

## Équations de Maxwell

Dans un espace contenant une densité de charges  $\rho(\mathbf{M})$ , et une densité de courant  $\vec{j}(\mathbf{M})$ , les champs vectoriels  $\vec{E}(\mathbf{M})$  et  $\vec{B}(\mathbf{M})$  vérifient les quatre équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss  

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Maxwell-Thompson  

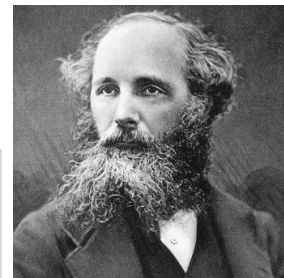
$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Maxwell-Faraday  

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell-Ampère  

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



Champs électriques et magnétiques :

$\vec{E}$  : vecteur champ électrique ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$\vec{B}$  : vecteur champ magnétique (T)

Sources de champs :

$\rho$  : densité de charge ( $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ )

$\vec{j}$  : vecteur densité de courant ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ )

Constantes :

$\epsilon_0$  : permittivité du vide ( $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$\mu_0$  : perméabilité du vide ( $1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ )

Le chapitre précédent concernait la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (ou tout du moins, dans les milieux vides de charges et de courants). Ce chapitre concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques : puisque les ondes électriques exercent un travail sur les charges, la propagation de l'onde fait intervenir des transferts énergétiques entre le champ et le conducteur. On peut donc s'attendre à un comportement propagatif différent de celui rencontré dans le cas du vide, et à des phénomènes d'interaction plus variés. Dans une deuxième partie, on aborde la réflexion des ondes sur un métal.

## TABLE DES MATIERES

I - EQUATION DE PROPAGATION DANS UN CONDUCTEUR OHMIQUE	1
I.1 - Cadre de travail : régime « lentement » variable	1
I.2 - Equations de propagation	2
I.3 - Propagation d'une OPPH	3
II - REFLEXION SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT	4
II.1 - Configuration étudiée	4
II.2 - Relations de passage à l'interface	4
II.3 - Expression de l'onde réfléchie	5
II.4 - Bilan : structure de l'onde totale (incidente + réfléchie)	5
II.5 - Champ magnétique et courants surfaciques	6

## I - EQUATION DE PROPAGATION DANS UN CONDUCTEUR OHMIQUE

Dans toute la suite, on considèrera uniquement des conducteurs ohmiques, dans lesquels la relation locale entre la densité de courante et le champ électrique est particulièrement simple.

## Définition d'un conducteur ohmique

De plus, puisqu'il est désormais possible que des charges et des courants soient créés dans le milieu, il est nécessaire que l'équation de conservation locale de la charge y soit respectée en chaque point.

## Equation de conservation de la charge :

## I.1 - Cadre de travail : régime « lentement » variable

Dans un conducteur ohmique, on peut utiliser la conservation, de la charge, puis la loi d'Ohm, et la relation de Maxwell-Gauss pour obtenir l'équation de relaxation de la charge :

Cette équation du premier ordre indique que le temps caractéristique de retour à l'équilibre est de l'ordre de  $\tau = \epsilon_0 / \gamma$ . Si on s'intéresse aux milieux relativement bon conducteurs, pour lesquels  $\gamma \sim 10^5$  à  $10^7$ , alors on a :

Cela signifie que si les variations du champ dans le conducteur se font sur un temps très grand devant  $\tau$ , alors il n'y a pas d'accumulation de charges dans le matériau :  $\rho \sim 0$ . Pour négliger l'accumulation des charges, il est donc nécessaire d'exciter les conducteurs avec des ondes électromagnétiques suffisamment lentement variables, c'est-à-dire :

En réalité, on se limitera à des ondes de fréquence encore inférieure à cela, car la loi d'Ohm elle-même devient dangereusement imprécise dans les conducteurs dès  $f \sim 10^{13}$  Hz. Dans ces conditions, si on compare l'ordre de grandeur du courant de déplacement et du courant dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \underbrace{\mu_0 \vec{J}}_{(1)} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{(2)}$$

Dans le cadre de l'étude ci-dessus, il est donc possible de négliger le courant de déplacement  $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  face aux densités de courant  $\vec{J}$ .

### Conducteur en régime lentement variable

Un conducteur en régime lentement variable reste **uniformément neutre**.

Le courant de déplacement ( $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ ) y est **négligeable** devant le courant de conduction  $\vec{J}$  donné par la loi d'Ohm.

En conséquence, dans le cadre de ces hypothèses, on se limite à étudier l'interaction d'ondes radio, de micro-ondes, ou d'infrarouges avec les conducteurs, mais il on exclut les rayonnements visibles ( $f \sim 10^{14}$  Hz), et ceux de fréquence supérieure.

Dans le cadre de ces hypothèses les quatre équations de Maxwell prennent la forme :

### Equations de Maxwell dans un conducteur ohmique en régime lentement variable

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \qquad \text{div}(\vec{B}) = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial \vec{B} / \partial t$$

## I.2 - Equations de propagation

Les quatre nouvelles équations de Maxwell ci-dessus permettent d'établir des équations de propagation pour le champ électrique et magnétique, de manière analogue à ce qui a été établi dans le vide, au chapitre précédent (si ce n'est qu'un terme de source,  $\vec{J}$  est désormais présent).

### Equations de propagation dans un conducteur ohmique

Dans un conducteur ohmique et en basse fréquence, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient la même équation :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad \Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

C'est une équation de diffusion (dérivée temporelle, et dérivée spatiale seconde).

### Démonstration – équations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Etablir les équations de propagation du champ électrique et magnétique en le contexte d'étude établi plus haut.

Dans le chapitre précédent, où l'espace était vide de charges et de courants, on obtenait l'équation de D'Alembert, dont les solutions sont des ondes progressives, c'est-à-dire se propageant infiniment, à vitesse constante, sans déformation. Ici, on autorise l'existence de courants générés par le champ  $\vec{E}$  via la loi d'Ohm locale, ce qui conduit à une interaction entre les champs et la matière : on verra que l'énergie du champ est progressivement absorbée par la matière, et que celui-ci ne peut donc plus se propager sans déformation.

### I.3 – Propagation d'une OPPH

Dans cette sous-partie, on s'intéresse aux solutions sous forme d'OPPH aux équations établies précédemment. Comme on l'avait fait dans le chapitre précédent, on cherche à déterminer la structure des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , ainsi que la relation avec le vecteur d'onde  $\vec{k}$  de l'OPPH. On se placera en représentation complexe, donc on s'intéresse au champ électrique sous la forme :

De la même manière qu'au chapitre précédent, on s'intéresse uniquement au cas particulier des ondes électriques et magnétiques polarisées rectilignement, c'est-à-dire que le champ  $\vec{E}$  oscille dans la direction  $\vec{e}_p$  invariable.

#### I.3.A – Relations de structure

Les relations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Thompson et Maxwell-Faraday n'ont pas changé par rapport au chapitre précédent. On a donc :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Les trois vecteurs  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  (ou  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ ) forment donc encore un trièdre direct, exactement comme dans le dernier chapitre.

#### I.3.B – Relation de dispersion

Dans le précédent chapitre, on avait montré qu'une OPPH injectée dans l'équation de D'Alembert vérifiait une relation de dispersion particulièrement simple :  $\omega = |\vec{k}|c$ . Dans ce chapitre, l'équation de propagation a changé, mais on cherche tout de même une solution sous forme d'OPPH, en représentation complexe :

##### Démonstration – Relation de dispersion d'une OPPH dans un conducteur ohmique

1. Etablir la relation de dispersion dans le cas d'un OPPH prenant un champ électrique de forme  $\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$  dans un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ .
2. Écrire le champ électrique complexe, puis réel, tenant compte de la relation de dispersion.

L'onde n'est pas une onde progressive, car son amplitude diminue au cours de la propagation, sur une distance caractéristique  $\delta$ . Ce type d'onde est appelée une « **pseudo-OPPH** », car même si elle peut se mettre sous forme  $E_0 e^{i(\omega t - kx)}$ , le fait que  $k$  soit complexe fait que l'onde n'est pas réellement progressive.

##### Épaisseur de peau

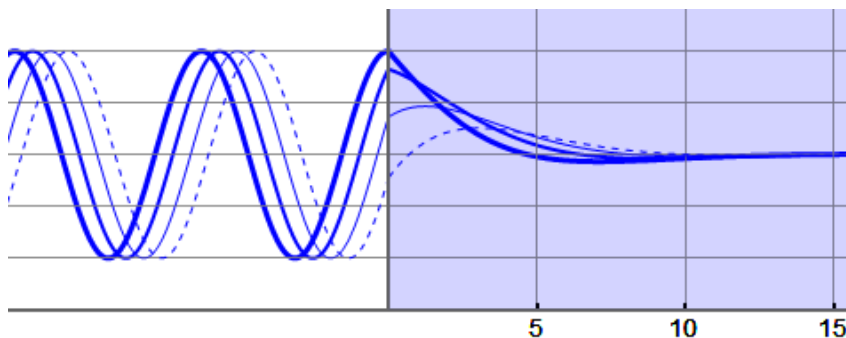
L'épaisseur de peau est la longueur caractéristique d'amortissement de la **pseudo-OPPH** au sein du conducteur :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ .

Sur une distance de quelques  $\delta$ , l'onde est totalement absorbée par le conducteur ; les champs sont nuls.

On voit que l'épaisseur de peau dépend de  $\gamma$  et de la pulsation  $\omega$  de l'onde électromagnétique considérée : les ondes pénètrent d'autant mieux que le conducteur est mauvais, et que leur fréquence est faible.

On a représenté ci-contre l'arrivée de l'onde sur le métal (interface en  $x = 0$ ), pour quatre temps différents fixés. Les unités sont arbitraires, mais on a choisi  $\delta = 2$ .

On observe la propagation usuelle de l'onde en  $x < 0$ . Une fois dans le métal, l'oscillation continue, mais est rapidement atténuée et disparaît sur une distance de quelques  $\delta$ .



On donne ci-dessous quelques ordres de grandeur concernant l'épaisseur de peau dans quelques cas :

Cuivre (50 Hz)	Cuivre (10 kHz)	Cuivre (700 MHz)	Béton (700 MHz)	Béton (2600 MHz)
$\delta = 9 \text{ mm}$	$\delta = 0,2 \text{ mm}$	$\delta = 2 \text{ }\mu\text{m}$	$\delta \simeq 15 \text{ cm}$	$\delta = 7 \text{ cm}$

## II - REFLEXION SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT

### Notion de conducteur parfait

Un conducteur parfait est un conducteur idéalisé de conductivité infinie. C'est un modèle correct pour les très bons conducteurs. En conséquence, **aucun champ  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  ne peut exister dans un conducteur parfait**.

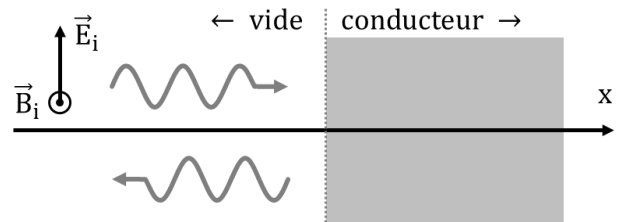
Selon la loi d'Ohm  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , un champ électrique  $\vec{E}$  non-nul dans un conducteur parfait mènerait à une densité de courant  $\vec{j}$  infinie. Alternativement, on pourrait aussi dire que, puisque l'épaisseur de peau  $\delta$  devient nulle, aucune onde ne peut pénétrer dans le conducteur parfait.

### II.1 - Configuration étudiée

Dans toute la précédente partie, on s'est intéressé aux conditions que doit vérifier une (pseudo-)OPPH qui « existerait » dans le conducteur, sans s'attarder sur la manière dont l'onde pourrait arriver à l'intérieur. On considère donc ici la configuration suivante :

Une OPPH arrive du demi-espace  $x < 0$ , et rencontre en  $x = 0$  un conducteur ohmique occupant le demi-espace  $x > 0$ .

On choisit d'étudier une OPPH incidente sous forme :



Une telle situation seule est incomplète : à l'interface en  $x = 0$ , l'onde est **soit absorbée, soit réfléchie, soit transmise** (ou une combinaison des trois). Au niveau du conducteur ohmique, l'onde incidente se sépare en deux parties :

- une partie est réfléchie, et repart sous forme d'une OPPH se propageant en sens inverse, avec une amplitude inférieure ou égale à celle de l'onde incidente ;
- une partie est transmise à l'intérieur du conducteur, mais on a montré dans la partie précédente que l'onde à l'intérieur du matériau ne peut exister que sous forme amortie. L'onde transmise prend donc une forme analogue à celle trouvée précédemment, c'est-à-dire qu'elle est absorbée sur une distance de quelques  $\delta = \sqrt{2/\mu_0\gamma\omega}$ . **Dans un conducteur parfait, puisque l'épaisseur de peau est nulle : l'onde transmise n'existe pas, donc l'onde incidente est totalement réfléchie.**

L'interprétation de cette réflexion est la suivante : l'onde incidente met en déplacement les charges présentes dans le milieu conducteur. Cette mise en mouvement absorbe l'énergie de l'onde incidente (car  $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$ ), et cause l'émission de l'onde réfléchie. Dans le conducteur parfait, les charges sont mises en mouvement uniquement à la surface du conducteur, puisque l'onde ne pénètre pas dans le milieu.

### II.2 - Relations de passage à l'interface

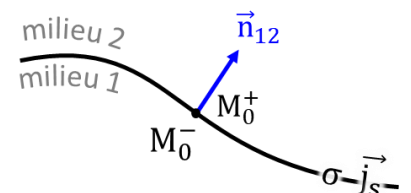
Considérons une interface entre deux milieux (1) et (2), de normale  $\vec{n}_{12}$ , représentée ci-dessous. Les conditions aux limites sont données par les relations de passage déjà constatées sur divers exemples d'électrostatique et de magnétostatique.

#### Relations de passage à une interface (doivent savoir être utilisées, pas retenues)

De part et d'autre d'un point  $M_0$  se trouvant sur l'interface entre deux milieux (1) et (2) :

$$\begin{cases} \vec{E}_2(M_0^+, t) - \vec{E}_1(M_0^-, t) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2(M_0^+, t) - \vec{B}_1(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

Où  $\sigma_s$  et  $\vec{j}_s$  sont la charge et le courant surfacique.



En projetant ces équations sur le vecteur normal et le plan tangent à l'interface, on tire plusieurs observations :

- La composante normale du champ magnétique et les composantes tangentielles du champ électrique sont toujours continues à l'interface entre deux milieux.
- La composante normale du champ électrique peut être discontinue s'il existe une charge surfacique sur l'interface.
- Les composantes tangentielles du champ magnétique peuvent être discontinues s'il existe un courant surfacique à l'interface.

Dans le cas qui nous intéresse ici, où le milieu (1) est le vide, le milieu (2) le conducteur parfait, avec l'interface en  $x = 0$  :

Ce sont ces relations qui vont permettre de déterminer le comportement du métal lorsqu'il est atteint par l'onde incidente.

### II.3 – Expression de l'onde réfléchie

Pour se convaincre de la nécessité de l'existence d'une onde réfléchie, on peut évaluer la discontinuité de l'onde électrique en son absence. En projetant selon  $\vec{e}_y$  la relation de passage sur le champ électrique, on obtient :

Ce qui n'est possible que pour  $E_0 = 0$ . L'existence d'une onde incidente seule est impossible ; on en déduit la nécessité d'une onde réfléchie, dont on peut préciser quelques propriétés sans démonstration :

- Plane progressive harmonique, transverse, de propagation vers  $x < 0$  ;
- De même pulsation que l'onde incidente, et donc de vecteur d'onde identique  $|\vec{k}| = \omega/c$  (puisque le milieu de propagation est identique) ;

On considérera en revanche que la phase de l'onde réfléchie, son amplitude, et la direction de son vecteur polarisation peuvent ne pas être identiques à ceux de l'onde incidente. On admet donc une expression générale de forme :

Il est alors possible d'appliquer de nouveau les relations de passage dans l'espoir d'obtenir des contraintes sur l'onde réfléchie.

#### Démonstration – Expression de l'onde réfléchie sur un conducteur parfait

En appliquant les relations de passage au niveau de l'interface vide-conducteur, déterminer la forme précise de l'onde réfléchie.

#### Expression de l'onde réfléchie sur un conducteur parfait

L'onde réfléchie sur un conducteur parfait est :

- De même polarisation que l'onde incidente ;
- De même amplitude que l'onde incidente ;
- En opposition de phase (signe  $\ominus$  devant le cosinus).

**Remarque :** Dans le cas plus général de la réflexion sur un conducteur ohmique non-parfait (ou même d'une interface entre deux matériaux quelconques) on peut définir un coefficient de réflexion et un coefficient de transmission complexes :

$$\underline{r} = \underline{E}_{0,r} / \underline{E}_{0,i} \quad \underline{t} = \underline{E}_{0,t} / \underline{E}_{0,i}$$

Dans le cas du métal parfait, on a donc  $|\underline{r}| = |-E_0/E_0| = 1$ , et le coefficient de transmission est  $\underline{t} = 0 / \underline{E}_{0,i} = 0$ .

### II.4 – Bilan : structure de l'onde totale (incidente + réfléchie)

Du côté conducteur ( $x > 0$ ), tous les champs sont nuls. Du côté du vide ( $x < 0$ ), l'onde incidente et réfléchie se superposent :

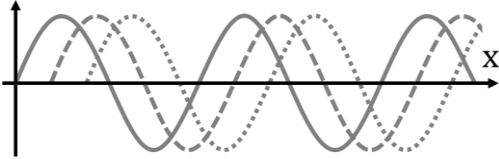

Par la formule  $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ , on a :

L'onde obtenue du côté « vide » prend la forme d'une onde où les composantes  $x$  et  $t$  n'apparaissent pas sous la forme classique ( $x - ct$ ) ou  $(t - x/c)$ . Ce découplage des variables temporelles et spatiales est caractéristique d'une onde stationnaire (qu'il est possible de voir comme la superposition de deux ondes propagatives dans des directions opposées).

#### Onde stationnaire

L'onde totale issue de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi par un conducteur parfait est une **onde stationnaire**.

Rappel concernant les ondes stationnaires :

	Onde progressive	Onde stationnaire
Expression	$\cos(\omega t - kx)$	$\cos(\omega t) \cos(kx)$
Représentation à t fixé		
Propagation	Progression à la célérité c	Pas de propagation : vibration sur place
Perturbation	Chaque point subit la même perturbation à un temps différent	Certains points ne subissent aucune perturbation, certains une perturbation maximale.
Double périodicité	La longueur d'onde $\lambda$ et la fréquence f sont liées par la relation de dispersion $\lambda = c/f$	La longueur d'onde $\lambda$ et la fréquence f sont liées par la relation de dispersion $\lambda = c/f$

### Un exemple pour comprendre - Caractéristiques de l'onde stationnaire

On considère le champ électrique créé par la réflexion d'une OPPH sur un plan conducteur parfait situé en  $x = 0$ . Pour  $x \leq 0$ ,

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

1. Définir les nœuds de vibration, puis déterminer leur position et la distance séparant deux nœuds consécutifs.
2. Faire de même pour les ventres.

## II.5 - Champ magnétique et courants surfaciques

Jusqu'à maintenant, nous n'avons mentionné que le champ électrique. On s'intéresse ici au champ magnétique associé, qu'il faut calculer avec précaution : une onde stationnaire n'est pas une onde progressive ; le champ magnétique ne peut donc pas se calculer à partir de la relation de structure (qui n'a été établie que pour les OPP).

On peut alors l'obtenir de deux manières :

- On décompose l'onde stationnaire en une superposition de deux ondes progressives pour lesquelles la relation de structure est vérifiée (et on somme ensuite les deux champs obtenus).
- On utilise la relation de Maxwell-Faraday, qui est toujours valable.

### Déterminer le champ magnétique à partir de l'onde électrique stationnaire

On considère le champ électrique créé par la réflexion d'une OPPH sur un plan conducteur parfait situé en  $x = 0$ . Pour  $x \leq 0$ ,

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

1. Déterminer le champ magnétique associé via l'équation de Maxwell-Faraday.
2. Déterminer le champ magnétique associé en revenant à la superposition d'ondes progressives.

On obtient une onde stationnaire de champ magnétique très semblable à l'onde stationnaire de champ électrique : les périodes temporelles et spatiales sont identiques, mais l'amplitude diffère, elles **oscillent en quadrature de phase** en temps et en espace (déphasage de  $\pi/2$ ). Cela signifie que les nœuds de  $\vec{E}$  sont les ventres de  $\vec{B}$ , et vice-versa.

Un fois le champ magnétique connu, on peut utiliser la relation de passage afin de déterminer le courant surfacique :

$$\vec{0} - \underbrace{\vec{B}(x=0^-, t)}_{\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(k \cdot 0)} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad \text{i.e.} \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ j_z \\ -j_y \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} j_z = 0 \\ j_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \end{cases}$$

En reprenant l'expression de  $\vec{B}$  établie juste au-dessus, cela donne :  $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$



Globalement, on peut interpréter la réflexion sur le conducteur parfait comme suit : une onde électromagnétique incidente arrive, et cause des courants surfaciques oscillants dans la direction de polarisation du champ électrique. Cette oscillation de courant cause un champ électromagnétique : c'est l'onde réfléchie.

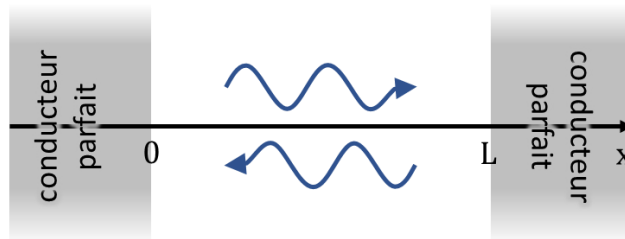
### III - CONFINEMENT ENTRE DEUX CONDUCTEUR

Dans cette partie, on utilise les résultats établis juste avant pour étudier le champ électromagnétique entre deux plans infinis parallèles parfaitement conducteurs. C'est un modèle très grossier permettant une première approche de systèmes réels, comme les caviés LASER, ou les fours à micro-ondes

#### III.1 - Description du système

On considère une cavité formée de deux plans parallèles parfaitement conducteurs en  $x = 0$  et  $x = L$ . On souhaite déterminer la forme générale de toutes les ondes pouvant exister dans la cavité (ce qui implique de ces ondes doivent respecter un ensemble de conditions dans la partie vide, et des conditions aux limites au niveau des conducteurs).

On considère que toutes les grandeurs ne dépendent que de  $x$  et de  $t$ .



Compte-tenu de la partie précédente, sait que les solutions physiquement pertinentes seront stationnaires, et présenteront un nœud de vibration au niveau des conducteurs parfaits (c'est-à-dire en  $x = 0$  et  $x = L$ ). On cherchera directement une solution sous forme d'une onde stationnaire, c'est-à-dire dont les variables d'espace et de temps sont découplées :

On devra préciser les fonctions  $f$  et  $g$  de sorte à ce que ce champ vérifie à la fois l'équation de D'Alembert et les conditions aux limites sur chaque conducteur. Dans le vide, on a montré que l'onde doit

#### III.2 - Équation des champs dans la cavité

##### III.2.A - Résolution par séparation des variables

Lorsqu'on sait que les solutions d'une équation aux dérivées partielles sont des fonctions dans lesquelles les variables sont découplées (comme c'est le cas ici, puisque les ondes sont stationnaires), on peut insérer la forme de solution cherchée directement dans l'équation, et en déduire deux équations différentielles ordinaires portant sur chacune des variables. On peut alors les résoudre séparément.

Puisque l'intérieur de la cavité est vide, le champ électrique vérifie l'équation de D'Alembert :  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

##### Résolution par séparation des variables

Résoudre l'équation de D'Alembert portant sur le champ dans la cavité, par séparation des variables. On ne cherche pas à appliquer les conditions aux limites.

##### III.2.B - Conditions aux limites

**Conditions aux limites :** les deux conducteurs parfaits ont les normales  $\pm \vec{e}_x$ . Puisque  $E_z$  est nul par hypothèse, il reste à imposer la nullité de la composante tangentielle du champ  $E_y$  :

En  $x = 0$  :

En  $x = L$  :

Le vecteur d'onde est « quantifié » : il ne peut prendre que certaines valeurs appartenant à un ensemble discret (ici repérées par un entier  $n$ ). On remarque qu'il n'y a pas de contrainte imposée sur la valeur de  $\psi$  : on pouvait s'y attendre, car modifier la valeur de la phase temporelle à l'origine revient à décaler l'origine des temps, ce qui est toujours possible sans conséquence physique.

### III.3 – Modes propres de la cavité

La contrainte sur  $k$  se traduit simplement en une contrainte sur  $\lambda$  : \_\_\_\_\_

Les ondes pouvant exister dans la cavité sont celles pour lesquelles la longueur de la cavité correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. C'est une condition nécessaire à respecter pour que le champ soit nul au niveau des conducteurs.

#### Onde stationnaire dans une cavité

Les ondes stationnaires confinées dans une cavité de longueur  $L$  doivent vérifier :  $k = \frac{n\pi}{L}$  (soit  $\lambda = \frac{2L}{n}$ )

L'onde indexée par  $n \in \mathbb{N}$ , appelée mode propre d'ordre  $n$  de la cavité, s'écrit :  $\vec{E}_n = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \psi\right) \vec{e}_y$

**Remarque** : on a choisi arbitrairement une polarisation rectiligne selon  $\vec{e}_y$  au début du calcul. On aurait tout aussi bien pu choisir une polarisation rectiligne dans une autre direction parmi le plan  $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , ou même une polarisation non-rectiligne dans ce plan (mais c'est hors-programme).

On représente ci-contre les 5 premiers modes propres de la cavité. On reconnaît les longueurs d'onde  $\lambda = 2L/n$ , donnant :

$$\lambda \in \left\{ 2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{5}, \dots \right\}$$

Les nœuds et les ventres sont espacés d'une distance  $\lambda/2$ .

Le lien ci-dessous mène à la vidéo d'une expérience simple, consistant à placer un ensemble de petites ampoules à néon dans un micro-ondes allumé (sans entrer dans le détail de fonctionnement de ces ampoules, on doit seulement retenir qu'elles émettent de la lumière lorsqu'elles sont soumises à un champ électrique). On peut alors visualiser l'onde stationnaire dans la cavité.

