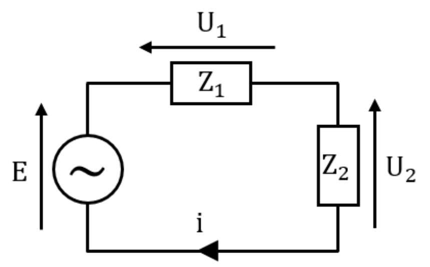
Dans ce chapitre, on s'intéresse aux systèmes électrocinétiques déjà abordés en première année. On y présentera à nouveau la notion de système linéaire, de représentation complexe des signaux périodiques, de résonance, de diagramme de Bode, de filtrage fréquentiel, etc.

Bon nombre de problèmes d'électrocinétiques contiennent des sous-parties entièrement dédiées aux notions d'électrocinétique de première année ; il est essentiel de maitriser les bases avant de pouvoir aborder l'électrocinétique de deuxième année. Ce cours ne constitue absolument pas un rappel exhaustif de ce qu'il est nécessaire de connaitre ; en cas d'incertitudes, il sera nécessaire de retourner vers votre cours de première année.

TABLE DES MATIERES

I - RAPPELS DE BASE D'ÉLECTROCINÉTIQUE

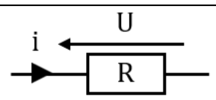
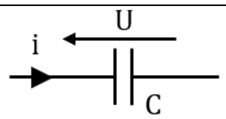
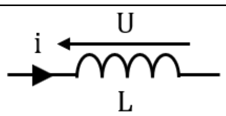
I.1 - Loi des mailles réelle/complexe



Loi des mailles avec les grandeurs réelles et complexes :

Pont diviseur de tension avec les grandeurs réelles et complexes :

I.2 - Comportement des dipôles usuels

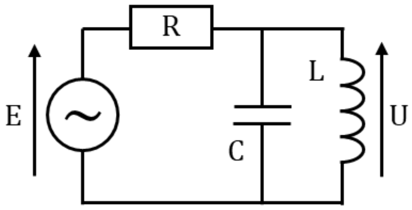
Dipôle	Symbole	Loi de comportement réelle et complexe	Énergie élémentaire reçue pdt **dt**
Résistance			
Condensateur			
Bobine			

Attention : dans le tableau ci-dessus, les tensions et intensités sont définies en convention récepteur. Si la flèche tension est dans le même sens que la flèche intensité (convention récepteur), alors les relations prennent un signe ⊖.

Un exemple pour comprendre - Loi des mailles avec signaux complexes

Dans le circuit ci-contre, le générateur de tension impose une tension sinusoïdale E.

Déterminer la tension U en fonction des impédances complexes.

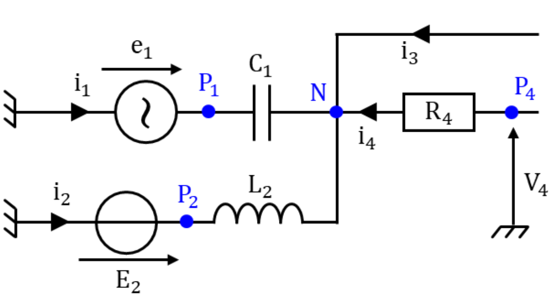


Comme le montre l'exemple ci-dessus, les calculs d'électrocinétique peuvent être particulièrement pénibles si on ne réfléchit pas **en amont** à la démarche de calcul. On veillera toujours à **ne pas s'engager dans un calcul inutile**.

I.3 - Loi des nœuds (en termes de potentiels)

Dans l'électrocinétique de deuxième année, il est souvent fructueux d'utiliser la loi des mailles en exprimant les intensités en termes de potentiels (on appelle alors cela la « loi de nœuds en termes de potentiel », ou tout simplement, « loi des nœuds »).

Loi des nœuds en termes de potentiels et d'intensité



Loi des nœuds en termes d'intensités : ______________________

Loi des nœuds en termes de potentiels :

____

____

____

L'application de la loi des nœuds en termes de potentiels permet d'isoler un potentiel à la convergence de plusieurs branches afin de l'exprimer en termes d'autres grandeurs connues (dans l'exemple ci-dessus, on peut exprimer le potentiel V_N en fonction des paramètres du circuit).

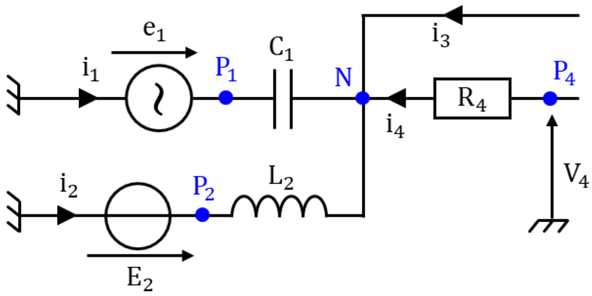
Masse d'un circuit et tension par rapport à la masse

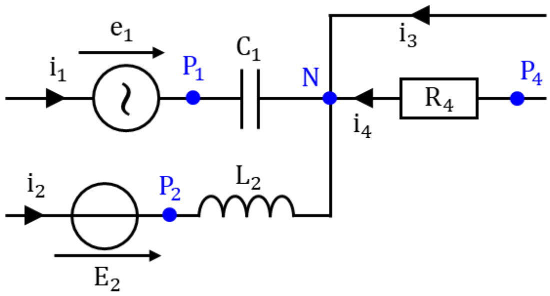
Le potentiel est défini à une constante prés. La masse est le point auquel **on choisit de prendre le potentiel nul.**

Un circuit ne possède qu'une seule masse, indiquée par le symbole ou . Si plusieurs masses sont dessinées sur le circuit, il faut imaginer qu'elles sont connectées entre elles.

On peut indiquer une tension d'un point du circuit par rapport à la masse par une flèche de ce type :
Puisque la masse est au potentiel nul, la tension par rapport à la masse est le potentiel.

Si on reprend le circuit précédent, ci-dessous à gauche, il est strictement identique au circuit représenté à droite :





Remarque : de plus en plus, nous considérerons les **potentiels** en certains points du circuit, plutôt que des **tensions**. Il faut donc se familiariser rapidement avec la manipulation des potentiels.

II - SYSTÈME LINÉAIRE, CONTINU ET INVARIANT (SLCI)

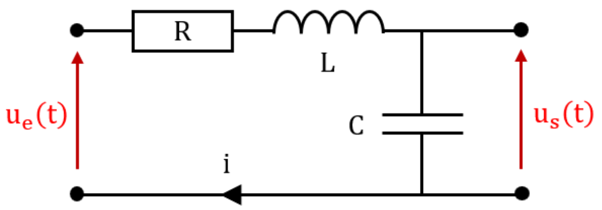
II.1 - Généralités sur les systèmes

II.1.A - Système avec entrée et sortie

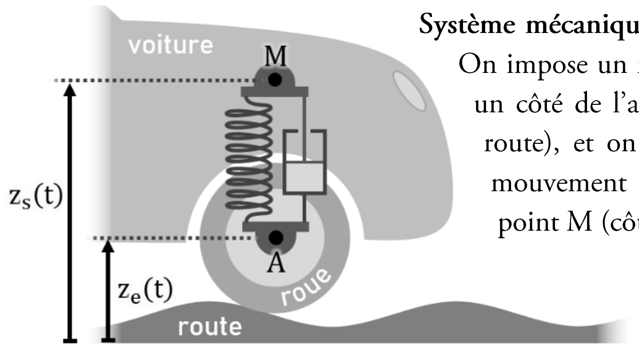
Dans tout ce chapitre, on utilisera le mot « système » dans un sens quelques peu différent de ce qu'on faisait jusqu'alors. En thermodynamique, en mécanique, etc., un système est simplement l'objet d'étude, caractérisé par certaines propriétés (température, vitesse, charge, accélération, etc.)

Ici, le système électrocinétique sera considéré comme un système physique (au sens usuel du terme) auquel on peut imposer une grandeur physique en entrée, et qui, après transformation, donne en sortie une autre grandeur physique (dont la valeur dépend de la nature du système) :

Dans le cadre particulier de ce cours d'électrocinétique, les grandeurs d'entrée et de sorties seront toujours une certaine tension ou intensité mesurées à des endroits définis d'un système électrocinétique. Cela dit, la description mathématique des systèmes abordés pourra s'appliquer à n'importe quel système (électrocinétique ou non) dans lequel on peut identifier une grandeur d'entrée, et une grandeur de sortie.



Système électrocinétique (circuit RLC) :
On impose une tension u_e en entrée, et on récupère une tension différente u_s en sortie.



Système mécanique (suspension) :
On impose un mouvement z_e à un côté de l'amortisseur (côté route), et on « récupère » un mouvement z_s différent au point M (côté voiture).

De même, on peut concevoir tous les appareils de mesure comme des systèmes de ce type, dont l'entrée est la grandeur à mesurer, et la réponse est la grandeur permettant la lecture d'une valeur (pour un thermomètre : température / hauteur de mercure, pour un microphone : pression de l'air / tension, etc.)

II.1.B - Types de régimes

En fonction du forçage, on définit plusieurs régimes de fonctionnement du système :

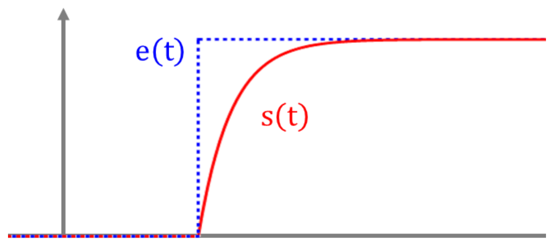
> **Régime libre :** le forçage est nul, aucune énergie n'entre dans le système.
>
> **Régime forcé :** le forçage n'est pas constamment nul, de l'énergie entre dans le système.

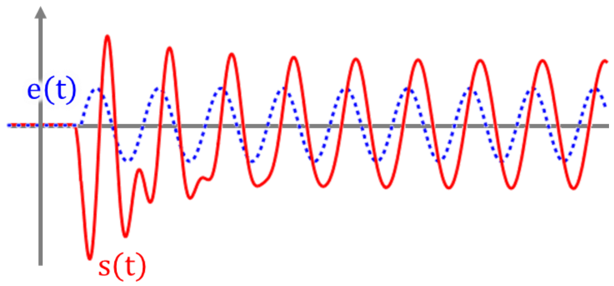
En fonction de la nature de la réponse, on définit plusieurs régimes de fonctionnement du système :

> **Régime stationnaire :** la réponse ne dépend pas du temps : $ds(t)/dt = 0$.
>
> **Régime permanent (ou établi) :** la réponse est une fonction périodique (une sinusoïde, une fonction carré, etc.)
>
> **Régime transitoire :** la réponse est en train de s'adapter à un changement dans le forçage et varie de manière non-triviale.

En première année, on avait abordé des systèmes d'abord au repos et non-forcés depuis un temps long (donc en régime libre, stationnaire) qu'on soumettait soudainement à une perturbation (comme une marche de tension à $t = 0$). La sortie du système entrait alors en régime transitoire pendant quelques temps, avant d'arriver à un régime stationnaire ou permanent.

> **Un exemple pour comprendre - Identification de différents régimes**
>
> Indiquer sur l'axe temporel les différents régimes (concernant le signal d'entrée (en pointillés) et le signal de sortie.



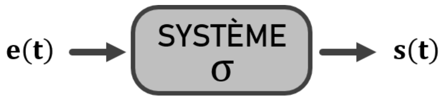


L'étude générale de ces systèmes peut être extrêmement compliquée. On limitera donc notre étude aux systèmes linéaires, continus et invariants dans le temps (SLCI), qu'on définit ci-après.

II.2 - Caractéristiques du SLCI

II.2.A - Linéarité

Le système σ prend en entrée une fonction e, et donne en sortie une fonction s. Puisque cette fonction s dépend du système, on utilise la notation suivante :



On prendre gare à bien comprendre cette notation : e et s sont des fonctions dépendantes du temps. La fonction s est aussi nommée $\sigma[e]$. Toutes ces fonctions peuvent être évaluées en un certain temps t : $e(t)$, $s(t)$ et $\sigma[e](t)$.

Linéarité d'un système

Un système est dit linéaire si et seulement si :

C'est-à-dire que si on connait la réponse correspondant à deux entrées quelconques, la réponse à une combinaison linéaire de ces deux entrées est la même combinaison linéaire des réponses individuelles.

Cette propriété prendra une importance considérable lorsqu'on étudiera la réponse du système à des entrées périodiques quelconques (par forcément sinusoïdales).

Un exemple pour comprendre - Système linéaire ou non-linéaire ?

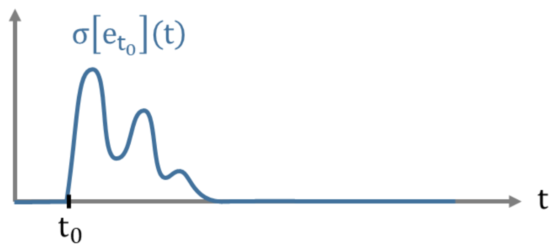
Déterminer si les systèmes σ_1 et σ_2 définis ci-dessous sont linéaires :

$$s(t) = \sigma_1[e](t) = \int_0^t e(t')\,dt' \qquad\qquad s(t) = \sigma_2[e](t) = \sqrt{e(t)}$$

II.2.B - Invariance temporelle

Invariance temporelle d'un système

Un système est invariant (temporellement) si ces caractéristiques n'évoluent pas au cours du temps. Si une entrée envoyée au temps t produit une certaine sortie, alors la même entrée envoyée au temps $t + \tau$ produira la même sortie décalée d'un temps τ.



Mathématiquement :
On considère une entrée e_{t_0}, et la même entrée décalée de τ, notée $e_{t_0+\tau}$, alors on a : ______________________________

Remarque : tous les systèmes vieillissent, si bien que leur réponse lorsqu'ils sont neufs n'est pas la même que leur réponse après des années d'utilisation. Aucun système n'est donc rigoureusement invariant, mais cette invariance lente et inéluctable sera toujours négligée lors d'une utilisation de courte durée.

II.2.C – Continuité

Un système est dit « **continu** » s'il accepte en entrée des signaux analogiques, pouvant prendre n'importe quelle valeur. Cela s'oppose à un système numérique, qui accepte des données quantifiées, c'est-à-dire prenant des valeurs dans un ensemble fini de possibilités.

Attention : un système continu peut tout à fait traiter des entrées discontinues et générer des sorties discontinues. Ici, le terme de continuité s'oppose à la notion **d'échantillonnage**, ou de **quantification**, qui sont caractéristiques des signaux numériques.

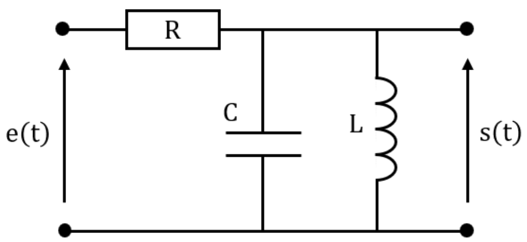
II.3 – Description temporelle du SLCI (via une équation différentielle)

De nombreux circuits électriques rencontrés en première année étaient des SLCI. En électrocinétique, pour déterminer une relation liant le signal d'entrée et le signal de sortie d'un circuit, on utilise :

- Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds, loi des mailles) ;
- Les lois de comportement des dipôles ($i_C = C\,\dot{u}_C$, etc.)

Pour arriver au résultat souhaité, il est parfois nécessaire d'être astucieux dans la manière de combiner les différentes équations obtenues. Nommer toutes les grandeurs, et écrire toutes les lois possibles, et réfléchir ensuite conduit souvent à une **perte de temps considérable.**

Un exemple pour se rafraichir la mémoire - Déterminer une relation entrée-sortie d'un système simple



On considère le filtre passif représenté ci-contre.

Établir l'équation différentielle liant la tension d'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$.

Équation différentielle d'un SLCI

Tous les SLCI décrits par une équation différentielle s'écrivent : ______________________________

Et tous les systèmes décrits par une telle relation sont des SLCI.

Remarque : il est possible d'imaginer des SLCI qui ne s'écrivent pas sous cette forme. Par exemple, un système qui induit un retard d'une durée τ est un SLCI, mais sa relation entrée-sortie s'écrit : $s(t) = e(t - \tau)$, ce qui ne correspond pas à la forme ci-dessus[a].

II.4 – Description fréquentielle (via une fonction de transfert)

II.4.A – Passage de la description temporelle à fréquentielle

Très souvent, on étudiera la réponse de systèmes à des forçages sinusoïdaux. Ce cas particulier, qu'on justifiera plus tard être d'une importance capitale, permet de simplifier considérablement l'étude des systèmes en utilisant la représentation complexe des signaux.

[a] Il existe bien une manière d'écrire cela sous forme d'équation différentielle, mais avec une somme infinie.

Signal réel, signal complexe

À un signal sinusoïdal réel, on associe un signal complexe défini par :

On peut simplement en déduire la manière dont une dérivation réelle se traduit en représentation complexe :

Attention : Le signal complexe simplement est une manière pratique de représenter mathématiquement un signal réel. Ils contiennent la même information (i.e. l'amplitude et la phase) mais **ils ne sont pas égaux**.

Sauf mention contraire explicite, **on prendra toujours la phase du signal d'entrée égale à zéro**. Cela revient à choisir l'origine du temps de sorte à annuler la phase dans le cosinus.

Dans toute la suite, on admettra la propriété suivante, qui justifie l'importance des signaux sinusoïdaux dans l'étude de systèmes :

Réponse à un signal sinusoïdal

En régime permanent, un SLCI dont l'entrée est un signal sinusoïdal donne une sortie sinusoïdale de même fréquence, mais d'amplitude et de phase *a priori* différentes :

II.4.B - Fonction de transfert

Lorsqu'on étudie un système en régime permanent uniquement, il est possible de décrire la sortie d'un système en fonction de l'entrée en utilisant la fonction de transfert harmonique.

Fonction de transfert harmonique

La fonction de transfert d'un SLCI est le rapport des amplitudes complexes du signal de sortie et du signal d'entrée :

Connaissant $\underline{e_m}$ et $\underline{H_m}$, on a simplement :

Rappel manuscrit de première année : comment utiliser la fonction de transfert pour trouver la sortie d'un filtre ?

La fonction de transfert renseigne donc sur le comportement du système une fois le régime permanent atteint, pour toute entrée harmonique. **Les résultats ainsi obtenus ne concernent pas le régime transitoire**, ce qui constitue donc une **perte d'information** par rapport à l'étude réelle, mais permet un traitement mathématique bien plus simple.

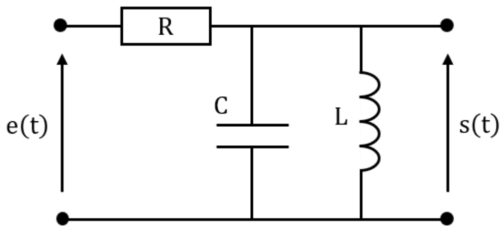
Puisqu'on sait convertir les signaux réels en signaux complexes, et que l'effet d'une dérivation temporelle sur les signaux harmoniques complexes est connue, on peut simplement traduire les équations différentielles réelles en équations algébriques (sans dérivées) puis en fonctions de transfert. Pour trouver une équation différentielle, cette méthode n'est ni la plus rapide, ni la plus simple. Dès que c'est possible, on établira directement la fonction de transfert en utilisant :

- les lois de Kirchhoff complexes (loi des mailles, loi des nœuds) ;
- les lois de comportement complexe des dipôles ($\underline{u_c} = \frac{1}{jC\omega} \cdot \underline{i}$, etc.)

Un exemple pour comprendre - Approche réelle et complexe d'un système

On considère le même système que dans un des exemples précédents.

1. Traduire l'équation différentielle établie plus haut en représentation complexe, puis en déduire la fonction de transfert.
2. Établir la fonction de transfert directement en représentation complexe.



Correspondance entre fonction de transfert et équation différentielle

On passe simplement de l'équation différentielle à la fonction de transfert (sous forme de rapport de polynômes en jω) :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n} = \sum_{k=0}^{K} b_k \cdot \frac{d^k e}{dt^k} \qquad \longleftrightarrow$$

Tous les systèmes dont la fonction de transfert est un quotient de polynômes en ω sont des SLCI.

Par des arguments de causalité (la sortie doit être calculable via l'entrée, et non l'inverse), on peut montrer qu'on doit avoir $N \geq K$.

Ordre d'un SLCI

L'ordre du système est :

- l'ordre de la plus haute dérivée **portant sur la sortie** de l'équation différentielle ;
- le degré du polynôme au **dénominateur** de la fonction de transfert.

II.4.C - Diagramme de Bode

La fonction de transfert est une fonction à valeur complexe, dépendant de la pulsation ω. Pour représenter sa variation, il est donc nécessaire de s'intéresser à deux valeurs réelles : la phase et amplitude (ou plutôt le gain).

Diagramme de Bode en amplitude et en phase

Un diagramme de Bode (en amplitude et en phase) est une représentation en fonction de ω, de $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

Il est nécessaire de savoir tracer rapidement l'allure d'une fonction de transfert. Par « allure », on entend simplement le comportement limite à basse et haute fréquence, ainsi que les valeurs remarquables en certaines valeurs (maximums, miniums, etc.)

Pour cela, il serait excessif de faire une étude de fonction dans les règles. On appliquera plutôt les étapes suivantes, qui minimisent souvent la quantité de calcul :

- **En premier** : déterminer les équivalences de la fonction de transfert lorsque $\omega \to \pm\infty$ (en gardant les termes dominants) ;
- **En second** : calculer l'argument et le module (ou le gain) pour représenter ces asymptotes réelles sur les diagrammes de Bode ;

Si le système est du deuxième ordre, il est possible qu'il existe une variation non-triviale entre les asymptotes (comme un pic de résonance). On calculera alors les valeurs de l'argument et de la phase en $\omega = \omega_0$ pour les représenter sur les diagrammes.

III - RÉSOLUTION ET STABILITÉ DES SLCI

On considère un système subissant un forçage, dont la sortie est définie par l'équation linéaire suivante :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n} = \sum_{k=0}^{K} b_k \cdot \frac{d^k e(x)}{dt^k} \qquad (a_n, b_k \in \mathbb{R})$$

Le membre de droite est connu (il ne dépend que de l'entrée), si bien que l'équation prend une forme simple : $\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n s}{dt^n} = g(t)$.

Solution générale d'un SLCI

Une équation linéaire avec second membre admet des solutions de forme connue :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n f}{dx^n} = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad s(x) = \overbrace{\left(C_1\, s_1(x) + \cdots + C_N\, s_N(x)\right)}^{s_h(x)} + s_p(x)$$

La solution homogène s_h fait intervenir N constantes d'intégrations, et s_p est une solution quelconque de l'équation entière.

Dans le cas du système forcé, ces deux solutions ont une signification physique très différente :

- **La solution homogène** représente le régime transitoire. Dans tous les cas abordés jusqu'ici, cette fonction tend vers zéro après un certain temps ;
- **La solution particulière** représente le régime permanent. Après quelques instants, c'est la seule fonction non-nulle, qui est de même nature que le forçage (constante, sinusoïdale, etc.)

III.1 - Résonance et instabilité d'un SLCI

Définition de la stabilité

Un système est dit **stable** si un forçage borné donne une réponse bornée. Un système stable ne peut donc produire une sortie qui diverge (sauf si l'entrée elle-même diverge).

Attention : En première année, on avait rencontré des situations lors desquelles la sortie pouvait diverger (par exemple, la résonance dans un circuit LC) : ces divergences résultaient d'une modélisation incomplète du circuit – on négligeait les résistances internes des fils. Ce genre de divergence, qui concerne le régime permanent (donc la solution particulière) et qui n'apparait que pour une certaine **fréquence de résonance**, n'est **pas une instabilité**.

Jusqu'à maintenant, tous les régimes transitoires avaient une durée finie, et convergeaient rapidement vers zéro (nous n'avons donc jamais été confrontés à un système instable). Dans les prochains chapitres d'électrocinétique, on introduira un nouveau composant actif aux circuits, susceptible d'induire des situations instables dans certaines conditions qu'il faudra déterminer.

Remarque : En réalité, aucune divergence en sortie d'un système ne peut exister. Cela impliquerait que le système apporte une quantité d'énergie infinie, ce qui est bien sûr irréaliste. Lorsque la description du système mène à une situation de divergence, c'est qu'un composant du circuit change de comportement et que la modélisation n'est plus valide (par exemple, un composant atteint une valeur de saturation, un fil se met à fondre, un fusible grille, …)

III.2 - Résolution et stabilité d'un système d'ordre 1 (non-abordé en PTSI)

Équation du 1er ordre

Équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre : ______________________________

Solution homogène : ______________________________

Le temps caractéristique donne l'ordre de grandeur du temps d'adaptation du système à une perturbation. On dégage un critère simple de stabilité :

Critère de stabilité – système du 1er ordre

Un SLCI du premier ordre est stable si et seulement si **les coefficients de l'équation différentielle** sont du même signe. De manière équivalente, ssi les **coefficients du polynôme en jω au dénominateur** de la fonction de transfert sont de même signe.

III.3 - Résolution et stabilité d'un système d'ordre 2 (non-abordé en PTSI)

Équation du 2ème ordre

Équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre : ____________________

La solution homogène dépend des racines du **polynôme caractéristique** : ____________________

Discriminant positif, racines réelles :

____

La solution est simplement une somme de deux exponentielles, donc la solution est stable si les deux racines sont négatives. Dans ce cas, le temps caractéristique du système est $\tau = \max\left(\left|\frac{1}{r_+}\right|, \left|\frac{1}{r_-}\right|\right)$.

Discriminant négatif, racines complexes :

____

____

____

La solution est stable si r_r (la partie réelle des racines) est négative. La quantité r_i est appelée pseudo-pulsation (souvent proche de la pulsation propre du système), et le temps caractéristique du système est $\tau = 1/r_r$.

Discriminant nul, racine double

____

La solution est stable si r est négative. Dans ce cas, le temps caractéristique est $\tau = 1/r$.

Lorsqu'on souhaite uniquement connaitre la stabilité du système sans avoir à calculer les racines, on peut utiliser une propriété des racines de polynômes du second degré.

Parenthèse mathématique - Racines et coefficients d'un polynôme de second degré

On considère un polynôme $P(X)$ du second degré quelconque, dont les racines sont r_1 et r_2. On peut alors lier les racines aux coefficients du polynôme :

$$P(X) = a(X^2 - s \cdot X + p) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} s = r_1 + r_2 \\ p = r_1 r_2 \end{cases}$$

L'étude des coefficients permet donc simplement de trouver le signe des racines, et donc de déterminer la stabilité du système, directement à partir de l'équation différentielle ou du dénominateur de la fonction de transfert.

Critère de stabilité – système du 2ème ordre

Un SLCI du deuxième ordre est stable :

- ssi les coefficients de l'équation différentielle sont du même signe.
- ssi les coefficients du polynôme en $j\omega$ au <u>dénominateur</u> de la fonction de transfert sont de même signe.

Un exemple pour comprendre - Déterminer la stabilité d'un système via la fonction de transfert

Déterminer la stabilité du système dont la fonction de transfert est $H(\omega) = \frac{1}{1+jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$.

Lorsque les systèmes sont stables, on mettra les équations différentielles sous forme canonique, comme vu en première année.

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = \cdots \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \cdot s = \cdots \qquad \left(\text{ou } \frac{d^2s}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \cdot \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \cdot s = \cdots\right)$$

Les deux formes possibles pour les équations du second ordre sont deux manières de faire intervenir des grandeurs caractéristiques des solutions. Les paramètres sont :

- La pulsation propre ω_0, qui indique la pulsation d'oscillation du système s'il n'y avait pas de phénomènes dissipatifs ;
- Le facteur de qualité Q, ou le coefficient d'amortissement ξ, qui renseignent sur la propension du système à osciller, et sur la largeur des éventuelles résonances.

Remarque : il est tentant de généraliser le critère de stabilité (sur le signe des coefficients de l'équation différentielle) aux systèmes d'ordre supérieurs. Cela dit, c'est **incorrect** : la stabilité des systèmes d'ordre 3 est plus difficile à étudier (mais ces systèmes sont hors-programme).

IV - DÉCOMPOSITION DE FOURIER ET FILTRAGE FREQUENTIEL

IV.1 - Représentation de Fourier d'un signal

La représentation de Fourier (ou décomposition de Fourier) est une manière de récrire les signaux extrêmement utilisés dans tous les domaines de la physique. Ici, elle va permettre de simplifier considérablement l'action d'un filtre sur un signal quelconque.

Représentation de Fourier

Toute fonction périodique $f(t)$ de période T (de pulsation $\omega = 2\pi/T$) peut se mettre sous une des formes suivantes :

C'est-à-dire, de manière développée :

$$s(t) \; = \; s_0 \; + \; s_1\cos(\omega t + \varphi_1) \; + \; s_2\cos(2\omega t + \varphi_2) \; + \; s_3\cos(3\omega t + \varphi_3) \; + \; \dots$$

Les paramètres (s_i, φ_i) et (a_i, b_i) sont appelés **coefficients de Fourier**. Il existe des formules permettent de les déterminer, mais elles ne sont pas au programme. On retiendra que la connaissance de tous les coefficients de Fourier permet de tracer le signal périodique, et que :

- $s_0 = \langle s(t) \rangle$ est la **composante continue** ou **valeur moyenne** du signal ;
- $f = f_1$ est la fréquence du signal $s(t)$, appelée **fréquence fondamentale** ;
- $s_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'**harmonique de rang n**, caractérisée par :
  - sa fréquence $f_n = n \times f_1$, multiple de la fréquence fondamentale ;
  - son amplitude s_n ;
  - sa phase à l'origine φ_n.

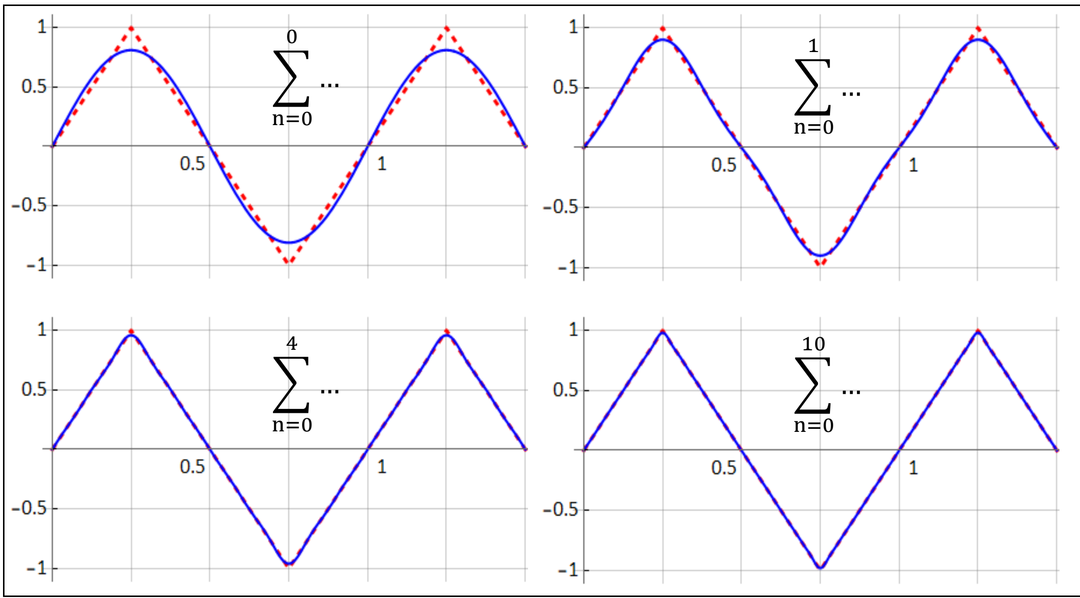
IV.1.A - Exemple du signal triangle

Un signal triangle $s_{tri}(t)$ est le signal périodique représenté en pointillés sur les graphes ci-dessous (avec ici $T = 1$, donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$). Il est possible de montrer que sa décomposition de Fourier s'écrit :

$$\begin{aligned} s_{tri}(t) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin\big((2n+1)\omega t\big)}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sin(\omega t) - \frac{8}{9\pi^2}\sin(3\omega t) + \frac{8}{25\pi^2}\sin(5\omega t) - \cdots \end{aligned}$$

Attention : il est parfois nécessaire d'écrire le développement de Fourier pour arriver à définir les coefficients. Ici, on voit qu'un coefficient sur deux est nul, ce qui ne se voit pas directement dans l'écriture avec Σ.

On peut représenter la manière dont la série converge vers s_{tri} en superposant la fonction s_{tri} (en rouge pointillés), et la série de Fourier (en se limitant à ses quelques premiers termes (en bleu)).



Sur la première courbe, seule la première harmonique (le fondamental) est représentée (en bleu).

Sur la seconde courbe, on limite la somme à ses deux premiers termes ($n = 1$ et 2) ;

Sur la troisième courbe, on limite la somme à ses quatre premiers termes ($n = 1,2,3,4$), etc.

Plus on rajoute d'harmoniques, plus la courbe obtenue s'approche de celle du triangle.

IV.2 - Filtrage en fréquence

Soit une grandeur d'entrée dont la décomposition de Fourier s'écrit : $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$
C'est une combinaison linéaire comportant une infinité de termes. On s'intéresse à l'action du filtre σ sur l'entrée, qu'on note $\sigma[e]$.
La linéarité du filtre impose :

$$\sigma\left[\sum_{n=0}^{\infty} e_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e_n\, \sigma[\cos(n\omega t + \varphi_n)] = e_0\, \sigma[1] + e_1\, \sigma[\cos(\omega t + \varphi_1)] + e_2\, \sigma[\cos(2\omega t + \varphi_2)] + \cdots$$

Quand un système linéaire admet une entrée qui prend la forme d'une somme finie ou infinie, on peut calculer séparément la réponse de chaque membre de la somme, et sommer à la fin toutes ces contributions.

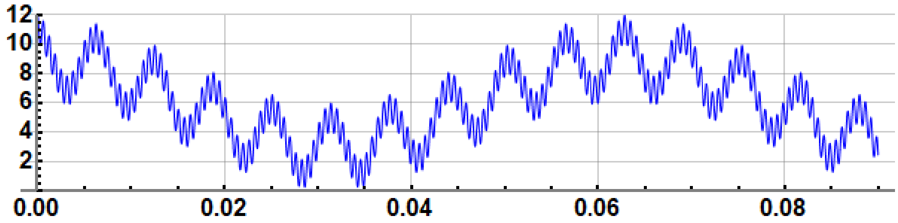
Comme tout signal périodique s'écrit comme une somme de $\cos(n\omega t + \varphi_n)$, on peut s'intéresser uniquement à l'action du filtre sur un signal sinusoïdal quelconque $\cos(\Omega t + \phi)$, et on pourra ensuite reconstruire l'action du filtre sur n'importe quel signal en appliquant ces résultats sur chaque terme de sa décomposition de Fourier.

Voila pourquoi on s'intéresse toujours à la réponse harmonique des systèmes : c'est une manière de connaitre aisément l'action du système sur n'importe quel signal périodique.

Un exemple pour comprendre – Filtrage d'un signal quelconque

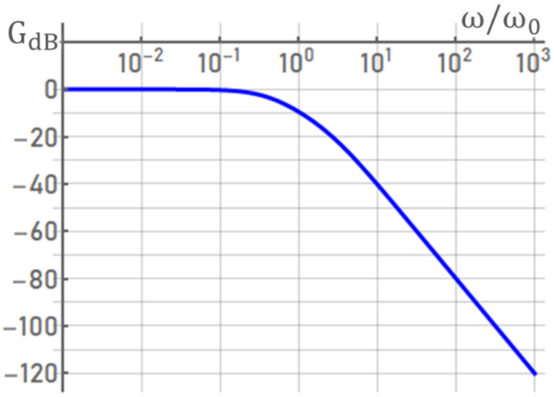
On considère un signal $e(t)$ de forme suivante, représenté ci-contre :

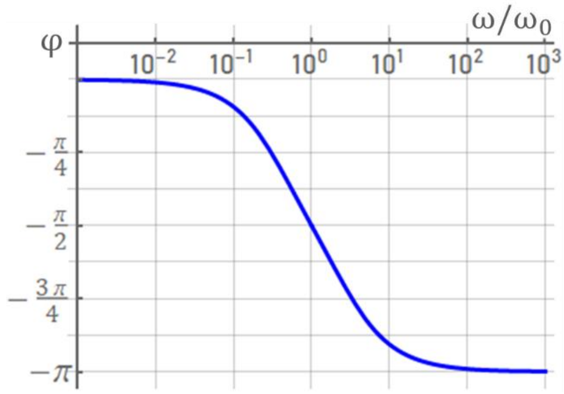
$$e(t) = 6 + 3\cos(10^2\,t) + 2\cos(10^3\,t) + 1\cos(10^4\,t)$$



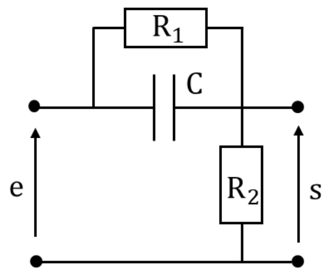
qu'on envoie dans un filtre dont les diagrammes de Bode sont représentés ci-dessous (la pulsation propre du filtre est $\omega_0 = 10^3\ \mathrm{rad.s^{-1}}$). On obtient en sortie un signal $s(t)$.

1. Nommer ce filtre et donner son ordre.
2. Quelles sont les pulsations du signal d'entrée ? Où les placer dans le diagramme de Bode ?
3. Par lecture graphique, déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.
4. Représenter graphiquement la sortie, en la superposant à l'entrée sur le graphique ci-dessus.





Exercice d'application - Étude d'un circuit « correcteur par avance de phase »



1. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre, et son ordre.
2. En déduire l'équation différentielle liant $e(t)$ et $s(t)$.
3. Tracer son diagramme de Bode asymptotique pour $R_1/R_2 = 2$.
4. Commenter l'effet du filtre sur un signal pour chaque zone du diagramme de Bode.
5. On envoie en entrée un signal $e(t) = e_0\cos\left(\frac{t}{R_2C}\right) + e_0\cos\left(\frac{100\,t}{R_2C}\right)$.
6. Donner une expression approximative du signal de sortie.