - No campo de Programação Linear é qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão, não importando se esta especificação se trata de uma escolha desejável ou permissível.

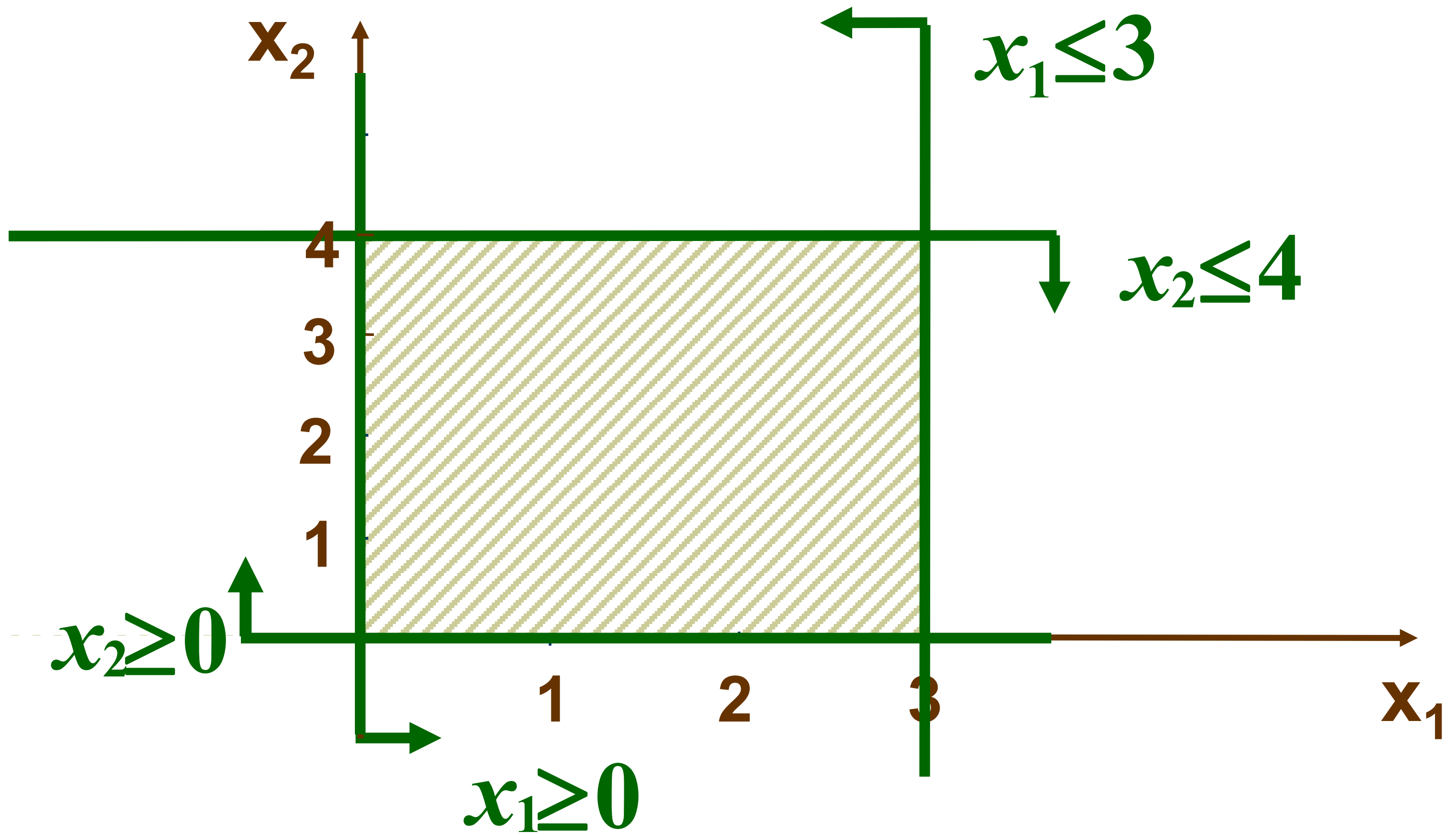
A Solução Ótima

- A **Solução Ótima** é uma solução viável especial.
- Dentre todas as soluções viáveis, aquela(s) que produzir(em) o valor da função objetivo otimizado é chamada de ótima;
- A grande questão é como determinar a solução ótima.

Programação Linear
Solução Gráfica

- Quando o problema envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um problema de programação linear pode ser encontrada graficamente.

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; Z = 5x_1 + 2x_2 \\
&s.r. \qquad\qquad x_1 \le 3 \qquad (a) \\
&\qquad\qquad\qquad x_2 \le 4 \qquad (b) \\
&\qquad\qquad x_1 + 2x_2 \le 9 \qquad (c) \\
&\qquad\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (d)
\end{aligned}
$$


x_2
$x_1 \leq 3$
4
$x_2 \leq 4$
3
2
1
$x_2 \geq 0$
1
2
3
x_1
$x_1 \geq 0$

Programação Linear
Solução Gráfica

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

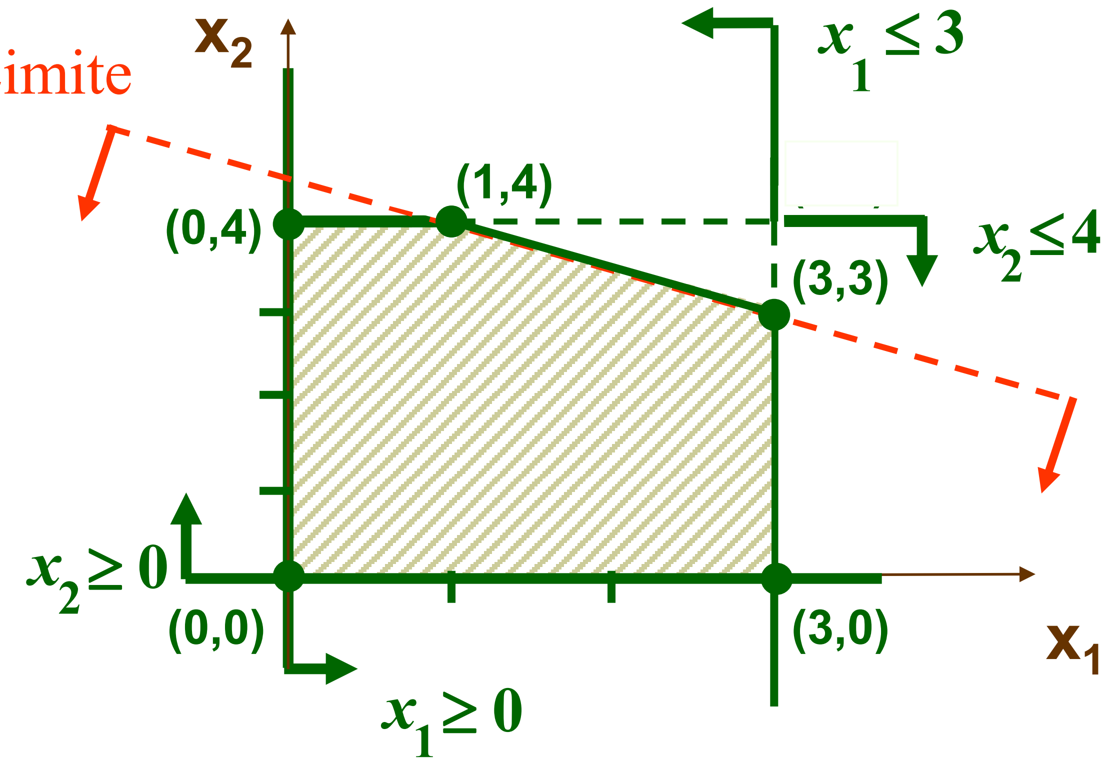
$$x_1 + 2x_2 = 9$$ Reta Limite

$$2x_2 = 9 - x_1$$

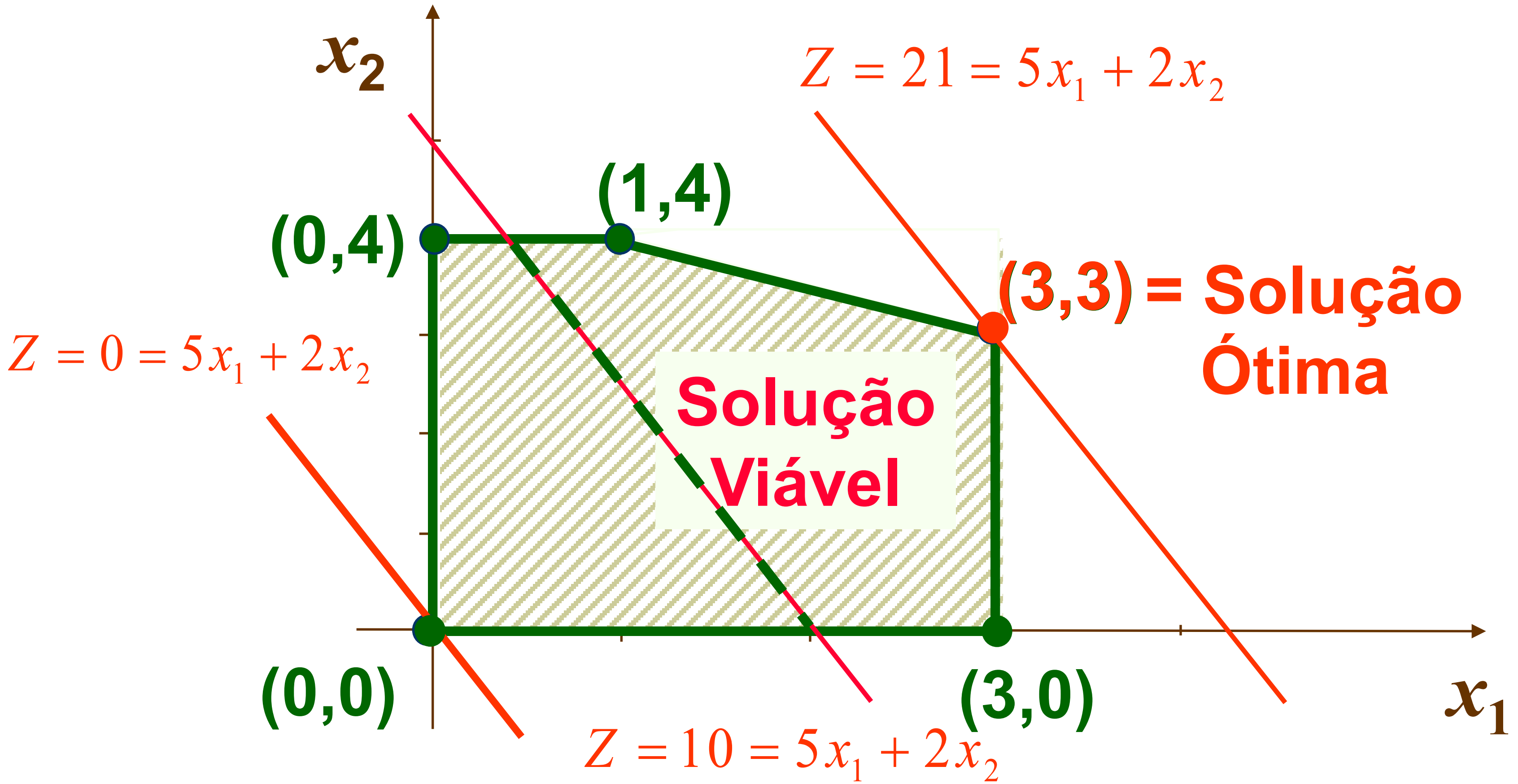
$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

$$x_2 \leq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

Região Limitada



Programação Linear
Solução Gráfica



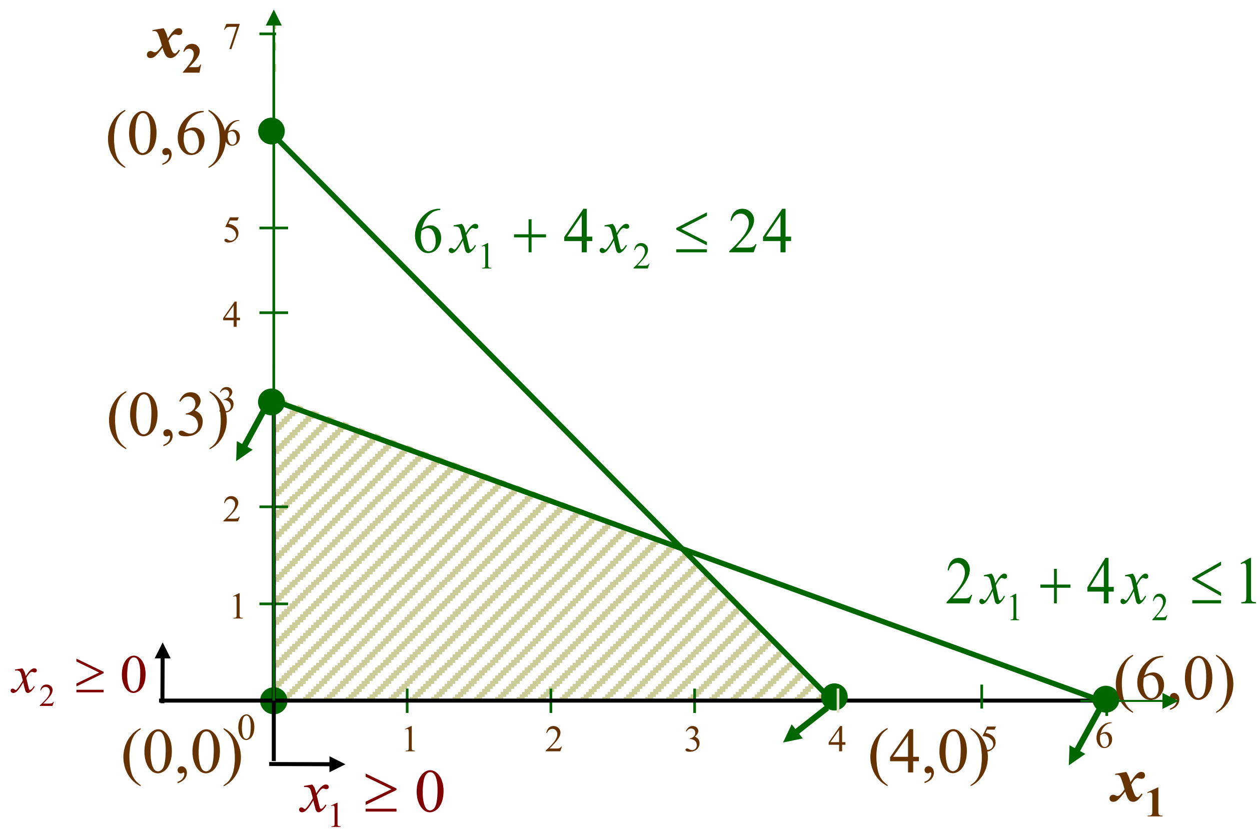
Programação Linear
Solução Gráfica - Exercício

- Considere o seguinte o problema de LP

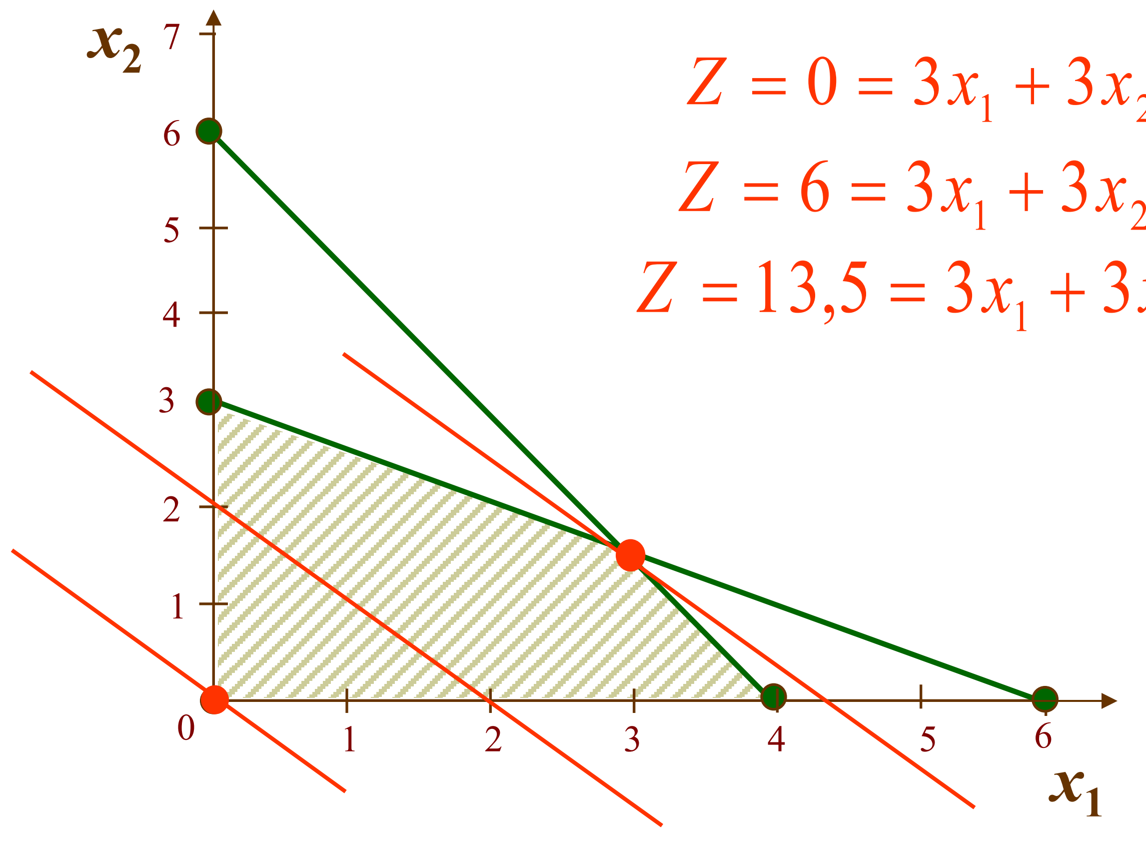
$$
\begin{aligned}
Max\ & 3x_1 + 3x_2 \\
s.t.\quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
& 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Encontre a solução ótima.

Programação Linear
Solução Gráfica - Exercício



Programação Linear
Solução Gráfica - Exercício



$$Z = 0 = 3x_1 + 3x_2$$

$$Z = 6 = 3x_1 + 3x_2$$

$$Z = 13{,}5 = 3x_1 + 3x_2$$

Exercício Recomendado 1

$$\text{Max } 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

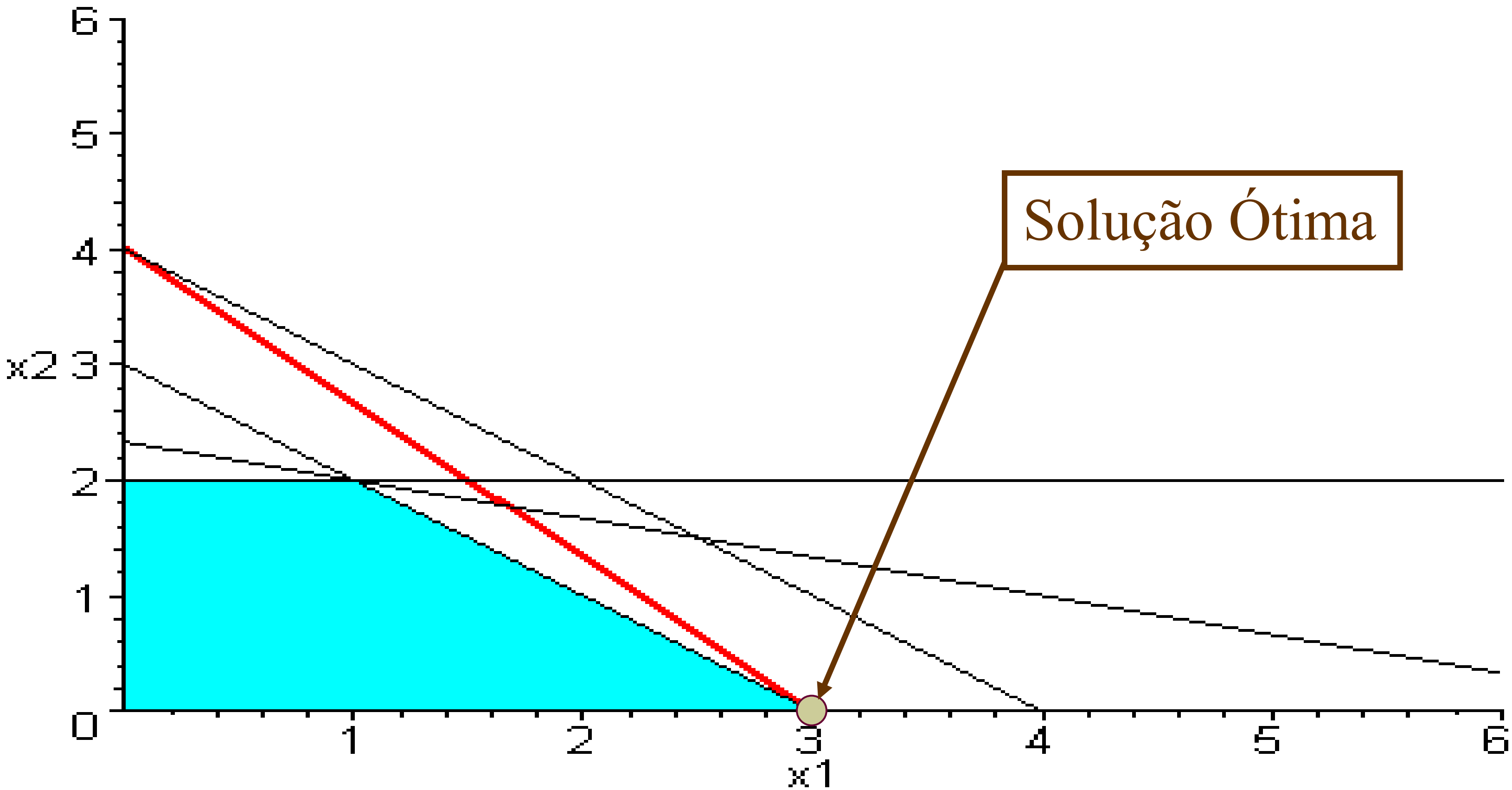
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solução do Exercício 1



Exercício Recomendado 2

$$\text{Max} \quad 4x_1 + 8x_2$$

st

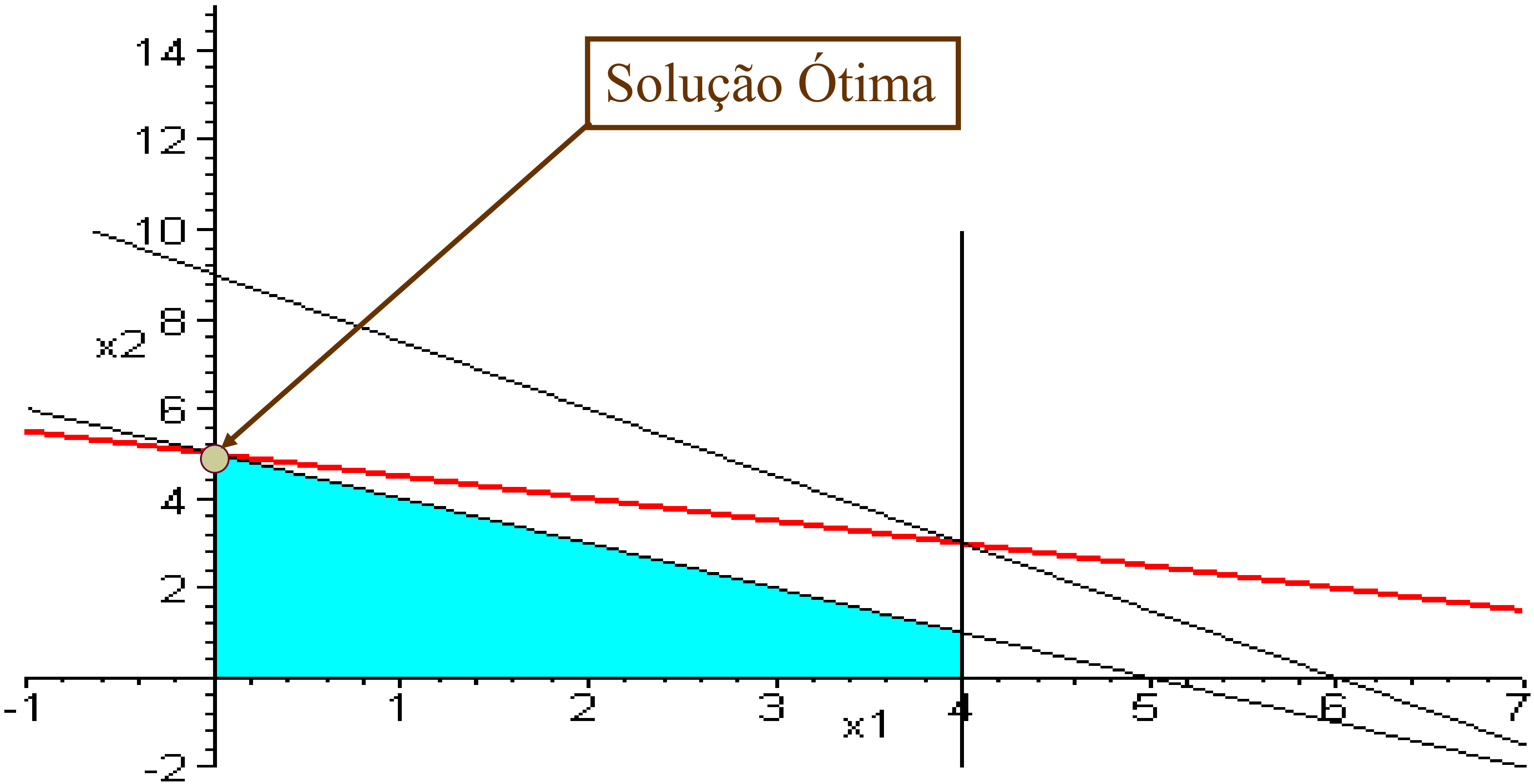
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solução do Exercício 2



Exercício 3

Max $x_1 + 3x_2$

s.r.

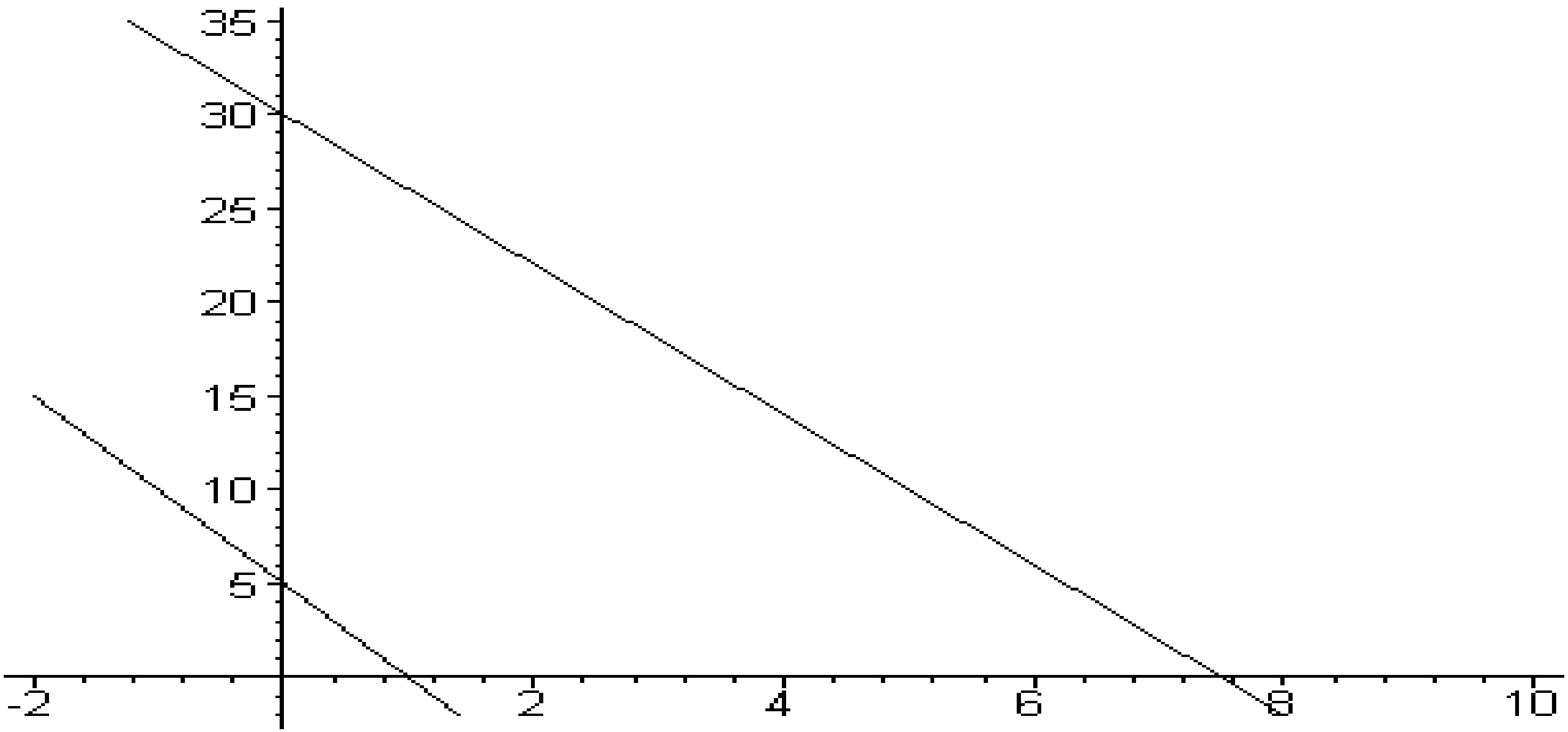
$$4x_1 + x_2 \geq 30$$

$$16x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solução do Exercício 3

- Sem Soluções Viáveis



O Problema do Pintor

- Um Pintor faz quadros artesanais para vender numa feira que acontece todo dia à noite. Ele faz quadros grandes e desenhos pequenos, e os vende por R$5,00 e R$3,00, respectivamente. Ele só consegue vender 3 quadros grandes e 4 quadros pequenos por noite. O quadro grande é feito em uma hora (grosseiro) e o pequeno é feito em 1 hora e 48 minutos (detalhado). O desenhista desenha 8 horas por dia antes de ir para a feira. Quantos quadros de cada tipo ele deve pintar para maximizar a sua receita?

A Decisão do Pintor

- O que o desenhista precisa decidir?
- O que ele pode fazer para aumentar ou diminuir a sua receita?

A Decisão do Pintor

- O que o desenhista precisa decidir?
- O que ele pode fazer para aumentar ou diminuir a sua receita?
  - **A decisão dele é como usar as 8 horas diárias.**
  - **Quantos desenhos pequenos e grandes ele deve fazer.**

A Decisão do Pintor

- Precisamos traduzir a decisão do Pintor em um modelo de programação linear para resolvê-lo;
- Chamemos de x_1 e x_2 as quantidades de quadros grandes e pequenos que ele faz por dia, respectivamente.
- O Objetivo do Pintor é aumentar sua receita ao máximo.

O Modelo para a Decisão do Pintor

- Função-objetivo
  Maximizar a receita

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

- Restrição de vendas de quadros grandes

$$s.r. \quad x_1 \leq 3$$

- Restrição de vendas de quadros pequenos

$$x_2 \leq 4$$

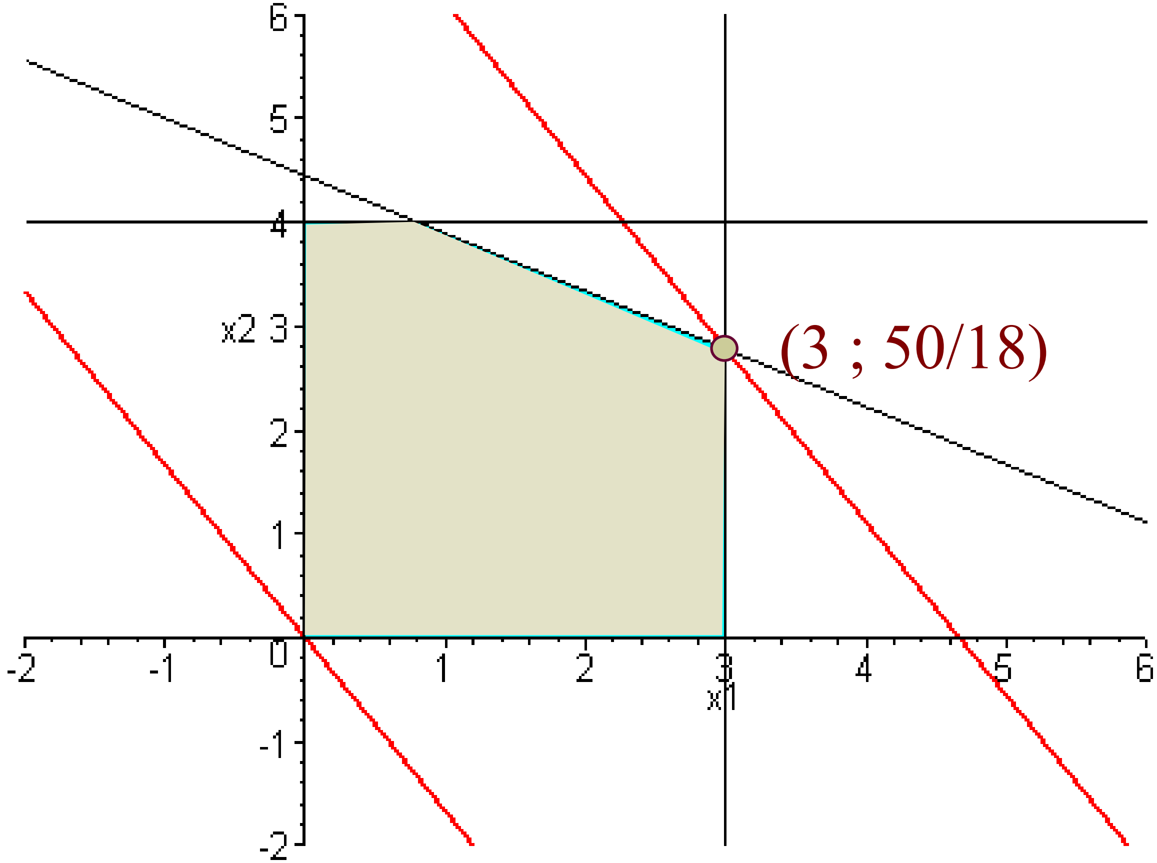
- Restrição de tempo

$$x_1 + 1{,}8x_2 \leq 8$$

- Não negatividade

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

O Modelo para a Decisão do Pintor



$$z = 0 = 5x_1 + 3x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{5}{3}x_1$$

$$z = \tfrac{70}{3} = 5x_1 + 3x_2$$

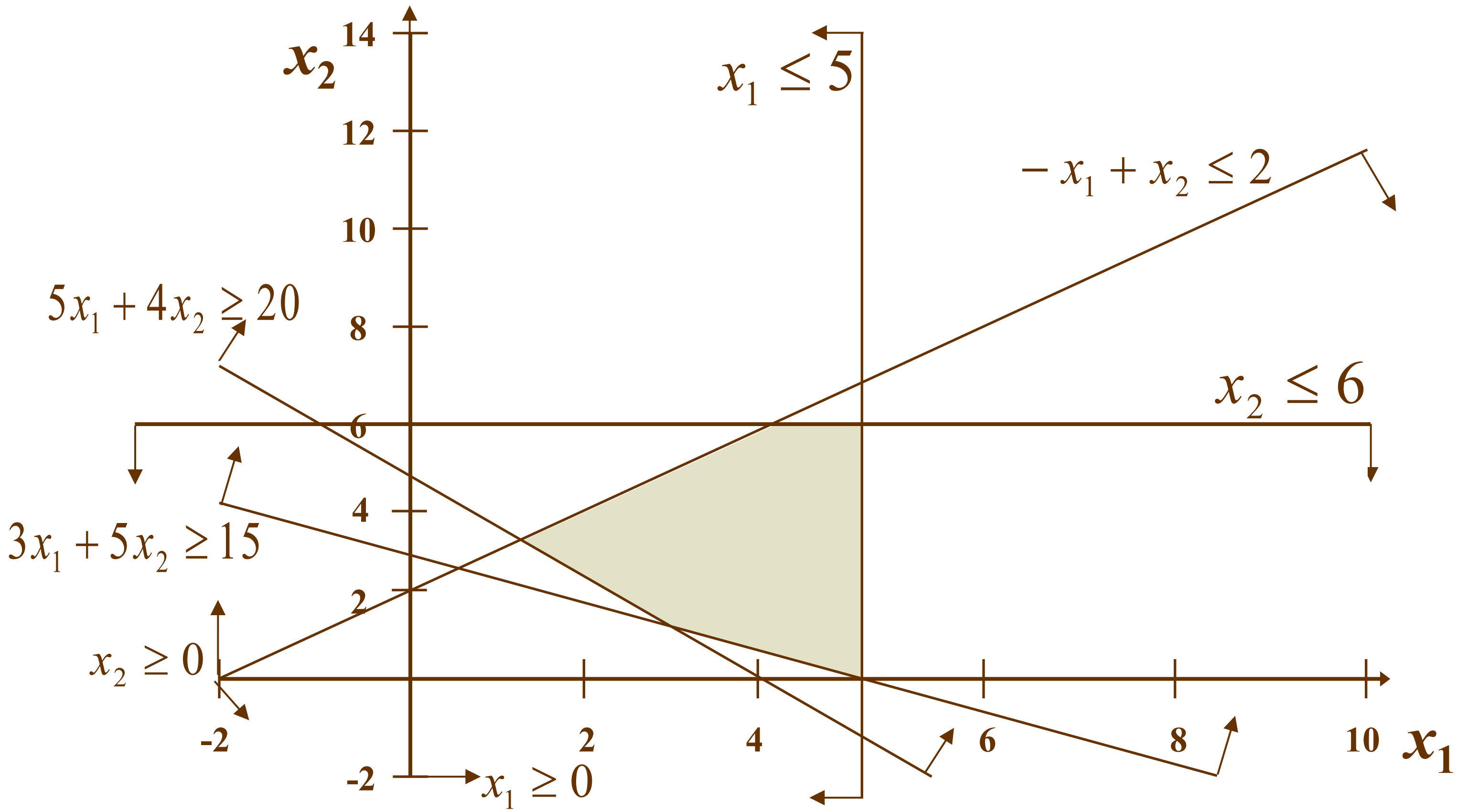
$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{70}{9}$$

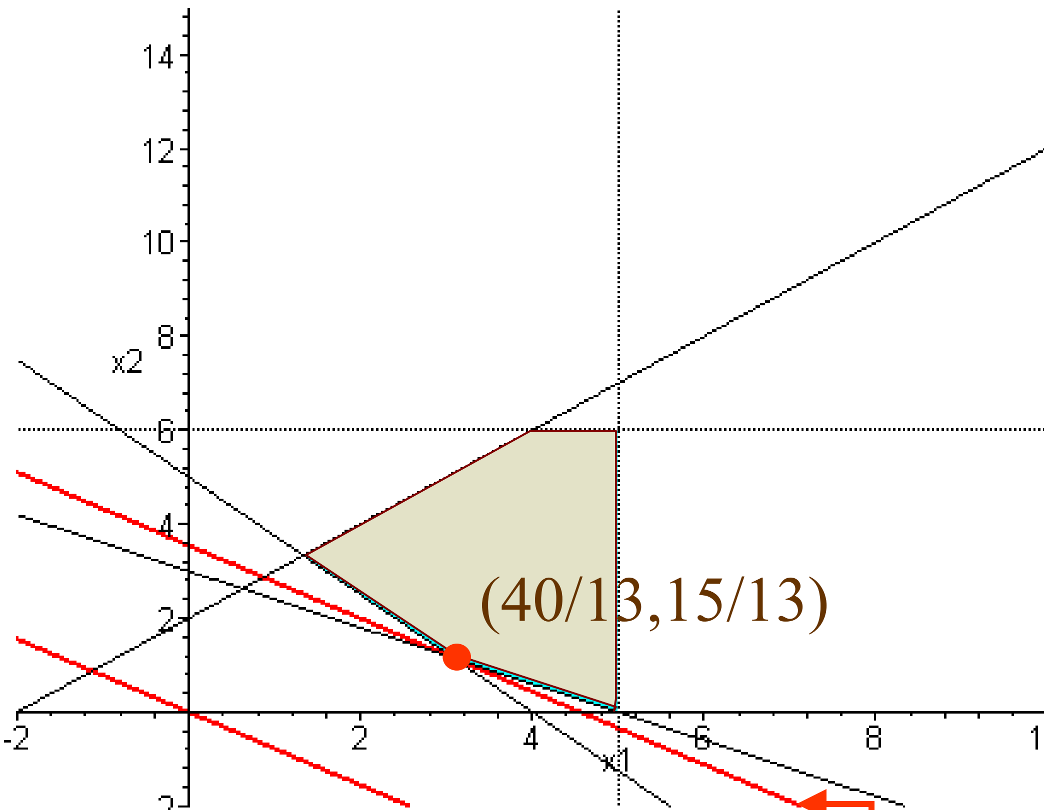
- Encontre a solução ótima:

$$
\begin{aligned}
&Min\ 7x_1 + 9x_2 \\
&s.t. \quad -x_1 + x_2 \le 2 \\
&\qquad\quad x_1 \le 5 \\
&\qquad\quad x_2 \le 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
&\qquad\quad 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear
Solução Gráfica - Exercício



Programação Linear
Solução Gráfica - Exercício



$$z = 0 = 7x_1 + 9x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = -\tfrac{7}{9}x_1$$

$$z = \tfrac{415}{65} = 7x_1 + 9x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_2 = -\tfrac{7}{9}x_1 + \tfrac{415}{117}}$$

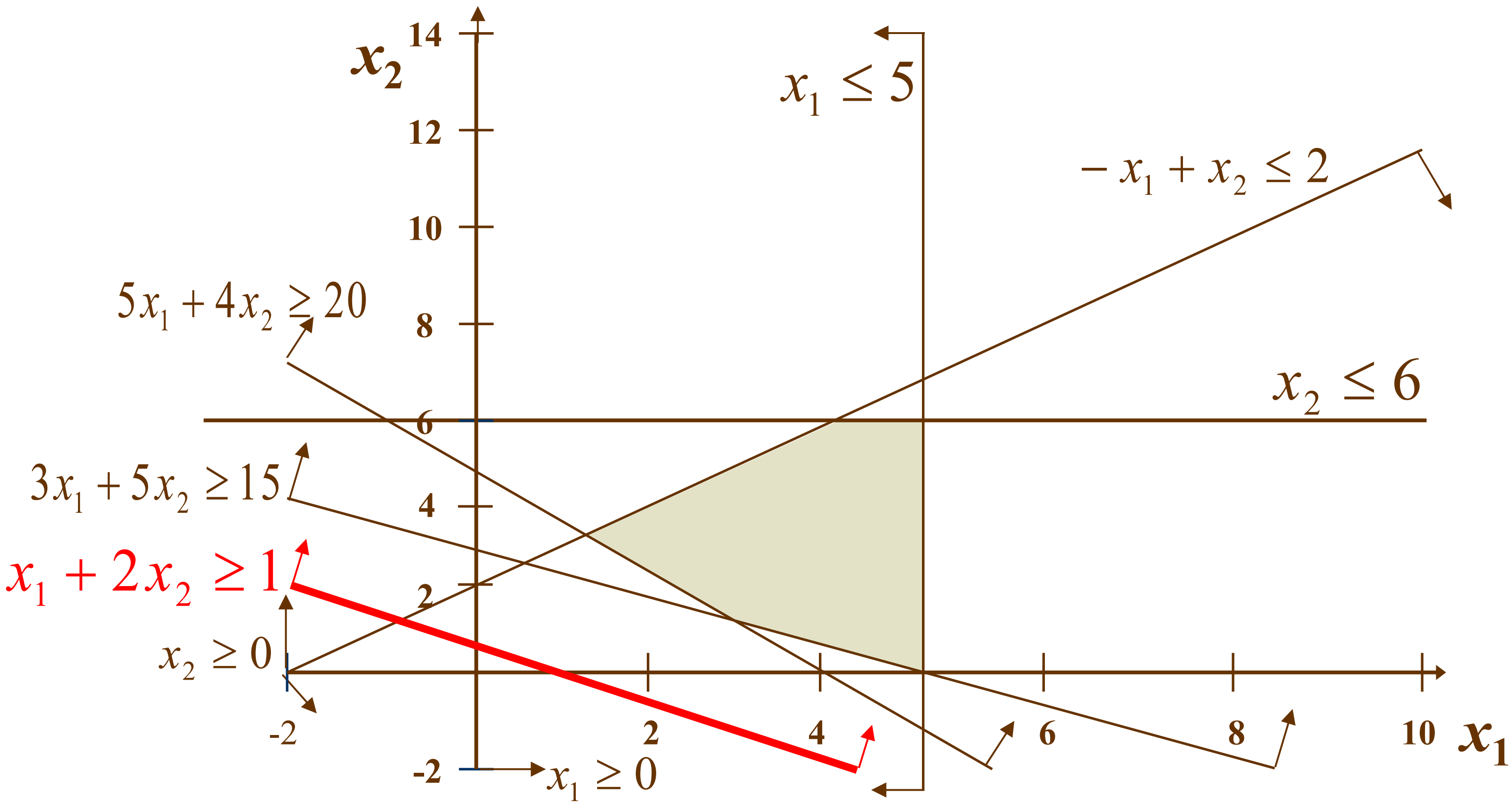
Programação Linear
Restrições Redundantes

- Uma restrição é dita redundante quando a sua exclusão do conjunto de restrições de um problema não altera o conjunto de soluções viáveis deste.
- É uma restrição que não participa da determinação do conjunto de soluções viáveis.
- Existe um outro problema sem essa restrição com a mesma solução ótima.

- Considere o problema

$$
\begin{aligned}
&Min\ 6x_1 + 10x_2 \\
&s.t. \quad -x_1 + x_2 \leq 2 \\
&\qquad\quad x_1 + 2x_2 \geq 1 \\
&\qquad\quad x_1 \leq 5 \\
&\qquad\quad x_2 \leq 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\
&\qquad\quad 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear
Restrições Redundantes

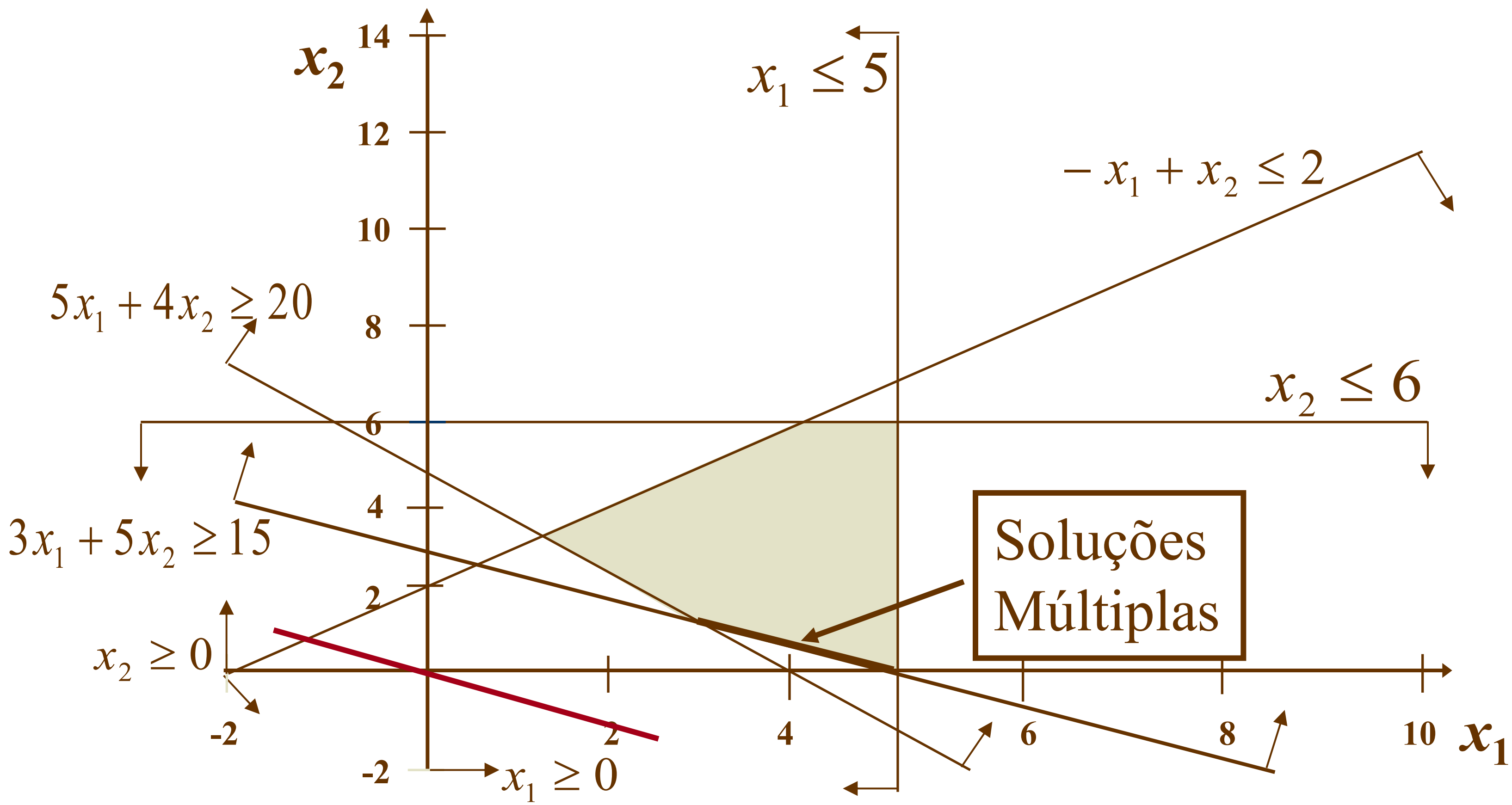


Restrição Redundante

- Encontre a solução ótima:

$$
\begin{aligned}
&Min\ 6x_1 + 10x_2 \\
&s.t. \quad -x_1 + x_2 \le 2 \\
&\qquad\quad x_1 \le 5 \\
&\qquad\quad x_2 \le 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
&\qquad\quad 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear
Solução Múltipla

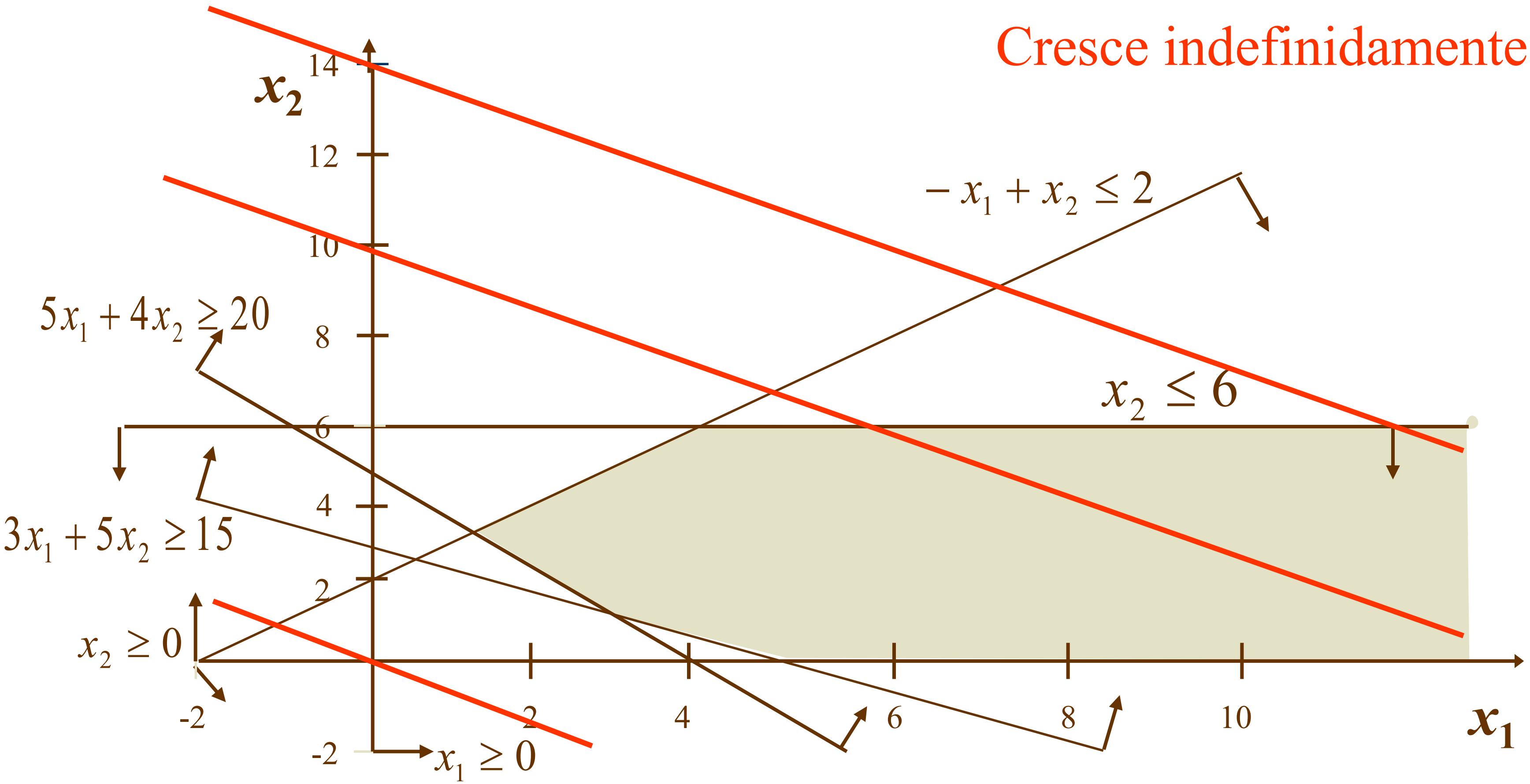


Programação Linear
Solução Ilimitada

- Encontre a solução ótima:

$$
\begin{aligned}
&Max\ 6x_1 + 10x_2 \\
&s.t. \quad -x_1 + x_2 \le 2 \\
&\qquad\quad x_2 \le 6 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
&\qquad\quad 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear
Solução Ilimitada



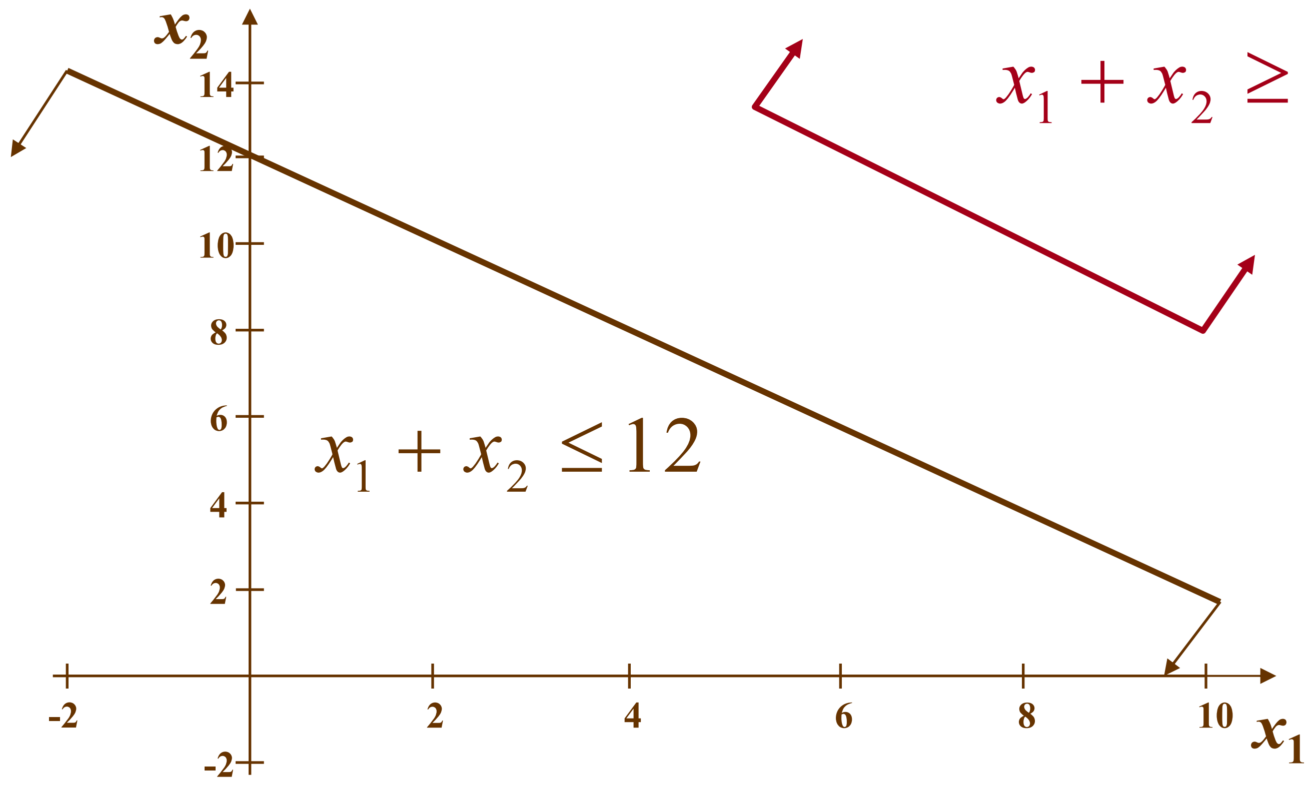
Programação Linear
Solução Inviável

- Um problema de programação linear é dito inviável quando o conjunto de soluções viáveis é vazio.

- Considere o problema

$$
\begin{aligned}
&Max\ x_1 + x_2 \\
&s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 12 \\
&\qquad\ \ x_1 + x_2 \geq 20 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Conjunto de Soluções Viáveis é vazio



Caso Alumilâminas S.A.

- A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os 3 tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessura fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender os pedidos ao menor custo possível? (resolva pela análise gráfica – deslocamento da função objetivo).

Caso Alumilâminas S.A.

- Variáveis de Decisão
  - X_1 – Quantos dias de funcionamento da Fábrica de São Paulo
  - X_2 – Quantos dias de funcionamento da Fábrica do Rio de Janeiro
- Função-Objetiva
  - Minimizar Custo de Produção (mil R$) = $100x_1 + 200x_2$

Caso Alumilâminas S.A.

- Restrições de Demanda
  - Placas Finas $$8x_1 + 2x_2 \geq 16$$
  - Placas Médias $$1x_1 + 1x_2 \geq 6$$
  - Placas Grossas $$2x_1 + 7x_2 \geq 28$$
- Restrições de Não Negatividade $$x_1, x_2 \geq 0$$

Caso Alumilâminas S.A.
O Modelo

$$Min\ \ 100x_1 + 200x_2$$

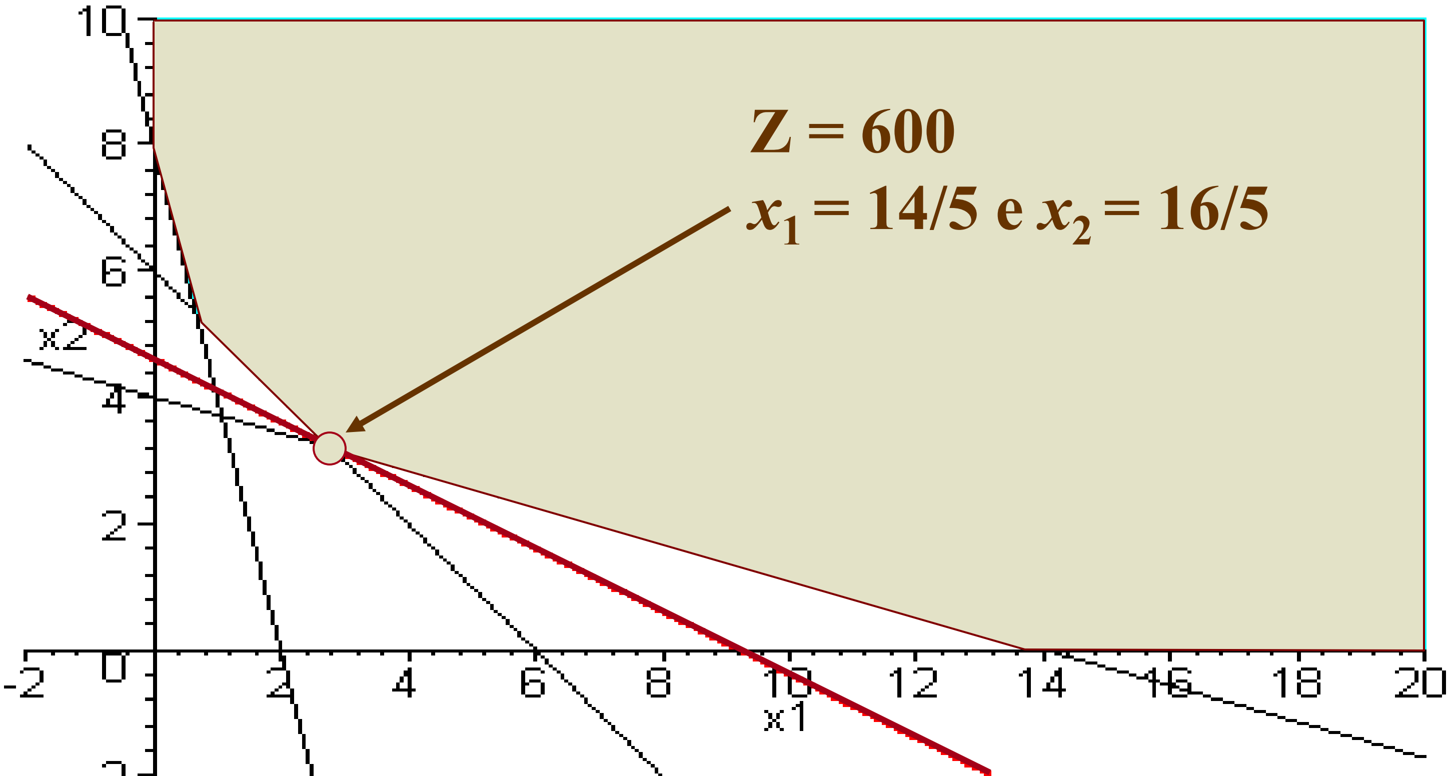
$$8x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$1x_1 + 1x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Caso Alumilâminas S.A.
Solução Gráfica



Caso Esportes Radicais S.A.

- A Esportes Radicais S/A produz pára-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto que na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa-delta requer 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa, bem como que o lucro pela venda de cada pára-quedas é de R$ 60,00 e o lucro para cada asa-delta vendida é R$ 40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S/A. (resolva pela análise gráfica – deslocamento da função objetivo).

Caso Esportes Radicais S.A.

- Variáveis de Decisão
  - X_1 – Quantidade de Pára-Quedas a serem produzidos
  - X_2 – Quantidade de Asa Deltas a serem produzidos
- Função-Objetiva
  - Max $60x_1 + 40x_2$

Caso Esportes Radicais S.A.

- Restrição de Produção

  - Linha 1 $$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$
  - Linha 2 $$3x_1 + 7x_2 \leq 42$$
  - Restrição de Não Negatividade $$x_1, x_2 \geq 0$$

Caso Esportes Radicais S.A.
O Modelo

$$Max \;\; 60x_1 + 40x_2$$

$$10x_1 + 10x_2 \le 100$$

$$3x_1 + 7x_2 \le 42$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Caso Esportes Radicais S.A.
Solução Gráfica