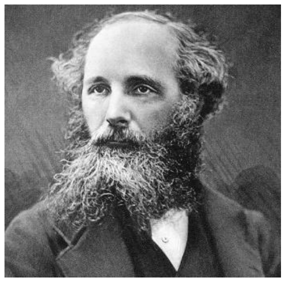
Équations de Maxwell

Dans un espace contenant une densité de charges $\rho(M)$, et une densité de courant $\vec{j}(M)$, les champs vectoriels $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ vérifient les quatre équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss	Maxwell-Thompson	Maxwell-Faraday	Maxwell-Ampère
$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



Champs électriques et magnétiques :
$\vec{E}$: vecteur champ électrique ($V.m^{-1}$)
$\vec{B}$: vecteur champ magnétique (T)

Sources de champs :
ρ : densité de charge ($C.m^{-3}$)
$\vec{j}$: vecteur densité de courant ($A.m^{-2}$)

Constantes :
ϵ_0 : permittivité du vide ($8{,}854\cdot 10^{-12}\ F.m^{-1}$)
μ_0 : perméabilité du vide ($1{,}257\cdot 10^{-6}\ T.m/A$)

Dans le chapitre précédent ont été introduites les principales propriétés du champ électrique $\vec{E}$, ainsi que les méthodes de calcul analytiques utiles dans les cas de distributions de charge à haut degrés de symétrie (sphère, cylindre, plan). Dans ce chapitre, on aborde une formulation différente des problèmes d'électrostatique par l'intermédiaire d'un champ qui n'apparait pas explicitement dans les équations de Maxwell : **le champ de potentiel électrostatique V**, qu'il est possible de lier simplement au champ électrostatique, via la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$.

Cela permet d'une part de manipuler un champ scalaire plutôt qu'un champ vectoriel (ce qui simplifie souvent les calculs), et d'autre part permet de faire le lien avec d'autres grandeurs usuelles de l'électrocinétique : le **potentiel électrique** et les **tensions.**

TABLE DES MATIERES

I - FORMULATION DE L'ÉLECTROSTATIQUE VIA LE POTENTIEL V

En mécanique newtonienne de première année, on développe deux manières de résoudre des problèmes de mécanique :

- via les forces $\vec{F}$ qui s'appliquent au système et la 2ème loi de Newton ;
- via les énergies potentielles E_p du système et les théorèmes énergétiques (TEC, TPC, etc.)

L'équivalence entre les deux approches est basée sur la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E)$, qui permet de passer des forces aux énergies potentielles, et inversement. Un cas similaire se présente en électromagnétisme : on pourra bientôt aborder les problèmes :

- en termes de champ électrostatique $\vec{E}$ (comme dans le chapitre précédent) ;
- en termes de potentiel électrostatique V, comme nous le verrons dans ce chapitre.

I.1 - Définition du potentiel électrostatique V

Dans cette partie, on justifie l'existence du potentiel électrostatique V, et on explicite son lien avec le champ électrique $\vec{E}$.

Equation de Maxwell-Faraday

En tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\partial\vec{B}/\partial t$. Dans le cas d'un régime stationnaire, on a simplement : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$.

Rappel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}$

En règle générale, on voit qu'il existe un couplage entre le champ électrique et le champ magnétique : ces deux grandeurs ne sont pas indépendantes, puisqu'une variation temporelle de champ $\vec{B}$ cause l'apparition d'un rotationnel de champ $\vec{E}$ (donc un champ $\vec{E}$ non-nul). Cette propriété sera très importante quand on étudiera la propagation des ondes électromagnétiques.

En régime stationnaire, ce couplage disparait, si bien que le rotationnel du champ électrostatique est simplement nul. C'est cette propriété qui permet de définir le potentiel électrostatique :

Potentiel électrostatique V

Quel que soit le champ vectoriel $\vec{G}$, la propriété $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}) = \vec{0}$ implique l'existence d'un champ scalaire g tel quel $\vec{G} = \pm\overrightarrow{\text{grad}}(g)$.

En régime stationnaire, puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$, on définit le **potentiel électrostatique V**, vérifiant ______

______

Remarque : le champ V possède les mêmes dépendances que le champ $\vec{E}$ (autrement dit, il possède les mêmes invariances).

Démonstrations - Propriétés du potentiel V

Propriété 1 : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ vérifie l'équation de Maxwell-Faraday stationnaire : ______

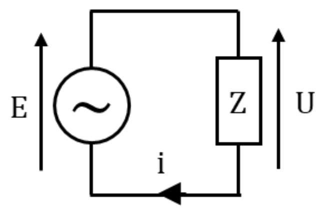
Propriété 2 : Un potentiel auquel on ajoute une constante correspond à un même champ $\vec{E}$: ______

Propriété 3 : Sachant que $\vec{E}$ est continu (sauf éventuellement au niveau des charges), justifier que c'est aussi le cas du champ V.

______

Différence de potentiel (ou tension) en électrocinétique

Le potentiel V est défini en tout point de l'espace (y compris dans la matière). **C'est ce champ dont on parle en électrocinétique lorsqu'on exprime des « différences de potentiels », ou simplement des potentiels en certains points du circuit.**



I.2 - Calculs de potentiels électrostatiques (et de différences de potentiels)

I.2.A - Potentiels créés par des distributions classiques

Démonstration - Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique créé par une charge ponctuelle située à l'origine est $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$.

En déduire le potentiel V dont dérive ce champ, en choisissant une valeur de potentiel nulle à l'infini.

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Le potentiel créé par une charge ponctuelle placée à l'origine d'un repère sphérique s'écrit : $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Et un ensemble de charges ponctuelles situées aux points P_k donnent au point M un potentiel : $V(M) = \displaystyle\sum_k \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \cdot MP_k}$

Attention : lorsque la distribution de charge est de taille infinie (même dans une seule direction), il est possible qu'on ne puisse pas imposer la valeur du potentiel nulle à l'infini. Il suffit alors simplement de l'imposer nulle à un autre endroit.

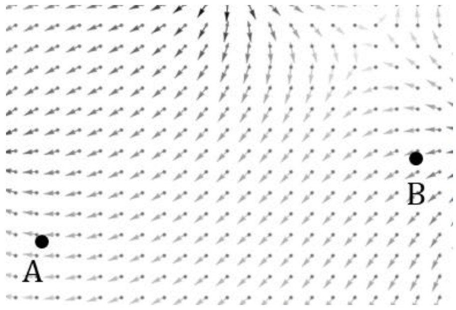
I.2.B - Calcul d'une différence de potentiel par circulation de $\vec{E}$

Dans cette partie, on introduit une nouvelle notion de calcul vectoriel : la circulation d'un champ vectoriel sur une courbe. Cela sera utile pour faire le lien entre le champ électrostatique et la tension définie en électrocinétique (et sera réutilisé dans le chapitre de magnétostatique).

Circulation d'un champ vectoriel sur une courbe entre A et B

La circulation d'un champ vectoriel $\vec{U}$ le long d'une courbe $\mathcal{C}_{AB}$ est :

Où le vecteur $\vec{dl}$ est le vecteur déplacement infinitésimal tangent à la courbe.



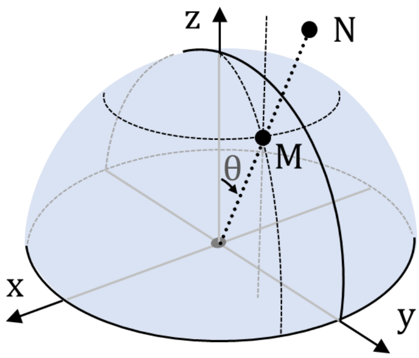
Un exemple pour comprendre – Calcul de déplacement élémentaire, calcul de circulation

Sur le schéma ci-contre, on considère que dans tout l'espace règne un champ créé par une particule placée à l'origine :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$$

Le point M est situé aux coordonnées (r_m, θ_m, ϕ_m). On considère des déplacements infinitésimaux partant de ce point M.

1. Dans le cas d'un déplacement selon $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ ou $\boxed{3}$, déterminer le déplacement $\vec{dl}$.
2. Calculer la circulation de $\vec{E}$ sur le segment MN.

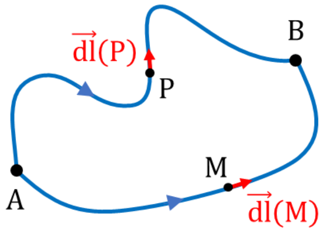


Le calcul d'une circulation prend donc des formes variées, car le déplacement élémentaire $\vec{dl}$ est voué à être particularisé à chaque fois, en tenant compte du chemin souhaité et du système de coordonnées du problème. L'importance de la circulation de $\vec{E}$ est expliquée ci-après :

Circulation du champ électrostatique sur une courbe entre A et B

On considère une courbe $\mathcal{C}_{AB}$ allant d'un point A vers un point B :

Une tension (différence de potentiel) est une circulation de champ électrostatique !



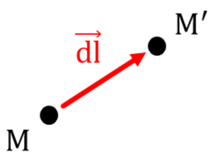
Dans la démonstration ci-dessus, on a fait usage de la relation $dV = \overrightarrow{grad}(V)\cdot\vec{dl}$, qu'on justifie ci-dessous :

Appendice mathématique nécessaire : Expression générale de la différentielle df d'une fonction f

On rappelle que la différentielle d'une fonction f peut s'écrire en général comme sa variation df lorsque chacune de ses variables varie d'une quantité infinitésimale :

On généralise cette relation sous une forme indépendante du système de coordonnées, pour n'importe quel déplacement élémentaire $\vec{dl}$: ____

Cette relation peut être interprétée de la manière suivante : si on considère une fonction f définie dans tout l'espace, la variation df de cette fonction entre le point M, et le point infinitésimalement proche M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$ est simplement : $\overrightarrow{grad}(f)\cdot\vec{dl}$.



$$f(M') = f(M) + \overrightarrow{grad}(f)\cdot\vec{dl}$$

La valeur de la circulation ne dépend pas du chemin suivi par la courbe, mais seulement des points extrêmaux : le champ électrostatique est **à circulation conservative**. Notamment, si les extrémités sont confondues $\int_{\mathcal{C}_{AA}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$.

Remarque : la situation est analogue à celle du travail d'une **force conservative** le long d'un chemin $\mathcal{C}_{AB}$: il ne dépend que des points initiaux et finaux (pas du chemin suivi par le système mécanique entre les deux).

I.3 - Lien entre potentiel V et énergie

L'un des avantages du potentiel électrostatique est sa relation avec l'énergie potentielle d'une particule chargée :

Définition de l'énergie potentielle électrostatique

Une particule de charge q_0 placée au point M possède une énergie potentielle $E_{p,E}(M)$ qui s'exprime[1] : ____________

Cette énergie potentielle est celle dont dérive la force de Lorentz électrique : ____________

Démonstration - Énergie potentielle électrostatique $E_{p,E} = q_0 V$

Rappel de mécanique de PTSI :

- Travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\vec{dl}$ d'un système : $\delta W_F = \vec{F} \cdot \vec{dl}$;
- Sur un déplacement élémentaire $\vec{dl}$, le travail est lié à la variation d'énergie potentielle : $dE_p = \delta W_F$.

I.4 - Équation de Poisson

Dans de nombreuses situations, il est préférable de déterminer le potentiel électrostatique V pour ensuite trouver le champ $\vec{E}$ via la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$. Cela dit, nous n'avons pas encore défini l'équation permettant de calculer le potentiel V directement (à partir de la distribution de charge uniquement).

Équation vérifiée V - Équation de Poisson, et équation de Laplace

Dans un milieu de densité volumique de charge ρ, le potentiel électrostatique V vérifie **l'équation de Poisson : $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$**.

Si le milieu ne contient aucune charge, on obtient **l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$**.

Démonstration :

____

Les équations de Poisson et de Laplace justifient en partie l'intérêt de la formulation de l'électrostatique en termes de potentiels : ce sont deux **équations scalaires** (contrairement à l'équation de Maxwell-Gauss), pour lesquelles il existe divers algorithmes numériques fonctionnant dans une grande variété de cas. Nous aborderons la résolution numérique de l'équation de Poisson en TD de physique numérique.

II - MODÉLISATION DU CONDENSATEUR SIMPLE

La modélisation d'un condensateur permet de mettre en pratique toutes les notions abordées plus haut dans ce chapitre. Le modèle le plus simple du condensateur consiste simplement en **deux armatures conductrices** se faisant face, et séparées l'une de l'autre par un isolant (le plus souvent, de l'air, mais tout autre isolant est possible : verre, caoutchouc, etc.)

[1] On utilisera cette expression dans l'unique cas d'une particule ponctuelle plongée dans un champ électrostatique. L'énergie potentielle d'une distribution de charge étendue plongée dans un champ $\vec{E}$ est plus compliquée.

II.1 - Modèle du condensateur infini

On peut encore idéaliser ce modèle pour arriver au **condensateur plan infini** :

- **Plan** : les armatures sont planes, de surface identique S, séparées d'une distance constante e ;
- **Infini** : la taille des armatures est suffisamment grande devant l'épaisseur pour que les effets de bord des armatures ne soient pas significatifs $\left(e \ll \sqrt{S}\right)$;
- L'isolant central est du vide, et aucune source de champ ou charge ne vient perturber l'établissement du champ électrostatique entre les plaques.

On obtient ainsi une distribution de charges simple dans les armatures, à haut degré de symétrie, qui va permettre de calculer analytiquement des propriétés du condensateur. On pourra ensuite considérer des cas plus réalistes dans certains problèmes du TD.

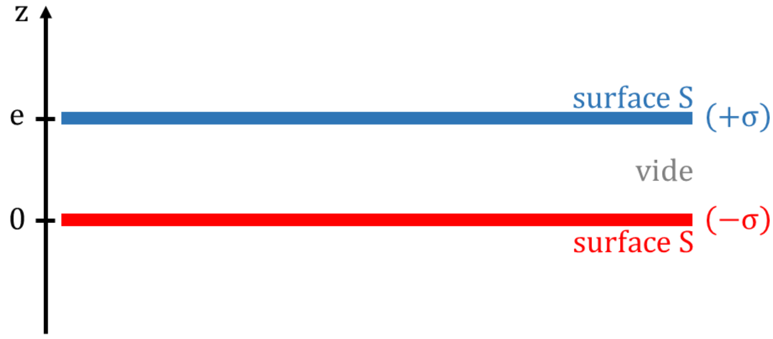
II.2 - Champ électrique entre les armatures

Puisque le champ est créé par deux plans chargés infinis, dont les champs respectifs sont connus, il est possible de déterminer le champ total lié à la superposition des deux (par linéarité des équations de Maxwell, on peut simplement ajouter les champs créés séparément par les deux sources, grâce au **théorème de superposition**).

On rappelle que le champ créé par un plan infini situé en $z = z_0$ s'exprime :

$$\vec{E} = \mathrm{sgn}(z - z_0)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\,\vec{e}_z$$

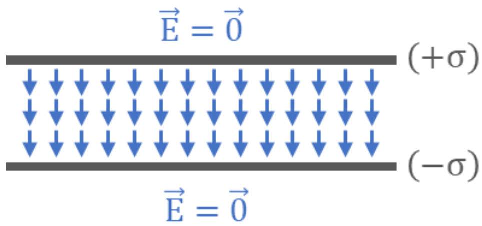
Dans le cas d'un condensateur aux armatures alignées en $z = 0$ et $z = e$, on sépare donc l'espace en trois parties représentées ci-contre.



Champ électrostatique créé par un condensateur infini

Le champ créé par un condensateur infini chargé d'une densité surfacique de charge $\pm\sigma$ est :

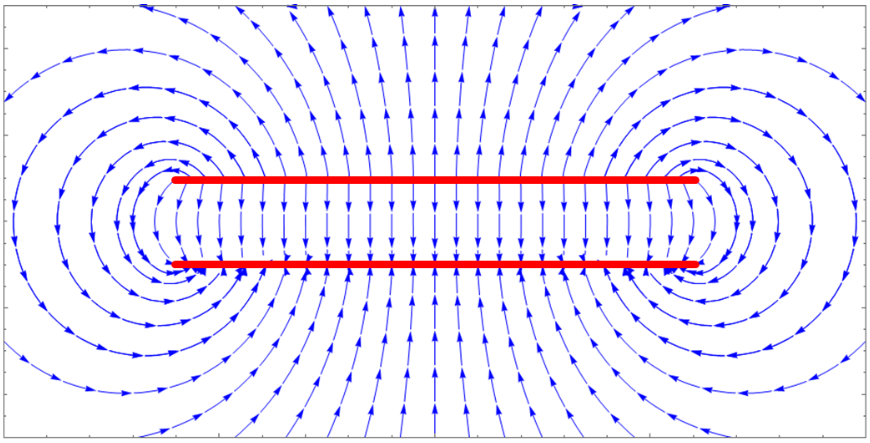
- Uniforme entre les armatures, dirigé vers la charge négative (comme toujours) de norme σ/ϵ_0 ;
- Nul à l'extérieur des armatures.



L'hypothèse des armatures infinies n'est bien sûr jamais vérifiée. On a représenté ci-dessous la simulation du champ électrostatique à proximité d'un condensateur plan (l'intensité du champ $\vec{E}$ est indiquée par les couleurs).

On peut faire plusieurs remarques concernant la validité des hypothèses :

- Le champ est uniforme dans une grande partie de l'espace inter-armature ;
- Près des bords, l'approximation n'est plus valide (le champ faiblit et change de direction). On parle « d'effets de bord ».
- Le champ électrique n'est pas partout nul en dehors des armatures.



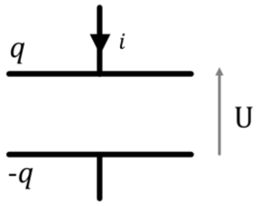
II.3 - Capacité du condensateur et énergie stockée

II.3.A - Détermination de la capacité via le potentiel

Définition de la capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur est la grandeur C liant la charge électrique des armatures à la tension du condensateur : $Q = CU$, avec

- $Q = \sigma S$, charge totale portée par l'armature chargée positivement ;
- U_c la tension entre l'armature chargé positivement et celle chargée négativement : $U = V_+ - V_-$



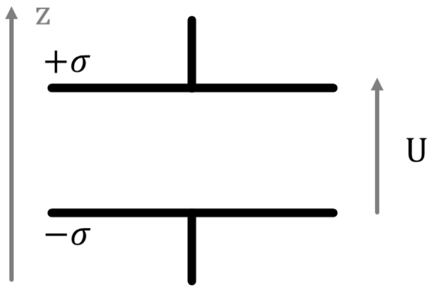
Expression de la capacité d'un condensateur plan infini

La capacité d'un condensateur plan infini aux armatures de surface S espacée de e s'exprime : $C = \dfrac{\epsilon_0 S}{e}$

Démonstration – Déterminer la capacité du condensateur plan infini (via les champs V et $\vec{E}$)

On considère un condensateur dont les armatures sont de surface S, espacées de e, et chargées à $\pm\sigma$. En convention récepteur, comme représenté ci-contre, le condensateur vérifie la relation $Q = CU$.

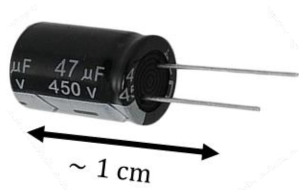
Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur plan.



Un exemple pour comprendre – Capacité d'un condensateur

On place deux plaques métalliques de $100\ \mathrm{m}^2$ à une distance d'un millimètre, séparées de vide.

1. Déterminer la capacité du condensateur ainsi formé.
2. Compte tenu des dimensions et de la capacité du condensateur ci-contre, que peut-on dire de la manière de produire les condensateurs réels ?



II.3.B - Détermination de la capacité par l'énergie électrostatique

Énergie électrique stockée dans un condensateur

L'énergie électrostatique stockée dans un condensateur de capacité C soumis à une tension U est : $E = \frac{1}{2}CU^2$.

Démonstration – Déterminer la capacité du condensateur plan infini (via l'énergie électrostatique)

On considère un condensateur dont les armatures sont espacées de e, et chargées à $\pm\sigma$.
Déterminer sa capacité en raisonnant sur une surface S.

Ces deux méthodes doivent être comprises et connues, puisqu'elles sont susceptibles d'être utilisées dans des exercices faisant intervenir des géométries plus compliquées (par exemple, un condensateur cylindrique infini), et peuvent être partiellement mélangées : il faut toujours suivre l'énoncé et établir les relations demandées pas à pas, même si l'ordre n'est pas celui du cours.

III - REPRÉSENTER L'ÉLECTROSTATIQUE - LIGNES DE CHAMPS $\vec{E}$ ET SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES V

La notion de ligne de champ a déjà été rencontrée dans le chapitre de dynamique des fluides : c'était une courbe orientée, en tout point tangente au champ de vecteur vitesse (le champ de vitesse eulérien décrivant la vitesse du fluide en chaque point).

Ligne de champ électrostatique

Une ligne de champ électrostatique est une courbe orientée, en tout point tangente au champ électrostatique $\vec{E}$.

On introduit ici une notion connexe, qu'on démontrera être liée à celle de ligne de champ : la notion de surface équipotentielle :

Surface équipotentielle (ou isopotentielle)

Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique V garde la même valeur.

L'information contenue dans les lignes de champ et les équipotentielles **n'apporte rien à la connaissance du champ électrostatique**, qui est la seule grandeur dont la valeur importe (c'est même pire : on perd de l'information). Cela dit, les cartes de lignes de champ et d'équipotentielles sont un moyen visuel et intuitif de comprendre les variations et la « forme » d'un champ vectoriel (qu'il soit électrostatique, magnétostatique, ou champ de vitesse eulérien).

Ainsi, dans la plupart des cas, les représentations graphiques du champ électrostatique afficheront plutôt des lignes de champ (ou des équipotentielles) ; il est donc nécessaire d'acquérir une certaine familiarité avec leur interprétation.

III.1 - Variations du champ et du potentiel

Il existe un lien entre isopotentielles et lignes de champ qui permet sans calcul de passer d'une représentation à l'autre :

Lien entre les isopotentielles et les lignes de champ

Les lignes de champ électrostatiques sont en tout point orthogonales aux équipotentielles.

Démonstration – Orthogonalité des isopotentielles V et des lignes de champ $\vec{E}$

En se plaçant à un point quelconque d'une ligne de champ, monter que les équipotentielles sont perpendiculaires à la l.d.c.

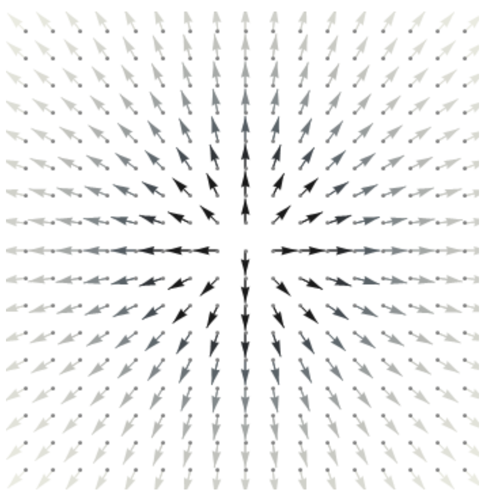
Puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, les lignes de champ vont dans le sens du potentiel décroissant (puisque le vecteur gradient pointe dans le sens des potentiels croissants). On peut alors se convaincre du résultat suivant : **une ligne de champ ne peut pas être fermée** (elle ne peut pas revenir à son point initial).

Application – lignes de champs et isopotentielles dans des cas simples

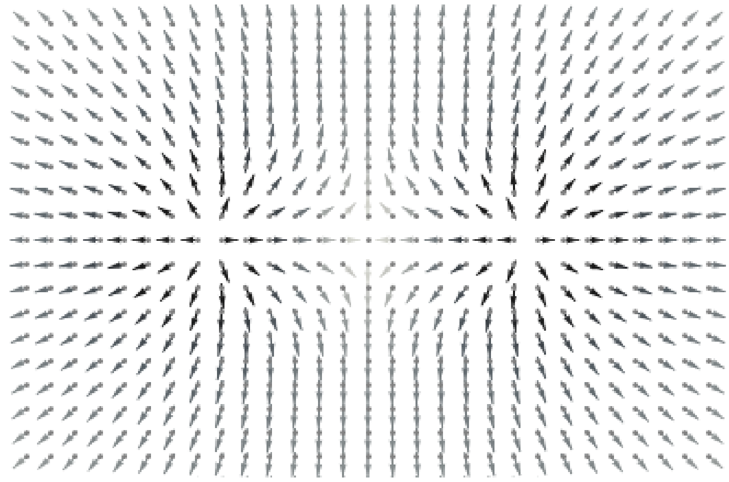
Le champ électrique et le potentiel créés par une charge ponctuelle s'écrivent :

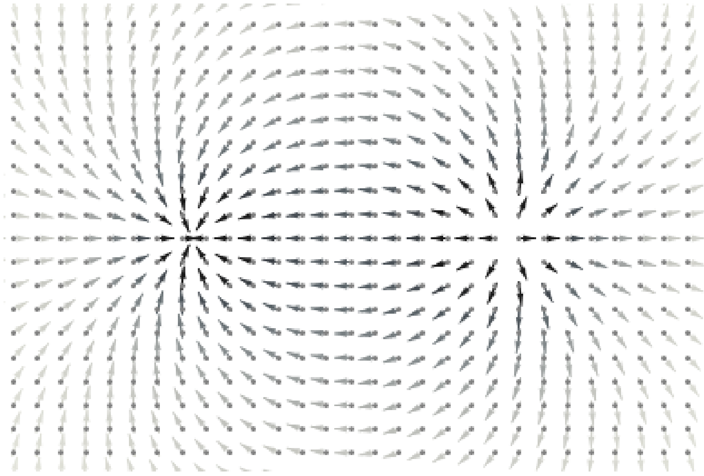
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Dans le cas d'une seule charge ponctuelle situé en O (à droite) :



1. Justifier que les lignes de champ s'éloignent (s'approchent) des charges positives (négatives) ;
2. Justifier que les isopotentielles sont des sphères dont le potentiel décroit (croit) avec le rayon pour les charges positives (négatives).
3. Dans les deux cas ci-dessous, identifier la position et le signe des charges, dessiner quelques lignes de champs, et en déduire l'allure des équipotentielles.



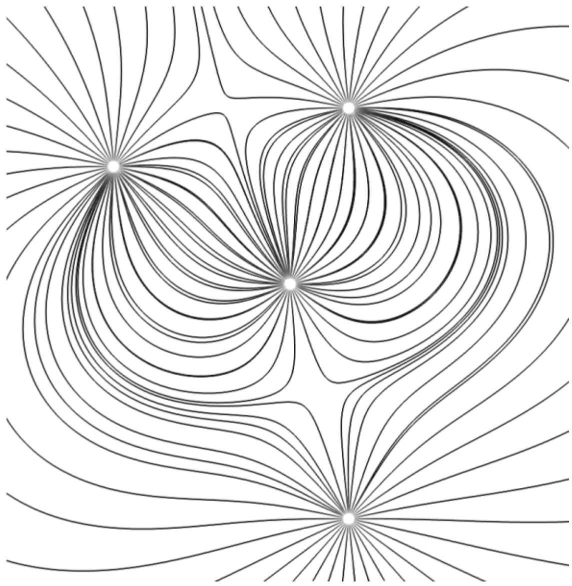


À partir des quelques exemples précédents, on peut se convaincre que si deux lignes de champ se coupent en un point, deux cas sont possibles :

- Si toutes les lignes de champs convergent (ou divergent) de ce point → il y a une charge positive (ou négative) en ce point ;
- Sinon, le champ électrostatique est nul en ce point.

De même, on accepte sans démonstration que les maximums et miniums du potentiel électrostatique se situent au niveau des charges positives et négatives, respectivement.

III.2 - Intensité du champ électrique



Dans le chapitre de dynamique des fluides, on avait défini une notion qu'on retrouvera bientôt : le tube de courant. Un tube de courant avait été défini comme une surface délimitée par un ensemble de lignes de courant. La même notion existe en électrostatique : un tube de champ est une surface délimitée par un ensemble de lignes de champ.

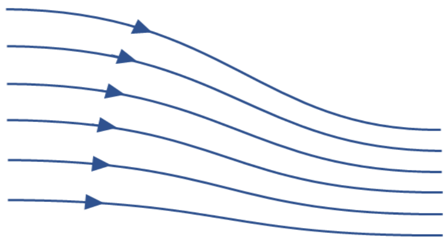
Pour construire un tube de champ graphiquement, on sélectionne une surface traversée par des lignes de champ, puis on suit chacune des lignes de champ jusqu'à un point distant.

Intensité du champ et lignes de champ

Dans une zone vide de charges, un resserrement des lignes de champ traduit un champ électrostatique plus intense.

Démonstration – Intensité du champ et lignes de champ

En considérant un tube de champ dans un cas simple, démontrer que le champ électrostatique est plus intense là où les lignes de champ sont rapprochées.

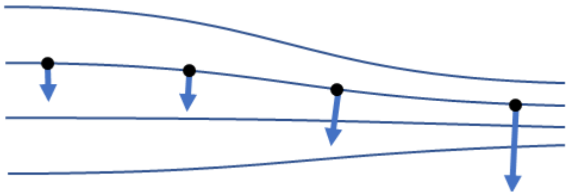


On se rappelle qu'on avait rencontré le même résultat en dynamique des fluides : dans un **écoulement incompressible**, c'est-à-dire pour lequel $\mathbf{div}(\vec{v}) = \mathbf{0}$, un resserrement des lignes de courant dans un tube de champ implique une augmentation de la vitesse. On peut en faire la même démonstration en remplaçant $\vec{E}$ par $\vec{v}$.

On peut aussi lire certaines variations du champ électrostatique dans les représentations d'isopotentielles : une succession rapprochée d'isopotentielles signifie que le potentiel varie rapidement, donc que son gradient est grand, et donc que le champ électrostatique correspondant est grand (en valeur absolue).

Intensité du champ et lignes de champ

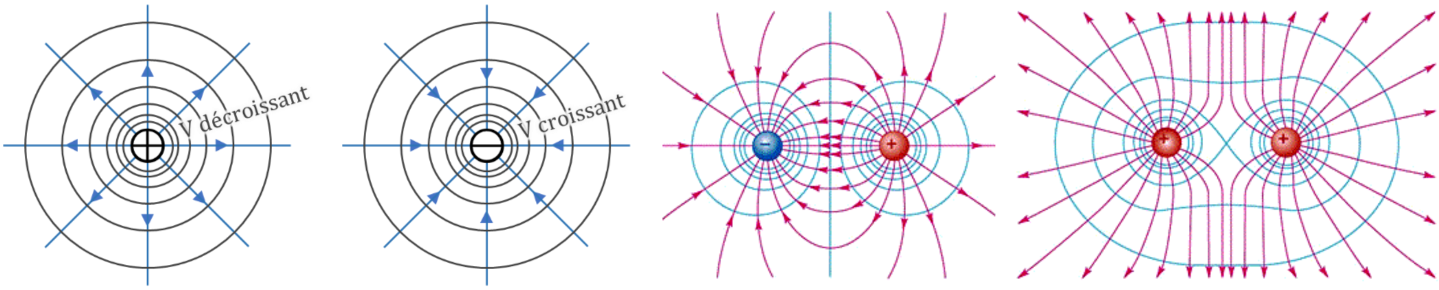
Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique électrostatique plus intense.



III.3 - Construction et lecture des lignes de champs

Résumé des propriétés et structures classiques

Les exemples classiques de construction des lignes de champ et d'équipotentielles doivent être connus.



Démonstration – Intensité du champ et lignes de champ

On considère un ensemble d'équipotentielles représentées ci-contre. Deux isopotentielles adjacentes ont 50 V de différence.

1. Représenter le champ $\vec{E}$ aux points (a), (b) et (c) (de sorte à ce que leur norme relative et leur direction soit correctes).
2. Représenter quelques lignes de champ électrostatique.
3. Vers quelles directions (hors de la zone représentée) peut-on supposer qu'il y a des distributions de charges $(+)$ et $(-)$?
4. Un grain de poussière de masse $m_0 \simeq 10^{-4}$ g, chargé à $q_0 \simeq 10^{-7}$ C est déplacé du point (a) au point (b). Déterminer sa variation $\Delta E_{p,E}$ d'énergie potentielle électrostatique.
5. Le même grain de poussière est lâché sans vitesse au point (c). Déterminer sa vitesse approximative lorsqu'il sort de la zone affichée.