Generator liczb losowych

Igor Łonak

1. Generator G

Generuje liczby pseudo-losowe na wzór generatora multiplikatywnego.

$$X_n = a^n X_0 \ mod \ m$$

Za parametr a przyjmuję liczbę 7^5 , a za modulo $2^{31} - 1$. Pierwszy element $X_0 = 2^{25} - 1$.

2. Generator J

Korzysta z liczb wygenerowanych przez generator G i dzieli je przez modulo otrzymując ułamki z przedziału (0;1).

3. Generator B

Liczby wygenerowane przez generator J porównuje z danym prawdopodobieństwem rozkładu Bernoulliego. Jeśli liczba jest mniejsza bądź równa prawdopodobieństwu to generujemy 1 w przeciwnym przypadku 0.

4. Generator D

Za pomocą generatora B tworzy n rozkładów Bernoulliego o wielkości k dla zadanego prawdopodobieństwa i dla każdego z rozkładów zlicza liczbę powodzeń. Każdy z n rozkładów jest generowany dla innego X_0 aby zapobiec powtarzalności rozkładów. Nadal występuje jednak widoczna powtarzalność pierwszego elementu czego możemy się pozbyć zaczynając od 2.

5. Generator P

Generuje liczby z rozkładu Poissona na wzór algorytmu Knutha.

```
algorithm poisson random number (Knuth):
    init:
        Let L ← e^{-λ}, k ← 0 and p ← 1.
    do:
        k ← k + 1.
        Generate uniform random number u in [0,1] and let p ← p × u.
    while p > L.
    return k − 1.
```

Dla wygenerowanie liczby u korzystam z generatora J.

6. Generator W

Generuje liczby z rozkładu wykładniczego ze wzoru:

$$x = -ln(1 - U)$$

Gdzie U to liczba wylosowana przez generator J.

7. Generator N

Generuje liczby z rozkładu normalnego na wzór metody Boxa-Mullera:

$$\theta = U_2 \cdot 2\pi, \quad U_2 \in (0,1)$$

Dla pary (U_1,U_2) dostajemy (x,y) z rozkładu N(0,1)

$$x = rcos(\theta) = \sqrt{-2ln(1 - U_1)}cos(2\pi U_2)$$

$$y = rsin(\theta) = \sqrt{-2ln(1 - U_1)}sin(2\pi U_2)$$

Gdzie U_1, U_2 to para liczb wylosowana przez generator J.

8. Testy serii

Metoda:

Wyliczam medianę testowanego zestawu, następnie przypisuję każdemu elementowi znak a jeśli jego wartość jest większa od mediany lub b jeśli jest mniejsza. Jeśli wartość jest równa medianie to przypisuje jej znak -. Następnie liczę ilość podciągów o takich samych elementach (oznaczam jako U). Z tablic rozkładu serii (dla α=0.025 i α=.0975) odczytujemy wartość dla liczby wystąpień a i liczby wystąpień b(oznaczam odpowiednio n1, n2). Jeśli wartość U jest mniejsza od wartości dla α=0.975 i większa od wartości dla α=0.025 to nie ma powodów do założenia, że ciąg nie jest losowy. W przeciwnym wypadku odrzucam losowość ciągu.

Testy:

Przeprowadziłem testy serii dla generatorów G i J dla wielkości próby 5, 10, 15 i 20 i żaden nie stwierdził braku losowości prób.

9. Test chi-kwadrat

Założyłem, że poziom istotności α = 0.05.

1. Generator B- tworzę 2 przedziały, liczba ograniczeń jest równa 1 więc jest jeden stopień swobody.
2. Generator D- tworzę 4 przedziały, liczba ograniczeń jest równa 1 więc są 3 stopnie swobody.
3. Generator P- tworzę 4 przedziały, liczba ograniczeń jest równa 1 (bo nie estymuje lambdy tylko podstawiam tą użytą do wygenerowania rozkładu) więc są 3 stopnie swobody.

Dla wyznaczonych przedziałów liczę zaobserwowane wyniki z wygenerowanego rozkładu i porównuje je z oczekiwanymi wynikami za pomocą wzoru:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

χ^2 = chi squared

O_i = observed value

E_i = expected value

Następnie korzystając z tabeli rozkładu chi-kwadrat porównuje otrzymany wynik z wartością krytyczną dla mojego poziomu istotności i ilości stopni swobody.

Jeśli wartość nie przekracza wartości krytycznej nie mamy powodu by odrzucić poprawność wygenerowanego rozkład.

Przeprowadziłem testy dla zestawów o wielkości 500, 1000, 5000 i 10000. Testy dla rozkładów Bernoulliego(p=0.3), dwumianowego(k=10, p=0.3) i Poissona(lambda=3) nie zaprzeczyły ich poprawności.

10. Źródła

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution
2. http://statystyka.rezolwenta.eu.org/Materialy/Testy-los.pdf
3. http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/generatory_16.pdf
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution
6. http://statystyka.rezolwenta.eu.org/Materialy/Testy-los.pdf