I - DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT

Particule fluide - Une particule fluide est une portion de fluide mésoscopique de masse constante, qui se déplace et/ou se déforme au gré de l'écoulement (la notion de **taille mésoscopique** a été détaillée dans le chapitre de statique des fluides).

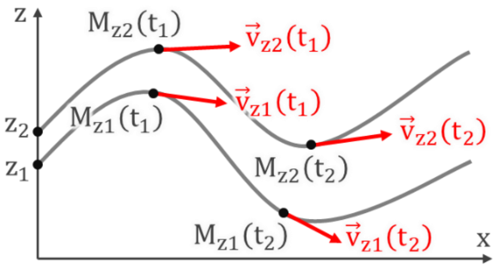
Il est courant de donner à une particule fluide des dimensions infinitésimales liées au système de coordonnées utilisé : $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, $(\mathrm{d}r, r\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)$, ou $(\mathrm{d}r, r\,\mathrm{d}\theta, r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi)$, etc. (dimensions qui changeront *a priori* au cours de l'écoulement).

I.1 - Description lagrangienne et eulérienne

Description lagrangienne du mouvement d'un fluide

Dans l'approche lagrangienne, on indexe les particules fluides par leur position M_0 à un instant $t = 0$, et on décrit le mouvement de chaque particule comme une fonction du temps $M_{M_0}(t) = f(t)$.

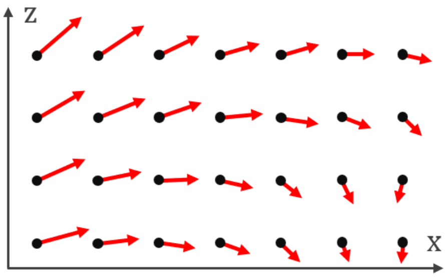
De même, toutes les grandeurs G sont attachées à une particule fluide, et fonction du temps : $G_{M_0}(t)$.



Description eulérienne du mouvement d'un fluide

Dans l'approche eulérienne, on associe un vecteur vitesse à chaque point fixe M du domaine dans lequel le fluide s'écoule. Le vecteur $\vec{v}(M, t)$ représente la vitesse des particules fluides qui passent par M au temps t.

De même, toutes les grandeurs G sont liées à un point fixe de l'espace, et varient dans le temps $G(M, t)$.

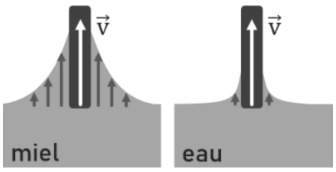


I.2 - Viscosité du fluide

Viscosité η d'un fluide

La viscosité est une grandeur qui renseigne sur la propension d'une particule fluide à communiquer son mouvement aux les particules fluides adjacentes (via les « forces de viscosité »)

Elle est dénotée η et s'exprime en « Poiseuille », Pa. s.



Quelques exemples de valeur de viscosité pour différents fluides :

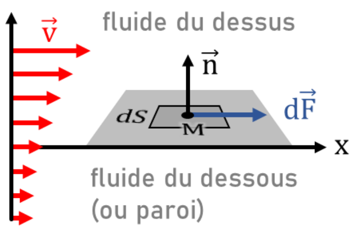
Air (sec, 15°C)	Méthane (P°, 298 K)	Dihydrogène (P°, 298 K)	**Gaz (P°, 298 K)**
$18 \cdot 10^{-6}$ Pa. s	$11 \cdot 10^{-6}$ Pa. s	$9 \cdot 10^{-6}$ Pa. s	**$(10$ à $30) \cdot 10^{-6}$ Pa. s**

Eau	Huiles, pétrole usuel, lubrifiants usuels	**Miel**
$1,0 \cdot 10^{-3}$ Pa. s	**$(20$ à $200) \cdot 10^{-3}$ Pa. s**	**$(1$ à $10)$ Pa. s**

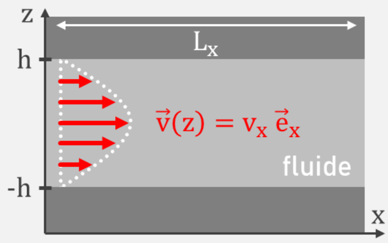
Force visqueuse exercée sur une surface

La force $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ exercée par le fluide du dessus sur le fluide du dessous (ou sur la paroi) au niveau d'une surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ tangente aux vecteurs vitesse est proportionnelle à la dérivée de la vitesse selon la direction de $\vec{n}$ (perpendiculaire à $\mathrm{d}S$), et orientée dans le sens de la vitesse. Dans le cas ci-contre, cela donne :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{dessus/dessous}} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_x \quad \text{(dérivée évaluée en M)}$$



Application classique – Force exercée par un fluide sur des parois



On considère l'écoulement représenté ci-contre, dont la vitesse entre les parois s'écrit :

$$\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad v_x = v_0\left(1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$$

Déterminer la force exercée par le fluide sur la paroi, sachant que la profondeur des parois selon $\vec{e}_y$ est L_y.

On exprime la force sur un élément infinitésimal de surface, d'abord pour la paroi supérieure :

$$d\vec{F}_{\text{fluide/paroi basse}} = \eta\frac{dv}{dz}(z = -h)\,dx\,dy\,\vec{e}_x = \eta\left(-v_0\frac{2z}{h^2}\right)\Big|_{z=-h} dx\,dy\,\vec{e}_x = 2\eta\frac{v_0}{h}dx\,dy\,\vec{e}_x$$

Par symétrie entre le haut et le bas : $d\vec{F}_{\text{fluide / paroi haute}} = 2\eta\frac{v_0}{h}\,dx\,dy\,\vec{e}_x$

Attention : si on veut appliquer la formule générale, il faut dériver par $-z$, et non par z, car on dérive dans le sens de $\vec{n}$, qui est ici vers le bas.

On intègre sur la surface afin d'obtenir la force totale (ce qui est simple puisque dS est constant) :

$$\vec{F}_{\text{fluide/parois}} = \int_{x=0}^{L_x}\int_{y=0}^{L_y} d\vec{F} = \int_{x=0}^{L_x}\int_{y=0}^{L_y}\frac{4\eta v_0}{h}dx\,dy\,\vec{e}_x = \frac{4\eta v_0}{h}L_y L_x\,\vec{e}_x$$

On obtient une force proportionnelle à la viscosité, à la surface de contact $L_y L_x$, et à v_0 (satisfaisant).

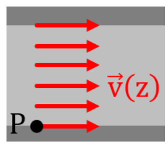
I.3 - Approximation du fluide newtonien, et du fluide parfait

Fluide parfait

Le fluide parfait est un modèle **idéalisé** dans lequel la viscosité est nulle : $\eta = 0$ (**et donc les pertes de charges aussi**)
Cela s'oppose aux fluides réels (ou fluides visqueux), pour lesquels $\eta > 0$.

Fluide parfait au contact d'une paroi

Un fluide parfait peut prendre une vitesse non-nulle à la surface d'une paroi.
Il est donc possible d'avoir un profil de vitesse uniforme dans une conduite.



II - CARACTÉRISTIQUES DES ÉCOULEMENTS STATIONNAIRES EN CONDUITE

II.1 - Écoulement stationnaire dans une conduite

Écoulement stationnaire

Un écoulement est stationnaire (ou en régime permanent) s'il est décrit pas un champ de grandeurs eulériennes stationnaire (vitesse, masse volumique, etc.), c'est-à-dire indépendant un temps.

Attention : il ne faut pas confondre **écoulement stationnaire** et **écoulement à vitesse uniforme**.

Ligne de courant

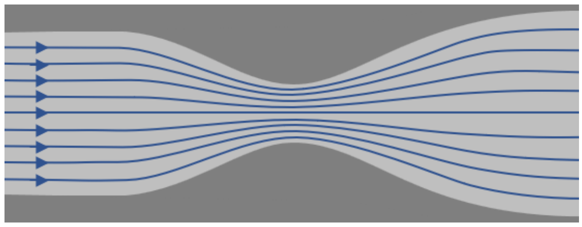
Une ligne de courant d'un écoulement est la représentation d'une courbe qui est **en tout point tangente au champ de vitesse** (et orientée dans le sens de l'écoulement).

Dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont aussi <u>indépendantes du temps</u>, et correspondent aux <u>trajectoires des particules fluides</u>.

Tube de courant

Un tube de courant est le volume défini par l'ensemble des lignes de courant passant par une surface virtuelle dans l'écoulement.

Aucune particule fluide ne rentre ni ne sort d'un tube de courant.

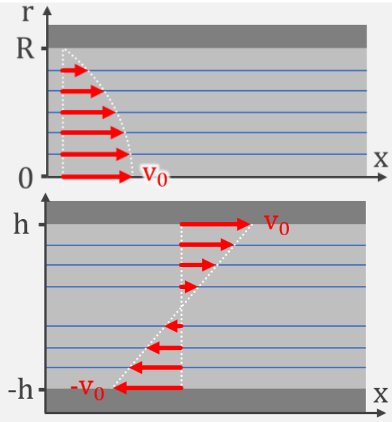


Un exemple pour comprendre - Profil de vitesse et lignes de champ

On considère les deux écoulements rencontrés jusqu'ici :

- Dans une conduite cylindre de rayon R, selon $\vec{e}_z$, la vitesse du fluide est donnée par $\vec{v}(r) = v_0(1-(r/R)^2)\vec{e}_z$;
- Entre deux plans parallèles situés à $z = \pm h$, la vitesse du fluide est donnée par $\vec{v}(z) = v_0\, z/h\ \vec{e}_x$.

1. Pour chaque écoulement, représenter précisément un profil de vitesse sur une section
2. Pour chaque écoulement, représenter quelques lignes de champ.



II.2 - Débit massique et débit volumique

Débit massique et volumique

Le **débit massique D_m** au travers d'une section de surface S est la masse de fluide passant par la section par unité de temps :

Si dm est la masse de fluide qui traverse la section pendant dt, alors : $D_m = \frac{dm}{dt}$ $\quad [D_m] = kg.s^{-1}$

Le **débit volumique D_V** au travers d'une section de surface S est le volume de fluide passant par la section par unité de temps :

Si dV est le volume de fluide qui traverse la section pendant dt, alors : $D_V = \frac{dV}{dt}$ $\quad [D_V] = m^3.s^{-1}$

Débit massique et volumique au travers d'une surface quelconque

Le **débit massique D_m** sur une surface quelconque S s'exprimer comme une intégrale sur tous les points M appartenant à la surface :

$$D_m = \iint_{M\in S} \rho(M)\,\vec{v}(M)\cdot\overrightarrow{dS}(M)$$

Le **débit volumique D_v** sur une surface quelconque S s'exprimer comme une intégrale sur tous les points M appartenant à la surface :

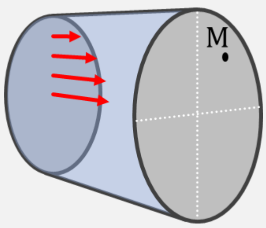
$$D_v = \iint_{M\in S} \vec{v}(M)\cdot\overrightarrow{dS}(M)$$

Un exemple pour comprendre - Calcul d'un débit massique

On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ_0 dans un cylindre de rayon R défini par le champ de vitesse :

$$\vec{v}(r) = v_0(1-(r/R)^2)\,\vec{e}_z$$

Déterminer le débit massique passant par une section de la conduite.



$$D_m = \iint_{M\in S} \underbrace{\rho(M)}_{\rho_0}\,\vec{v}(M)\cdot\overrightarrow{dS}(M) = \rho_0 v_0 \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r\,dr\,d\theta = \dots = \boxed{\frac{\pi}{2}\rho_0 v_0 R^2}$$

Relation entre D_m et D_V

Si la **masse volumique est homogène** dans l'écoulement, c'est-à-dire que $\forall(M,t)$, on a $\rho(M,t) = \rho_0$, alors $D_m = \rho_0 D_V$.

Démonstration très simple : $D_m = \iint_{M\in S} \underbrace{\rho(M)}_{\rho_0}\,\vec{v}(M)\cdot\overrightarrow{dS}(M) = \rho_0 \iint_{M\in S}\vec{v}(M)\cdot\overrightarrow{dS}(M) = \rho_0 D_V$

II.3 - Conservation du débit

II.3.A - Notion de volume de contrôle

Volume de contrôle

Un volume de contrôle est un volume virtuel, délimité par une surface virtuelle fermée, au travers de laquelle on peut compter les grandeurs entrantes ou sortantes (masse, volume, énergie, etc.)

II.3.B - Conservation du débit

Conservation du débit

Dans un écoulement **stationnaire** dans une conduite, **le débit massique D_m est conservé** : sa valeur est identique dans chaque section, quelle que soit sa forme ou sa surface.

Cela n'est vrai pour le débit volumique D_V **que** si la masse volumique du fluide est **uniforme** dans l'écoulement.

III - CARACTÉRISTIQUES DES CHAMPS DE VITESSE AU SEIN D'UN ÉCOULEMENT

III.1 - Divergence et rotationnel

Divergence d'un champ vectoriel - La divergence est un opérateur qui s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et renvoie un champ scalaire $\mathrm{div}(\vec{A})$. En **coordonnées cartésiennes**, il s'exprime :

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergence d'un champ de vitesse

En tout point d'un écoulement incompressible, la divergence du champ de vitesse est nulle : $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

Rotationnel d'un champ vectoriel - Le rotationnel est un opérateur qui s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$ et renvoie un champ vectoriel $\mathrm{rot}(\vec{A})$.

En **coordonnées cartésiennes**, il s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Rotationnel d'un champ de vitesse

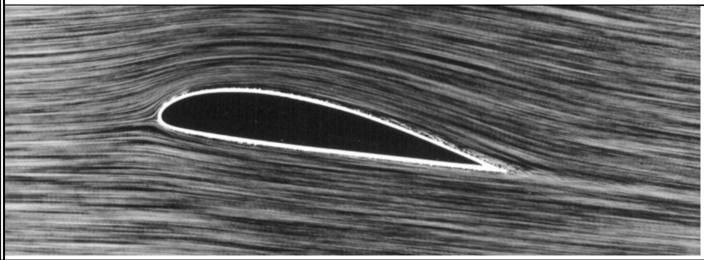
Un écoulement dans lequel le rotationnel est un vecteur nul en chaque point est appelé **« écoulement irrotationnel »**

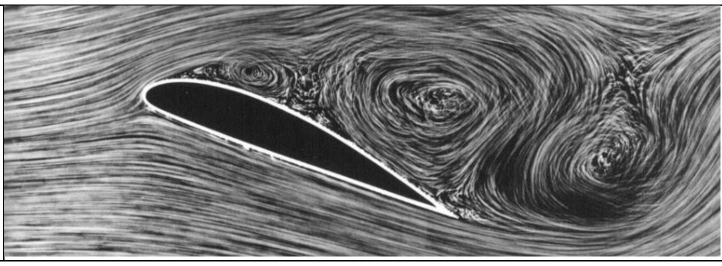
III.2 - Écoulement laminaire, écoulement turbulent

Écoulement laminaire et turbulent

Un écoulement est dit **laminaire** lorsque les particules fluides se déplacent de manière suffisamment **ordonnée et régulière**, en couches qui se mélangent peu.

Un écoulement est dit **turbulent** lorsque les particules fluides se déplacent de manière **désordonnée et instable**, ou il n'est plus possible de définir des couches, et où des tourbillons apparaissent.





Nombre de Reynolds dans une conduite

Le nombre de Reynolds est défini par $\mathrm{Re} = \frac{V\,L\,\rho}{\eta}$

où V est la vitesse caractéristique du fluide, L est la largeur de la conduite, ρ et η la masse volumique et la viscosité du fluide.

Les faibles nombres de Reynolds ($\ll 10^3$) sont signes d'écoulements laminaires, alors que les hautes valeurs ($\gg 10^3$) sont plutôt signe d'écoulement turbulents (la valeur charnière est souvent prise à 2000, mais ce n'est absolument pas précis).

IV - RELATION DE BERNOULLI

Relation de Bernoulli généralisée dans une conduite (avec les grandeurs massiques)

Dans un écoulement stationnaire en conduite, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\left(\frac{P_s}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_s^2 + g\,z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_e^2 + g\,z_e\right) = w_i + w_{visc}$$

Où w_i et w_{visc} sont les travaux massiques indiqués et visqueux (par **<u>unité de masse traversant</u>** la conduite, algébriquement reçues par le volume de contrôle).

Relation de Bernoulli généralisée dans une conduite (avec le débit massique)

Dans un écoulement stationnaire en conduite, de débit massique D_m, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$D_m\left[\left(\frac{P_s}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_s^2 + g\,z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_e^2 + g\,z_e\right)\right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{visc}$$

Où $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_{visc}$ sont les puissances algébriques indiquées et visqueuses (algébriquement reçues par le volume de contrôle).

Un raisonnement très similaire au précédent, réalisé sur chaque masse entrante $\delta m_{e,i}$ et sortante $\delta m_{s,i}$, permet de généraliser la relation de Bernoulli :

$$\sum_{\substack{\text{entrées}\\ i}} D_{m,i}\left(\frac{P_i}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_i^2 + g\,z_i\right) - \sum_{\substack{\text{sorties}\\ j}} D_{m,j}\left(\frac{P_j}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_j^2 + g\,z_j\right) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{visc}$$

IV.1 - Relations de Bernoulli particulières

Relation de Bernoulli dans un écoulement parfait dans une conduite, sans travail indiqué

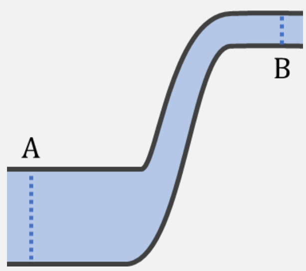
Dans un écoulement d'un fluide parfait, incompressible, en régime stationnaire, dans une conduite, on a :

$$\left(\frac{P_s}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_s^2 + g\,z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_e^2 + g\,z_e\right) = 0$$

La quantité $\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2}v^2 + g\,z$ est parfois appelée « **charge hydraulique** » qui s'exprime en $\mathrm{J.kg^{-1}}$. On peut donc dire que *la charge hydraulique est conservée* entre deux sections de la conduite.

Un exemple pour comprendre – Relation de Bernoulli

On considère une arrivée d'eau d'immeuble horizontale dans laquelle circule de l'eau (considérée incompressible) avec le débit $D_v = 0{,}5\ \mathrm{L.s^{-1}}$. Pour alimenter un étage de l'immeuble, la conduite s'élève d'une hauteur $h \simeq 3\ \mathrm{m}$, et sa section passe d'une surface $S_A = 50\ \mathrm{cm^2}$ à $S_B = 10\ \mathrm{cm^2}$.



1. Question préliminaire : déterminer la vitesse de l'eau en A et B.
2. L'arrivée d'eau est alimentée par une pompe capable de donner une pression $P_A = 10$ bar à l'eau en bas de l'arrivée d'eau. Déterminer l'expression de la pression en B.
3. Déterminer la hauteur maximale permettant de faire couler l'eau hors du tuyau en B.

Sauf mention contraire, on suppose que la vitesse est uniforme sur la section en A et B. Le débit s'exprime aux deux endroits :

$$D_v = v_A S_A = v_B S_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_A = \frac{D_V}{S_A}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3.s^{-1}}}{50 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = \boxed{0{,}1\ \mathrm{m.s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \frac{D_V}{S_B}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} \simeq \boxed{0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

Sauf mention contraire, fluide parfait. Relation de Bernoulli, en prenant $z_A = 0$:

$$\left(\frac{P_B}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_B^2 + g\,z_B\right) - \left(\frac{P_A}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_A^2 + g\,z_A\right) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{P_B}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{D_V}{S_B}\right)^2 + g\,h\right) - \left(\frac{P_A}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{D_V}{S_A}\right)^2\right) = 0$$

$$P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{D_V}{S_A}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{D_V}{S_B}\right)^2 - \rho_0 g h \quad \text{i.e.} \quad \boxed{P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho_0 D_V^2\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right) - \rho_0 g h}$$

$$P_B \simeq 10 \cdot 10^5 + \frac{1}{2}10^3 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2\left(\frac{1}{(50 \cdot 10^{-4})^2} - \frac{1}{(10 \cdot 10^{-4})^2}\right) - 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \simeq \boxed{970\,450\ \mathrm{Pa}} \simeq 9{,}7\ \mathrm{bar}$$

À la hauteur H, l'eau peut sortir du robinet si $P_B > P_0$, c'est-à-dire :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_0 D_V^2\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right) - \rho_0 g H > P_0 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{H < \frac{P_A}{\rho_0 g} - \frac{P_0}{\rho_0 g} + \frac{D_V^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right)} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{H < 92\ \mathrm{m}}$$

IV.2 - Pertes de charge hydraulique

Pertes de charge hydraulique (ou simplement « pertes de charge »)

Une perte de charge est une diminution de la « charge hydraulique » $\left(\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)$ d'un fluide circulant dans une conduite.

Ce phénomène est dû à la viscosité du fluide. Dans une conduite, il peut se manifester par une chute de pression le long de l'écoulement, une chute de hauteur, ou une chute de vitesse.

La manière dont on inclut les pertes de charges à la relation de Bernoulli est détaillée en TD

IV.2.A - Pertes de charge régulières

Pertes de charge « régulières »

Les pertes de charges dites **« régulières »** sont liées à l'interaction entre le fluide et la paroi d'une **conduite rectiligne**.
Elles sont proportionnelles à la longueur du tuyau, et dépendent de la vitesse du fluide (et de la rugosité des parois).
Ces pertes de charges peuvent être évaluées grâce à un diagramme de Moody.

IV.2.B - Pertes de charge singulières

Pertes de charge « singulières »

Les pertes de charges dites **« singulières »** sont liées à l'interaction entre le fluide et une irrégularité dans la conduite (un rétrécissement, un coude, un obstacle, etc.)

Les irrégularités susceptibles de causer ces pertes de charge incluent les variations de section, les obstacles, les coudes, etc. (plus généralement, toute caractéristique faisant que la section n'est pas rectiligne et de section constante).

Ces pertes de charges ont été déterminées pour une grade variétés d'irrégularités : il existe des formules pour les coudes plus ou moins anguleux, pour des diminutions de sections plus ou moins abruptes, etc.