La difficulté et l'originalité de l'exercice sont notées de 1 à 3. Les exercices d'originalité 1 sont des classiques qu'il faut bien comprendre et savoir refaire sans hésitations. Les exercices d'originalité 3 sont des exercices plus éloignés du cours, dans lesquels il est nécessaire de s'adapter à la nouveauté (ou de faire face à des difficultés calculatoires).

Programme d'interrogation orale

- Démontrer la relation de l'hydrostatique dans un cas unidimensionnel ($dP/dz = \pm\rho g$) sans se tromper sur le signe.
- Retrouver la loi de pression $P(z)$ vérifiée par l'atmosphère dans le cas où on considère la température de l'air uniforme.
- Déterminer la résultante des forces de pression subies par un mur de hauteur h, avec de l'eau d'un côté et de l'air de l'autre.
- Déterminer la résultante des forces de pression subies par un barrage cylindrique.
- Connaitre sans hésitation les éléments infinitésimaux (dS, dV) en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
- Déterminer l'expression de la poussée d'Archimède subie par un solide simple immergé.

FORMULAIRE	Loi hydrostatique généralisée	Gradient en cylindrique	Gradient en sphérique
	$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{f}_{vol}$ (hors programme)	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

I - APPLICATION DU COURS

Exercice 1 – Diverses forces de volume — **Difficile 1 – Original 1**

Établir les forces volumiques associées aux forces suivantes :

(a) poids de la particule fluide ;
(b) force gravitationnelle appliquée à la particule fluide ;
(c) force centrifuge $\vec{F} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$ appliquée à la particule fluide ;
(d) force de Lorentz appliquée à une particules fluide chargée.

Exercice 2 – Gradients et énergie potentielle — **Difficile 1 – Original 1**

Établir le gradient des grandeurs scalaires suivantes :

- $E_p(z) = mgz + cte$, où z est la cordonnée verticale d'un repère cartésien ;
- $E_p(r) = -G\,m_1m_2/r$, où r est la distance à l'origine dans un repère sphérique ;
- $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$, où x est une coordonnée cartésienne.

II - LOI DE PRESSION DANS DES LIQUIDES (INCOMPRESSIBLES)

Exercice 3 – Baromètre de Torricelli — **Difficile 1 – Original 1**

On considère un tube cylindrique vertical de section S et de hauteur $H \simeq 1{,}0$ m totalement rempli de mercure que l'on renverse dans une cuve, elle-même pleine de mercure, sans perdre de matière. Le dispositif est maintenu à la température $T_0 = 293$ K. On note $\mu = 13{,}4 \cdot 10^3$ kg la masse volumique du mercure.

On complète le dispositif de la figure ci-contre d'un axe Oz, orienté vers le haut.

1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire sur la masse vol. du mercure ?
2. Rappeler la relation de la statique des fluides sur l'axe Oz.
3. En déduire la loi d'évolution $P(z)$ de la pression dans le mercure.

L'image historique ci-contre montre une zone de vide au-delà d'une certaine hauteur de mercure.

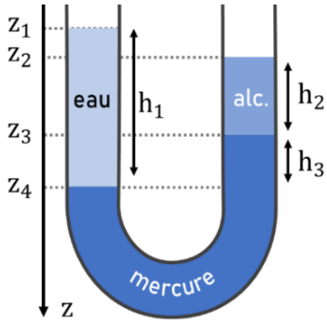
4. Pour quelle hauteur de mercure atteint-on ce « vide » ? De quoi est réellement composé ce « vide » ?
5. Expliquer comment ce dispositif permet de mesurer la pression atmosphérique.

Exercice 6 – Poussée d'Archimède — **Difficile 1 – Original 1**

1. Un iceberg de masse volumique $\rho_i \simeq 920\,\text{kg.m}^{-3}$ flotte sur l'océan ($\rho_e \simeq 1020\,\text{kg.m}^{-3}$). Quelle fraction de son volume se trouve sous l'eau ?

Exercice 4 – Équilibre de trois liquides non-miscibles	Difficile 2 – Original 2

On remplit un tube en U ouvert de trois liquides non-miscibles (eau, mercure, alcool). On note μ_e, μ_m et μ_a les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool, respectivement.



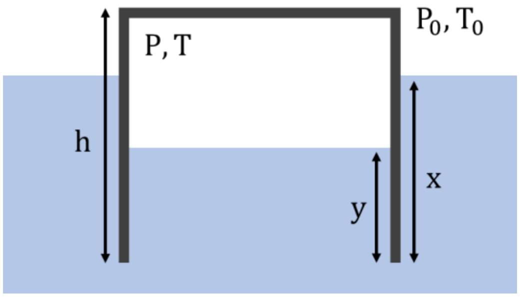
1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire pour les trois fluides proposés ?
2. Montrer que dans un liquide incompressible, la pression est une fonction affine de la profondeur.
3. Comment se traduit la condition d'équilibre pour chacune des interfaces air-eau, eau-mercure, mercure-alcool et alcool-air ?
4. En déduire l'expression de la pression à chacune des interfaces précédentes.
5. En déduire une expression de μ_a en fonction de μ_e, μ_m, h_1, h_2 et h_3.
   Faire l'application numérique.

Données : $\mu_e = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $\mu_m = 1340\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $h_1 = 80$ cm, $h_2 = 20$ cm et $h_3 = 5$ cm

Exercice 5 – Équilibre d'une cloche renversée	Difficile 2 – Original 2

On renverse une cloche cylindrique de section s, de hauteur totale h et de masse m, que l'on laisse descendre verticalement dans une cuve remplie d'eau. La cloche s'enfonce dans l'eau en emprisonnant l'air qui occupait initialement son volume intérieur.

À l'équilibre, représenté ci-contre, la cloche est enfoncée d'une certaine profondeur x. On donne la pression atmosphérique de l'air $P_0 = 10^5$ Pa et la masse volumique de l'eau $\mu_0 = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. L'épaisseur des parois de la cloche est supposée négligeable.



1. Faire un bilan des forces exercées sur la cloche à l'équilibre (sans utiliser la poussée d'Archimède), puis utiliser l'équilibre mécanique pour en déduire un lien entre P dans la cloche, et P_0.
2. Exprimer la condition d'équilibre thermique de la cloche, et en déduire un lien entre P, P_0, h et y.
3. En exploitant la relation de la statique des fluides, établir un lien entre x, P, P_0, y, g et μ.
4. Utiliser les trois questions précédentes pour déterminer x. À quelle condition sur le volume $V_0 = hs$ de la cloche celle-ci flotte ?

III - RESULTANTE DES FORCES DE PRESSION SUR DES SURFACES

Exercice 7 – Force exercée par l'eau sur un bol	Difficile 2 – Original 1

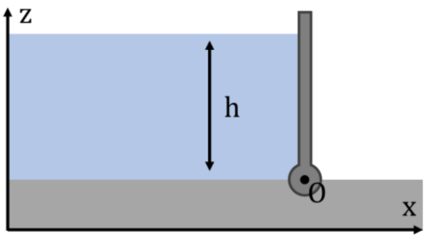
Un bol de forme hémisphérique de rayon R est complètement rempli d'un liquide de masse volumique μ.

1. Par analyse des symétries du problème, déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ qui portera la résultante des forces de pression.
2. Établir l'évolution de la pression en fonction de la profondeur z, puis celle de la pression en un point $M(r, \theta, \varphi)$ quelconque de la paroi du bol en fonction de l'angle θ (qu'on représentera schématiquement sur un dessin en coupe).
3. Établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{dS}(M)$ et en déduire l'expression de la force élémentaire $\overrightarrow{dF}_u$, projection de $\overrightarrow{dF}$ (force de pression) sur le vecteur unitaire $\vec{u}$.
4. En déduire l'expression de la force de pression totale exercée par le fluide sur le bol. Commenter.

Exercice 8 – Dimensionnement d'une digue	Difficile 2 – Original 2

On considère une digue dont la modélisation est représentée sur l'image ci-contre. C'est une simple paroi, qu'on considèrera solide, attachée au sol par une liaison, qui elle est susceptible de rompre si le moment des forces de pression (appliquées à la plaque) calculé en O, est supérieur à une valeur $\mathcal{M}_{O,max} \simeq 5 \cdot 10^6\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

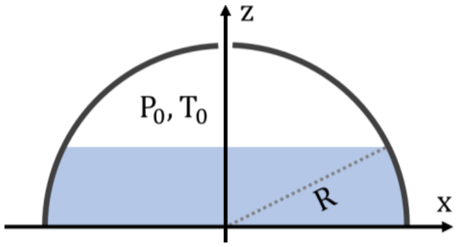
La masse volumique de l'eau est $\rho_e \simeq 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, et la profondeur de la plaque, selon y, est $L = 10$ m.



1. Déterminer l'expression de la pression dans le fluide (seule la pression de l'atmosphère est connue, égale à P_0).
2. Calculer la pression infinitésimale sur une tranche de digue de hauteur dz, et en déduire le moment des forces de pression en O.
3. Exprimer la hauteur h_{max} pour laquelle il y a rupture de la digue.

Exercice 9 – Bol renversé	Difficile 3 – Original 2

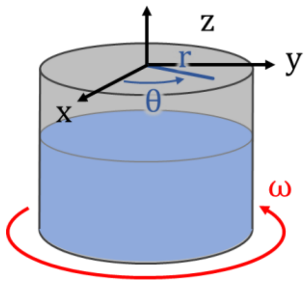
On considère une demi-sphère de rayon R et de masse m, posée sur le sol et percée d'un orifice en son sommet. On remplit progressivement la demi-sphère d'eau de masse volumique μ_0 constante. L'air environnant est supposé à température et pression constantes T_0, P_0 et on suppose que l'équilibre thermique et mécanique est réalisé à chaque instant. On oriente l'espace à l'aide d'un repère cartésien où l'axe (Oz) est vertical ascendant et on note z l'altitude du cylindre dans ce repère.



1. Exprimer la pression $P(z)$ dans l'eau en fonction de z et h la hauteur totale d'eau versée dans le bol à un instant t donné.
2. Par une analyse des symétries du problème, donner la direction de la force résulatante exercée par l'eau sur le bol.
3. Pour une hauteur donné d'eau versée h, calculer la force de pression exercée par l'eau sur le bol.
4. En déduire la hauteur d'eau h_{max} que l'on pourra verser avant que la demi-sphère ne se soulève.

Exercice 10 – Champ de pression dans un cylindre tournant	Difficile 3 – Original 3

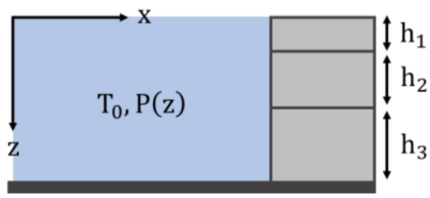
On considère une hauteur d'eau h dans une cuve cylindrique de section S et de rayon R. On met le cylindre en rotation selon l'axe z, à la vitesse angulaire ω (en $\mathrm{rad.s^{-1}}$). Le cylindre est ouvert sur le dessus, au contact de l'air à pression P_0. On se place dans un système de coordonnées cylindrique (r,θ,z), et on cherche à décrire la pression $P(r,\theta,z)$. On précise que la rotation exerce en chaque point du fluide une « force centrifuge », dont l'expression volumique est $\vec{f}_c = \rho\omega^2 r\,\vec{e}_r$ (avec r la distance à l'axe de rotation, ρ la masse volumique de l'eau).



1. Justifier que la pression est indépendante d'une des coordonnées.
2. Utiliser la **loi de pression hydrostatique généralisée** afin d'établir deux équations différentielles sur la pression.
3. Déterminer alors $P(r,\theta)$, avec la condition $P(0,z_0) = P_0$.
4. Déterminer l'équation $z_s(r)$ de la surface supérieure de l'eau (au contact de l'air).
5. Sachant que l'eau possède une masse volumique approximativement indépendante de la pression (c'est-à-dire que son volume est conservé), déterminer z_0.
6. Représenter l'allure de la surface du liquide sur un schéma en coupe, dans un plan contenant l'axe (Oz).

Exercice 11 – Barrage en 3 morceaux (oral banque PT)	Difficile 2 – Original 2

On considère le schéma ci-contre dans lequel un barrage plan, de hauteur totale $h = 9$ m et de largeur L, retient de l'eau de masse volumique μ. La paroi du barrage est constituée de 3 murs superposés, de hauteurs respectives h_1, h_2, h_3.



1. Rappeler l'expression de la loi de la statique des fluides en précisant le sens de l'axe z.
2. Établir l'expression de la pression dans l'eau en fonction de z, de la pression atmosphérique P_0 et des paramètres nécessaires.
3. Établir l'expression de la force $\vec{F}_i$ exercée par l'eau et l'air extérieur sur chacun des murs de hauteur h_i.
4. En déduire l'expression des diverses hauteurs hi permettant que chaque mur subisse la même force de pression.

IV - PRESSION DANS DES GAZ (COMPRESSIBLES)

Exercice 12 – Modèle de l'atmosphère adiabatique	Difficile 2 – Original 1

La température et la pression de l'atmosphère varient en fonction du lieu de mesure et du moment où elle a été effectuée (saison, heure de la journée, etc.) L'organisation internationale de normalisation (ISO pour International *Organization for Standardization*) a donc défini un modèle de l'atmosphère standard dite « ISA » (*International Standard Atmosphere*) pour permettre la calibration de certains appareils de mesure. Ce modèle se compose de diverses tables de valeurs et fonctions de référence parmi lesquelles une fonction affine de l'altitude selon laquelle, en orientant l'axe Oz selon la verticale ascendante, on a $T(z) = T_0 + \alpha z$.

1. Quel modèle thermodynamique raisonnable peut-on proposer pour l'air ?
2. En déduire la loi d'évolution de la masse volumique de l'air en fonction de la pression et de diverses constantes.
3. Rappeler la relation de la statique des fluides, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression P_{adiab}.

4. En notant $P_{adiab}(0) = P_0$ résoudre cette équation différentielle.
5. Par analyse dimensionnelle, en déduire l'expression d'une hauteur caractéristique h_{adiab} et la calculer.

On rappelle le résultat obtenu en cours pour l'atmosphère isotherme : $P_{iso}(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$.

6. Par analyse dimensionnelle, en déduire l'expression d'une hauteur caractéristique h_{iso} et la calculer.
7. En utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme, puis le modèle de l'atmosphère adiabatique, déterminer l'expression de la valeur de la masse totale d'air au-dessus d'un mètre carré de sol.

Données : $T_0 = 15°C$ $\alpha = -6{,}5 \cdot 10^{-3}\ K.m^{-1}$ $M = 29\ g.mol^{-1}$

Exercice 13 – Vol en ballon — Difficile 2 – Original 3

L'air est assimilé à un fluide compressible, obéissant à l'équation des gaz parfaits, dont la température est uniforme et constante, indépendante de la hauteur z.

1. Donner la relation liant la masse molaire M_{air}, la masse volumique μ, la pression P, la température T et la constante des g.p.
2. Montrer que la pression d'une atmosphère isotherme est de la forme : $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$ où H est une longueur exprimée en fonction de M_{air}, R, T et g, que l'on calculera pour $T = 290$ K.

Soit un aérostat composé d'une nacelle de masse m et d'un ballon de volume V constant dont la masse de l'enveloppe est négligeable. La pression régnant à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure. On note T_f la température extérieure et T celle qui règne à l'intérieur du ballon. La masse volumique de l'air au niveau du sol est notée μ_0, et on note m_0 la masse d'air présente dans le ballon lorsque celui-ci est posé au sol et que la température interne est égale à T_f.

3. On note T_c et μ_c, la température et la masse volumique de l'air régnant à l'intérieur du ballon. Déterminer la relation existante entre μ_c, T_c, T_f et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.
4. Le ballon se trouve à l'altitude $z = 0$, pour laquelle la pression extérieure est P_0. Déterminer la température minimale T_{min} de l'air intérieur, permettant à l'aérostat de s'élever spontanément. On exprimera le résultat en fonction de T_f, m_0 et m.
5. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_c > T_{min}$. Déterminer la hauteur z_m atteinte par le ballon.
6. Calculer sur la base du résultat précédent, le volume minimal V d'un ballon permettant d'élever deux passagers, une enveloppe et une nacelle, de masse $m = 500$ kg, à une hauteur de $z = 1000$ m au-dessus du sol, sachant que la température maximale de l'air chaud à l'intérieur du ballon est de 60 K plus élevée que la température extérieure $T_f = 280$ K.
7. Déterminer la quantité de chaleur Q_1 nécessaire pour élever, de façon quasi-statique et à pression constante P_0, la température de la quantité de fluide initialement présente dans le ballon de sa valeur initiale T_f à sa valeur finale T_c. Exprimer le résultat en fonction de $m_0, M_{air}, C_{p,1}, T_c, T_f$.

Données : Masse molaire de l'air $M_{air} \simeq 29\ .mol^{-1}$; Capacité thermique isobare molaire à pression constante $C_{p,m} = 7R/2$.

Exercice 14 – Pression au centre du soleil — Difficile 2 – Original 2

On étudie le soleil, qu'on assimile à un astre sphérique de centre S et de rayon $R_s = 7 \cdot 10^8$ m, incompressible et homogène de masse $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur un corps de masse m (de masse volumique ρ). En déduire la force volumique de gravitation $\vec{f}_{vol}$.

Dans un chapitre futur de cette année, on montera que la force volumique de gravitation **<u>à l'intérieur</u>** d'un corps sphérique s'écrit $\vec{f}_{vol} = -\mathcal{G}\,\mu M_s/R_s^3\ r\,\vec{e}_r$ où μ est la masse volumique du corps.

2. Que peut-on dire de la valeur de la pression à la surface du soleil ? En négligeant cette pression, en déduire celle en son centre (on utilisera la loi de pression hydrostatique généralisée).
3. En supposant que le Soleil est assimilable à un plasma d'hydrogène, lui-même assimilable à un gaz parfait, en déduire la température au centre du Soleil.
4. Pour amorcer une réaction de fusion nucléaire de deux noyaux d'hydrogène, une température minimale de $T_{min} = 4 \cdot 10^6$ K est nécessaire. Commenter les résultats obtenus.

Données : Masse molaire de l'hydrogène $M_H = 1\ g.mol^{-1}$; constante de gravitation $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$