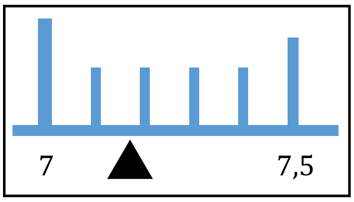
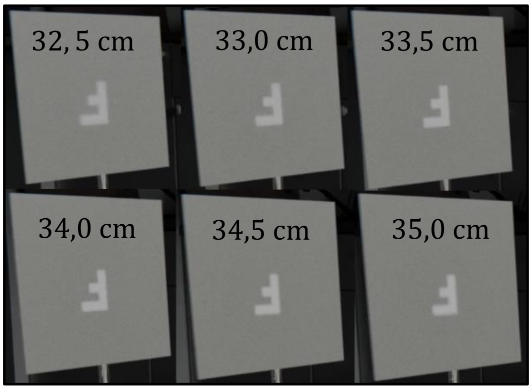
L'ÉVALUATION DE TYPE B – Évaluation de l'incertitude par une autre manière que celle de type A

Plusieurs exemples courants :

- Lorsqu'on utilise avec un **appareil de mesure** : la notice contient des informations concernant le précision des mesures réalisées avec l'appareil. Par exemple, la notice d'un voltmètre pourra préciser que sue le calibre 200 V, l'incertitude-type d'une mesure est de (1,0% de la mesure $\pm$ 1 digit). Cela signifie que si on lit sur l'appareil la valeur 96,6 V, alors l'incertitude-type est $\frac{1,0}{100} \times 96,6 + 0,1 \simeq 1,1$ V. On pourra donc noter la tension U mesurée comme $\mathrm{U} = (96,6 \pm 1,1)$ V.



- Lorsqu'on utilise une **graduation** : la limite de l'objet mesuré arrive le plus souvent entre deux graduations. Il est d'usage de choisir la graduation la plus proche, et de de prendre une incertitude-type de plus ou moins une graduation (ou une demi-graduation). Pour l'exemple affiché ci-contre, cela donnerait une longueur de $(7,2 \pm 0,1)$ cm, ou alors $(7,2 \pm 0,05)$ cm. Il est possible, si on préfère, d'évaluer grossièrement la position précise de la valeur, même si aucune graduation ne permet de le faire. Cela donnerait ici par exemple $(7,17 \pm 0,05)$ cm.



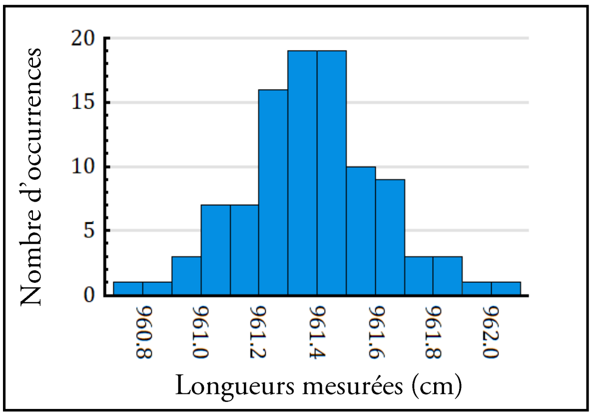
- Lorsqu'on utilise une **capacité humaine** : la précision des mesures physiques ne dépendent pas seulement des appareils. Imaginons par exemple vouloir mesurer la distance focale d'une lentille en réalisant l'image d'un objet situé à l'infini. Il est nécessaire de placer l'écran à la distance de la lentille qui permet la formation de l'image la plus nette. Mais cette évaluation se fait « à l'œil », et dépend entièrement de notre capacité à évaluer la netteté d'une image. Il est alors nécessaire de s'interroger personnellement pour fournir une incertitude-type qui semble correspondre à une plage de valeurs acceptables. Par exemple, dans l'exemple ci-contre, il est difficile de dire quelle distance lentille-écran donne l'image le plus nette. On pourra donc donner $\mathrm{d} = (34 \pm 1)$ cm. Ici, ce n'est pas l'incertitude due à la graduation qui domine, mais celle due à notre vision.

Remarque : L'évaluation des incertitudes est un processus subtil qui demande parfois un certain sens physique. Dans de nombreux cas, c'est un **processus personnel** qui dépend de l'acuité de vos propres sens, et de votre connaissance des facteurs d'influence. Par exemple, un myope n'aura pas les mêmes incertitudes qu'une personne dont la vision est normale ; l'important est d'être **honnête et réaliste** dans la certitude que l'on prête à nos résultats.

ÉVALUATION DES INCERTITUDES – TYPE A VS TYPE B

Imaginons la situation suivante : on souhaite mesurer la longueur d'une fibre optique avec un long mètre ruban de 10 m, et on souhaite obtenir l'incertitude-type associée à la mesure.

On choisit d'abord de faire une évaluation de type A : on va donc faire plusieurs fois la mesure (éventuellement demander à plusieurs personnes de faire la mesure). Après 100 mesurages, on obtient un ensemble de valeurs qu'on représente dans l'histogramme ci-après.



La valeur moyenne des mesures est $\mathrm{L} \simeq 961,4$ cm, et l'écart-type de la distribution est $\sigma \simeq 0,2$ cm. On pourrait donc penser qu'il est raisonnable de donner le résultat suivant :

$$\mathrm{L} = (961,4 + 0,2) \text{ cm}$$

Problème : la valeur réelle de la longueur de la fibre optique est de 961,9 cm, ce qui est très en dehors de la plage de valeurs jugées acceptables.

Que s'est-il donc passé ?

L'erreur vient du fait que les incertitudes n'ont été évaluées qu'avec le **type A**, qui ne permet pas de repérer les **erreurs systématiques**. Le mètre ruban est composé d'un un alliage métallique dont la longueur varie quelque peu avec la température (alors que la longueur de la fibre optique, en verre, est quasi-insensible à la température). Une mesure faite à 35°C pourra être sensiblement différente d'une mesure faite à 15°C. La température est donc un **facteur d'influence** à prendre en compte dans **l'évaluation de type B**, puisqu'elle cause une **erreur systématique** qu'on ne discerne pas avec le type A. Il convient donc de prendre des précautions supplémentaires : on choisit d'augmenter la valeur de l'incertitude associée à la mesure.

De combien faut-il l'augmenter ? Cela dépend des informations auxquelles on a accès : en l'absence de précisions sur le métal et sur la température exacte du laboratoire, il convient de faire une supposition prudente mais raisonnable sur l'ordre de grandeur de la variation de longueur du métal. Ici, ajouter $\pm 0,5$ cm à l'incertitude-type semble raisonnable. Avec une évaluation de type A et B, on pourrait donc écrire : $\mathrm{L} = (961,4 \pm 0,7)$ cm, ce qui est désormais compatible avec la valeur vraie donnée plus haut.

Ici, l'évaluation de type B ne permet pas de rendre la mesure plus précise, mais dévoile une source d'imprécision qu'on doit alors prendre en compte dans la valeur de l'incertitude-type. **Être imprécis est tolérable si on s'en aperçoit.**

INCERTITUDES DE MESURE, PROPAGATION DES INCERTITUDES

PROPAGATION DES INCERTITUDES – Exemple de la mesure de $\vec{g}$

Dans une expérience de physique, il est rare que le résultat de la mesure soit la grandeur recherchée. Par exemple, si on veut déterminer l'accélération de la pesanteur g en mesurant la période d'oscillation d'un pendule, on utilise la formule :

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

où T est la période du pendule et L sa longueur. Déterminer g demande donc une mesure de L et de T, qui toutes deux auront une incertitude associée. On conçoit que plus la mesure de L et T est incertaine, plus la valeur de g le sera. Mais comment déterminer exactement la valeur de l'incertitude type sur g connaissant celle sur L et T ?

Par exemple, en ayant mesuré, pour un pendule : simple $T = (T_0 \pm \Delta T)$ et $L = (L_0 \pm \Delta L)$, comme trouver la valeur de Δg, l'incertitude g ? **Rappel** : les incertitudes-types sont souvent notées ΔX en physique, et correspondent à l'écart-type σ_X de la distribution de valeurs raisonnablement assignables à X).

Connaissant les incertitudes-types des mesures d'un ensemble de grandeurs $(X_1, \dots, X_n)$, il est possible de connaitre l'incertitude-type associée à une nouvelle grandeur $Y = a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$. Elle est donnée par :

$$\Delta Y = \sqrt{a_1^2(\Delta X_1)^2 + \cdots + a_n^2(\Delta X_n)^2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction $g(L, T)$ n'est pas linéaire en T ou en L. On fait donc l'approximation suivante : on linéarise la fonction $g(L, T)$ autour des valeurs mesurées de L et T (appelées L_0 et T_0) :

$$g(L,T) \simeq \underbrace{g(L_0,T_0)}_{\text{cste } g_0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial L}(L_0,T_0)}_{\text{cste}} \cdot (L - L_0) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial T}(L_0,T_0)}_{\text{cste}} \cdot (T - T_0)$$

Ainsi, on se retrouve dans le cas où la grandeur à calculer (g) est bien une fonction affine des grandeurs mesurées (L et T). On peut alors affirmer que :

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}(L_0,T_0)\right)^2 (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}(L_0,T_0)\right)^2 (\Delta T)^2}$$

On peut donc conclure $\boxed{g = (g_0 \pm \sigma_g)\ \mathrm{m.s^{-2}}}$. On a bien obtenu une évaluation de l'incertitude-type sur g à partir des incertitudes-types sur L et T.

Exemple d'application : On a mesuré une période d'oscillation $T = (2{,}3 \pm 0{,}1)\ \mathrm{s}$ pour un pendule de longueur $L = (1{,}23 \pm 0{,}005)\ \mathrm{m}$. Pour appliquer la formule ci-dessus, on doit évaluer :

$$g(L_0,T_0) = \frac{4\pi^2 L_0}{T_0^2} = 9{,}18 \qquad \frac{\partial g}{\partial L}(L_0,T_0) = \frac{4\pi^2}{T_0^2} = 2{,}38 \qquad \frac{\partial g}{\partial T}(L_0,T_0) = -\frac{8\pi^2 L_0}{T_0^3} = -7{,}98$$

On peut alors évaluer l'incertitude-type sur g :

$$\sigma_g = \Delta g = \sqrt{2{,}38^2\ (0{,}005)^2 + 7{,}98^2\ (0{,}1)^2} \simeq 0{,}80$$

On écrit alors le résultat sous forme :

$$g = (9{,}18 \pm 0{,}80)\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Remarque : comme on a dû faire un développement limité à l'ordre 1 lors de ce processus, la valeur de σ_g est (très) approximative. Pour cela, on a coutume de ne jamais l'écrire avec plus d'un chiffre significatif pour l'incertitude, et on arrondit le résultat à la même précision (le même nombre de chiffres significatifs). On écrira donc préférablement :

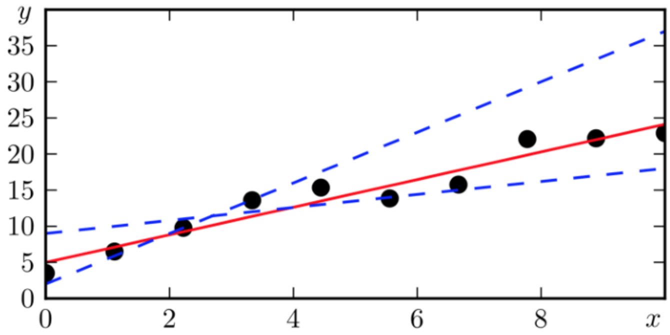
$$\boxed{g = (9{,}2 \pm 0{,}8)\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

PROPAGATION DES INCERTITUDES – Bilan

Si on souhaite connaitre l'incertitude associée à la grandeur $F(X_1, X_2, \dots)$ à partir des mesures et incertitudes mesurées sur les X_i, on peut appliquer la formule suivante :

$$\Delta F \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1,X_2)\right)^2 (\Delta X_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}(X_1,X_2)\right)^2 (\Delta X_2)^2 + \cdots}$$

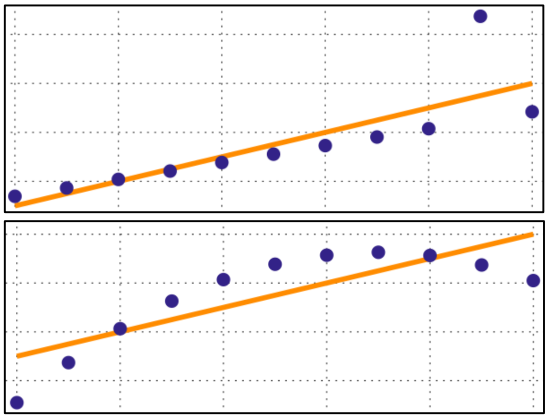
RÉGRESSION LINÉAIRE



Imaginons qu'un modèle théorique prédise que deux grandeurs physiques x et y sont reliées par une loi s'écrivant mathématiquement sous la forme $y = f(x)$. Plus spécifiquement, on se limitera au cas où la fonction f est de forme :

$$y = f(x) = ax + b$$

Dans de nombreux cas en physique, il est possible de déterminer expérimentalement en ensemble de valeurs pour x et y, dans l'objectif de déterminer au mieux les paramètres a et b.

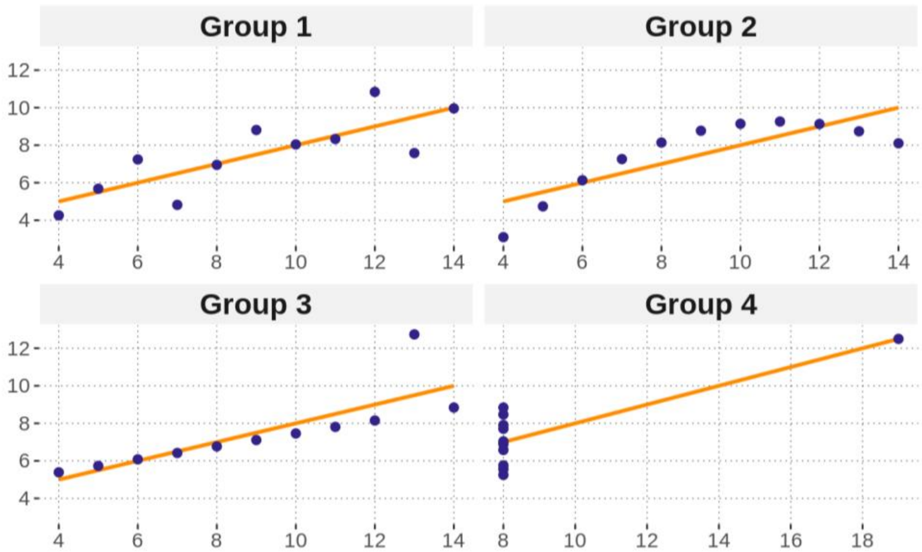


Le premier réflexe doit immédiatement être d'obtenir une représentation graphique des données : c'est souvent la seule manière fiable se déceler un grossière erreur de mesure, un modèle inadapté, etc.

- Sur l'exemple de droite (image du haut), on voit qu'il existe très certainement une erreur dans la mesure, ou dans l'écriture d'un des points.
- Sur l'image du bas, on voit qu'il n'est probablement pas pertinent de modéliser la dépendance x, y par une relation linéaire : une relation parabolique semblerait bien plus adaptés.

Cette représentation graphique peut être réalisée sur le logiciel Regressi en TP, mais également sur votre calculatrice scientifique, ou n'importe quel logiciel de traitement de données (mais Excel et LibreOffice sont à éviter).

Une fois les données rentrées dans un logiciel, et la courbe tracée, il est possible de d'appliquer divers algorithmes permettant de déterminer la valeur la plus probable des coefficients a et b. Attention ! Le logiciel renverra des valeurs quelles que soient les données, quand bien même celles-ci ne seraient absolument pas alignées sur une droite. La quantification de l'accord entre les points expérimentaux et le modèle mathématique $y = ax + b$ est parfois réalisée au moyens du « coefficient de corrélation », noté r : plus celui-ci est proche de 1, plus l'accord est censé être bon.



Cela dit, il ne faut en aucun cas se fier aveuglément à ce paramètre, puisqu'un coefficient de corrélation unique peut cacher une multitude de situations.

Par exemple, le *quartet d'Anscombe* est constitué de quatre ensembles de données qui ont les mêmes propriétés statistiques simples (moyennes, écarts types, équation de la régression linéaire, **coefficient de corrélation** linéaire). On peut voir les quatre situations ci-contre.

Lorsqu'on trace les points mesurés et les modèles $y = ax + b$, on réalise à quel point certains cas sont pathologiques : seul le premier cas pourrait être accepté en tant que régression linéaire valable.

Remarque : dans la plupart des logiciels, il est possible d'associer des incertitudes aux points expérimentaux à tracer. Cela permet au logiciel de préciser les incertitudes sur les paramètre a et b. Dans ce cas, on pourra aussi vérifier, une fois la droite tracée, qu'elle n'est pas trop éloignée des barres d'erreurs associées à chaque point de mesure.

RÉGRESSION LINÉAIRE – Cas des relations non-affine

On a dit plus haut qu'on s'intéressait uniquement aux relations affines entre une variable X et Y, ce qui peut sembler extrêmement restrictif (très peu de relations physique intéressantes sont affines). En réalité, il est simplement possible de se ramener à des régressions linéaires (sur les modèles affines $y = ax + b$), même dans des cas plus complexes.

Par exemple, si on souhaite mesurer une résistance R via une mesure de la puissance dissipée $\mathcal{P}$ et l'intensité i, en utilisant la relation $\mathcal{P} = R\,i^2$. Il suffit alors de tracer $\mathcal{P}$ en fonction de i^2, pour se ramener à une dépendance linéaire entre deux grandeurs, et donc appliquer une régression linéaire pour trouver R.

On retiendra qu'il est très souvent possible de réarranger les relation entre X et Y pour appliquer une régression linéaire.

INCERTITUDES DE MESURE, PROPAGATION DES INCERTITUDES

APPLICATION 1

Écrire correctement les résultats de mesure ci-dessous (en portant attention aux chiffres significatifs) :

Incorrect	$\lambda \simeq 589{,}0 \pm 0{,}2$ nm	$\Delta t \simeq 0{,}473 \pm 0{,}122$ s	$V \simeq 14 \pm 0{,}1$ mL
Correct			

APPLICATION 2

On a mesuré les valeurs de X et T :

$$X = X_0 \pm \Delta X \simeq (12 \pm 2)\ \text{nm} \qquad \text{et} \qquad T = (T_0 \pm \Delta T) \simeq (0{,}49 \pm 0{,}08)\ \text{s}$$

Déterminer approximativement l'expression, puis la valeur numérique de l'incertitude ΔG associée à la grandeur :

$$G(X, T) = \frac{X^\alpha}{T^\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{N})$$

Le résultat de cette question est celui qui est au programme : on doit savoir sans hésitation retrouver (ou connaitre) la formule de propagation des incertitudes pour les relations de cette forme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.