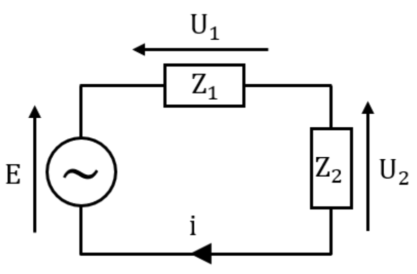
I - RAPPELS DE BASE D'ÉLECTROCINÉTIQUE

I.1 - Loi des mailles réelle/complexe



Loi des mailles avec les grandeurs réelles et complexes :

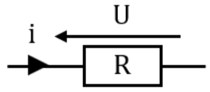
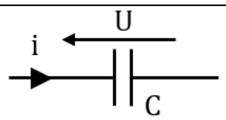
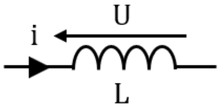
$$E = U_1 + U_2 \qquad \underline{E} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$$

Pont diviseur de tension avec les grandeurs réelles et complexes :

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \qquad \underline{U_2} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \underline{E}$$

Seulement avec des résistances — Avec des impédances complexes

I.2 - Comportement des dipôles usuels

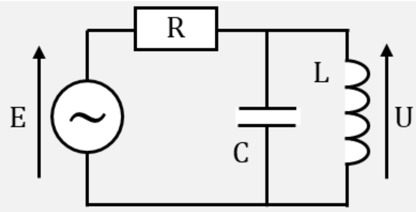
Dipôle	Symbole	Loi de comportement réelle et complexe	Énergie / puissance
Résistance		$U = R \cdot i$ et $\underline{U} = \underline{R} \cdot \underline{i}$	$\mathcal{P} = R\,i^2$ (dissipée)
Condensateur		$i = C\dfrac{dU}{dt}$ et $\underline{U} = \dfrac{1}{jC\omega} \cdot \underline{i}$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$ (stockée)
Bobine		$U = L\dfrac{di}{dt}$ et $\underline{U} = jL\omega \cdot \underline{i}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$ (stockée)

Attention : dans le tableau ci-dessus, les tensions et intensités sont définies en convention récepteur. Si la flèche tension est dans le même sens que la flèche intensité (convention récepteur), alors les relations prennent un signe ⊖.

Un exemple pour comprendre - Loi des mailles avec signaux complexes

Dans le circuit ci-contre, le générateur de tension impose une tension sinusoïdale E.

Déterminer la tension $\underline{U}$ en fonction des impédances complexes et de $\underline{E}$.



Méthode naïve (calcul complet de Z_{eq}) :

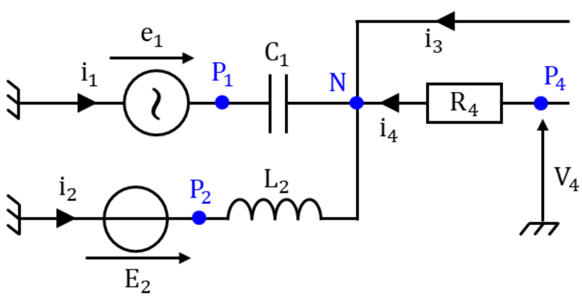
Calculer en entier Z_{eq}, puis appliquer le diviseur de tension entre la résistance et Z_{eq}. C'est bien trop long !

Mieux (calcul de $1/Z_{eq}$ uniquement) :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{U} = \frac{Z_{eq}}{R + \underline{Z_{eq}}}\underline{E} = \frac{1}{R/\underline{Z_{eq}} + 1}\underline{E} = \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}\underline{E}$$

I.3 - Loi des nœuds (en termes de potentiels)

Loi des nœuds en termes de potentiels et d'intensité



Loi des nœuds en termes d'intensités : $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

Loi des nœuds en termes de potentiels :

$$jC\omega\,(V_{P1} - V_N) + \frac{1}{jL\omega}(V_{P2} - V_N) + i_3 + \frac{1}{R_4}(V_{P4} - V_N) = 0$$

i.e. $\quad jC\omega\,(e_1 - V_N) + \frac{1}{jL\omega}(E_2 - V_N) + i_3 + \frac{1}{R_4}(V_4 - V_N) = 0$

II - SYSTÈME LINÉAIRE, CONTINU ET INVARIANT (SLCI)

Régime libre : le forçage est nul, aucune énergie n'entre dans le système.

Régime forcé : le forçage n'est pas constamment nul, de l'énergie entre dans le système.

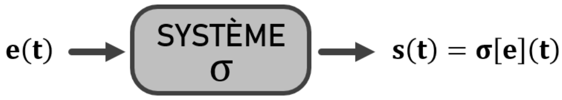
Régime stationnaire : la réponse ne dépend pas du temps : $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t = 0$.

Régime permanent (ou établi) : la réponse est une fonction périodique (une sinusoïde, une fonction carré, etc.)

Régime transitoire : la réponse est en train de s'adapter à un changement dans le forçage et varie de manière non-triviale.

II.1 - Caractéristiques du SLCI

Le système σ prend en entrée une fonction e, et donne en sortie une fonction s. Puisque cette fonction s dépend du système, on utilise la notation ci-contre :



Linéarité d'un système

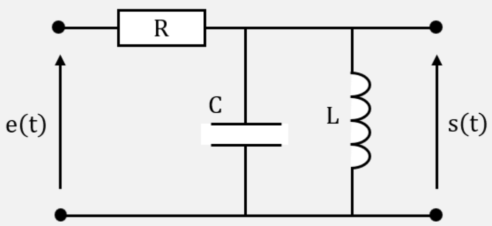
Un système est dit linéaire si et seulement si :

$$\text{Si } \begin{cases} \sigma[e_1] = s_1 \\ \sigma[e_2] = s_2 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \sigma[a \cdot e_1 + b \cdot e_2] = a \cdot s_1 + b \cdot s_2 \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}$$

C'est-à-dire que si on connait la réponse correspondant à deux entrées quelconques, la réponse à une combinaison linéaire de ces deux entrées est la même combinaison linéaire des réponses individuelles.

II.2 - Description temporelle (via une équation différentielle)

Un exemple pour comprendre - Déterminer une relation entrée-sortie d'un système simple



On considère le filtre passif représenté ci-contre.
Établir l'équation différentielle liant la tension d'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$.

Loi des nœuds : $i = i_C + i_L \quad \Rightarrow \quad \dfrac{di}{dt} = \dfrac{di_C}{dt} + \dfrac{di_L}{dt}$.

Lois de comportement : $\dfrac{1}{R}\dfrac{du_r}{dt} = C\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{s}{L}$

Loi des mailles : $\dfrac{1}{R}\dfrac{d(e-s)}{dt} = C\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{s}{L}$

En réorganisant les termes, on obtient la relation : $C \cdot \dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{ds}{dt} + \dfrac{1}{L} \cdot s = \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{de}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{1}{RC} \cdot \dfrac{ds}{dt} + \dfrac{1}{LC} \cdot s = \dfrac{1}{RC} \cdot \dfrac{de}{dt}}$

Équation différentielle d'un SLCI

Tous les SLCI décrits par une équation différentielle prennent la forme :

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \cdot \frac{d^i s}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} \beta_i \cdot \frac{d^i e}{dt^i} \qquad (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}, N > M)$$

Et tous les systèmes décrits par une relation de ce type sont des SLCI.

II.3 - Description fréquentielle (via une fonction de transfert)

Signal réel et représentation complexe du signal

À un signal sinusoïdal réel, on associe un signal complexe défini par :

$$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \underset{\text{Re}}{\overset{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}{\rightleftarrows}} \quad \underline{u}(t) = u_m\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = \underline{u_m}\, e^{j\omega t}$$

On peut simplement en déduire qu'une dérivation réelle se traduit en représentation complexe par une **multiplication par jω.**

Attention : Le signal complexe simplement est une manière pratique de représenter mathématiquement un signal réel. Ils contiennent la même information (i.e. l'amplitude et la phase) mais **ils ne sont pas égaux**.

Fonction de transfert harmonique

La fonction de transfert d'un SLCI est le rapport des amplitudes complexes du signal de sortie et du signal d'entrée :

$$\underline{H}(\omega) = \underline{s_m}/\underline{e_m} = \frac{s_m\, e^{j\varphi_s}}{e_m}$$

Connaissant $\underline{e_m}$ et $\underline{H_m}$, on a simplement : $\underline{s_m} = \underline{H} \cdot \underline{e_m} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{H} \cdot \underline{e_m} \cdot e^{i\omega t}\right)$

Plus explicitement, on calcule l'amplitude et le déphasage d'un signal de sortie via :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s_m}}{\underline{e_m}} = \frac{s_m}{e_m}\, e^{j\varphi}. \quad \text{On a donc :} \begin{cases} |\underline{H}| = \left|\frac{s_m}{e_m}\, e^{j\varphi}\right| = \frac{s_m}{e_m} & \Rightarrow \quad \boxed{s_m = |\underline{H}|\, e_m} \\ \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{s_m}{e_m}\, e^{j\varphi}\right) = \arg(e^{j\varphi}) = \varphi & \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \arg(\underline{H})} \end{cases}$$

Correspondance entre fonction de transfert et équation différentielle

On passe simplement de l'équation différentielle à la fonction de transfert (sous forme de rapport de polynômes en $j\omega$) :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n} = \sum_{k=0}^{K} b_k \cdot \frac{d^k e}{dt^k} \quad \xleftrightarrow{\frac{d}{dt} \sim (j\omega)} \quad H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k \cdot (j\omega)^k}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j\omega)^n} \quad \left(\begin{matrix}\text{à simplifier :} \\ (j\omega)^2 = -\omega^2\end{matrix}\right)$$

Tous les systèmes dont la fonction de transfert est un quotient de polynômes en ω sont des SLCI.

Ordre d'un SLCI - L'ordre du système est :

- l'ordre de la plus haute dérivée **portant sur la sortie** de l'équation différentielle ;
- le degré du polynôme au **dénominateur** de la fonction de transfert.

II.4 - Résonance et instabilité d'un SLCI (non-abordé en PTSI)

Définition de la stabilité

Un système est dit **stable** si un forçage borné donne une réponse bornée. Un système stable ne peut donc pas produire une sortie qui diverge (sauf si l'entrée elle-même diverge). Tous les systèmes abordés en PTSI étaient stables.

II.4.A - Résolution et stabilité d'un système d'ordre 1 (non-abordé en PTSI)

Équation du 1er ordre

Équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre : $a\frac{ds}{dt} + bs = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Solution homogène : $s_h(t) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$ avec $\tau = -b/a$ homogène à un temps : « temps caractéristique du système ».

Critère de stabilité – système du 1er ordre

Un SLCI du premier ordre est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle sont du même signe. De manière équivalente, ssi les coefficients du polynôme en $j\omega$ au dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe.

II.4.B - Résolution et stabilité d'un système d'ordre 2

Équation du 2ème ordre

Équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre : $a\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + cs = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

La solution homogène dépend des racines du **polynôme caractéristique** : $P(r) = a\,r^2 + b\,r + c \quad \rightarrow \quad \Delta_P = b^2 - 4ac$

<u>**Discriminant positif, racines réelles**</u> : $\Delta_P > 0 \quad \Longrightarrow \quad r_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta_P}}{2a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s_h(t) = C_1 \exp(r_+ \cdot t) + C_2 \exp((r_- \cdot t))}$

La solution est simplement une somme de deux exponentielles, donc la solution est stable si les deux racines sont négatives.

<u>**Discriminant négatif, racines complexes :**</u>

$$\Delta_P < 0 \quad \Longrightarrow \quad r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta_P}}{2a} = r_r \pm j\, r_i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s_h(t) = \begin{cases} A_1 \exp(r_+ \cdot t) + A_2 \exp((r_- \cdot t)) \\ \exp(r_r \cdot t) \cdot [B_1 \cos(r_i \cdot t + B_2)] \\ \exp(r_r \cdot t) \cdot [C_1 \cos(r_i \cdot t) + C_2 \sin((r_i \cdot t))] \end{cases}}$$

La solution est stable si r_r (la partie réelle des racines) est négative. La quantité r_i est appelée pseudo-pulsation (souvent proche de la pulsation propre du système).

<u>**Discriminant nul, racine double**</u> : $\Delta_P = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = -\frac{b}{2a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s_h(t) = (C_1\, t + C_2) \cdot \exp(r \cdot t)}$

La solution est stable si r est négative.

Critère de stabilité – système du 2ème ordre

Un SLCI du deuxième ordre est stable :

- ssi les coefficients de l'équation différentielle sont du même signe.
- ssi les coefficients du polynôme en $j\omega$ au <u>dénominateur</u> de la fonction de transfert sont de même signe.

Un exemple pour comprendre - Déterminer la stabilité d'un système via la fonction de transfert

Déterminer la stabilité du système dont la fonction de transfert est $H(\omega) = \frac{1}{1+jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$.

$$H(\omega) = \frac{\omega}{\omega + jQ\frac{\omega^2}{\omega_0} - jQ\omega_0} = \frac{\omega}{\frac{jQ}{\omega_0}\left(\omega^2 + \frac{\omega_0}{jQ}\omega - \omega_0^2\right)} = \frac{\omega}{-\frac{jQ}{\omega_0}\left((j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega) + \omega_0^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 + r_2 = -\omega_0/jQ \\ r_1 r_2 = \omega_0^2 \end{cases}$$

Le produit des racines est positif, et leur somme est négative. Elles sont donc toutes deux négatives, donc le système est **stable**.

III - DÉCOMPOSITION DE FOURIER ET FILTRAGE FREQUENTIEL

Représentation de Fourier

Toute fonction périodique $f(t)$ de période T (de pulsation $\omega = 2\pi/T$) peut se mettre sous une des formes suivantes :

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

C'est-à-dire, de manière développée :

$$f(t) = \underbrace{f_0}_{\substack{\text{composante} \\ \text{continue}}} + \underbrace{f_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\substack{\text{harmonique n°1} \\ = \text{fondamental}}} + \underbrace{f_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)}_{\text{harmonique n°2}} + \underbrace{f_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)}_{\text{harmonique n°3}} + \ldots$$

Les paramètres (s_i, φ_i) et (a_i, b_i) sont appelés **coefficients de Fourier**. Il existe des formules permettent de les déterminer, mais elles ne sont pas au programme.