

### Programme d'interrogation orale

- Connaître la signification des termes échantillonnage, quantification, fréquence d'échantillonnage, spectre.
- Utiliser le critère de Shannon afin de déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal donné.
- Lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté, savoir représenter le repliement spectral dû au sous-échantillonnage.
- Lors d'une FFT, savoir lier le temps d'acquisition et la période d'échantillonnage à la précision fréquentielle du spectre FFT et à son ensemble de définition.

### Exercice 1 – Échantillonnage d'un signal

Difficile 1 – Original 1

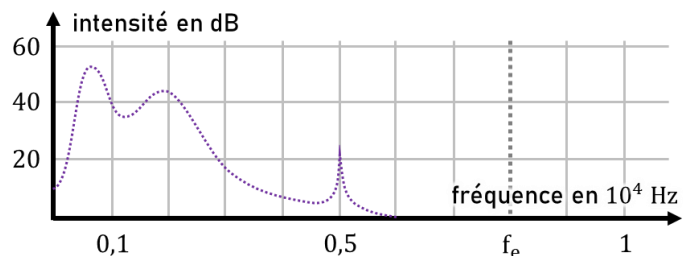
On souhaite procéder à l'enregistrement d'un concert, d'une durée  $T = 60$  min, dans un format numérique sans compression (par exemple, au format « wav »). La fréquence d'échantillonnage choisie est  $f_e = 44\,100$  Hz, et les valeurs sont enregistrées en stéréo sur un format 16 bit.

1. Quelle sont les fréquences minimales et maximales théoriques enregistrées dans ces conditions ?
2. Quelle taille mémoire doit-on prévoir pour ce stockage ?

### Exercice 2 – Repliement spectral

Difficile 1 – Original 1

On donne le spectre d'un signal analogique susceptible de transiter par téléphone. Ce signal a été parasité par un bruit haute fréquence à 5 kHz. Le signal audio est échantillonné à la fréquence  $f_e = 8,0$  kHz. On représente ci-contre le spectre réel.



1. En expliquant succinctement la méthode, tracer le spectre du signal échantillonné sur le même graphique.
2. Comment pourrait-on se débarrasser du pic parasite qui apparaît dans le signal échantillonné et rendre le spectre du signal échantillonné plus proche de celui du signal analogique.

### Exercice 3 – Condition de Nyquist-Shannon

Difficile 1 – Original 1

Un signal téléphonique a son spectre limité à 3,4 kHz pour réduire son encombrement spectral. Il est échantillonné à  $F_e = 8,0$  kHz. Pour la réalisation d'un CD audio, on souhaite conserver la fréquence maximale du domaine audible qui est de 20,0 kHz. Le signal audio est échantillonné à  $f_e = 44,1$  kHz.

1. Lorsque la condition de Shannon est respectée, combien d'échantillons sont prélevés au minimum par période d'un signal  $s(t)$  sinusoïdal ?
2. Le critère de Shannon est-il respecté pour la téléphonie et pour le CD audio ?
3. Présenter sur deux graphiques l'allure du spectre du signal téléphonique et l'allure du spectre de ce même signal une fois qu'il a été échantillonné. Ce dernier spectre fait apparaître une zone vide appelée « zone de transition », quelle est sa taille ?
4. Sachant que la limitation du spectre (à 3,4 kHz) est assurée par un passe-bas électrocinétique (comme un filtre RC), quel est le rôle de cette zone de transition ?

### Exercice 4 – Quantification

On s'intéresse à un CAN linéaire de résolution  $N$ , de quantum (pas de quantification)  $q$  que l'on applique à un signal  $s(t)$  triangulaire de tension de pleine échelle  $S_0$  et de période  $T_0$ . Le signal est numérisé à une fréquence d'échantillonnage  $f_e > 2/T_0$ . Le CAN est réglé de sorte que l'erreur de quantification est nulle à chaque instant d'échantillonnage.

1. Représenter le signal  $s(t)$  ainsi que le signal échantillonné et quantifié  $s_{ech}(t)$  pour  $T_0 = 6/f_e$ .
2. Dans quel intervalle est compris  $\epsilon(t) = s(t) - s_{ech}(t)$  ? En déduire la loi  $\epsilon(t)$  sur cet intervalle.
3. En raisonnant sur une période de  $\epsilon(t)$ , déterminer sa valeur moyenne sur  $T_e$ , puis sur  $T_0$ .
4. Faire de même pour la moyenne quadratique, et comparer  $\epsilon_{eff}$  et la plage de conversion du signal  $\Delta S$  pour un convertisseur linéaire 8 bits ou 12 bits.

## Annales 1 – Conditionnement des signaux par oscillateurs

Le premier circuit intégré composé de quelques transistors a été réalisé en 1958 par Jack Kibly. Un circuit intégré se compose d'une plaque de silicium dont on a localement modifié les propriétés électriques grâce au dopage afin de créer des transistors interconnectés. Depuis lors, les avancées technologiques, ainsi que les avancées en physique fondamentale ont permis de multiplier le nombre de transistors sur un circuit intégré : de 2300 transistors en 1971, ce nombre est passé à  $2,6 \cdot 10^9$  en 2013.

L'augmentation des performances de stockage est allée de pair. Il fallait une petite armoire pour stocker un disque dur d'un mégaoctet en 1964, actuellement un téraoctet ( $10^{12}$  octets) tient sur le bout du doigt. En 1965 Gordon Moore, un des fondateurs de la société Intel, énonce une conjecture (première loi de Moore) :

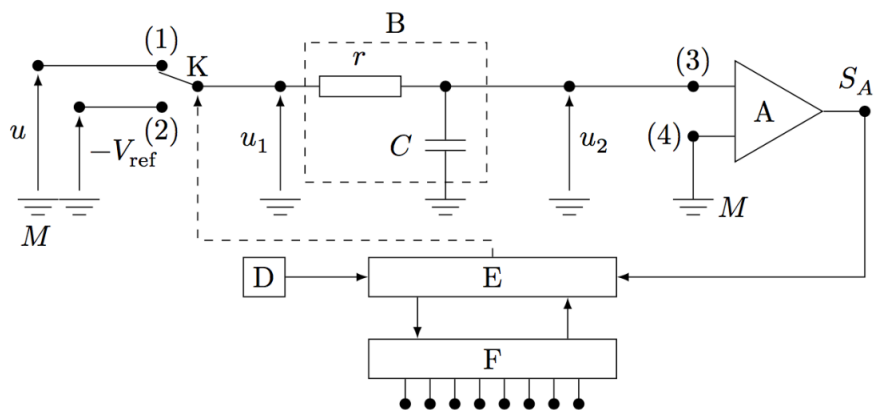
« La complexité des circuits intégrés d'entrée de gamme double tous les ans. »

Dans ce problème on étudie quelques aspects de la physique et de la chimie dans les ordinateurs, qui ont permis la réalisation de la loi de Moore jusqu'à nos jours.

### Numérisation avant stockage

Dans tout système de stockage numérique de données, la première étape est celle de la numérisation. Les signaux du monde réel sont analogiques, pour les transformer en signaux numériques on utilise un convertisseur analogique numérique, noté CAN par la suite.

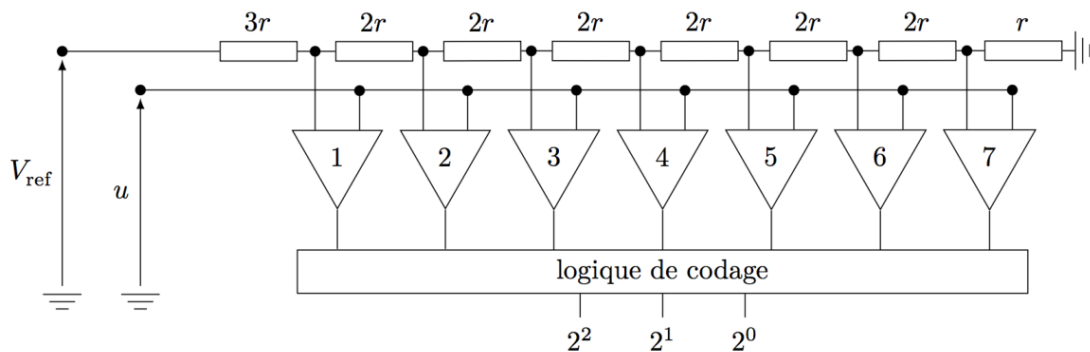
Au cœur de tous les convertisseurs se trouve un compteur (noté F sur la figure ci-contre), commandé par un signal d'horloge (noté D) qui incrémente le compteur à chaque bip d'horloge (le compteur est lui-même commandé par une logique de commande notée E). La fréquence du signal d'horloge est de l'ordre de quelques GHz, on la suppose parfaitement stable. Le compteur compte à partir de zéro, dès que la commande de compter lui a été donnée, au rythme imposé par le signal d'horloge. Il fournit en sortie un nombre codé sur N bits.



1. Avec quelle précision maximale mesure-t-on une durée à l'aide d'un compteur dont le signal d'horloge a une fréquence  $f_{ck} = 1 \text{ GHz}$  ?
2. L'architecture des premiers CAN était du type « série », elle est modélisée par le dispositif schématisé sur la figure ci-dessus. La tension positive  $u$  dont la valeur est comprise entre  $0 \text{ V}$  et  $V_{ref}$  ( $V_{ref} = 2 \text{ V}$ ), supposée constante pendant la durée de la numérisation, est convertie en un nombre  $S_N$ . Le convertisseur est composé d'un circuit  $r, C$  formant le bloc B, d'un comparateur A, et d'éléments intégrés parmi lesquels le bloc logique de commande E, le générateur de signal d'horloge D et le compteur sur N bits F. Les résistances d'entrée des blocs A, E et F sont infinies. Le module A compare les potentiels des nœuds (3) et (4). Lorsque  $V_{(3)} > V_{(4)}$ , son potentiel de sortie  $V_{SA}$  est au niveau haut, de sorte que  $V_{SA} = V_{SA} - V_M = 5 \text{ V}$ . Lorsque  $V_{(3)} < V_{(4)}$ , son potentiel de sortie est au niveau bas ( $V_{SA} = 0 \text{ V}$ ). Il commande ainsi le bloc logique E. L'interrupteur K est commandé par le bloc logique E, ce qui est symbolisé par un trait pointillé.
  - a. Préciser ce qu'on appelle masse dans un montage électrique.
  - b. Représenter le graphe de la tension  $V_{SA} = V_{SA} - V_M$  en fonction de  $u_2$ .
3. Partant d'une situation où le condensateur est déchargé, E commande à l'instant  $t = 0$  la mise en position (1) de l'interrupteur K. L'interrupteur reste dans cette position pendant une durée  $t_1 = (2^N - 1)/f_{ck}$  qui correspond à un cycle complet de comptage du compteur sur N bits. Étudier  $u_2$  en fonction du temps entre  $t = 0$  et  $t_1$ . Faire apparaître une constante  $\tau$ , homogène à un temps, caractéristique du bloc B.
4. Pour toute la suite, on choisit les valeurs de  $r$  et  $C$  de sorte que  $t_1 \ll \tau$ .
  - a. Donner alors l'expression simplifiée de  $u_2$  en fonction du temps, ainsi que le lien simplifié entre  $u_1$  et  $du_2/dt$ .
  - b. Quelle est alors la fonction du bloc B ?

- c. Que vaut  $V_{SA}$  entre 0 et  $t_1$  ?
5. Le bloc de commande fait basculer l'interrupteur K en position (2) à l'instant  $t_1$  et déclenche le comptage. Celui-ci dure jusqu'à l'instant  $t_1 + t_2$  tel que le signal  $V_{SA}$  soit modifié.
  - a. Exprimer  $t_2$  en fonction de  $u$ ,  $t_1$  et  $V_{ref}$ .
  - b. Représenter sur un même graphe  $u_2$  et  $u_1$  en fonction du temps, entre  $t = 0$  et  $t = t_1 + t_2$ .
  - c. Quel est le lien entre  $s_N$  et  $t_2$  ?
6. Quelle est la durée maximale de la conversion analogique numérique pour un convertisseur 8 bits commandé par un signal d'horloge de fréquence  $f_{ck} = 1 \text{ GHz}$  ? En déduire une condition sur la fréquence des signaux qu'on peut numériser avec un tel convertisseur. Commenter.

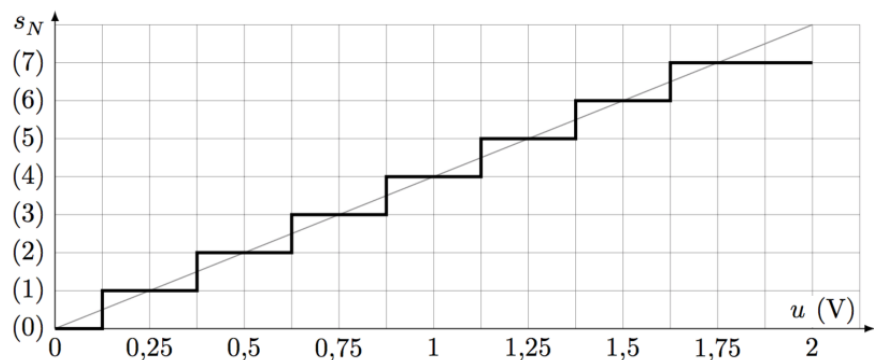
Les convertisseurs plus récents ont une architecture parallèle. La figure ci-dessous représente un convertisseur 3 bits, qui convertit une tension  $u$  qui vérifie  $0 < u < V_{ref}$ . Il est composé de 7 comparateurs, d'une logique de commande et de résistances de valeur  $r$ ,  $2r$  et  $3r$ . Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et délivrent un signal logique qui set au niveau haut lorsque la patte reliée à  $u$  a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à  $V_{ref}$  par l'intermédiaire des résistances.



7. Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur. On note  $u_N$  la tension numérisée, reconstituée à partir de  $s_N$ . Comment passe-t-on de  $s_N$  à  $u_N$  ?
8. Pour un convertisseur 8 bits, combien faut-il de comparateurs ? Quels sont les avantages et inconvénients comparés des convertisseurs série et parallèle ?

La figure ci-contre représente le signal numérisé  $s_N$  en fonction de la tension à numériser  $u$ .

9. Que vaut N dans l'exemple donné ?
10. Donner les valeurs de  $s_N$  en base 2 et de  $u_N$  pour  $u = 1,28 \text{ V}$ .
11. Quel type d'erreur induit la numérisation ? Préciser l'écart maximal entre la valeur de la tension numérisée  $u_N$  et  $u$ .



On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute-fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur  $s$  est égale  $j\omega$  où  $\omega$  est la pulsation des signaux sinusoïdaux et  $j^2 = -1$ .

12. Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.
13. Proposer une valeur de la fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.

Filtres réalisables avec le LMF100

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP} \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

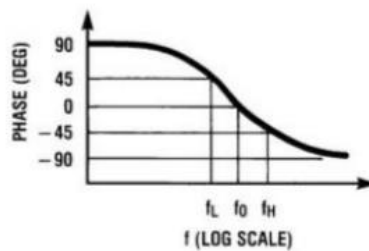
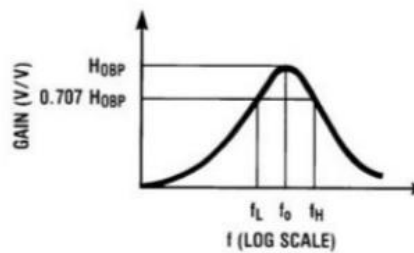


FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L}; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

$$f_L = f_0 \left( \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left( \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP} \omega_0^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

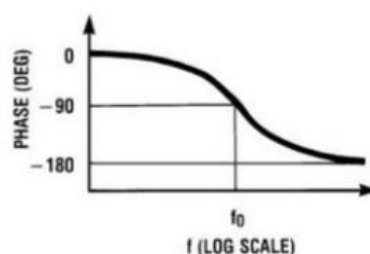
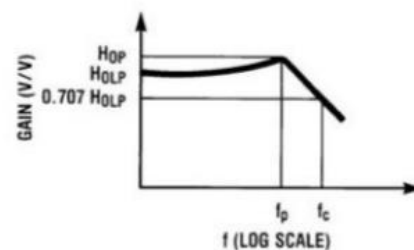


FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP} s^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

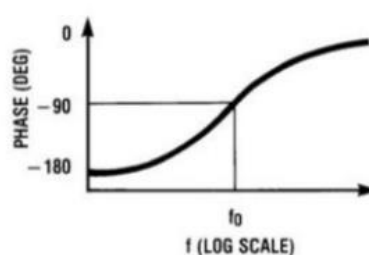
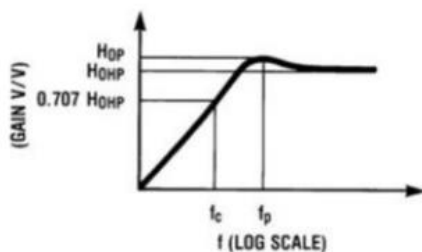


FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response

$$f_c = f_0 \times \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}} \right]^{-1}$$

$$f_p = f_0 \times \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$