Programme d'interrogation orale

1. Montrer qu'un conducteur ohmique excité à basse fréquence ($f < 10^{14}$ Hz) peut être considéré localement neutre. Montrer que le courant de déplacement peut y être négligé devant le courant de conduction.
2. Écrire sans démonstration les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité en basse fréquence. En déduire l'équation de propagation pour le champ électrique ou magnétique (les deux questions sont à connaitre).
3. En partant de l'équation de propagation (rappelée par l'interrogateur), établir la relation de dispersion complexe dans un conducteur ohmique. Définir l'épaisseur de peau. En déduire l'expression du champ électrique d'une pseudo-OPPH et l'interpréter physiquement.
4. Considérons un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, sur lequel est envoyé une onde incidente $\underline{\vec{E}}_i = \underline{E_0}\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{e}_y$. Déterminer l'onde réfléchie en la cherchant sous la forme $\underline{\vec{E}}_r = \underline{E_0'}\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{e}_y$. En déduire le coefficient de réflexion en amplitude.
5. Déterminer les solutions de l'équation de d'Alembert à variables séparées s'écrivant sous la forme $\vec{E}(x,t) = f(x)g(t)\,\vec{e}_y$.
6. Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs situés en $x = 0$ et $x = L$. On cherche ses modes propres sous la forme $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)\ \vec{e}_y$. Déterminer les valeurs possibles de k et ψ.

I – PROFONDEUR DE PEAU – ÉNERGÉTIQUE DANS LES MILIEUX OHMIQUES

Exercice 1 – Profondeur de peau	Difficile 1 – Original 1

On considère un conducteur électrique semi-infini, occupant le demi-espace $z > 0$, de conductivité γ et soumis à un champ électrique : $\vec{E} = E_0\, e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z)\,\vec{e}_x$.

1. S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? D'une onde harmonique ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?
2. Écrire le champ $\vec{E}$ en notation complexe. En déduire le champ $\vec{B}$ associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting, puis sa moyenne temporelle. Dans quelle direction est rayonnée l'énergie E.M. ?
4. Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz. Déterminer la puissance par unité de volume cédée par rayonnement dans le conducteur.
5. Établir une autre expression de la puissance cédée aux porteurs de charge partir de la loi d'Ohm locale.
6. À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Données : On rappelle que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Exercice 2 – Bilan de puissance d'un conducteur	Difficile 2 – Original 2

Considérons un conducteur cylindrique de rayon R, infini, d'axe Oz, soumis à un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\vec{e}_z$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur L.

1. Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.
2. Calculer l'intensité traversant le cylindre. En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.
3. Déterminer la puissance dissipée par effet Joule.
4. Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.
5. En déduire le bilan de puissance et le commenter.

II - ONDES DANS DIVERS MILIEUX NON-OHMIQUES

Exercice 3 – Relation de dispersion d'un plasma peu dense	Difficile 3 – Original 1

L'ionosphère qui entoure la Terre peut être modélisée par un plasma peu dense dans lequel les charges mobiles sont à la fois des cations M^+ et des électrons e^-. Lorsque ces charges sont soumises à une onde électromagnétique incidente, du fait de la faiblesse du champ magnétique et du rapport de masse entre les cations et les électrons, on peut considérer que le vecteur densité de courant obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

où n est la densité volumique d'électrons en m^{-3}, e est la charge élémentaire et m la masse d'un électron.

1. En tenant compte de cette relation, établir l'équation de propagation des ondes électriques dans le plasma, en reprenant une démonstration du cours (sachant que le vecteur densité de courant est *a priori* non nul).
2. Établir alors la relation de dispersion d'une OPPH électrique dans le plasma (dans le cadre de l'ARQS).
3. Dans quel cas le vecteur d'onde est-il réel ? complexe ? Dans chaque cas, écrire l'expression du champ électrique réel (en supposant une propagation selon x, et une polarisation selon y).
4. En déduire une contrainte portant sur la pulsation ω pour qu'une OPPH puisse se propager dans le plasma.
5. À quel type de filtre peut-on assimiler le plasma vis-à-vis des ondes électromagnétiques ?

Exercice 4 – Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'eau de mer (oral)	Difficile 2 – Original 2

Une onde électromagnétique se propage dans de l'eau de mer de conductivité électrique σ. On acceptera que dans ce milieu, on doit remplacer le paramètre ϵ_0 des équations de Maxwell par un $\epsilon_0\epsilon_r$, où le coefficient ϵ_r est spécifique au milieu considéré, ici l'eau de mer.

1. Établir l'équation de diffusion d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur, en présence possible de charges.
2. À quelle(s) condition(s) peut-on négliger le courant de déplacement ?
3. Résoudre l'équation de diffusion en négligeant le courant de déplacement.
1. Expliquer pourquoi les sous-marins communiquent avec des ondes très basses fréquences. Quel est l'inconvénient ?

Données : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E}$ (à connaitre) $\quad \sigma \simeq 5\ \mathrm{S.m^{-1}}$ $\quad \epsilon_0\epsilon_r \simeq 80\ \epsilon_0$

Exercice 5 – Transparence des métaux dans l'ultraviolet	Difficile 3 – Original 2

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin, $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$.

1. Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\vec{v}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe :
$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$
Où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.
2. Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.
3. Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$.
4. Établir la relation de dispersion sous la forme $\underline{k}^2 = \omega^2/c^2 - i\mu_0\underline{\gamma}\omega$.
5. En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.
6. À quel domaine du spectre électromagnétique correspond cette transparence ?

Données :

Dans un métal usuel, $\gamma_0 \sim 5 \cdot 10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$ et $\tau = 10^{-14}\ \mathrm{s}$

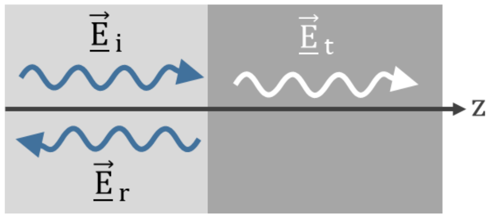
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H.m^{-1}}$

Double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Exercice 6 – Réflexion à l'interface entre deux milieux transparents	Difficile 3 – Original 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier la réflexion d'une onde électromagnétique entre deux milieux isolants parfaitement transparents (verre, eau, plexiglas, etc.) De tels milieux sont appelés milieux diélectriques. La propagation des ondes électromagnétiques y obéit exactement aux mêmes relations que dans le vide, à condition de remplacer la célérité c par c/n où n est l'indice optique du milieu.

Dans un milieu d'indice n_1, on envoie une onde incidente de la forme $\vec{\underline{E}}_i = E_0\, e^{i(\omega t - k_1 x)}\, \vec{e}_x$. En $z = 0$ se trouve une interface avec un milieu d'indice n_2, voir figure ci-contre.



Lorsque l'onde incidente l'atteint, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On cherche les ondes transmise et réfléchie sous la forme :

$$\vec{\underline{E}}_r = \underline{r}\, E_0\, e^{i(\omega t + k_1 z)}\, \vec{e}_x \qquad \vec{\underline{E}}_t = \underline{t}\, E_0\, e^{i(\omega t - k_2 z)}\, \vec{e}_x$$

Les constantes $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont appelées coefficient de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique. Enfin, on donne ci-dessous les relations de passage à l'interface :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, \vec{e}_z \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$$

Avec σ et $\vec{j}_s$ les densités surfaciques de charge de la pulsation et des indices optiques.

1. Exprimer k_1 et k_2 en fonction notamment de la pulsation et des indices optiques.
2. Justifier les expressions des ondes transmise et réfléchie. Quelles les hypothèses permettent de les écrire sous cette forme ?
3. Écrire les relations de passage en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en admettant qu'il n'y a ni charge ni courant de surface.
4. En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction des indices des deux milieux.
5. Exprimer les trois vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis en moyenne temporelle.
6. Par analogie, définir un coefficient de réflexion et de transmission en énergie à l'interface. Les calculer. Que vaut la somme des deux coefficients ? Interpréter physiquement.

III - RÉFLEXION DES ONDES SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT

Exercice 7 – Onde électromagnétique confinée	Difficile 3 – Original 1

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2} \qquad \mu_0\,\vec{j}_s = \vec{n}_{1\to 2} \wedge \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)$$

où σ et $\vec{j}_s$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1. On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_i = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$. Montrer que $\omega = kc$.
2. On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.
3. En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.
4. Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5. Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.
6. Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \text{cte}$?

Exercice 8 – Guide d'onde	Difficile 3 – Original 3

Un guide d'onde est constitué deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = \left(A\, e^{jk_2 x} + B\, e^{-jk_2 x}\right) e^{j(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_z$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{u} \text{ (où } \vec{u} \text{ est le vecteur normal dirigé de 1 vers 2).}$$

1. Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$.
2. Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.
3. Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.
4. En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.
5. Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y.