TABLE DES MATIERES

I - DESCRIPTION MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE D'UN FLUIDE

I.1 - Notion de fluide

Une étude des liquides et des gaz peut être menée dans divers domaines de la physique, selon l'aspect auquel on s'intéresse : souhaite-t-on décrire les interactions intermoléculaires ? la vitesse moyenne des particules ? la vitesse de l'écoulement autour d'une aile d'avion ? la pression au fond de l'océan ? Dans cette première section, on s'attache à décrire le contexte dans lequel on souhaite décrire les fluides, et les approximations pertinentes qui en découlent.

I.1.A - Aspects macroscopiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des **grandeurs macroscopiques mécaniques définies dans les fluides au repos**. Commençons par définir les termes, d'abord avec la notion de fluide.

> **Définition macroscopique d'un fluide en mécanique**
>
> Un fluide est un milieu matériel continu, capable de se déformer. Dans la pratique, cela regroupe les gaz, les liquides, et les plasmas.

Remarque : la définition précise d'un fluide est complexe, et requiert des notions avancées de mécanique des milieux continus déformables. Par exemple, le dentifrice, la crème chantilly, le goudron au soleil ou les glaciers doivent-ils être classés parmi les liquides ou les solides ? La réponse à ces questions demanderait une étude détaillée, si bien qu'on considèrera toujours des fluides sans ambiguïté notable (de l'eau, de l'air, etc.)

Précisons ce qui est entendu par « grandeurs macroscopiques mécaniques » :

- **Macroscopique** : qui concerne des propriétés d'ensemble, par opposition à des propriétés particulaires (dites « microscopiques »). Cela exclut la vitesse individuelle des particules, le détail de leur interactions physico-chimiques, etc.
- **Mécanique** : qui concerne les grandeurs de la mécanique et de la dynamique : les vitesses, les accélérations, les forces, etc. (par opposition aux grandeurs thermodynamiques, comme la température, l'énergie, l'entropie, etc.)

Il convient de faire des concessions sur l'étendue des phénomènes à prendre en compte afin de simplifier l'étude (ou simplement de la rendre possible). Dans l'étude mécanique des fluides, on ne considèrera pas la dynamique microscopique des particules de fluide, ni même le caractère discret de la distribution de matière formée de ces particules.

I.1.B - Aspects microscopiques

Bien que n'étant pas strictement utilisés dans le cadre de la mécanique des fluides, il est important d'avoir une représentation intuitive de l'allure microscopique d'un fluide. À cette échelle, on s'intéresse aux propriétés individuelles des molécules, et à leur interaction en petit nombre.

Puisque la plupart des propriétés microscopiques nécessitent un traitement quantique, il faut faire preuve de prudence dans la représentation qu'on se fait de particules en interaction. Notamment, l'image d'un ensemble de particules ponctuelles en interaction est simpliste, et doit être prise comme une approximation grossière (mais souvent utile) de la manière les molécules se comportent.

Définition d'un fluide, aspect microscopique

Dans un fluide, les interactions intermoléculaires sont suffisamment faibles par rapport à l'énergie d'agitation thermique pour que les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres.

Cela inclut, entre autres, deux états de la matière courants : les liquides et les gaz. Dans le liquide, les interactions intermoléculaires sont suffisamment fortes pour maintenir les molécules à une distance comparable à celle qui existe dans un solide. Dans le gaz, ce n'est plus le cas : les molécules sont séparées, et ne se réunissent qu'occasionnellement. On peut définir le **libre parcours moyen**, qui caractérise la liberté des particules dans un fluide.

Distance inter-particulaire et libre parcours moyen

Dans un solide ou dans un liquide, la distance inter-particulaire est de ____________________.

Dans un gaz, on définit plutôt le **libre parcours moyen $\mathbf{l}^*$**, qui est la distance moyenne parcourue par une particule avant de rencontrer une autre particule (et de changer de direction et/ou de vitesse). À pression ambiante, pour l'air ____________.

Remarque :

- Le libre parcours moyen est approximativement **inversement proportionnel à la pression** (à température fixée). Dans le « vide » interstellaire, le libre parcours moyen d'un gaz peut être de plusieurs milliers de km.
- La notion de libre parcours moyen est parfois appliquée à des liquides. C'est un abus courant que nous éviterons de faire, puisque dans un liquide, les molécules sont constamment sous l'influence de leurs voisines.

Cette simulation interactive permet d'avoir une représentation intuitive de la manière dont se comportent les molécules d'un gaz, d'un liquide et d'un solide.

Elle comporte de nombreuses limitations (deux dimensions d'espace, effets quantiques absents, etc.), mais elle donne une image raisonnablement juste qu'il est possible de garder en tête.

I.1.C - Particule fluide et échelle mésoscopique

De la même manière qu'en thermodynamique, on définit une échelle mésoscopique[a] de taille intermédiaire entre l'échelle micro et macroscopique. Une particule fluide est une portion du fluide étudié, de taille mésoscopique, qui est :

- Suffisamment petite pour être considérée comme ponctuelle devant l'étendu du système ;
- Suffisamment grande pour que les grandeurs mécaniques y soient définies sans fluctuer au grès du chaos particulaire. Notamment, la vitesse, la pression et la température sont définies et varient de manière continue dans le temps.

Dans la pratique, la taille d'une particule fluide dépend de la nature du fluide étudié. Il s'agit de trouver une taille suffisamment grande pour que les grandeurs macroscopiques soient définies, ce qui peut aller de quelques microns dans le cas d'un liquide, à des tailles beaucoup plus conséquentes dans le cas d'un gaz raréfié.

On considère donc le fluide comme un milieu matériel continu, auquel on peut attacher des valeurs en chaque point (ou plutôt, en chaque particule fluide, approximativement ponctuelle devant la taille du système).

On pourra assigner à la particule fluide des dimensions infinitésimales, de sorte à réaliser des intégrales sur un ensemble de particules fluides :

	Volume d'une particule fluide	Masse d'une particule fluide
Cartésien (x, y, z)		
Cylindrique (r, θ, z)		
Sphérique (r, θ, φ)		

[a] Le préfixe « méso » vient du grec « μεσοζ » (mésos) qui signifie « milieu ».

I.2 - Notion de champs

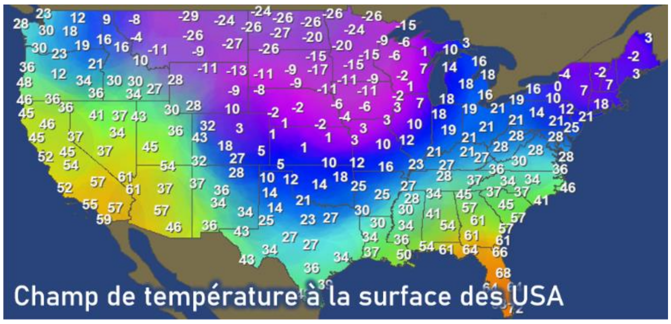
La notion de champ est très générale en physique, et ne s'applique pas seulement aux champs électriques et magnétiques.

Définition d'un champ d'une grandeur physique

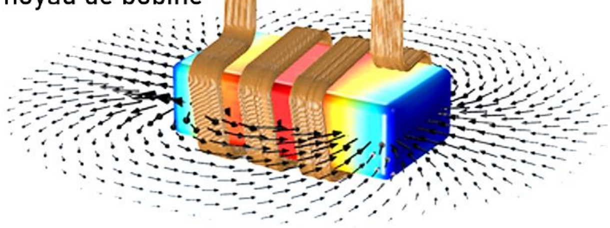
Un champ est une grandeur physique définie en tout point de l'espace. On distingue communément deux types de champs[b] :

- **Les champs scalaires** : À tout point M d'une zone de l'espace est associé une grandeur scalaire $f(M)$ (réelle ou complexe). Par exemple, un champ de température associe une température $T(x, y, z)$ à chaque point (x, y, z) de l'espace.
- **Les champs vectoriels** : À tout point M d'une zone de l'espace est associé une grandeur vectorielle $\vec{f}(M)$. Par exemple, un champ de vitesse du vent associe un vecteur vitesse $\vec{V}(x, y, z)$ à chaque point (x, y, z) de l'espace.

Même s'ils sont rarement formalisés en tant que tels, les champs scalaires et vectoriels très largement utilisés :



Champ magnétique dans un plan autour d'un noyau de bobine



Propriété des champs

Lorsqu'un champ ne varie pas au cours du temps, il est dit ______________________________

Lorsqu'un champ est le même dans tout l'espace, il est dit ______________________________

Plus tard dans l'année, nous aborderons deux champs au rôle central en physique : les champs électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$, qui sont tous deux des champs vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Dans ce chapitre, on utilisera ces notions pour décrire des champs de vitesse $\vec{v}(M)$, des champs de force $\vec{f}(M)$, et des champs de pression dans un fluide $P(M)$.

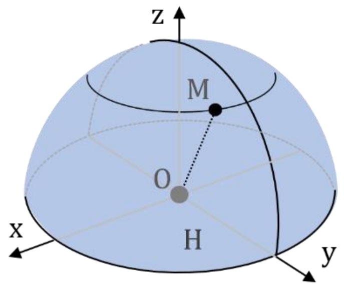
I.3 - Rappels : intégration sur des élément infinitésimaux

Cette section est une parenthèse technique qui concerne l'intégration de grandeurs infinitésimales. Il est absolument essentiel de savoir intégrer des grandeurs physiques sur des volumes et des surfaces. En effet, dans de nombreux, cas, on connaitra une grandeur définie en chaque point du fluide, et on souhaitera savoir comment ces grandeurs infinitésimales se somment pour donner une grandeur macroscopique mesurable.

Par exemple, si on connait l'expression de la pression en chaque point d'un fluide entourant une aile d'avion, pour connaitre la force subie par l'aile, il faudra intégrer la pression tout autour de celle-ci. On en déduira une résultante unique, une force, qui permet ou non de faire voler l'avion (selon qu'elle est plus ou moins forte que le poids). Dans tous les cas, le passage d'une propriété locale à une propriété globale nécessite de recourir à des intégrales, sur des volumes ou des surfaces infinitésimaux, etc.

[b] D'autres types de champs jouent des rôles fondamentaux en physique (champs tensoriels en mécanique des milieux déformables, champ spinoriel en physique des particules, etc.) mais ils ne seront pas abordés.

Un exemple pour comprendre – Intégration de propriétés locales



On considère une demi-goutte d'eau hémisphérique, de masse volumique ρ constante, posée sur une surface confondue avec le plan Oxy.

1. En un point M de la goutte, déterminer la relation entre la masse infinitésimale, la masse volumique, et le volume infinitésimal (indépendamment de tout système de coordonnées).
2. Exprimer le volume infinitésimal autour du point M en coordonnées sphériques, puis intégrer pour connaitre la masse totale m_{tot} de la goutte.

On considère que la goutte s'évapore en surface avec un débit massique surfacique d_m (en $kg.s^{-1}.m^{-2}$).

3. En un point M de la surface de la goutte, exprimer la relation entre la surface infinitésimale et le débit d'évaporation.
4. Exprimer la surface infinitésimale autour du point M en coordonnées sphériques, puis intégrer pour connaitre le débit total d'évaporation D_{tot}.

II - ACTIONS MÉCANIQUES DANS LES FLUIDES

Dans les chapitres de mécanique du solide, on avait classifié les actions mécaniques en deux catégories :

- les forces à distance (force de gravité, force de Lorentz) ;
- les forces de contact (frottements fluides et solides, réaction du support, force de rappel d'un ressort).

Cette classification est toujours valable, mais en mécanique des fluides, on parle plutôt de :

- forces volumiques, qui sont les forces subies par chaque partie du fluide, dues aux éventuels champs de force à distance présents (le plus souvent, la gravité) ;
- forces surfaciques, qui sont des forces que les particules fluides vont exerces sur les particules fluides voisines, ou sur des parois insérées dans le liquide.

II.1 - Force volumique : poids dans un fluide

Puisqu'une force peut désormais s'appliquer à tout un fluide, mais aussi à chacun de ses parties de taille quelconque, il devient pertinent de définir la notion de force volumique.

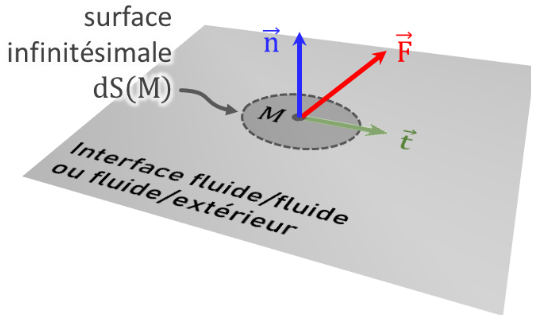
Force de pression sur une surface infinitésimale

Dans un champ de pesanteur $\vec{g}$, la force de gravité subie par une particule fluide infinitésimale de masse dm s'écrit :

On appellera force volumique, et on notera $\vec{f}$, le rapport entre la force $d\vec{F}$ exercée sur une particule fluide et son volume dV :

Le poids volumique $\vec{f}_g = \vec{g}\,\rho$ est donc une grandeur intensive, alors que la force $\vec{F}_g$ est une grandeur extensive. L'intégrale sur le volume total permet bien de retrouver l'expression usuelle du poids : $\int_{V_{tot}} d\vec{F}_g = \int_{V_{tot}} \vec{g}\,\rho\, dV = \vec{g}\rho V_{tot} = m_{tot}\,\vec{g}$

II.2 - Force surfacique : pression sur une surface



Dans le cas des forces surfaciques, on devra toujours définir une surface (matérielle ou virtuelle) sur laquelle on calcule la force résultante issue de chaque particule fluide.

On peut toujours décomposer la force $\vec{F}(M)$ exercée par une particule fluide sur une surface $dS(M)$ en deux contributions :

-
-

Les forces tangentielles à la surface sont des forces dues à la viscosité du fluide, qui ne se manifestent que dans les cas à il existe un mouvement relatif entre les éléments des deux côtés de la surface (que ce soient deux particules fluides séparées par une surface virtuelle, ou une particule fluide en déplacement par rapport à une surface matérielle).

Pour les fluides au repos, toutes les composantes tangentielles des forces surfaciques seront nulles, et on ne s'intéressera qu'aux composantes normales. Ces dernières sont la manifestation de la pression au sein du fluide, et leur expression fait intervenir l'élément infinitésimal de surface orienté au point M :

> **Élément infinitésimal de surface orienté :** Un « élément infinitésimal de surface orienté » est une surface infinitésimale dS à laquelle on adjoint un vecteur normal $\vec{n}$ pointant vers l'extérieur. On notera souvent $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$.

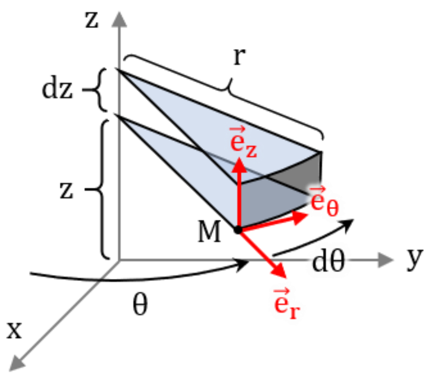
On peut alors donner l'expression la plus générale de la pression locale sur une surface S :

> **Force de pression sur une surface infinitésimale**
>
> La force exercée par un fluide sur un élément infinitésimal de surface, centré sur le point M s'écrit comme :

L'unité du système international de la pression est le Pascal $\mathbf{1\ Pa = 1\ N.m^{-2} = 1\ J.m^{-3}}$, et non le bar ($1\ \text{bar} = 10^5\ \text{N.m}^{-2}$).

Remarque : on peut considérer la pression comme densité de force surfacique définie dans tout le liquide. Elle s'exprime aussi bien comme une énergie par unité de volume (J.m^{-3}) que comme une force par unité de surface (N.m^{-2}).

Un exemple pour comprendre - Expression d'une pression sur une surface infinitésimale

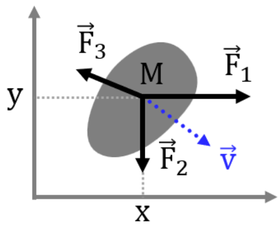


On considère une boite de conserve sous pression $P_{int} > P_0$. Exprimer la pression sur la paroi au niveau d'une surface infinitésimale dS autour d'un point M (le point M étant repéré par ses coordonnées cylindriques).

III - PRESSION DANS UN FLUIDE AU REPOS

L'objectif de cette section est de déterminer le champ de pression dans un fluide dans diverses conditions. On doit donc déterminer une fonction P(M) décrivant la valeur de la pression en chaque point M du fluide étudié. Pour cela, nous appliquerons des lois connues de mécanique Newtonienne, mais les systèmes sur lesquels on les appliquera seront sensiblement différents de ce qui a été étudié jusqu'alors : des parties infinitésimales de milieux continus.

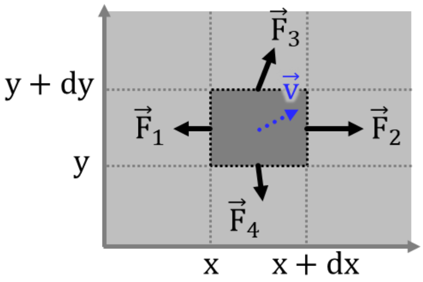
En première année, on a appliqué le PFD sur des systèmes matériels isolés : des masses, des boulets, des planètes, etc. On considérait que les forces s'appliquaient au centre de masse du système, et l'intégration du PFD permettait d'accéder à la vitesse, puis à la position du centre de masse M du corps considéré :



$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i\left(\overrightarrow{OM}, \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, t\right) \xrightarrow{\text{intégrations}} \overrightarrow{OM}(t) = \cdots$$

En limitant l'utilisation du PFD à ce genre de systèmes, on néglige un ensemble d'applications riches et variées de mécanique. En effet, plutôt que de considérer que le système auquel on applique le PFD est un corps matériellement isolé, on peut s'intéresser à des systèmes infinitésimaux, virtuellement séparés du milieu continu dans lequel ils sont inclus, et soumis à des forces en provenance de ce milieu.

Ci-contre, on représente un milieu continu, duquel on a isolé une portion infinitésimale, située entre (x, y) et $(x + dx, y + dy)$. Ce sous-système subit des forces provenant de chacune de ses régions voisines (il peut par exemple être étiré, ou écrasé par la portion de matière attenante) :



Le PFD écrit ci-dessus pourra alors être projeté sur les axes x et y, simplifié, etc. Très souvent, on utilisera les propriétés des différentielles pour simplifier les différences infinitésimales qui interviennent dans ce genre de calculs :

Cette relation n'est pas une approximation : la différentielle dX est une quantité infinitésimale pour laquelle dX^2 est nul.

Dans les parties suivantes, on appliquera ces concepts à la statique des fluides, c'est-à-dire la description des forces au sein d'un fluide au repos (c'est-à-dire que chaque particule fluide est immobile). Le plus souvent, le fluide sera soumis à la gravité, et il pourra exercer des forces de pression sur diverses surfaces.

III.1 - Relation de la statique des fluides en présence de pesanteur

On considère dans toute la suite un fluide au repos dans un domaine D de l'espace, vérifiant donc $\forall M \in D,\ \forall t,\ \vec{v}(M, t) = 0$.

Relation de la statique des fluides (démonstration manuscrite)

Attention : Dans la démonstration, on a appelé $\vec{F}(z)$ la force exercée par la partie en-dessous de z sur la surface d'altitude z. Ainsi, la force pressante exercée par le dessous est bien $\vec{F}(z)$, mais la force exercée par le dessus de la tranche, sur la tranche elle-même est bien $-\vec{F}_P(z + dz)$.

Relation de la statique des fluides en présence d'un champ de pesanteur

Dans un fluide au repos, de masse volumique ρ, soumis uniquement à la pesanteur $\vec{g}$:

Le signe dépend de l'orientation de l'axe vertical : $\ominus$ si $\vec{g}$ est selon $-\vec{e}_z$, et $\oplus$ sinon.

Remarque : Dans les cas où le gaz est compressible, la masse volumique ρ dépend de la pression, donc c'est une fonction de z ! La résolution de l'équation est alors moins immédiate.

III.2 - Pression dans un fluide incompressible

On considère ici des fluides incompressibles, donc des liquides, de masse volumique ρ_0. Le système étudié une étendue d'eau, de taille quelconque, dont la partie supérieure est en contact avec l'air à pression ambiante.

Expression de la loi de pression dans un fluide incompressible (démonstration manuscrite)

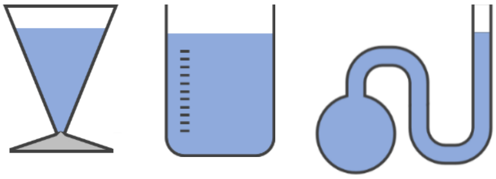
On a démontré la loi de pression hydrostatique, dans le cas particulièrement simple (mais utile) d'un fluide incompressible.

Loi de pression hydrostatique dans un milieu de masse volumique uniforme ρ_0

Pour établir la loi de pression $P(z)$, on intègre la relation de l'hydrostatique (il faut **toujours** définir l'axe z, et connait la pression à **une** altitude particulière). On obtient une pression qui évolue linéairement avec la profondeur.

(Quelles que soient les conventions choisies, entre deux points séparés de Δz, on a $\Delta P = \rho_0 g\,\Delta z$, avec la plus grande pression en bas).

On remarque que le calcul de la loi de pression fait intervenir une intégrale sur dz uniquement. Quel que soit le chemin d'intégration choisi, la loi de pression obtenue est donc valable.



Puisque la masse volumique de l'eau est simplement $\rho_0 \sim 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, il est possible de déterminer la pression en différentes profondeurs d'eau :

- Pression au fond d'un piscine de 3 m : ______________________________
- Pression au fond de la fosse des Mariannes : ______________________________

On pourra retenir qu'approximativement, sur terre :

- La pression à la surface des mers/océans est de $1013\ \mathrm{hPa} \sim 1\ \mathrm{bar}$.
- Dans l'eau, la pression augmente environ d'un bar tous les $10\ \mathrm{m}$ de profondeur.

III.3 - Modèle de l'atmosphère isotherme

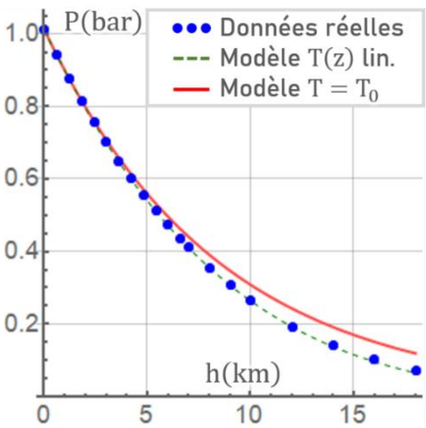
Dans la section précédente, on s'est intéressés à des liquides incompressibles, en excluant donc tous les gaz. Dans cette section, on relaxe la condition d'incompressibilité, et on reprend la relation de la statique des fluides avec $\rho \neq \mathrm{cte}$. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter une relation qui décrit la manière dont le gaz voit sa densité évoluer avec les paramètres extérieurs.

L'exemple le plus courant d'application est le modèle de l'atmosphère isotherme, dans laquelle on considère l'atmosphère terrestre comme un gaz parfait à température T_0 constante.

Modèle de l'atmosphère isotherme (développement manuscrit)

Remarque : on abordera en TD le modèle de l'atmosphère « adiabatique », qui n'est pas au programme, mais est un grand classique des exercices de statique des fluides.

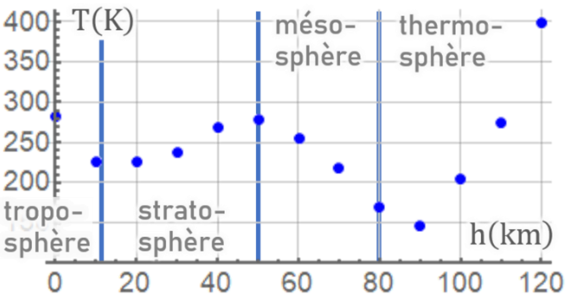
III.3.A - Un peu de culture concernant l'atmosphère terrestre



Le modèle à température constante représenté ci-contre est étonnamment juste pour les altitudes inférieures à $10\ \mathrm{km}$ (dans la troposphère). Au-delà, on remarque un désaccord croissant dû à la température, qui peut être corrigé par un modèle où la température varie linéairement dans la troposphère (représenté en pointillés verts).

Pour la culture, on représente ci-dessous la variation de la température dans différentes couches de l'atmosphère. On remarque une variation complexe de la température, due aux interactions variables entre le rayonnement solaire et les différents composants chimiques de l'atmosphère :

- La troposphère (80 % de la masse totale de l'atmosphère) est le théâtre du climat : nuages, tempêtes, pluies, etc.
- La stratosphère (15 % de la masse) est chauffée par l'absorption de certains UV ($200 - 315\ \mathrm{nm}$) solaires par l'ozone O_3.
- La mésosphère est très peu chauffée par le rayonnement solaire
- La thermosphère absorbe les rayonnements les plus énergétiques du soleil ($50 - 200\ \mathrm{nm}$) par rupture des liaisons covalentes de O_2 et N_2.



III.4 - Relation de l'hydrostatique généralisée au cas 3D (hors-programme)

On a établi plus haut la relation de l'hydrostatique $dP/dz = \pm\rho_0 g$, dans le cas d'un poids selon la seule direction z. On s'intéresse ici à la généralisation de cette équation au cas tridimensionnel, dans lequel on considère un fluide soumis à une force $\vec{F}$ pouvant dépendre des coordonnées spatiales. Encore une fois, on effectue un inventaire des forces qui s'exercent sur cette particule fluide :

- Force quelconque : $\vec{F}(x, y, z) = \vec{f_v}\, dV = (f_x\, \vec{e}_x + f_y\, \vec{e}_y + f_z\, \vec{e}_z)\, dx\, dy\, dz$
- Pression selon direction x : $P(x, y, z)\, dy\, dz - P(x + dx, y, z)\, dy\, dz = \frac{dP}{dx}\, dx\, dy\, dz$
- Pression selon direction y : $P(x, y, z)\, dx\, dz - P(x, y + dy, z)\, dx\, dz = \frac{dP}{dy}\, dx\, dy\, dz$ (et une expression analogue selon z)

On peut alors exprimer l'équilibre des forces, sachant qu'on considère la particule immobile :

$$0 = f_x dx\, dy\, dz - \frac{dP}{dx}\, dx\, dy\, dz \qquad 0 = f_y dx\, dy\, dz - \frac{dP}{dy}\, dx\, dy\, dz \qquad 0 = f_z dx\, dy\, dz - \frac{dP}{dz}\, dx\, dy\, dz$$

On peut alors revenir à une expression vectorielle pour exprimer le tout de manière concise :

$$f_x\, \vec{e}_x + f_y\, \vec{e}_y + f_z\, \vec{e}_z = \left(\frac{dP}{dx}\, \vec{e}_x + \frac{dP}{dy}\, \vec{e}_y + \frac{dP}{dz}\, \vec{e}_z\right) \qquad \text{i.e.} \qquad \vec{f_v} = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Loi de pression hydrostatique généralisée (hors-programme)

La relation liant la pression P au sein d'un fluide avec un champ de force volumique $\vec{f_v}$ (potentiellement inhomogène) s'écrit :

Cette relation locale est valable en tout point M du fluide subissant la force volumique.

Le fait d'exprimer cette équation avec un gradient plutôt qu'avec des dérivées explicites permet de la rendre indépendante du système de cordonnées choisi. Cette dernière expression est valable dans tout système de coordonnées (par contre, il ne faut pas oublier que c'est le gradient qui change en fonction du système de coordonnées !)

IV - RÉSULTANTE DES FORCES DE PRESSION SUR UNE SURFACE FIXE

On rappelle que l'expression de la pression infinitésimale qui s'applique sur une surface infinitésimale autour du point M s'écrit :

$$d\vec{F}_P(M) = P(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M)$$

où le vecteur $\vec{n}$ est normal à la surface considérée, et dans le sens qui fait que la pression « pousse » la paroi (donc du fluide vers l'extérieur). Cette expression est très générale, et doit être particularisée dans chaque cas. En effet, il est nécessaire de déterminer l'expression de la pression pour un point M quelconque (ce qui implique de repérer le point M dans un système de coordonnées), ainsi que l'expression de la surface infinitésimale et du vecteur normal.

IV.1 - Mode opératoire

Pour calculer la résultante des forces de pression sur une surface, on doit :

1. Exprimer une surface infinitésimale orientée à un point quelconque M de la surface S, c'est-à-dire $d\vec{S}(M)$ dans le système de coordonnées adéquat ;
2. Exprimer le pression $P(M)$ en un point quelconque M de la surface S, dans le même système de coordonnées que celui choisi à l'étape précédente ;
3. Écrire la relation $d\vec{F}_P(M) = P(M)\, \overrightarrow{dS}(M)$;
4. Intégrer la quantité $d\vec{F}_P(M)$ sur la surface :

$$\int_{M \in S} d\vec{F}_P(M)\, dM$$

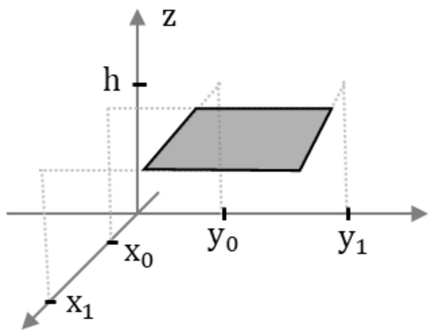
ATTENTION :

- On réalise une intégrale sur une surface, et non pas sur un volume. L'intégrale porte donc sur seulement **deux** coordonnées ;
- Les vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, etc. peuvent dépendre des coordonnées du repère, et ne peuvent donc pas être intégrés tels quel !

IV.1.A - Savoir exprimer un élément infinitésimal de surface, et intégrer une grandeur

Nous avions déjà évoqué plus haut l'expression des éléments infinitésimaux de surface. On reprend ici quelques exemples et concepts qui permettront de les déterminer dans diverses situations, y compris lorsqu'ils sont non-triviaux, et exprimés dans des systèmes de coordonnées non-cartésiens.

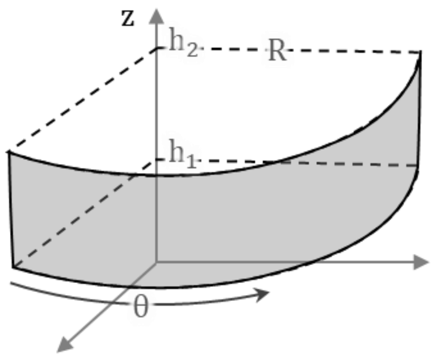
Tout d'abord, il est très simple d'exprimer un élément de surface orienté en cartésien, lorsque celui-ci est parallèle à un plan simple.



Sur l'image ci-contre, on représente une surface S grisée. L'élément infinitésimal de surface orientée à un point $M(x, y, z)$ s'écrit :

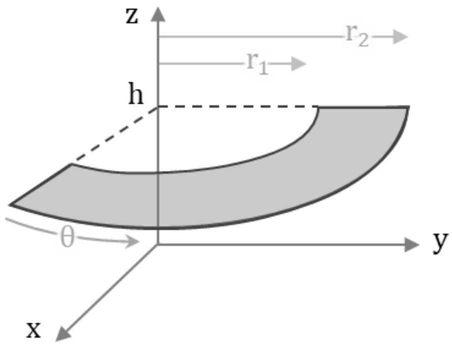
En repère cartésien, les calculs infinitésimaux sont simples. L'intégration d'une grandeur $G(M)$ sur cette surface s'écrirait :

Il n'en est pas de même pour les autres systèmes de coordonnées (cylindrique, sphérique, etc.), si bien qu'il faudra prendre garde à ne pas généraliser le cas cartésien. Lorsqu'on considère un autre repère, par exemple un repère cylindrique de coordonnées (r, θ, φ), on peut à nouveau comparer l'expression des surfaces infinitésimales.



Sur l'image ci-contre, on représente une surface S grisée qui épouse un cylindre. L'élément infinitésimal de surface orientée à un point $M(R, \theta, z)$ s'écrit :

L'intégration d'une grandeur $G(M)$ sur cette surface s'écrirait :



Sur l'image ci-contre, on représente une surface S grisée plate, mais de forme arquée. L'élément infinitésimal de surface orientée à un point $M(R, \theta, z)$ s'écrit :

L'intégration d'une grandeur $G(M)$ sur cette surface s'écrirait :

IV.2 - Calculs classiques de résultantes de forces de pression

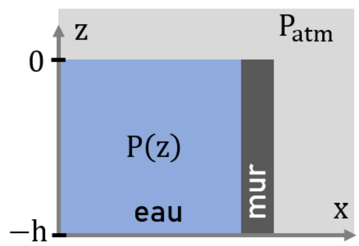
Dans cette partie, on appliquera à des cas physiques simples des calculs de résultats des forces de pression hydrostatique sur des surfaces. C'est une manière simple de pratiquer le calcul intégral sur des éléments infinitésimaux dans différents systèmes de coordonnées, ce qui se retrouve dans tous les domaines de la physique.

IV.2.A - Pression sur une surface plane

Application classique - Calcul d'une grandeur de surface par intégration

On considère un mur qui retient de l'eau, sur une profondeur $h = 5$ m. Le mur est d'une largeur $L = 10$ m (dans la direction Oy).

1. Déterminer l'expression du champ de pression dans la piscine.
2. Déterminer la force totale subie par le mur.



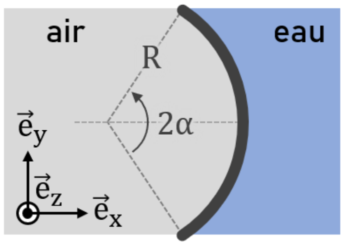
IV.2.B - Barrage

On considère maintenant une surface moins simple, qui nécessitera une intégration plus prudente.

Calcul d'une grandeur de surface par intégration

On considère un barrage qui retient une étendue d'eau, sur une profondeur immergée $h = 100$ m. En première approximation, on considère que le barrage est une portion de cylindre comme représenté ci-dessous, de rayon $R = 150$ m.

1. Déterminer l'expression du champ de pression dans le lac et dans l'eau, le long de la paroi du barrage.
2. Déterminer le système de coordonnées permettant d'exprimer simplement un élément de surface du barrage, puis l'exprimer.
3. Exprimer l'intégrale permettant de calculer la force $\vec{F}_{eau}$ exercée par l'eau sur le barrage.
4. Déterminer par symétrie (sans calcul) la direction que prendra $\vec{F}_{eau}$. Projeter les forces infinitésimales dans cette direction, puis calculer l'intégrale pour $\alpha = \pi/4$.
5. Calculer la force $\vec{F}_{air}$ exercée par l'air sur la paroi, puis calculer la résultante des forces subies par la paroi.



L'intérêt de cette forme arquée ne se manifeste que lorsqu'on étudie les contraintes qui s'appliquent à l'intérieur du barrage. Celles ce se répartissent de sorte à ce que le barrage ne subisse que des contraintes en compression, qui déportent la majeure partie de l'effort sur les supports rocheux de l'édifice.

IV.3 - Poussée d'Archimède

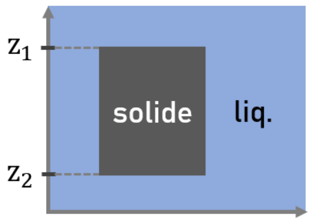
IV.3.A - Calcul dans le cas d'un solide simple

Dans cette partie, on revisite une force connue depuis longtemps, la poussée d'Archimède, mais qu'il est désormais possible de réinterpréter et d'exprimer en termes de résultante des forces de pression.

Poussée d'Archimède sur un solide simple

On considère un cylindre (de base S et de hauteur h) immergé dans un liquide de masse volumique constante ρ_0.

Déterminer la résultante des forces qui s'appliquent sur le solide.



La poussée d'Archimède est la force subie par un corps lorsqu'il est plongé dans un fluide au repos. Cette force est la résultante des forces de pression, et peut se calculer par une intégrale de la pression hydrostatique sur toute la surface du corps.

Poussée d'Archimède Un corps de volume V_i totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f, dans un champ de pesanteur $\vec{g}$, subit la poussée d'Archimède : Cette force s'applique au centre de masse du volume immergé.	

Remarque : dans le cas où le solide est partiellement immergé dans deux fluides, il subit une poussée d'Archimède de la part des deux, proportionnellement au volume immergé dans chacun. Dans le cas d'une interface liquide / gaz (comme pour un bateau), la poussé d'Archimède du gaz est souvent négligeable.