

Les chapitres précédents ont posé les bases de la description des ondes électromagnétiques dans le vide (et par extension, dans les gaz dilués). Cela incluait les rayonnements de toutes fréquences (ou longueurs d'onde), des ondes radios aux rayonnements gamma, mais se limitait au cas très simplifié des ondes planes progressives, monochromatiques.

Dans ce chapitre, on simplifie le modèle de l'onde électromagnétiques (en se débarrassant de la polarisation, de la nature des champs \vec{E} et \vec{B} , etc.) afin de décrire la propagation au-delà des ondes planes progressives monochromatiques. On pourra alors décrire les ondes émises par des sources lumineuses réelles, leur propagation dans le vide, mais aussi dans les milieux transparents, comme les lentilles ou divers instruments d'optique. Cela permettra d'aborder les phénomènes d'interférences

TABLE DES MATIERES

I - EMISSION, PROPAGATION, ET RECEPTION D'UNE ONDE (MODELE SCALAIRE) -----	1 -
I.1 - Nature de l'onde : modèle scalaire de la lumière -----	1 -
I.2 - Emission de l'onde : description des sources de lumière -----	2 -
I.3 - Réception de l'onde : description des capteurs -----	4 -
II - PROPAG. D'ONDE LUMINEUSE : MODELE ONDULATOIRE ET GEOMETRIQUE -----	5 -
II.1 - Lien entre surfaces d'onde et rayons lumineux -----	5 -
II.2 - Variation de la grandeur ondulatoire le long d'un rayon lumineux -----	5 -
II.3 - Bilan : approche ondulatoire d'une expérience d'optique géométrique -----	7 -
III - SUPERPOSITION D'ONDES ET INTERFERENCES -----	8 -
III.1 - Formule de Fresnel -----	8 -
III.2 - Critère de cohérence -----	8 -
III.3 - Interférence constructive et destructives -----	10 -
IV - ALLURE QUALITATIVE DES FIGURES D'INTERFERENCE -----	11 -
IV.1 - Franges et anneaux -----	11 -
IV.2 - Contraste -----	11 -

I - EMISSION, PROPAGATION, ET RECEPTION D'UNE ONDE (MODELE SCALAIRE)

I.1 - Nature de l'onde : modèle scalaire de la lumière

Comme il a été mentionné dans le chapitre concernant les ondes électromagnétiques, la plupart des rayonnements sont émis de manière non-polarisée (cela signifie que la direction de polarisation varie de manière aléatoire et rapide). Qui plus est, la très grande majorité des détecteurs sont insensibles à la polarisation (à commencer par l'œil humain).

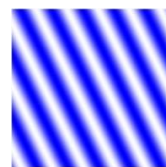
Modèle scalaire de la lumière

Dans le modèle scalaire de la lumière, l'onde électromagnétique est décrite par un **champ scalaire** $s(\mathbf{M}, t)$.

On peut se représenter cette onde scalaire comme étant proportionnelle à la norme du vecteur champ électrique, sans chercher à expliciter la constante de proportionnalité. On considèrera dans la suite deux types d'ondes : les ondes planes et les ondes sphériques.

Ecriture des ondes planes et des ondes sphériques

Une onde plane monochromatique selon le vecteur d'onde \vec{k} s'écrit :



Une onde sphérique émise à l'origine d'un repère s'écrit :

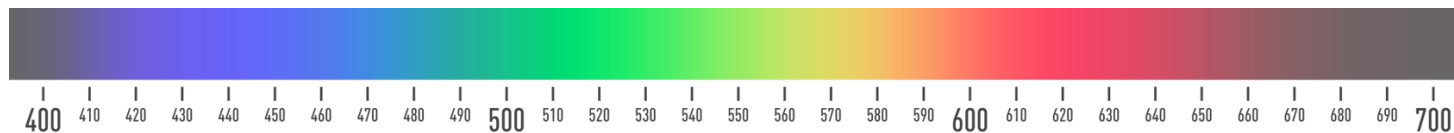


Remarque : L'expression de l'onde sphérique a été établie par analogie avec l'onde plane dans l'exercice 3 du TD 4 d'électromagnétisme (on y explique notamment la nécessité du facteur $1/r$ dans l'amplitude).

I.2 – Emission de l'onde : description des sources de lumière

I.2.A – Spectre de la source

Les rayonnements électromagnétiques visibles à l'œil nu ont des longueurs d'ondes dans le vide comprises entre 400 et 700 nm, ce qui correspond à des fréquences $f = c/\lambda$ grossièrement comprises entre $4 \cdot 10^{14}$ et $7 \cdot 10^{14}$ Hz. À un rayonnement monochromatique (de longueur d'onde donnée) est associé une couleur perçue (cette association n'a rien de physiquement universel ; elle s'applique simplement aux êtres humains qui partagent les mêmes récepteurs visuels).



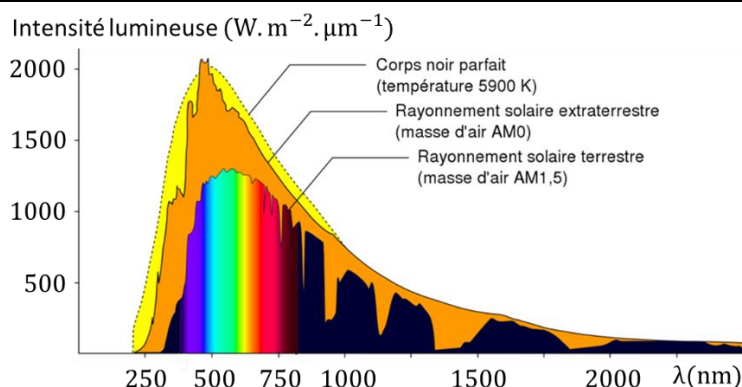
Attention : la conversion $f = c/\lambda$ est issue de la relation de dispersion pour une OPPH, obtenue en plaçant l'expression générale d'une OPPH dans l'équation de propagation des équations dans le vide. Cette relation n'est donc valable que dans ce cas précis.

Dans les trois cadres suivants, on décrit les principales sources de rayonnement lumineux utilisées en TP ou présentes dans la nature.

Source thermique

Les sources thermiques émettent de la lumière par rayonnement thermique d'un corps chauffé à haute température.

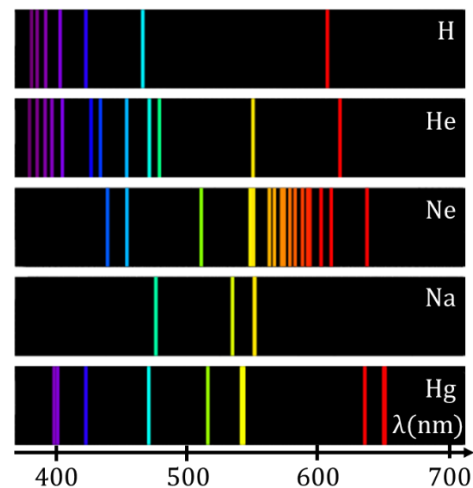
Pour que le rayonnement soit situé dans le spectre visible, il est nécessaire que le corps soit porté au minimum à plusieurs centaines de degrés Celsius (par exemple, une ampoule à incandescence, ou le soleil).



Source spectrale

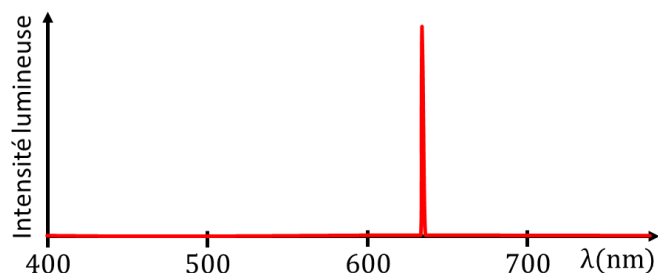
Les sources spectrales émettent de la lumière via les transitions électroniques dans un milieu composé d'atomes excités. Dans une lampe spectrale, un corps pur gazeux est soumis à des décharges électriques. Les électrons des atomes sont alors excités (ils passent dans des couches électroniques de numéro plus élevé) et émettent de la lumière en retournant dans leur état fondamental. Le spectre est constitué d'un ensemble de raies fines correspondantes aux diverses transitions électroniques.

On a représenté ci-contre le spectre de principales lampes à vapeur utilisées en physique. C'est une représentation schématique : dans la réalité, certaines raies sont quasi-invisibles tellement leur luminosité est faible. Chaque raie correspond à une transition électronique.



Source LASER

Les LASER sont des dispositifs optiques dont le fonctionnement est plus complexe. On retiendra qu'ils émettent une lumière quasi parfaitement monochromatique, de largeur spectrale plus fine que celle d'une lampe spectrale (bien qu'ils soient aussi basés sur l'émission de rayonnement par transition électronique).



I.2.B – Largeur spectrale et modèle des trains d'onde

Quelle que soit la source de lumière considérée, le spectre d'une onde lumineuse n'est jamais parfaitement pur : il est impossible d'obtenir une onde purement sinusoïdale ; on peut les modéliser comme des sinusoïdes dont les paramètres (amplitude, fréquence, phase) varient plus ou moins lentement dans le temps.

Grâce à l'analyse de Fourier, il est possible de lier la largeur spectrale du spectre au temps caractéristique des variations des paramètres qui composent la quasi-sinusoïde émise par la source.

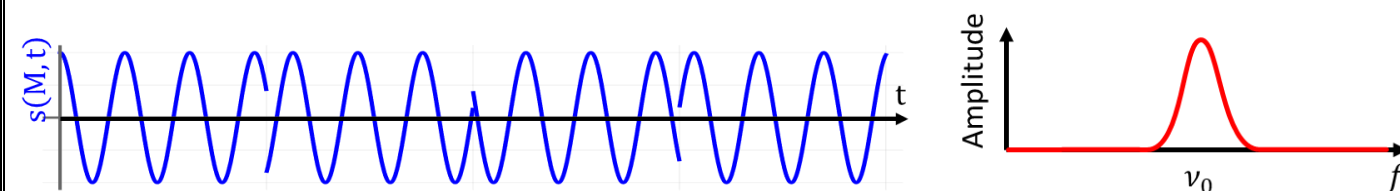
Largeur spectrale et temps caractéristique de variation

Un signal quasi-sinusoïdal dont les paramètres (fréquence, amplitude, phase) varient avec un temps caractéristique Δt possède un spectre en fréquence de largeur Δf , vérifiant la relation approximative : _____

Pour simplifier la représentation mentale qu'on se fait des ondes lumineuses, on utilisera le **modèle des trains d'onde**, qui permet de raisonner de manière simple sur les ondes :

Modèle du train d'onde

Une onde lumineuse peut être modélisée par une **succession de trains d'onde**, de durée caractéristique τ_c , pendant lesquels l'onde est **parfaitement sinusoïdale**. Entre chaque train d'onde, la sinusoïde subit un déphasage aléatoire.



Attention : les trains d'onde ne sont qu'un modèle d'émission pratique à manipuler mentalement. En aucun cas l'onde émise par la source ne ressemble réellement à une succession de trains d'onde.

I.2.C – Longueur de cohérence, temps de cohérence

Temps de cohérence, longueur de cohérence

En optique, le « **temps de cohérence** » d'une source lumineuse, noté τ_c , est le temps caractéristique de variation des propriétés de l'onde quasi-sinusoïdale émise (la durée d'un train d'onde). Il est lié à la largeur spectrale $\Delta \nu$ par la relation $\tau_c \cdot \Delta \nu \sim 1$.

On appelle « **longueur de cohérence** » la distance $L_c = c \tau_c$ (c'est-à-dire la longueur d'un train d'onde).

On doit retenir les ordres de grandeur suivants (la longueur de cohérence se retrouve simplement à partir du temps) :

	Source thermique / lumière blanche	Raie d'une source spectrale	LASER
Temps de cohérence τ_c			
Longueur de cohérence L_c			

I.2.D – Largeur en fréquence et en longueur d'onde

En optique, contrairement à l'acoustique, l'usage est plutôt de caractériser les spectres en termes de longueurs d'onde, plutôt qu'en termes de fréquence. Il est donc nécessaire de savoir convertir des $\Delta \nu$ en $\Delta \lambda$.

Largeur spectrale en fréquence et en longueur d'onde

La relation entre fréquence et longueur d'onde dans le vide (et par extension, dans l'air) est $\lambda = c/\nu$. Cela donne une relation entre les largeurs spectrales exprimées en fréquence et en longueur d'onde :

Remarque : ce résultat n'est pas à retenir par cœur, mais il est nécessaire de savoir le retrouver sans difficultés.

Un exemple pour comprendre - Largeur spectrale et train d'onde

Une lampe à vapeur de mercure produit (entre autres) une raie violette peu visible à la longueur d'onde $\lambda = 404,66 \text{ nm}$, de largeur caractéristique $\Delta\lambda \simeq 1 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$.

1. Déterminer son temps de cohérence τ_c , et en déduire la longueur de cohérence.
2. En déduire le nombre de périodes comprises dans un train d'onde.

Remarque : dans l'interprétation en termes de train d'onde, la longueur de cohérence correspond à la longueur d'un train d'onde lorsqu'il se propage dans le vide.

I.3 - Réception de l'onde : description des capteurs

Il existe divers capteurs permettant de détecter les ondes lumineuses, c'est-à-dire traduire le signal électromagnétique en une autre grandeur physique exploitable. Les principaux sont l'œil, les capteurs CCD, et les photodiodes.

I.3.A - Temps de réponse

Le temps de réponse d'un capteur est la durée caractéristique des variations les plus rapides qu'il peut transcrire. Pour les principaux types de capteurs, on pourra retenir les ordres de grandeurs très approximatifs :

Capteur	Œil	CCD	Photodiode
Temps de réponse τ_r			

Quel que soit le capteur considéré, il est impossible d'observer les variations instantanées de l'onde électromagnétique, dont la fréquence est de l'ordre de 10^{14} Hz : le signal observé grâce aux capteurs à l'instant t est une moyenne de l'énergie accumulée par ce capteur sur une durée de l'ordre de τ_r .

I.3.B - Intensité lumineuse, ou éclairement**Intensité lumineuse I**

L'intensité lumineuse I est la grandeur qui, intégrée sur une surface, donne la puissance lumineuse reçue sur cette surface :

$$\mathcal{P}_1 = \iint_{M \in S} I(M) dS(M)$$

La grandeur I est donc une puissance par unité de surface, qui s'exprime donc en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Un capteur placé en un point délivre un signal proportionnel à l'intensité lumineuse en ce point.

On comprend que l'intensité lumineuse arrivant sur une surface est directement liée au vecteur de Poynting (ou plutôt, à sa valeur moyenne). L'intensité est proportionnelle au carré du champ électrique, lui-même étant proportionnel à la grandeur scalaire s manipulée dans ce chapitre. On se contentera de retenir :

Intensité lumineuse I via l'amplitude de l'onde scalaire

On peut définir l'intensité comme :

- La moyenne temporelle du carré de l'onde scalaire réelle : $I(M) = \langle s(M)^2 \rangle$
- La norme au carré de l'onde \underline{s} l'onde scalaire en représentation complexe : $I = |\underline{s}(M)|^2$

Pour une onde plane quelconque en représentation réelle :

Pour une onde plane quelconque en représentation complexe :

Attention : il y a un facteur 2 entre les deux définitions, mais il est rare qu'elles soient toutes deux utilisées dans le même exercice.

II - PROPAG. D'ONDE LUMINEUSE : MODELE ONDULATOIRE ET GEOMETRIQUE

Dans la partie précédente, on a introduit le formalisme mathématique permettant de décrire la propagation d'une onde lumineuse. On doit désormais trouver une manière de concilier la vision ondulatoire et la vision géométrique de l'optique : qu'est-ce qu'un rayon lumineux ? Que devient la grandeur ondulatoire $s(\mathbf{M}, t)$ lorsqu'un rayon se propage dans l'espace ?

II.1 - Lien entre surfaces d'onde et rayons lumineux

On rappelle qu'une surface d'onde est une surface sur laquelle la grandeur ondulatoire est identique à tout instant. On définit la notion de phase, qui est très proche, mais plus mathématique :

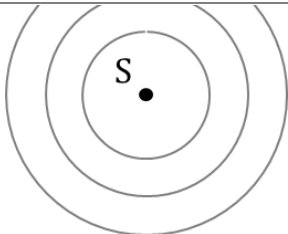
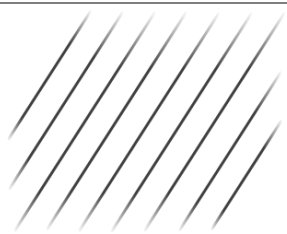
Phase d'une onde harmonique sphérique ou plane

Dans une onde harmonique, la phase ϕ de l'onde est la partie non-temporelle de l'argument du cosinus ou de l'exponentielle :

Onde plane : $s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \phi) \rightarrow \phi(\mathbf{M}) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \phi$

Onde sphérique : $\frac{s_0}{r} \cos(\omega t - kr - \phi) \rightarrow \phi(\mathbf{M}) = kr + \phi$

Par définition, les surfaces d'onde sont des surfaces équiphases.

Type d'onde	Onde sphérique émise à l'origine d'un repère $s(\mathbf{M}, t) = \frac{s_0}{r} \cos(\omega t - kr - \phi)$	Onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} $s(\mathbf{M}, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \phi)$
Surfaces d'onde Surface équiphases	$(r = \text{cte}) \Rightarrow$ Sphères	$(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{cte}) \Rightarrow$ les plans \perp à \vec{k}
Allure		

Pour les ondes sphériques comme pour les ondes planes, on voit que les surfaces d'ondes sont perpendiculaires à \vec{k} (qu'on assimile à la direction de propagation de l'onde). On acceptera donc le théorème suivant :

Théorème de Malus

Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde (i.e. aux surfaces équiphases).



Dans chacune des simulations de propagation d'onde proposées en lien, on peut faire pause, et supersposer les rayons lumineux.

II.2 - Variation de la grandeur ondulatoire le long d'un rayon lumineux

II.2.A - Prérequis : propagation dans les milieux transparents

Dans un milieu transparent, sans charges libres ni courant, la propagation des ondes électromagnétiques répondait à l'équation de D'Alembert suivante :

$$\Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \text{relation de dispersion OPPH } \omega = k \frac{c}{n}$$

La célérité de l'onde est alors $c' = c/n$, où n est l'indice optique du milieu, qu'on peut définir comme le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur celle dans le matériau :

$$n = c/c' \quad (\text{donc } n \geq 1)$$

Puisqu'une onde passant d'un milieu vide à un milieu d'indice n ne vérifie pas la même relation de dispersion ($\omega = kc$ et $\omega = \frac{kc}{n}$), il y a forcément un changement des paramètres de propagation ω et/ou k lors de la traversée.

Conservation de la fréquence aux interfaces

La pulsation (ou la fréquence) d'une onde est invariante lors d'un changement de milieu.

C'est le vecteur d'onde (ou la longueur d'onde) qui est modifié par _____

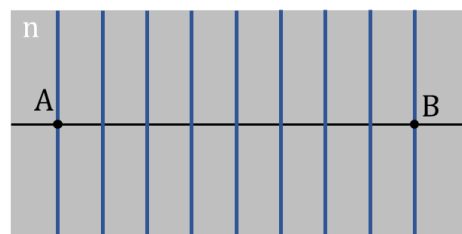
Remarque : il est normal que ce soit la fréquence qui reste invariable, car le matériau d'indice n ne « reçoit » l'onde incidente que par son interface ; il ne perçoit pas la longueur d'onde mais seulement la fréquence d'oscillation du champ à l'interface.

II.2.B - Déphasage propagatif dans un milieu, chemin optique

Pour quantifier la manière dont l'expression de l'onde change entre deux points liés par un rayon lumineux, nous ferons usage de la notion de « phase » ou « phase propagative » d'une onde harmonique. On se place dans un milieu d'indice n , dans lequel une onde se propage entre un point A et B (liés par un rayon lumineux).

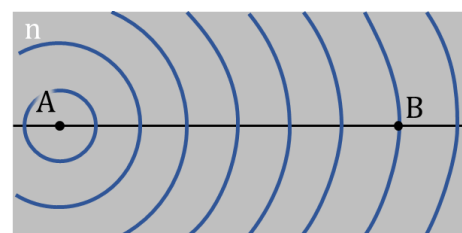
L'onde au point A prend la forme $s(A, t) = s_0 \cos(\omega t - kx_A + \varphi)$. Alors elle prend au point B la forme $s(B, t) = s_0 \cos(\omega t - kx_B + \varphi)$.

C'est-à-dire qu'on peut écrire l'onde en B (ou B', ou B'') comme :



L'onde au point A prend la forme $s(A, t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Alors elle prend au point B la forme $s(B, t) = s_0 \cos(\omega t - k r_{AB} + \varphi)$.

C'est-à-dire qu'on peut écrire l'onde en B (ou B', ou B'') comme :



La propagation d'une onde le long d'un rayon lumineux entre A et B a pour conséquence d'ajouter un déphasage $\Delta\phi$ à la phase de l'onde en A. Le calcul de ce **déphasage propagatif**, qui permet de simplifier l'étude de l'onde en divers points, passe par l'utilisation du chemin optique.

Définition du chemin optique le long d'un rayon lumineux

Le chemin optique suivant un rayon lumineux de A à B est la quantité : $(AB) = [AB] = \int_{C_{AB}} n \cdot dl = \int_{M=A}^B n(M) dl(M)$

Dans un milieu homogène d'indice optique n , le chemin optique est : _____

La différence de phase d'une onde entre deux point A et B s'exprime : _____

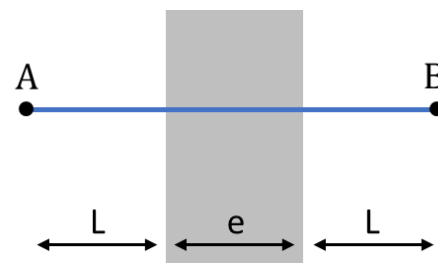
Remarque : dans la totalité des cas en PT, la deuxième expression du chemin optique convient. Si les changements d'indice sont brutaux (comme lors du passage au travers d'une lentille ou d'un prisme), on pourra **décomposer le chemin optique en plusieurs contributions d'indice optique uniforme**, comme par exemple : $[AB] = n_1 AM + n_2 MB$ si le segment AM est dans un milieu d'indice n_1 et le segment MB dans un milieu d'indice n_2 .

Cette expression permet d'exprimer simplement l'état $s(B, t)$ d'une onde en un point B, connaissant son état $s(A, t)$ en A. Par exemple, si une onde plane se propage de A à B, que son état en A est $s(A, t) = s_0 \cos(\omega t)$, alors son état en B est $s(B, t) = s_0 \cos(\omega t + \Delta\phi(AB))$.

Un exemple pour comprendre - Calcul du déphasage propagatif

On considère un rayon lumineux joignant les points A et B, en passant par une lame de verre d'indice n .

Établir le déphasage propagatif $\Delta\phi(AB)$ entre ces deux points, et l'exprimer avec le chemin optique $[AB]$.

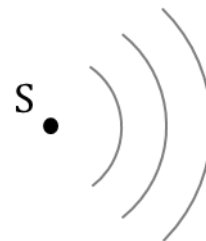
**II.3 – Bilan : approche ondulatoire d'une expérience d'optique géométrique**

On reprend ci-dessous l'exercice le plus classique d'optique géométrique, consistant à tracer l'image d'un objet réel par une lentille. On ajoute une dernière propriété vérifiée par les surfaces d'onde / équiphases, qui sera utile dans de nombreuses situations mêlant optique géométrique et ondulatoire.

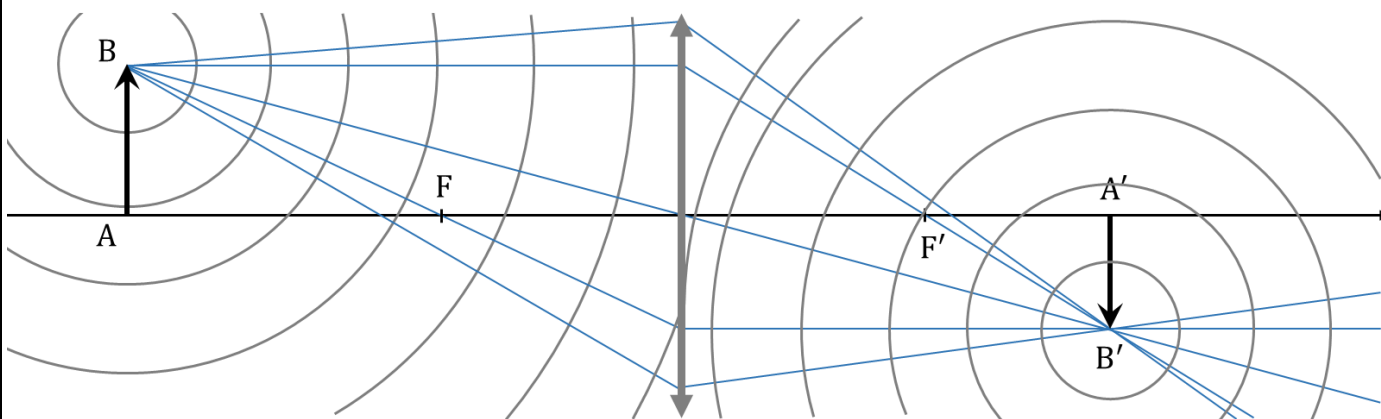
Chemin optique entre la source S et une surface d'onde Σ

Puisque les surfaces d'onde sont des surfaces équiphases, tous les chemins optiques issus d'une source S vers une même surface d'onde Σ sont identiques :

$$\forall M \in \Sigma, [SM] = \text{cte}$$

**Exemple d'application - Surfaces d'onde et lentille**

On considère un objet AB situé sur l'axe optique d'une lentille de distance focale f' . Comme d'habitude, en optique géométrique, on considère que chaque point de l'objet émet des rayons lumineux dans toutes les directions.



1. Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB (en utilisant les règles de l'optique géométrique).
2. En utilisant le théorème de Malus, en déduire la forme des surfaces d'onde (pour les ondes émises par B).
3. Comparer les différents chemins optiques entre B et B' .

De cet exercice, on déduira sans preuve formelle la généralisation suivante :

Chemins optiques entre deux points conjugués

Le chemin optique entre deux points conjugués par un système optique parfaitement stigmatique est indépendant du rayon lumineux suivi.

On rappelle qu'un système est stigmatique si un point objet donne un point image après passage par le système. Aucun système réel n'est parfaitement stigmatique ; les lentilles ne le sont que dans les **conditions de Gauss** :

- Les rayons sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique ;
- Les rayons passent près du centre de la lentille.

III - SUPERPOSITION D'ONDES ET INTERFERENCES

On s'intéresse dans cette section au signal ondulatoire issu d'une superposition de plusieurs ondes en un point. On verra que dans certains cas spécifiques, il est possible d'observer des phénomènes qui ne pourraient pas être décrits par l'optique géométrique : les interférences.

III.1 - Formule de Fresnel

On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant chacune une onde monochromatique dans un milieu homogène. Ces deux ondes se superposent dans tout l'espace, mais on étudie le signal résultant en un seul point M quelconque.

Si on suppose qu'un point S_1 et S_2 , les ondes prennent la forme $s_1(S_1, t) = S_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ et $s_2(S_2, t) = S_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$, alors l'expression de chaque onde au point M peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} s_1(M, t) = S_{01} \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} [S_1 M] - \varphi_1\right) \\ s_2(M, t) = S_{02} \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} [S_2 M] - \varphi_2\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \underline{s}_1(M, t) = S_{01} \exp\left(i\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} [S_1 M] - \varphi_1\right)\right) \\ \underline{s}_2(M, t) = S_{02} \exp\left(i\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} [S_2 M] - \varphi_2\right)\right) \end{cases}$$

Dans les deux expressions ci-dessus :

- on a exprimé la phase de l'onde directement en termes des longueurs d'onde dans le vide (λ_1 et λ_2), et des chemins optiques ($[S_1 M]$ et $[S_2 M]$) ;
- On a supposé qu'on pouvait ne pas prendre en compte une éventuelle modification de l'amplitude des ondes lors de la propagation (les amplitudes restent S_{01} et S_{02}) ;

On rappelle que dans le modèle du train d'onde, φ_1 et φ_2 sont des phases à l'origine qui varient brutalement de manière aléatoire à chaque nouveau train d'onde, de durée caractéristique τ_c .

Signal résultant de la superposition de s_1 et s_2 au point M

1. Calculer l'intensité lumineuse due à s_1 au point M , puis celle due à s_2 .
2. Calculer l'intensité lumineuse due à la superposition de s_1 et s_2 au point M .

On obtient donc une intensité lumineuse contenant un terme supplémentaire, sous forme d'une valeur moyenne de cosinus. On étudie dans la sous-partie suivant les conditions dans lesquelles ce terme peut s'avérer non-nul.

Superposition et interférence

Lorsque deux ondes existent à un même endroit de l'espace, au même moment, on dit qu'il y a **superposition d'ondes**. Lorsque l'intensité lumineuse produite en ce point de l'espace n'est pas simplement égale à la somme de chaque intensité produite par chaque onde prise isolément, on dit qu'il y a **interférence**.

Superpositions de deux ondes : $\begin{cases} \text{Sans interférence : } \underline{\hspace{10cm}} \\ \text{Avec interférence : } \underline{\hspace{10cm}} \end{cases}$

III.2 - Critère de cohérence

On a déjà établi que la valeur moyenne du cosinus ne pouvait être non-nulle que si $\omega_1 = \omega_2$. À cette condition, on a montré que l'intensité résultant de la superposition s'écrivait :

$$I(M) = I_{01} + I_{02} + 2\sqrt{I_{01}I_{02}} \left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M]) + \varphi_1 - \varphi_2 \right) \right\rangle$$

Il reste à étudier la valeur de $\varphi_1 - \varphi_2$. Deux sources différentes ont des trains d'onde non-synchronisés, et le déphasage de chaque train de la source 1 n'a aucune raison de correspondre au déphasage des trains de la source 2.

Puisque φ_1 et φ_2 varient de manière aléatoire et très rapide, la valeur moyenne sur le temps d'intégration du détecteur est donc :

On peut donc en déduire les conditions d'interférences entre deux ondes :

Conditions nécessaires pour observer une interférence

Les interférences sont possibles quand :

- Les deux ondes ont exactement la même pulsation (elles sont « synchrones ») ;
- Les deux ondes sont issues de la même source (séparées, puis réunies en un point).

Deux ondes capables d'interférer sont dites **cohérentes**.

On en conclut que pour interférer, deux ondes doivent être issues d'une même source, séparées, parcourir un chemin optique différent, puis être réunies en un point. Dans ces conditions, l'intensité est donnée par la formule de Fresnel :

Formule de Fresnel : interférence entre ondes cohérentes

Deux ondes issues de la même source (donc composées des mêmes trains d'ondes) ayant suivi deux chemins différents avant d'être réunies en un point M produisent un éclaircissement :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) \quad \Delta\phi = \text{différence de phase} = \frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M])$$

Dans le cas où les ondes sont incohérentes, l'éclaircissement issu de la superposition est :

$$I = I_1 + I_2$$

Remarque : Dans le cas courant où les deux ondes ont la même intensité $I_{01} = I_{02} = I_0$, cela devient :

$$I(M) = 2 I_0 (1 + \cos(\Delta\phi)) \Rightarrow 0 < I(M) < 4 I_0$$

La plupart du temps, on demande de démontrer la formule de Fresnel dans le cas de signaux qu'on suppose cohérent, c'est-à-dire synchrones, et dont la phase à l'origine varie de manière aléatoire mais identique.

III.2.A - Démonstration usuelle de la formule de Fresnel, représentation réelle

Démonstration « pratique » de la formule de Fresnel, lorsque les conditions d'interférences sont réunies :

On part de deux ondes issues originellement de la même source, mais séparées, si bien que tout se passe comme si elles venaient des points S_1 et S_2 . Leur expression est écrite ci-contre.

$$\begin{cases} s_1(M, t) = S_{01} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_1 M] - \varphi\right) \\ s_2(M, t) = S_{02} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_2 M] - \varphi\right) \end{cases}$$

On reprend alors le calcul de l'intensité issue de la superposition des deux ondes au point M :

$$\begin{aligned} I &= \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2\langle s_1 s_2 \rangle \\ &= \frac{S_{01}^2}{2} + \frac{S_{02}^2}{2} + 2 S_{01} S_{02} \left\langle \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_1 M] - \varphi\right) \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_2 M] - \varphi\right) \right\rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \left(\left\langle \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t - \frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] + [S_2 M]) - 2\varphi\right) \right\rangle + \left\langle \cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda} ([S_2 M] - [S_1 M])\right) \right\rangle \right) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M])}_{\Delta\phi}\right) \end{aligned}$$

III.2.B - Démonstration usuelle de la formule de Fresnel, représentation complexe

Il sera souvent demandé d'effectuer la démonstration en représentation complexe, ce qui n'est pas plus difficile, bien que les étapes de calcul soient différentes.

On part de deux ondes en représentation complexe, issues originellement de la même source, mais séparées, si bien que tout se passe comme si elles venaient des points S_1 et S_2 . Leur expression est écrite ci-contre.

$$\begin{cases} \underline{s}_1(M, t) = S_{01} \exp\left(i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_1 M] + \varphi\right)\right) \\ \underline{s}_2(M, t) = S_{02} \exp\left(i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_2 M] + \varphi\right)\right) \end{cases}$$

L'intensité issue de la superposition des ondes se calcule ici via $I = |\underline{s}|^2$ (qui, on se rappelle, est une grandeur différente de $\langle s^2 \rangle$, mais est la convention retenue lorsqu'on travaille en représentation complexe).

$$\begin{aligned}
 |\underline{s}|^2 &= \left| (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^2 \right| = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^* = \underline{s}_1 \underline{s}_1^* + \underline{s}_2 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \underline{s}_2 = |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} (\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) \\
 &= I_1 + I_2 + 2 S_{01} S_{02} \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_1 M] + \varphi)} e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [S_1 M] + \varphi)} \right) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \left(e^{i \left(-\frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M]) \right)} \right) \\
 &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M])}_{\Delta\phi} \right)
 \end{aligned}$$

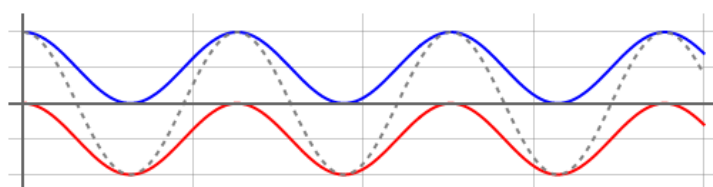
III.3 - Interférence constructive et destructives

Interférences constructives et destructives

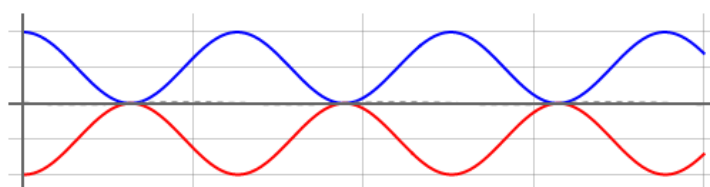
Les interférences en un point M sont :

- Constructives si l'éclairement y est maximal, c'est-à-dire $\cos(\Delta\phi(M)) = +1$;
- Destructives si l'éclairement y est minimal, c'est-à-dire $\cos(\Delta\phi(M)) = -1$.

Lorsque les ondes sont en phase, l'amplitude de l'onde résultante est doublée. Lorsqu'elles sont en opposition de phase, l'amplitude de l'onde résultante est nulle :



Interférences constructives



Interférences destructives

III.3.A - En termes de déphasage, d'ordre d'interférence, et de différence de marche

Le déphasage entre deux ondes en un point M est le terme $\Delta\phi(M)$ dans le cosinus de la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} ([S_1 M] - [S_2 M])}_{\Delta\phi} \right)$$

Plutôt que de parler de déphasage, on utilisera souvent les notions très proches d'ordre d'interférences, ou de différence de marche.

Déphasage, ordre d'interférence, différence de marche

Lorsqu'on souhaite savoir si deux ondes interfèrent constructivement ou destructivement en un point M, on doit calculer le déphasage $\Delta\phi(M)$, ou l'ordre d'interférence $p(M)$, ou la différence de marche $\Delta(M)$:

Conditions d'interférences constructives

$$\Delta\phi(M) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$p(M) = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\delta(M) = k\lambda \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Conditions d'interférences destructives

$$\Delta\phi(M) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$p(M) = k + 1/2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\delta(M) = (k + 1/2)\lambda \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque : puisque le facteur 2π et λ sont connus, la principale difficulté réside dans le calcul de la différence de marche entre deux ondes arrivant au point M. C'est ce point qui sera la source de développements dans la suite du chapitre (et dans les chapitres suivants).

IV - ALLURE QUALITATIVE DES FIGURES D'INTERFÉRENCE

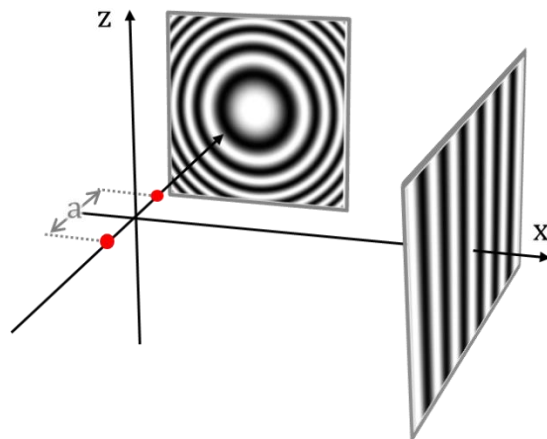
IV.1 - Franges et anneaux

Considérons un cas idéal : deux sources ponctuelles identiques (qui émettent exactement la même onde), parfaitement monochromatiques, distantes de a le long de l'axe Oy .

On représente schématiquement ci-contre les interférences obtenues lorsqu'on place deux écrans (le premier perpendiculairement à l'axe Oy et le second perpendiculairement à l'axe Ox).

Sur le premier écran, la différence de marche en un point de l'écran est invariante par rotation autour de l'axe Oy , donc l'intensité lumineuse aussi. Par contre, s'éloigner du centre change la différence de marche.

Sur le second écran, la différence de marche en un point de l'écran est invariante par translation selon l'axe Oz , donc l'intensité lumineuse aussi (ce raisonnement est rigoureusement valable uniquement dans le cas d'un écran très lointain). Par contre, se déplacer selon Oy change la différence de marche.



IV.2 - Contraste

Dans cette sous-partie, on illustre l'effet du contraste sur l'allure des figures d'interférences, dans le but qu'il ne soit pas confondu avec la luminosité.

Contraste d'une figure d'interférences

Le contraste d'une figure d'interférence, noté C , est défini comme :
$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \text{avec} \quad 0 < C < 1$$

On rappelle ci-dessous la formule de Fresnel trouvée précédemment :

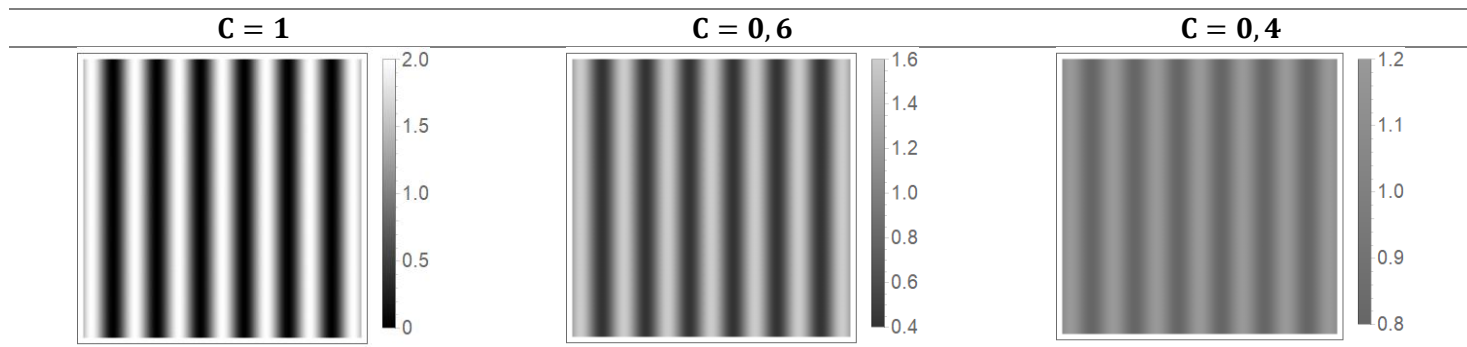
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$$

Pour calculer le contraste, on détermine d'abord les valeurs extrêmes de l'intensité lumineuse :

On peut alors récrire la formule de Fresnel en utilisant le contraste :

$$I = I_1 + I_2 + C(I_1 + I_2) \cos(\Delta\phi) = (I_1 + I_2)(1 + C \cos(\Delta\phi))$$

Le contraste vient moduler l'amplitude de variation de l'intensité lumineuse : s'il est nul, le cosinus disparaît, et l'intensité est uniforme ; s'il est égal à 1, le cosinus varie dans $[-1, 1]$, donc les franges sombres ont une intensité nulle, et les franges brillantes une intensité de $2(I_1 + I_2)$. On a représenté ci-dessous les franges pour différents contrastes :



Le contraste quantifie l'écart de luminosité entre les franges sombres et brillantes. Une figure très peu contrastée peut tout à fait être très lumineuse, et une figure très contrastée peut être quasi-invisible. Une figure d'interférences mal contrastée est dite **brouillée**.

IV.2.A - Effet d'une asymétrie de l'intensité des sources sur les franges

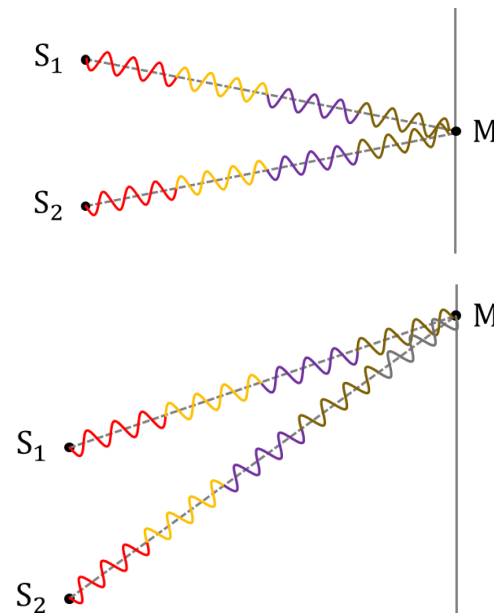
On peut récrire le contraste de la manière suivante : $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{I_2/I_1}}{1 + I_2/I_1}$. La fonction $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est nulle en $x = 0$ et $x \rightarrow \infty$: si l'une des sources s'éteint les franges disparaissent. La fonction présente un maximum en $x = 1$, c'est-à-dire lorsque les intensités lumineuses sont égales. **Les franges d'interférence ont un contraste maximal lorsque $I_2/I_1 = 1$, c'est-à-dire lorsque les sources ont une intensité identique.**

IV.2.B - Effet d'une source non-monochromatique sur les franges

On considère deux sources parfaitement synchrones, mais pas parfaitement monochromatiques. Dans le modèle des trains d'ondes, elles émettent des successions d'ondes sinusoïdales aléatoirement déphasées (représentées par des portions de sinusoides colorées ci-contre).

- Lorsque les chemins optiques $[S_1 M]$ et $[S_2 M]$ sont proches, ou identiques, comme sur le schéma du dessus, la superposition au point M se fait entre deux trains d'ondes identiques. Les interférences peuvent être parfaitement constructives ou destructives.
- Lorsque la différence entre les chemins optiques $[S_1 M]$ et $[S_2 M]$ augmente, comme sur le schéma du dessous, la superposition au point M se fait entre deux trains d'ondes différents : le déphasage entre les deux est aléatoire, donc la superposition au point M ne peut pas mener à des interférences.

Dès que la différence de marche devient supérieure ou de l'ordre de la longueur L_c d'un train d'onde (longueur de cohérence de la source), les interférences ne sont plus observables. L'effet est bien sûr progressif.



Limite d'observation des franges pour une source non-monochromatique

Pour une source non-monochromatique, d'étalement spectral Δf (donc de temps de cohérence $\tau_c \sim 1/\Delta f$, dont la longueur typique des trains d'onde est $L_c \sim c \tau_c$) :

- les interférences sont bien contrastées si $\delta \ll L_c$;
- les franges subissent une forte perte de contraste si $\delta \gg L_c$.

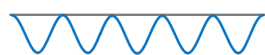
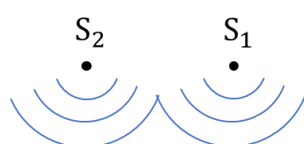
IV.2.C - Effet d'une source non-punctuelle sur les franges

Comme on l'a mentionné plus haut, toute source réelle est étendue, ne serait-ce que de quelques millimètres. **On considère que chaque point d'une source non-punctuelle est incohérent avec ses voisins.** Les interférences résultant d'une source de lumière étendue sont la somme des éclaircissements produits par chaque point de la source pris individuellement.

Les franges d'interférence produites par chaque point source sont légèrement décalées les unes par rapport aux autres, ce qui :

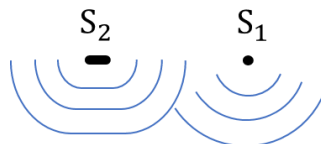
- Si la source est peu étendue, peut conduire à un léger brouillage des franges, mais à une luminosité plus grande.
- Si la source trop étendue, peut finalement conduire à un brouillage total de la figure d'interférence.

On représente schématiquement le phénomène de brouillage des franges ci-dessous, à mesure que la source S_2 s'élargit :



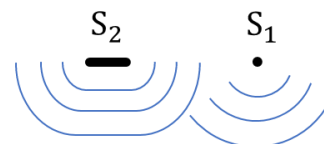
Sources ponctuelles :

Luminosité faible, mais interférences parfaites : le contraste est 1



Sources de taille modérée :

Luminosité améliorée, mais interférences imparfaites : le contraste est inférieur à 1



Sources trop grandes :

Grande luminosité, mais interférences brouillées : le contraste est inférieur nul