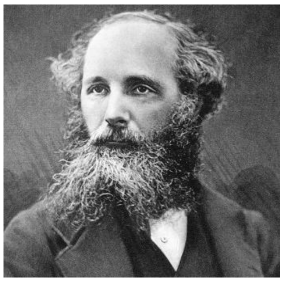
Équations de Maxwell

Dans un espace contenant une densité de charges $\rho(M)$, et une densité de courant $\vec{j}(M)$, les champs vectoriels $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ vérifient les quatre équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss	Maxwell-Thompson	Maxwell-Faraday	Maxwell-Ampère
$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



Champs électriques et magnétiques :
$\vec{E}$: vecteur champ électrique $(\mathrm{V.m^{-1}})$
$\vec{B}$: vecteur champ magnétique (T)

Sources de champs :
ρ : densité de charge $(\mathrm{C.m^{-3}})$
$\vec{j}$: vecteur densité de courant $(\mathrm{A.m^{-2}})$

Constantes :
ϵ_0 : permittivité du vide $(8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}})$
μ_0 : perméabilité du vide $(1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T.m.A^{-1}})$

Ces quatre équations seront abordées progressivement, au cours des prochains chapitres d'électromagnétisme. Dans ce chapitre on aborde le champ électrique $\vec{E}$ dans les cas statiques, dans lesquels son expression est uniquement liée à la répartition de charge électrique ρ (on appellera donc $\vec{E}$ le « champ électrostatique »).

TABLE DES MATIERES

I - DISTRIBUTION DE CHARGES ÉLECTRIQUES

I.1 - Rappel de propriétés fondamentales

La charge, mesurée en Coulomb, est une propriété fondamentale des particules qui composent la matière et les rayonnements : chaque particule (électron, proton, neutron, etc.) possède une charge nulle, positive ou négative, dans tous les cas multiple de la charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C[1]. Dans les cas abordés cette année, la charge sera toujours portée par des électrons $(q = -e)$, des protons $(q = +e)$ (ou bien des cations et des anions, de charge $\pm e$, $\pm 2e$ ou $\pm 3e$).

La charge est une grandeur :

- **Additive** : si les systèmes S_1 et S_2 ont respectivement une charge q_1 et q_2, alors le système $S_1 \cup S_2$ a la charge $q_1 + q_2$;
- **Conservative**[2] : dans un volume de contrôle, la charge peut entrer ou sortir, mais ne peut varier spontanément.

En règle générale, la matière étant constituée d'atomes contenant un nombre égal de protons et de neutrons, elle est globalement neutre à l'échelle macroscopique. Il est toutefois possible d'induire un excès ou un défaut d'électrons dans un échantillon

[1] Cette règle souffre une exception partielle : les quarks up et down, qui constituent les protons et les neutrons, ont une charge de $2e/3$ et $-e/3$. Cela dit, ils ne peuvent jamais intervenir de manière isolée, et se retrouvent toujours liés pour former des particules composites dont la charge est bien un multiple de e.

[2] Cette propriété n'est pas une évidence, puisque la nature elle-même des particules n'est pas conservée. Par exemple, un photon (non-chargé) peut tout à fait se transformer en un électron et un positron : la charge est conservée, sans que le nombre ou la nature des particules ne le soient.

macroscopique, par exemple en frottant certains matériaux entre eux (comme dans la démonstration classique du barreau d'ébonite frotté par un peau de chat, ou simplement à l'intérieur les armatures d'un condensateur chargé).

Exemple - Ordres de grandeurs concernant les charges électriques

Un condensateur, de capacité $C = 100$ nF, est chargé, soumis à une tension de 5 V. Déterminer la charge de chaque armature, et le nombre d'électrons en défaut/excès dans chaque armature.

I.2 - Densité/distribution volumique, surfacique, linéique

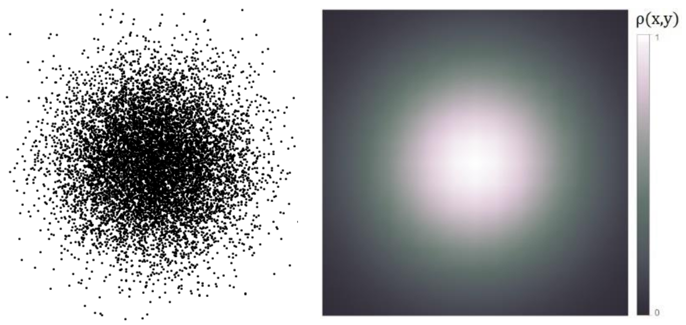
I.2.A - Distribution volumique

Puisque les porteurs de charge sont des particules ponctuelles, on pourrait décrire les distributions de charge comme une somme de charges individuelles. Cela dit, il est bien plus fructueux de décrire les distributions de charge sous forme d'une fonction continue de l'espace basée sur des moyennes à l'échelle mésoscopique.

Densité volumique de charge / Charge volumique

Un ensemble de charges électriques est décrit par la densité volumique de charge, ou la charge volumique ρ.

La charge $dQ(M)$ contenue dans un volume mésoscopique $dV(M)$ autour du point M est, par définition :

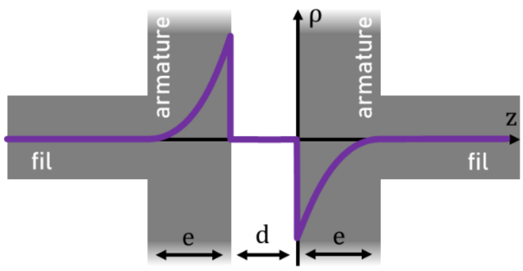


Tous les raisonnements établis concernant l'intégration de quantités définies localement sont valables dans le cas des distributions volumiques de charges : on peut intégrer la charge volumique sur un certain volume pour obtenir la charge totale (après avoir particularisé l'expression de dV dans un certain système de coordonnées).

Exemple – Charge stockée dans l'armature d'un condensateur

Un condensateur à air est constitué de deux armatures planes d'épaisseur e séparées d'une distance d. Au sein d'une armature, la densité volumique de charge décroît exponentiellement avec une distance caractéristique $\delta \ll e$. Ainsi, pour l'armature chargée négativement $(0 < z < e)$:

$$\rho(z) = -\rho_0 \exp(-z/\delta)$$



1. Sachant que les armatures ont une surface S_a, déterminer la charge contenue dans une armature.

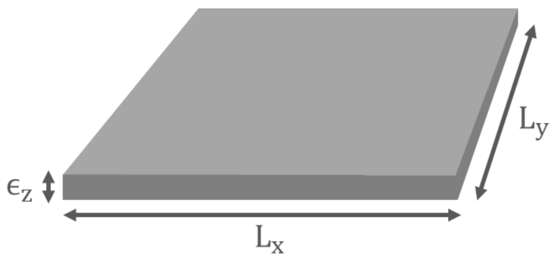
I.2.B - Distribution surfacique et linéique

Bien que les distributions de charges soient toujours volumiques, il arrive qu'une ou deux des dimensions de la distribution soit suffisamment réduite(s) pour qu'il soit pertinent de considérer des distributions surfaciques ou linéiques.

Densité surfacique de charge / Charge surfacique

Si l'une des dimensions est de taille négligeable par rapport aux deux autres, un ensemble de charges électriques est décrite par la densité surfacique de charge, ou la charge surfacique σ.

La charge $dQ(M)$ contenue dans une surface mésoscopique $dS(M)$ autour du point M est, par définition :

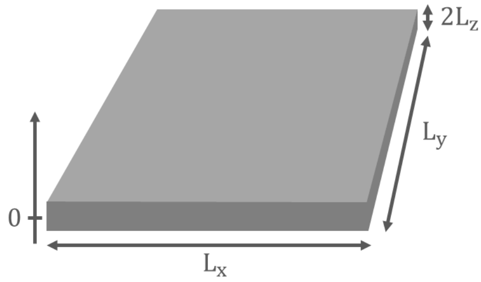


Un exemple pour comprendre : passer d'une charge volumique à surfacique

La plaque affichée ci-contre possède une densité volumique de charge

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 \left(1 - \left(\frac{z}{L_z}\right)^2\right) \cdot f(x,y)$$

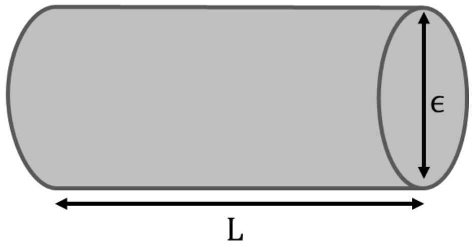
1. Exprimer la densité surfacique σ correspondante.
2. Exprimer alors la charge totale de la surface lunaire.



Densité linéique de charge / Charge linéique

Si une seule des dimensions d'un corps n'est pas négligeable, un ensemble de charges électriques est décrite par la densité linéique de charge, ou la charge linéique λ.

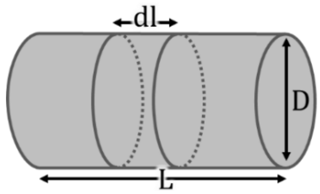
La charge $dQ(M)$ contenue dans une longueur mésoscopique $dl(M)$ autour du point M est, par définition :



Un exemple pour comprendre – Passer d'une charge volumique à linéique

Un câble de diamètre D est chargé par une densité volumique de charge ρ homogène.

1. Déterminer sa charge linéique λ.
2. Exprimer alors la charge totale du fil.
3. Dans quel cas est-il pertinent d'adopter une description linéique de la charge ?



Si décrire une distribution de charge par une grandeur volumique est toujours possible, il n'est pas toujours simple de déterminer les cas où il est pertinent d'utiliser une densité de charge surfacique ou linéique. Cela dépend du type de problème, de la taille des objets chargés mis en jeu, de la distance à laquelle on s'intéresse aux champs créés par les charges, etc.

En première approximation, on pourra tout de même dire qu'il est nécessaire qu'une des dimensions d'un objet chargé doit être « petite » par rapport aux autres si on souhaite passer d'une description volumique à surfacique, ou linéique.

I.3 - Force de Coulomb et force de Lorentz

On connait déjà l'expression de la force exercée par une charge ponctuelle sur une chargée située à proximité : la force de Coulomb.

Force de Coulomb (rappel)

Une particule en A de chaque q_A exerce sur une particule en B de charge q_B la force de Coulomb :

Avec $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ la permittivité (diélectrique) du vide. Si la particule A est à l'origine d'un repère sphérique, l'expression devient :

Remarque : L'additivité des forces permet d'affirmer que la force créée par plusieurs particules $A_1, \dots A_n$ sur une particule B est simplement la somme vectorielle des forces individuellement exercées par chaque particule :

$$\vec{F}_{(A_1,\dots,A_n)\to B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{A_i \to B} = q_B \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_{A_i}}{A_i B^2}\, \vec{u}_{A_i B}$$

Parallèlement, on connait l'expression de la force subie par une particule plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$:

Force de Lorentz (rappel)

Une particule de charge q dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ subit la force de Lorentz : ______________________

Ce qui se simplifie en $\vec{F} = q\vec{E}$ lorsque $\vec{B} = \vec{0}$.

La force de Coulomb et la force de Lorentz permettent de fournir une première expression du champ électrique créé par une particule ponctuelle (établi dans la partie suivante). Dans la prochaine section, on s'intéresse aux propriétés du champ électrique créé par des distributions de charge.

II - CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

II.1 - Définition par la force de Coulomb

Pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution de charge, il « suffirait » d'utiliser la relation de Maxwell-Gauss, $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$. Cela dit, cette tâche est la plupart du temps réservée aux ordinateurs, puisqu'aucune méthode analytique n'existe pour traiter cette équation dans le cas général. Dans la suite on décrira le champ électrique dans divers cas simples, dans lesquels il est possible de le calculer sans avoir recours à une modélisation numérique.

Champ électrostatique par la force de Coulomb

Une particule de charge q_0 immobile en M, subit une force $\vec{F}_{elec}$, liée au champ électrostatique créé par une certaine distribution de charges par la relation :

____

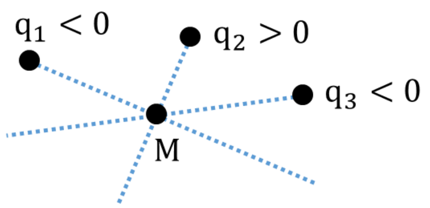
Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q située à l'origine d'un repère sphérique s'écrit : $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$

Remarque : On retiendra que les charges positives créent un champ électrique dirigé vers l'extérieur, alors que les charges négatives créent un champ dirigé vers la charge elle-même.

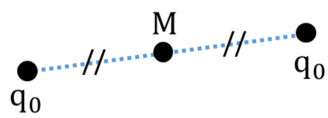
L'additivité des forces permet trouver le théorème de superposition :

Théorème de superposition électrostatique

Le champ électrique créé par un ensemble de charges est la somme des champs individuellement créés par chaque charge (on peut « superposer » l'effet de chaque source).



On comprend que certaines symétries dans la position des charges vont permettre de déduire des propriétés du champ électrique créé sans avoir à faire de calculs. Par exemple, le principe de superposition permet d'affirmer que le champ électrique au milieu du segment séparant deux particules de même charge est nul.



Les sous-sections suivantes élaborent au maximum ce raisonnement pour déterminer de manière aussi précise que possible les caractéristiques du champ électrique **<u>avant</u>** d'avoir à réaliser des calculs de champ électrostatique.

II.2 - Propriétés du champ électrostatique en lien avec la distribution de charges

Lorsqu'une grandeur physique peut être interprétée comme la cause d'une autre grandeurs physique (comme la charge étant la cause du champ électrostatique), on peut utiliser le principe de Curie :

Principe de Curie

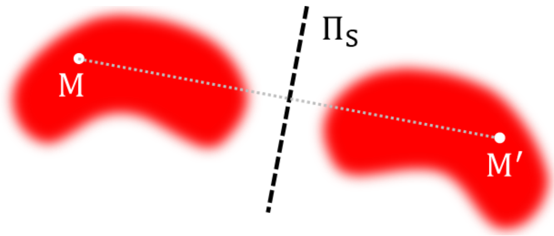
Les symétries présentes dans les causes se retrouvent dans les conséquences. Ici, les symétries de la distribution de charge doivent se retrouver dans le champ électrique créé.

Dans les sous-sections suivantes, on particularise l'application de ce principe dans le cas de symétries particulières, qui serviront ensuite pour déterminer l'expression du champ électrostatique créé par une distribution de charges.

II.2.A – Relation entre symétries de la distribution et direction du champ

On considère dans cette sous-section le cas d'une distribution de charge possédant un plan de symétrie.

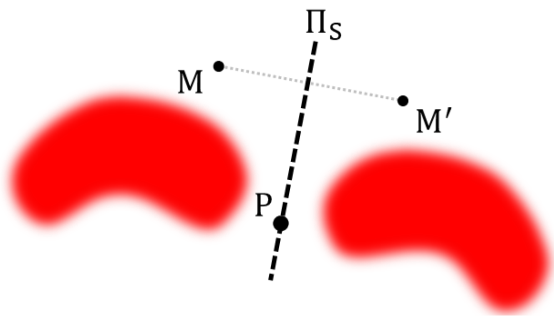
Plan de symétrie Π_S



Remarque : une distribution surfacique plane présente forcément un plan de symétrie : le plan qui la supporte.

En présence d'un plan de symétrie, le principe de Curie permet alors d'affirmer :

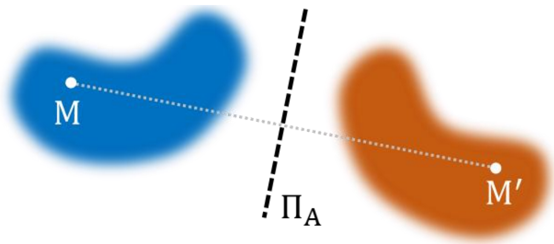
Champ créé par une distribution symétrique



Dans la suite, un cas spécifique sera particulièrement important : celui du champ électrostatique créé **au sein du plan de symétrie (en tout point $\mathbf{M \in \Pi_S}$)**. Dans ce cas, la symétrie impose que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est **coplanaire à Π_S**, c'est-à-dire que le vecteur est compris à l'intérieur du plan.

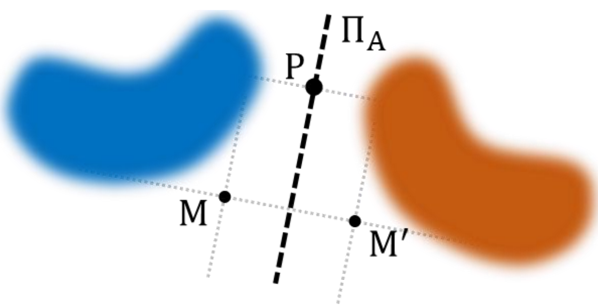
Si la charge était une grandeur positive, seules les symétries pourraient exister (c'en est ainsi pour les distributions de masse, qui causent un champ gravitationnel). Cela dit, puisque la charge est une grandeur algébrique, il existe aussi des distributions anti-symétriques.

Plan d'anti-symétrie Π_A



En présence d'un plan d'anti-symétrie, le principe de Curie permet alors d'affirmer :

Champ créé par une distribution anti-symétrique



Dans la suite, un cas spécifique sera particulièrement important : celui du champ électrostatique créé **au sein du plan d'anti-symétrie lui-même (en tout point $\mathbf{M \in \Pi_A}$)**. Dans ce cas, la symétrie impose que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est **perpendiculaire à Π_A**, c'est-à-dire que le vecteur est normal au plan.

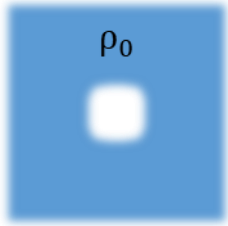
Dans la plupart des cas réels, les symétries des distributions de charge ne permettent pas de déterminer totalement la direction du champ électrostatique. Cela dit, puisque l'étude générale d'un système réel requiert le plus souvent l'utilisation de calculs numériques, on se limitera cette année à des cas **à haut degré de symétrie**, dans lesquels le système possède suffisamment de symétries pour qu'en chaque point de l'espace, le principe de Curie suffise pour connaitre la direction du champ électrostatique.

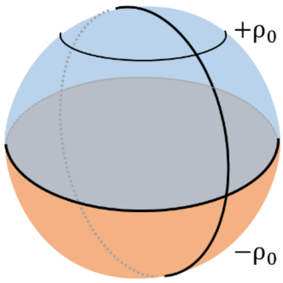
Attention : il n'est pas interdit (et c'est même conseillé) de trouver **plusieurs** plans de symétrie / d'antisymétrie lorsque c'est possible. On peut alors arriver à déterminer un maximum de contraintes sur la direction du champ.

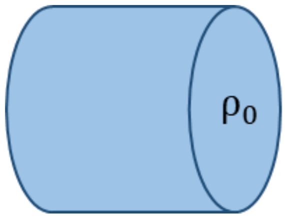
Application – Direction de champ électrostatique

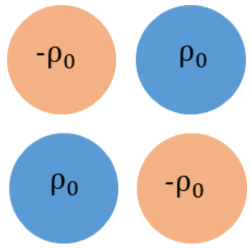
On considère les distributions de charge représentées ci-contre.

1. Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie.
2. En déduire les contraintes sur la direction du champ électrostatique pour un point placé dessus.





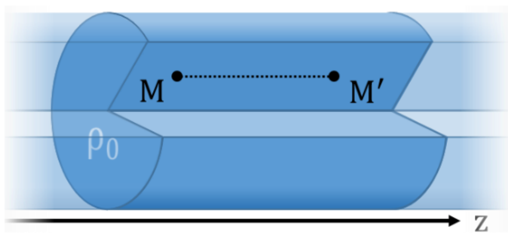




II.2.B – Relation entre invariance de la distribution et dépendance spatiale du champ

En plus des symétries, le principe de Curie s'applique aussi aux distributions présentant des invariances, soit par translation le long d'un axe, soit par rotation autour d'un axe.

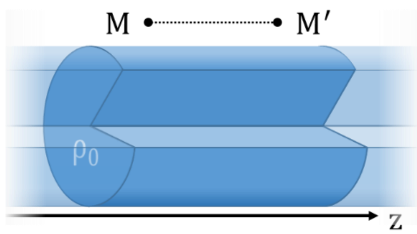
Invariance par translation selon un axe



Champ créé par une distribution invariante par translation selon un axe

Une distribution invariante par **translation selon un axe $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$** engendre un champ électrostatique **indépendant de la coordonnée i**.

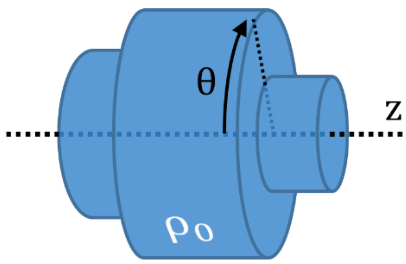
Les invariances par translation sont toujours approximatives : une réelle invariance par translation supposerait un milieu de taille infinie dans au moins une direction.



On rencontrera aussi des invariances par rotation selon un axe, dont l'effet sur le champ aura des conséquences analogues :

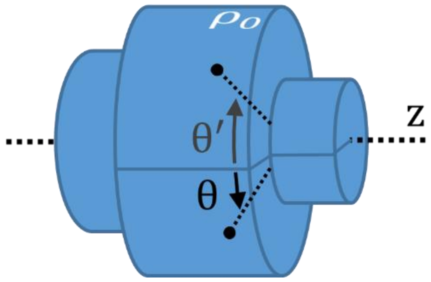
Invariance par rotation autour d'un axe

Contrairement aux invariances par translation, les invariances par rotation peuvent être rigoureusement vérifiées (elles ne supposent pas un milieu infini).



Champ créé par une distribution invariante par rotation autour d'un axe

Une distribution invariante par rotation autour d'un axe $\vec{e}_i$ engendre un champ électrostatique dont la norme ne dépend pas de la coordonnée angulaire θ décrivant la rotation.



Malgré toutes les restrictions qu'apportent l'analyse de symétries de la distribution de charge, il nous est encore impossible de déterminer l'expression précise du champ électrostatique créé par celle-ci (on sait pour l'instant calculer le champ créé par un ensemble de particules ponctuelles, mais pas par une densité de charge). La section suivante expose les équations permettant ce calcul, via un théorème se basant sur l'analyse des symétries : le théorème de Gauss.

III - THÉORÈME DE GAUSS

Le théorème de Gauss permet, dans les cas à haut degrés de symétries, de calculer très simplement la valeur d'un champ électrostatique en tout point de l'espace. Le théorème se base sur une des équations de Maxwell, la seule qu'on utilisera dans ce chapitre : l'équation de Maxwell-Gauss.

III.1 - Équations de Maxwell : l'équation de Maxwell-Gauss

Les équations de Maxwell, au nombre de quatre, décrivent l'intégralité des phénomènes électromagnétiques dans la limite classique (à la fois non-relativiste et non-quantique). Elles forment un ensemble couplé de **quatre équations aux dérivées partielles** faisant intervenir la **divergence** et le **rotationnel** des champs électrique et magnétique. Elles ont été énoncées en 1865, dans un formalisme mathématique bien plus complexe qu'aujourd'hui (puisque les opérateurs vectoriels n'étaient pas encore définis), à partir de lois décrivant séparément plusieurs phénomènes électriques et magnétiques[3] *a priori* distincts.

L'application de ces quatre lois permet en théorie de connaitre le champ électromagnétique dans tout l'espace, quels que soient les distributions de charges et de courants (qui donnent naissance à ces champs). Les prochains chapitres d'électromagnétisme donneront un bref aperçu de la variété infinie des applications de ces lois.

Équation de Maxwell-Gauss

Application – Vérification de Maxwell-Gauss sur un cas particulier

Sachant que le champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle située à l'origine d'un repère sphérique s'écrit : $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$, et que la divergence sphérique s'écrit : $\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2F_r(r,\theta,\varphi)\right)}{\partial r} + \cdots$, vérifier que ce champ électrostatique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss.

III.2 - Théorème de Gauss, énoncé et démonstration

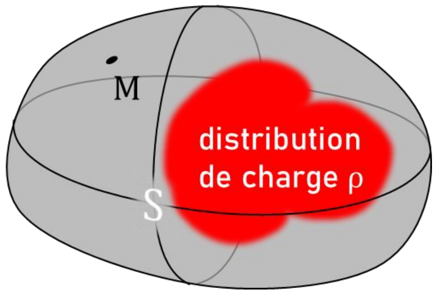
Il serait tout à fait possible d'utiliser cette loi de Maxwell-Gauss pour calculer le champ créé par n'importe quelle distribution de charge, au moyen d'une modélisation numérique du problème. On s'intéresse ici à des cas simples dans lesquels une résolution analytique est possible, en se basant sur le **théorème de Gauss**.

[3] De la même manière que la loi des gaz parfaits à été énoncée en 1834 par Émile Clapeyron, par unification de plusieurs lois décrivant le comportement des gaz dans des situations physiques *a priori* distinctes.

Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée (délimitant un volume V) orientée vers l'extérieur est égal à la charge totale incluse dans V :

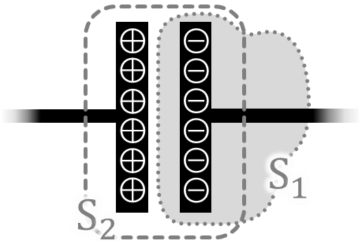
La surface fermée orientée vers l'extérieur est appelée « **surface de Gauss** ».



Application triviale – Théorème de Gauss dans un cas quelconque

On considère deux armatures d'un condensateur chargées à $\pm Q$.

1. En considérant les deux surfaces de Gauss ci-contre, déterminer le flux électrostatique sortant des deux surfaces de Gauss.
2. Est-il possible d'en déduire l'expression du champ $\vec{E}$? A quel endroit ?



Préambule – Énoncé du théorème de Green-Ostrogradski

Soit S une surface fermée orientée vers l'extérieur délimitant un volume V. Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$ suffisamment régulier :

$$\iiint_V \mathrm{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}V = \iint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Démonstration manuscrite du théorème de Green-Ostrogradski, puis du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss a des implications qui peuvent sembler surprenantes, voire incorrectes au premier abord :

- La position des charges à l'intérieur de la surface de Gauss n'a **aucun effet** sur la valeur du flux sortant total ! Attention, cela ne veut pas dire qu'elles n'ont aucun effet sur la direction et la norme du champ $\vec{E}$ en différents points de la surface.
- Les charges à l'extérieur n'ont **aucun effet** sur la valeur du flux sortant de la surface de Gauss ! Encore une fois, cela ne veut pas dire qu'elles n'ont aucun effet sur le champ $\vec{E}$.

Le flux électrostatique sortant d'une surface entourant une charge n'est pas une grandeur particulièrement utile dans le cas général, car il ne permet *a priori* pas d'en déduire le champ $\vec{E}$ à un point particulier. C'est seulement dans certains cas à haut degrés de symétrie que le théorème de Gauss permet de trouver une valeur de champ électrostatique.

IV - APPLICATIONS CLASSIQUES DU THÉORÈME DE GAUSS

Comme on l'a vu ci-dessus dans « l'application triviale » du théorème de Gauss, il n'est pas possible d'en tirer une expression du champ $\vec{E}$ dans les cas quelconques. On s'intéresse ici aux cas où l'analyse des symétries permet de déterminer $\vec{E}$ via le théorème de Gauss.

IV.1 - Champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé

Application classique – Champ électrostatique du cylindre infini

On considère un cylindre de rayon R et de longueur infinie, uniformément chargé par une densité volumique de charge ρ_0. On souhaite calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre).

Remarques :

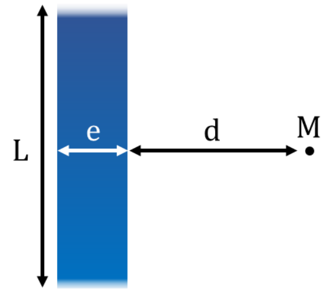
- Le champ électrostatique est continu à l'interface située en $r = R$;
- Comme il a déjà été remarqué, aucune distribution n'est réellement invariante par translation (car le milieu ne peut pas être infini). L'invariance selon $\vec{e}_z$ utilisée ici est valable quand la longueur du fil est très grande face à la distance r à laquelle on calcule le champ.

IV.2 - Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

Application classique – Champ électrostatique du plan infini

On considère un plan d'épaisseur nulle uniformément chargé par une densité surfacique de charge σ_0. On souhaite calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

Ce résultat est à connaitre par cœur (et la démonstration doit savoir être refaite sans hésitations). On remarque une propriété peu intuitive : **la norme du champ $\vec{E}$ ne dépend pas de la distance au plan !**



Cette propriété n'est bien sûr valable que dans le cas du plan infini, qui n'est une approximation correcte que si :

- Si le point M est à une distance du plan très faible devant son étendue ;
- Si l'épaisseur de la plaque est négligeable devant la distance au point M.

Si le schéma ci-contre, on doit avoir : ____________________

Contrairement au cas du cylindre, le champ électrostatique est **discontinu au niveau du plan chargé** (passant d'une valeur $-\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$ à $+\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$). C'est un cas particulier d'une relation très générale appelée « **relation de passage** » liant le champ électrique de part et d'autre d'une interface chargée :

Relation de passage à la traversée d'une surface chargée

De part et d'autre d'une surface chargée de normale $\vec{e}_z$:

- Les **composantes tangentielles** du champ électrique sont **continues** : ____________________
- Les **composantes normales** du champ électrique sont **discontinues** : ____________________

IV.3 - Champ gravitationnel créé par un corps sphérique

IV.3.A - Analogie entre électrostatique et gravitation – Théorème de Gauss gravitationnel

La force de Coulomb et la force gravitationnelle s'écrivent de manière analogue :

Electrostatique	Particule de charge $\mathbf{q_A}$ en **A** Particule de charge $\mathbf{q_B}$ en **B**	$\vec{\mathbf{F}}_{A\to B} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\epsilon_0}} \dfrac{\mathbf{q_A q_B}}{\mathbf{AB^2}} \vec{\mathbf{u}}_{AB}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\epsilon_0}}$	$\mathbf{q_A q_B}$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Gravitation	Particule de masse m_A en A Particule de masse m_B en B	$\vec{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}\dfrac{m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$	$-\mathcal{G}$	$m_A m_B$

De la même manière qu'on a défini le champ électrostatique via la force de Coulomb, on peut définir le champ gravitationnel via la force gravitationnelle ci-dessus.

Champ gravitationnel

Une particule de masse m_0 immobile en M, subit une force $\vec{F}_{grav}$, liée au champ gravitationnel créé par une certaine distribution de masse par la relation :

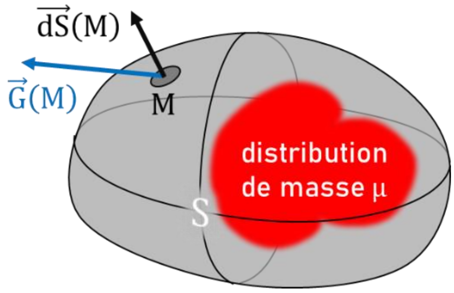
____

Le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle m située à l'origine d'un repère sphérique s'écrit : $\vec{G}(r) = -\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\,\vec{e}_r$

Le champ gravitationnel vérifie un théorème très analogue à celui rencontré en électrostatique, qu'il est possible de déduire à partir de la correspondance simple écrite ci-dessus :

Théorème de Gauss gravitationnel

Le flux du champ gravitationnel sortant d'une surface fermée (délimitant un volume V) orientée vers l'extérieur est égal à la masse totale incluse dans V :



IV.3.B - Calcul du champ gravitationnel créé par une boule massive (planète, étoile, etc.)

On applique ici le théorème de Gauss gravitationnel pour calculer le champ gravitationnel produit par une distribution de masse sphérique (planète, lune, étoile, etc.) Le raisonnement et les calculs sont très semblables au cas d'une boule chargée, et doivent savoir être transposés du cas gravitationnel au cas électrostatique.

Application classique – Champ de gravité d'une boule massive

On considère une boule de rayon R, de masse volumique uniforme μ_0. On souhaite calculer le champ gravitationnel $\vec{G}$ en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur de la boule).

Remarques :

- Le champ gravitationnel est continu à l'interface (c'est toujours le cas pour les distributions volumiques) ;
- Le champ gravitationnel à l'extérieur de la planète est identique à celui d'une masse M_0 ponctuelle placée à l'origine. C'est pour cela que beaucoup de calculs de mécanique céleste peuvent être traités avec les outils de la mécanique du point (en supposant que la terre, le soleil, la lune, etc., se comportent comme de simples masses ponctuelles).

V - DENSITÉ D'ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

Puisqu'une particule plongée dans un champ électrostatique est accélérée (comme dans les accélérateurs à particules), elle acquiert de l'énergie cinétique via la force de Lorentz électrostatique. Cette énergie, qui ne peut pas « apparaitre » spontanément, provient du champ électrique existant dans l'espace.

Énergie volumique du champ électrique

La **densité d'énergie** du champ électrique est :

Un volume $d\tau(M)$ situé au point M continent une énergie :

Une application pour comprendre - Énergie électrostatique due à un ion

Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie électrostatique « stockée » dans l'espace autour d'un ion Cl^- (considéré comme ayant un rayon $R_{Cl} \sim 10^{-10}$ m), placé dans le vide.