

Épreuve de physique

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit (le problème comporte néanmoins un certain nombre d'applications numériques, dont le caractère révèle une certaine importance pour la compréhension de l'ensemble)

Le sujet est composé de :

- Un exercice portant sur les capteurs capacitifs ($\sim 40\%$)
- Un exercice en deux parties indépendantes, sur l'émission des ondes gravitationnelles ($\sim 35\%$) et un aspect de leur détection ($\sim 25\%$).

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à **encadrer les résultats de leurs calculs**.

Exercice 1 - Étude de capteurs capacitifs

Les capteurs capacitifs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques seront supposées identiques à celles du vide (permittivité ϵ_0).

On donne les indications suivantes :

- $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0,618$;
- $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1,618$;
- rapport $\frac{1,618}{0,618} = 2,6$;
- À une fonction sinusoïdale $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$, on associe l'expression complexe $\underline{u} = \underline{U}e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = Ue^{j\phi}$: amplitude complexe associée à $u(t)$ et $j^2 = -1$.

1. Résultats sur les champs.

- Donner les quatre équations de Maxwell en régime stationnaire.
- Donner l'énoncé du théorème de Gauss de l'électrostatique.
- Démontrer ce théorème à partir de la relation de Maxwell-Gauss.

2. Fonctionnement.

On applique une tension U aux armatures du condensateur.

- Effectuer un schéma figurant : le condensateur, la tension U (représentée par une flèche) et les charges stockées.
- Rappeler la loi liant la charge du condensateur Q et la tension U .
- Expliquer **qualitativement** pourquoi les charges électriques des armatures se condensent sur les portions d'armature se faisant vis-à-vis (appelées surfaces en regard).

3. Capacité du condensateur plan.

On s'intéresse ici au cas d'un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques en regard l'une de l'autre (aire de chaque armature : S), parallèles, distantes de e , séparées par de l'air (**Fig. 1a**). Les armatures en regard portent respectivement les densités surfaciques uniformes de charge $-\sigma$ et $+\sigma$. On considérera les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que e , ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité (ce qui revient à dire que l'on néglige les effets de bords).

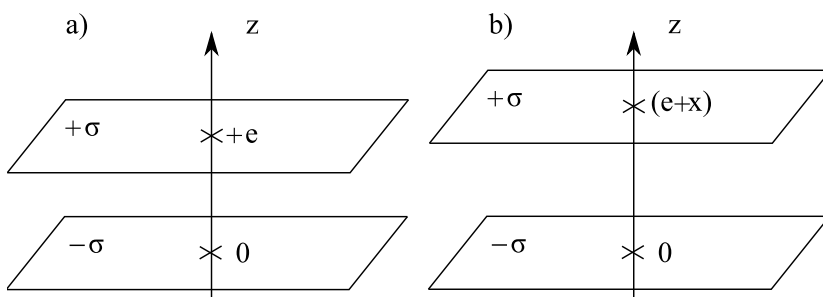


Fig. 1 : Condensateur plan

a) Position de référence.

b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x

- Reproduire et compléter la **Fig. 1a** en dessinant l'allure des lignes orientées du champ électrostatique.
- Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace en expliquant la méthode utilisée et en donner une représentation graphique $E(z)$.

- (c) En déduire le potentiel $V(M)$ (on considérera $V = 0$ sur l'armature de densité surfacique négative).
- (d) Représenter graphiquement le potentiel en fonction de z .
- (e) En déduire l'expression littérale de la capacité C_{P0} du condensateur plan
- (f) On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe, tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique x ($x > -e$) par rapport à sa position de référence $x = 0$ (**Fig. 1b**) :
- Donner l'expression de la nouvelle capacité $C_P(x)$ en fonction de C_{P0} , e et x .
 - Tracer l'allure de $C_P(x)$ pour $x > -e$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables sur les deux axes.
 - On envisage la situation de petits déplacements ($|x| \ll e$) : déterminer une expression approchée au premier ordre de la capacité du condensateur.
 - Tracer la représentation graphique correspondante sur le graphe de la question ii.

4. Condensateur cylindrique.

On considère un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales séparées par de l'air, selon le schéma et la légende de la figure **Fig. 2a**. L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$; ces charges sont supposées uniformément réparties sur les surfaces.

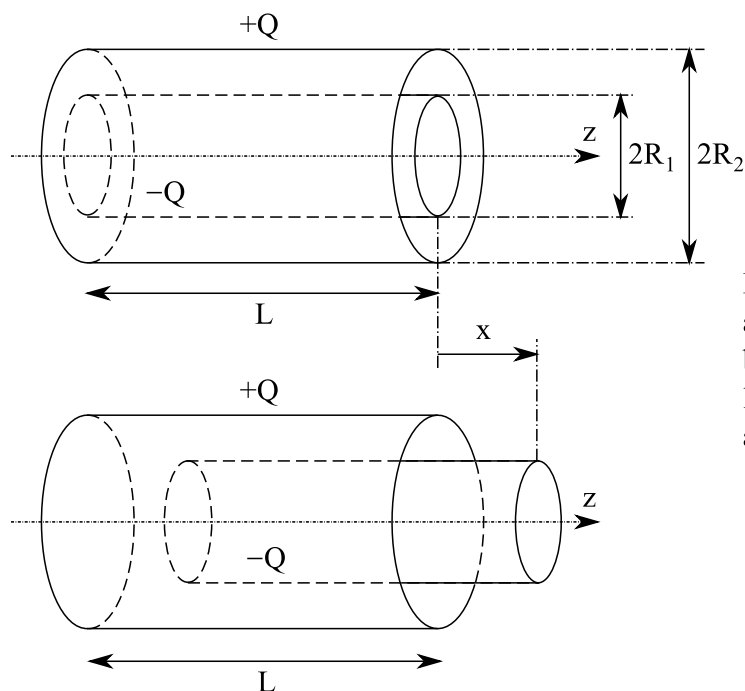


Fig. 2 : Condensateur cylindrique
a) Position de référence.
b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x

Les données sont : les rayons R_1 et R_2 ; la permittivité ε_0 ; la longueur L .

L est beaucoup plus grand que R_2 , de telle sorte que l'on peut adopter un modèle illimité.

- Quel est le système de coordonnées spatiale le plus adapté ici ?
- Déterminer, en justifiant qualitativement mais de manière précise, la direction, le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.
- Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point de l'espace en fonction de Q et des données.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec les expressions littérales dans chaque zone de l'espace :

\vec{r}	$r \in [0, R_1[$	$r \in]R_1, R_2[$	$r \in]R_2, \infty[$
$\ \vec{E}\ $			

- (d) En déduire le potentiel électrostatique V (on impose $V = 0$ sur l'armature intérieure), puis la différence de potentiel entre l'armature externe et l'armature interne.
- (e) Déterminer C_{C0} la capacité du condensateur sous la forme $C_{C0} = A_C \cdot L_r$ où L_r est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L_r = L$). Expliciter A_C en fonction des données.
- (f) L'armature intérieure du condensateur est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique x par rapport à sa position de référence, selon le schéma de la **Fig. 2b**.
On rappelle que les charges se condensent sur les portions d'armatures en regard.
Déterminer l'expression littérale de la capacité $C_C(x)$ associée à une position x donnée du cylindre intérieur en fonction de C_{C0} , L et x .
- (g) Tracer l'allure de $C_C(x)$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables (pentes et valeurs sur les axes).
- (h) Dans la perspective de la mesure d'un déplacement x , quelles sont les différences notables entre $C_P(x)$ et $C_C(x)$?

5. Montage potentiométrique.

Les variations de capacité $C(x)$ sous l'effet du déplacement de l'une des deux armatures doivent être converties en tension de manière à pouvoir être traitées par un organe de décision ou transmises à un circuit électronique. On envisage ici une solution utilisant le montage potentiométrique de la figure **Fig. 3** alimenté par la tension $e(t) = E \cos(\omega t)$.

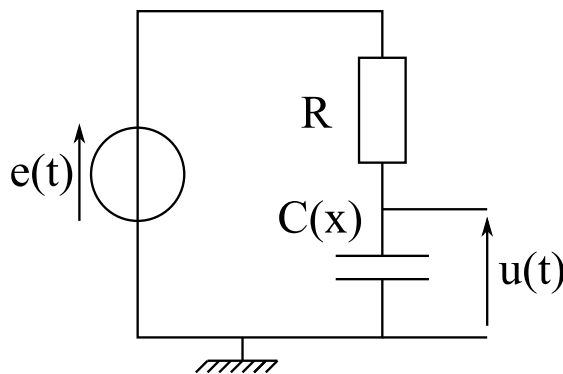


Fig. 3 : Montage potentiométrique de conversion du déplacement x en tension $u(t)$.
La tension $e(t)$ d'alimentation possède une amplitude E et une pulsation ω .

On s'intéressera en particulier à la sensibilité du capteur, définie par la relation $\sigma_Y = dY/dx$, où Y représente la grandeur de sortie exploitée (amplitude U ou phase φ de la tension $u(t)$), dont on souhaite idéalement qu'elle soit à la fois élevée et indépendante de x .

- (a) $u(t)$ s'exprimant sous la forme $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, déterminer les expressions littérales de U et de φ en fonction de E , C , R et ω .
- (b) En déduire les sensibilités σ_U et σ_φ en fonction de $C'(x)$, $dC(x)/dx$, R , E et ω .
- (c) On envisage ici l'insertion du condensateur cylindrique étudié en question 4 :
 - i. Indiquer, en justifiant votre réponse, si les deux sensibilités σ_U et σ_φ correspondantes sont ou non indépendantes de x ?
 - ii. L'amplitude E de la tension d'entrée $e(t)$ est susceptible de varier. Quelles sont respectivement les conséquences pour σ_U et σ_φ ?
 - iii. Laquelle des deux grandeurs de sortie U ou φ a-t-on finalement intérêt à exploiter et pourquoi ?

6. Condensateur double.

On complète maintenant le capteur à géométrie cylindrique en symétrisant la structure selon le schéma de la **Fig. 4**. Cela permet notamment de minimiser les effets de bords négligés jusque-là mais présents en pratique. La

partie mobile en translation, selon un déplacement algébrique x , correspond à l'armature cylindrique intérieure du condensateur double ; il en résulte deux capacités C_1 et C_2 dont les valeurs dépendent de x , soit $C_1 = C_1(x)$ et $C_2 = C_2(x)$.

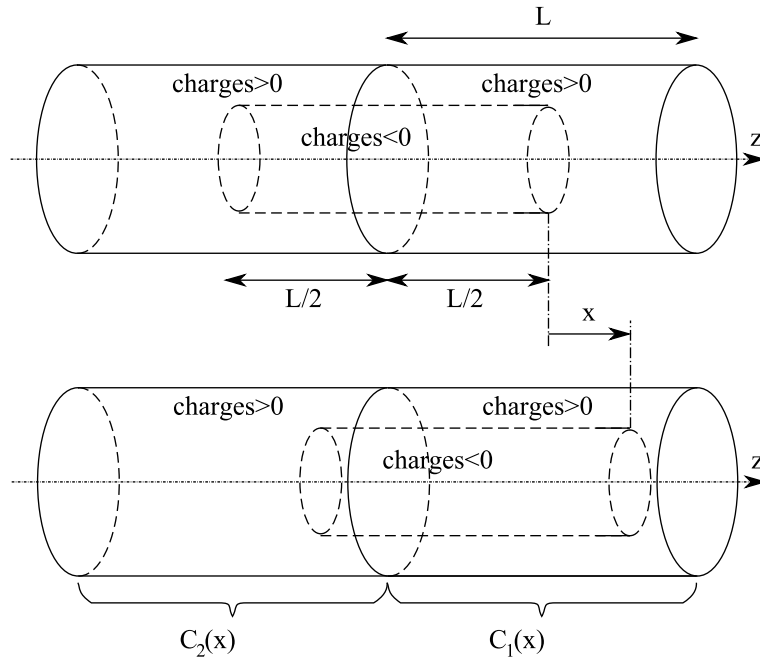


Fig. 4 : Condensateur cylindrique double : à deux armatures externes et une armature interne.

a) Position de référence.

b) Position après une translation x .

- (a) Déterminer les longueurs $L_1(x)$ et $L_2(x)$ des portions de cylindre en regard et en déduire, en utilisant les résultat de la question 4.e, les expressions littérales de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$.
 - (b) Représenter sur le même graphe les allures de $C_1(x)$ et de $C_2(x)$. Quelle particularité peut-on constater ?
7. On insère ce condensateur double dans le montage en pont représenté sur la **Fig. 5** :
- (a) Déterminer l'expression littérale de l'amplitude complexe \underline{U} associée à la tension $u(t)$ en fonction de E , C_1 et C_2 .
 - (b) En déduire, compte tenu de la question 7.a, la relation liant l'amplitude U de $u(t)$ à E , L et x .
 - (c) Déterminer l'expression littérale de la sensibilité σ_U ainsi obtenue et commenter le résultat.
 - (d) Quelle information sur le déplacement le déphasage de $u(t)$ par rapport à $e(t)$ fournit-il ?

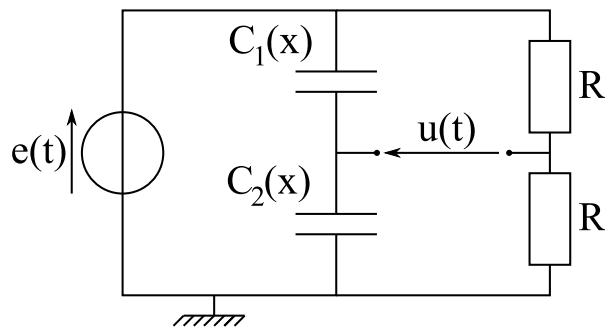


Fig. 5 : Montage en pont visant à extraire une tension $u(t)$ image du déplacement spatial x de l'armature interne du condensateur double de la **Fig.4**.

Exercice 2 : Production et détection des ondes gravitationnelles

Une onde gravitationnelle est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation. Albert Einstein a prédit l'existence de telles ondes en 1916 : selon sa théorie de la relativité générale, de même que les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio, rayons X, etc.) sont produites par les particules chargées accélérées, les ondes gravitationnelles sont produites par des masses accélérées et ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide.

Cependant, ce n'est qu'en 2016, que la confirmation directe des ondes gravitationnelles a été possible grâce à une première observation faite le 14 septembre 2015. Cette observation ouvre un champ nouveau d'observation de l'univers à grande échelle. Depuis, plusieurs autres observations directes d'ondes gravitationnelles résultant de la coalescence de deux astres ont été réalisées. Elles n'ont été possibles que grâce aux détecteurs interférométriques qui permettent de détecter un déplacement spatial minimal de $\pm 2 \cdot 10^{-18}$ m.

Dans une première partie, on propose de modéliser les événements astronomiques à l'origine de ces ondes, c'est-à-dire la rotation de deux corps massifs (la partie concernant la détection des ondes gravitationnelles émises était ensuite abordée dans une seconde partie de l'annale originale, mais n'est pas présente ici). Dans une seconde partie, on se propose d'étudier l'interaction laser-miroir du dispositif interférentiel permettant la détection des ondes gravitationnelles (aucune connaissance de l'interféromètre n'est requise).

Données :

Constantes universelles :

- Constante de la gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
- Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \simeq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Caractéristiques du matériau formant le miroir :

- Conductivité électrique : $1,0 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Coefficient de dilatation : $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- Masse volumique : $8,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Capacité thermique massique : $400 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Conductivité thermique : $400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Formules mathématiques : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{u})) - \Delta \vec{u}$

Les calculs se feront avec un chiffre significatif.

Partie 1 : On se propose de dégager certaines caractéristiques des ondes gravitationnelles produites lors de la fusion de deux corps en interaction gravitationnelle. Les corps envisagés sont des trous noirs ou deux étoiles à neutrons. Bien que leur description relève de la relativité générale, on se contente, dans ce sujet, d'une approche gravitationnelle newtonienne sur laquelle on greffera certains résultats de relativité générale pour rendre compte de manière approchée des faits expérimentaux.

A) Préliminaires

- 1) Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 disposées respectivement aux points P_1 et P_2 . Rappeler l'expression de la force que q_1 exerce sur q_2 . On introduira toutes les notations nécessaires.
- 2) On considère maintenant deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en P_1 et P_2 . Exprimer la force de m_1 sur m_2 .
- 3) Établir une correspondance explicite entre l'électrostatique et la gravitation. Enoncer le théorème de Gauss gravitationnel. On notera $\vec{g}(M)$ le champ gravitationnel au point M.
- 4) On envisage un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse m uniformément répartie. En justifiant clairement chaque étape du raisonnement, établir que le champ gravitationnel créé par cet astre en un point M extérieur à l'astre s'écrit

$$\vec{g}(M) = -\frac{Gm}{OM^3} \overrightarrow{OM}$$

Commenter cette expression.

- 5) Établir également l'expression de $\vec{g}(M)$ pour un point M intérieur à l'astre.
- 6) Tracer alors l'allure de $\|\vec{g}(M)\|$ en fonction de r pour tout r.

B) Description mécanique du système.

On envisage deux corps identiques C_1 et C_2 de masse m, assimilables en première approximation à des points matériels. L'ensemble forme un système isolé. On note C leur centre de masse (ou centre d'inertie). On travaille dans un référentiel galiléen de centre C.

On note $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{CC_1}$ (de norme R_1), $\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{CC_2}$ (de norme R_2) et $\vec{r} = \overrightarrow{C_1C_2}$ (de norme r). On désigne par \vec{u}_r le vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{R_1}/R_1$.

- 7) À partir de la définition de C, montrer que $\overrightarrow{R_1} = -\frac{1}{2}\vec{r}$.
- 8) Justifier que le mouvement de C_1 est plan.

On se place dans toute cette partie B dans le cas où r est une constante.

- 9) En déduire que le mouvement de C_1 est uniforme.
- 10) Décrire le mouvement de C_1 . Faire un schéma où sont représentés, à un instant donné, C, C_1 et C_2 ainsi que leurs vecteurs vitesse respectifs.
- 11) Le mouvement de C_1 est périodique de fréquence f. Établir la relation :

$$f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}}$$

- 12) Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pot} de C_2 dans le champ gravitationnel créé par C_1 en fonction de G, m et r. On choisira E_{pot} nulle pour r tendant vers l'infini.

L'énergie mécanique totale E_m du système $\{C_1 + C_2\}$ s'obtient en sommant les énergies cinétiques des deux corps et l'énergie potentielle précédente.

- 13) Par une méthode de votre choix, montrer que l'énergie cinétique de C_1 peut s'écrire : $E_{C1} = \frac{Gm^2}{4r}$.

- 14) En déduire une expression de E_m en fonction de G , m et r seuls. Cette énergie mécanique est une constante du mouvement : expliquer pourquoi.
- 15) En déduire que l'on a $E_m = -\alpha f^{2/3}$ où $\alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$. Vérifier explicitement l'homogénéité de l'expression précédente.

C) Prise en compte de l'émission d'ondes gravitationnelles.

On montre en relativité générale, que du fait du mouvement relatif, le système $\{C_1 + C_2\}$ perd de l'énergie mécanique au cours du temps par émission d'ondes gravitationnelles avec une puissance instantanée $P(t) = \frac{64}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 r(t)^5}$ où $r(t)$ est la distance $C_1 C_2$ à l'instant t . On admet que cette perte d'énergie reste suffisamment faible sur une période pour pouvoir utiliser les différentes relations établies dans la partie **B** en première approximation.

- 16) Expliquer qualitativement comment évoluent $r(t)$ et $f(t)$ au cours du temps du fait de l'émission d'ondes gravitationnelles.
- 17) Établir que la fréquence f du mouvement satisfait l'équation différentielle $df/dt = K f^\beta$ où K est une constante numérique que l'on ne cherchera pas à calculer et où β est une constante numérique que l'on précisera.

On note f_0 la fréquence du mouvement relatif des deux étoiles à l'instant pris comme origine des dates.

- 18) En procédant à une séparation des variables, intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que l'on a :

$$f(t) = \frac{f_0}{(1 - t/\tau)^{3/8}}$$

où τ est un temps caractéristique à exprimer en fonction de f_0 et K .

- 19) Donner une interprétation physique de τ .

PARTIE 2 : La détection des ondes gravitationnelles est permise par l'utilisation d'un dispositif interférométrique à base de lasers et de miroirs, qu'on ne cherchera pas à décrire ici. Cela dit, la précision des mesures dépend cruciallement de la position de la surface réfléchissante, ainsi que de sa température. L'utilisation de laser puissants pourrait donc causer un échauffement (et une déformation) très indésirables de la surface des miroirs.

On propose dans cette partie un modèle simple pour l'interaction laser-miroir afin d'évaluer les conséquences de l'absorption partielle du faisceau lumineux par le miroir.

On modélise le faisceau incident par un champ électrique complexe : $\vec{E}(x, t) = E_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_z$. Ce faisceau a une puissance moyenne de 40 W, une section circulaire de rayon 5,0 cm et une longueur d'onde de 600 nm.

- 20) Donner les différents qualificatifs qui caractérisent cette onde.

L'onde précédente provient des x négatifs et se propage dans le sens des x croissants.

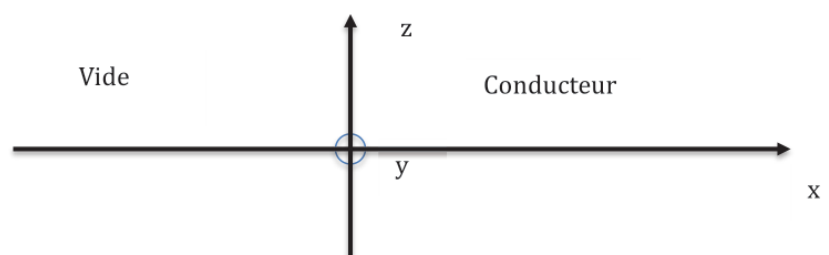
- 21) Calculer la fréquence de cette onde.

- 22) Déterminer le champ magnétique puis le vecteur de Poynting moyen.

- 23) Exprimer la puissance moyenne du laser en fonction de E_0 , S , μ_0 et c . En déduire la valeur numérique de l'amplitude E_0 .

En $x = 0$ se trouve un conducteur de conductivité $\gamma = 1,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ qui s'étend selon les $x > 0$.

Ce conducteur correspond à l'un des miroirs de l'interféromètre.



- 24) Écrire l'équation de Maxwell Ampère dans le conducteur. Montrer que le courant de conduction est très supérieur à l'autre terme (courant de déplacement).

On se place par la suite dans cette approximation.

25) Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.

On s'intéresse à une onde harmonique plane.

26) Déterminer l'équation de dispersion (complexe). On posera $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

27)

a) Écrire la solution harmonique plane de l'équation de propagation en supposant le métal illimité vers les $x > 0$. On notera \underline{E}_{0t} son amplitude complexe et on fera apparaître δ .

b) Que représente δ ? Calculer sa valeur.

On indique que $|\underline{E}_{0t}| = |t|E_0$ avec $|t| = 10^{-4}$.

c) Calculer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule à l'abscisse x .

Dans un modèle plus réaliste on tient compte de l'épaisseur finie du conducteur. Celui-ci occupe la portion l'espace $0 < x < L$ où L désigne l'épaisseur du conducteur et vaut $L = 1,0 \text{ mm}$. On suppose néanmoins que l'onde électromagnétique dans ce métal est identique à celle qui a été déterminée précédemment.

28) À quelle condition cette approximation est-elle fondée ?

29) Exprimer la puissance moyenne totale dissipée par effet Joule dans le conducteur en fonction E_0 , δ , γ et S .

30) Si cette puissance ne s'évacue pas du volume précédent, déterminer grossièrement l'élévation de température par unité de temps dans ce volume. L'estimer numériquement.

On souhaite que l'effet de dilatation de l'épaisseur du miroir soit inférieur à $10^{-15} \lambda$ (rappel : $\lambda = 600 \text{ nm}$). On indique que le coefficient de λ_d dilatation est donné par l'expression $\lambda_d = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}$ à pression constante.

31) Déterminer numériquement la durée maximale d'éclairement qui produit la dilatation à son maximum de tolérance. On considérera que l'élévation de température ne se produit notablement que sur la longueur δ .

32) Cette chaleur diffuse ensuite dans l'ensemble du métal. Si l'on suppose que cet effet se produit principalement selon l'axe Ox et sur la longueur L , estimer numériquement (à un facteur multiplicatif près) la durée de cette diffusion. Commenter.