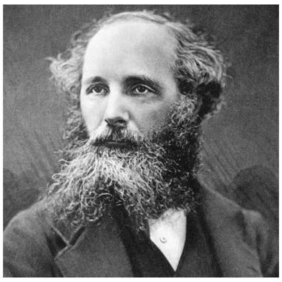
**Équations de Maxwell**

Dans un espace contenant une densité de charges $\rho(M)$, et une densité de courant $\vec{j}(M)$, les champs vectoriels $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ vérifient les quatre équations de Maxwell :



| Maxwell-Gauss | Maxwell-Thompson | Maxwell-Faraday | Maxwell-Ampère |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ | $\mathbf{div}(\vec{B}) = 0$ | $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |

**Champs électriques et magnétiques :**
$\vec{E}$ : vecteur champ électrique ($V.m^{-1}$)
$\vec{B}$ : vecteur champ magnétique (T)

**Sources de champs :**
$\rho$ : densité de charge ($C.m^{-3}$)
$\vec{j}$ : vecteur densité de courant ($A.m^{-2}$)

**Constantes :**
$\epsilon_0$ : permittivité du vide ($8{,}854 \cdot 10^{-12}$ $F.m^{-1}$)
$\mu_0$ : perméabilité du vide ($1{,}257 \cdot 10^{-6}$ $H.m^{-1}$)

Dans les précédents chapitres, bien qu'ayant successivement abordé toutes les équations de Maxwell, on s'est à chaque fois placé dans des limites stationnaires, ou quasi-stationnaires, dans lesquelles il y a découplage entre le champ électrique et magnétique. Or, comme on le voit dans l'équation de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, les variations temporelles d'un champ sont des sources de l'autre champ. Il est donc possible d'imaginer l'existence d'un champ électromagnétique auto-entretenu, sans terme de source (charges $\rho$ ou courant $\vec{j}$).

## TABLE DES MATIERES

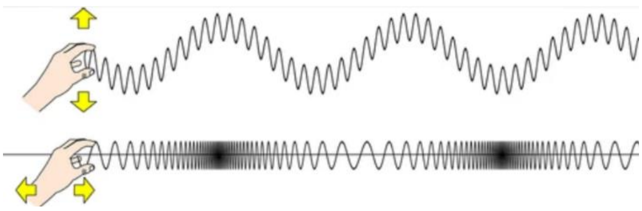


**Onde (rappel)**

Une onde est la **propagation de proche en proche** d'une perturbation dans l'espace d'une ou plusieurs grandeurs physiques. Dans la plupart des cas, la propagation d'une onde est associée à un **transport d'énergie sans transport de matière**.

Une onde mécanique nécessite un milieu matériel pour se déplacer (la propagation dans le vide est impossible). Une onde représentée par une grandeur vectorielle peut être :

- **Transversale** : le vecteur qui pointe dans la direction de propagation est perpendiculaire à la grandeur vectorielle oscillante ;
- **Longitudinale** : le vecteur qui pointe dans la direction de propagation est parallèle à la grandeur vectorielle oscillante.



# I - ÉQUATION DE PROPAGATION

## I.1 - Préambule d'analyse vectorielle

Avant d'établir l'équation de propagation des champs, on définit l'un des opérateurs auxquels nous ferons appel : le Laplacien appliqué à un champ vectoriel.

**Laplacien d'un champ scalaire (rappel) et Laplacien d'un champ vectoriel**

Le Laplacien d'un champ scalaire F renvoie un champ scalaire $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ (déjà défini dans un précédent chapitre).

On peut aussi définir le Laplacien d'un champ vectoriel $\vec{F}$, qui renvoie un champ vectoriel :

$$\Delta\vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z$$

**Attention** : le Laplacien est le seul opérateur défini sur les champs scalaires **et** vectoriels. Les autres opérateurs ($\mathrm{div}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$) ne s'appliquent qu'à un type de champ.

Dans la suite, on utilisera largement quelques **identités vectorielles** simples à démontrer, mais qu'il est nécessaire de connaitre :

**Identités vectorielles utiles**

La divergence du gradient d'un champ scalaire est égale au Laplacien : ____________________

Le rotationnel du rotationnel d'un champ vectoriel se simplifie comme : ____________________

La démonstration de ces deux propriétés est directe (mais la seconde est assez longue). Elle est laissée en tant qu'exercice.

## I.2 - Équations de propagation dans le vide des champs électrique et magnétique

Dans toute la suite, on étudiera la propagation des ondes électromagnétiques dans l'espace vide de matière, c'est-à-dire en l'absence de charges et de courants. Dans ce cas, les équations de Maxwell prennent la forme simplifiée :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \quad (\mathrm{MG}) \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\,\partial\vec{B}/\partial t \quad (\mathrm{MF})$$
$$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\mathrm{MT}) \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t \quad (\mathrm{MA})$$

Dans laquelle on distingue aisément un couplage entre les deux champs : la variation temporelle de l'un a un effet sur l'autre. Puisqu'une propagation d'onde implique des grandeurs dépendant de l'espace et du temps, on considèrera que tous les champs ont ces deux dépendances : $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

**Démonstration - Équation de propagation du champ électrique, puis du champ magnétique**

**Démonstration - Équation de propagation du champ électrique, puis du champ magnétique**

Les deux équations font intervenir un facteur constant, $\mu_0\epsilon_0$, dont la dimension est $T^2L^{-2}$. On verra dans la suite que ce facteur est lié à la **vitesse de propagation** de l'onde, notée $c$, via la relation :

____________________

**Équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide**

Dans le vide de matière, les champs électrique et magnétique vérifient la même équation de propagation, appelée **équation de d'Alembert** ou **équation d'onde** :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Où le facteur $c$ est la vitesse de la lumière, égale à $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

L'équation de D'Alembert est **commune à de nombreux phénomènes ondulatoires** (propagation des ondes acoustiques, ondulations d'une corde, etc.) Cela dit, elle est souvent le fruit d'approximations simplificatrices réalisées sur les propriétés du milieu. Il est remarquable qu'elle intervienne ici **sans aucune forme de simplification** (autre que la vacuité du milieu de propagation).

Cette équation est relativement simple ; on peut séparer chaque composante pour écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

On rappelle encore que l'expression du Laplacien n'est pas aussi simple en coordonnées cylindriques ou sphériques.

**Attention** : dans les milieux conducteurs, il peut exister des concentrations de charges, ainsi que des courants : toutes les hypothèses qui ont mené à l'équation de D'Alembert sont fausses, donc la propagation (quand elle est possible) répond à des lois très différentes.

On peut tout de même démontrer que dans les **milieux non-conducteurs et transparents**, l'équation de propagation s'écrit approximativement : $\Delta\vec{E}=\frac{n^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, c'est-à-dire une équation de D'Alembert dans laquelle $c$ est remplacé par $c/n$, où $n$ est l'indice optique du milieu.

# II - SOLUTION IDÉALES DE L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT : LES ONDES PLANES

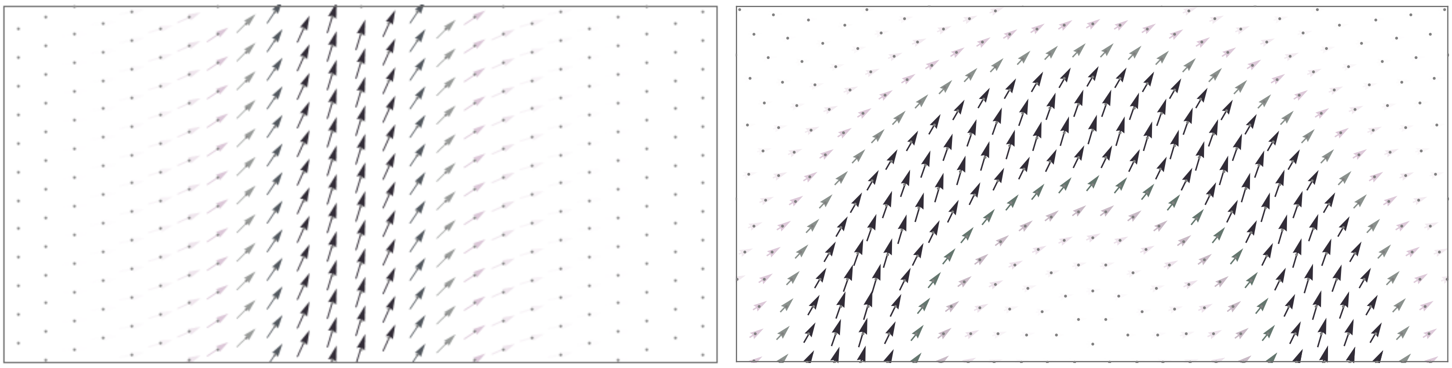
## II.1 - Caractéristiques des ondes

**Surface d'onde**

Une **surface d'onde** une surface continue de l'espace sur laquelle la grandeur caractérisant l'onde est uniforme à tout instant.

Sur l'exemple ci-contre, ce sont les surfaces de même hauteur, formant des cercles concentriques

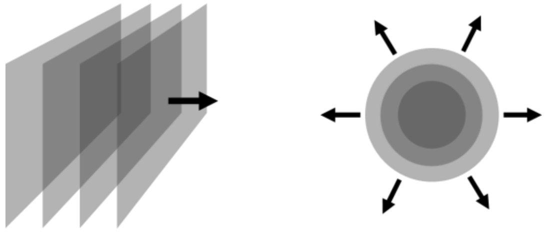
Dans le cas d'une onde électromagnétique, cela correspond à des surfaces où les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont identiques. On représente ci-dessous deux exemples d'ondes vectorielles à deux dimensions.



**Attention** : on a représenté ici des ondes pour lesquelles le vecteur polarisation $\vec{e}_P$ est non-constant (la direction des vecteurs change, et pas seulement leur norme). Dans toutes les applications futures, on considèrera des ondes pour lesquelles le vecteur polarisation est constant.

**Onde plane, onde sphérique**

Une onde est dite **plane** si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles, appelés plans d'onde, et **sphérique** si ses surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.



On modélise les ondes émises par des sources quasi-ponctuelles comme sphériques. En revanche, loin de la source, on considère que l'onde est approximativement plane (comme représenté sur le schéma ci-contre).


**Onde plane progressive**

Une onde plane progressive est une onde plane qui se propage dans une direction déterminée, **sans déformation ou atténuation.**

### II.1.A - Solutions à l'équation de D'Alembert

Dans toute la suite, on se restreindra au cas d'une onde électrique pour laquelle en tout point de l'espace, le champ $\vec{E}$ est dirigé vers une direction fixe, portée par le **vecteur polarisation $\vec{e}_P$**. Ainsi, les ondes qu'on considèrera feront varier la norme de champ $\vec{E}$ en chaque point de l'espace, mais sans changer la direction du champ.

**Ondes planes progressives (OPP) : solution générale de l'équation de D'Alembert (avec $\vec{e}_P$ constant)**

Toute **onde plane** (se propageant selon $Ox$) solution de l'équation de D'Alembert s'écrit comme une superposition de deux **ondes planes progressives** se déplaçant en sens opposés :

Chacune de ces deux ondes se propage à vitesse constante $c$, sans atténuation ni déformation. La « forme » de chaque onde, imposée par la fonction $f_{(+)}$ et $f_{(-)}$, ne fait que se translater (vers la droite ou la gauche).

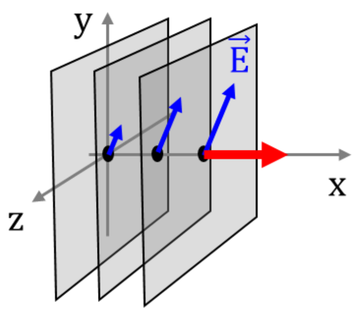
Cette forme de solution n'est pas celle sous laquelle nous essaierons de résoudre l'équation de D'Alembert. En physique, quelle que soit l'équation de propagation rencontrée, il est classique de chercher des solutions sous forme <u>d'ondes planes progressives **harmoniques**</u> (c'est-à-dire **sinusoïdales**).

### II.1.B - OPPH réelles

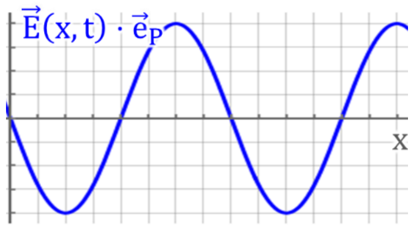
**Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)**

Une onde plane progressive (se propageant selon $Ox$) est dite harmonique (ou sinusoïdale, ou monochromatique) si elle s'écrit :

Le signe $\pm$ dépendant de sa direction de propagation.




**Surfaces d'onde de l'OPPH**




**Représentation de la valeur de $\vec{E}$**

### II.1.C - OPPH en représentation complexe

Comme en électronique, il est souvent commode d'étudier des solutions réelles à une équation en utilisant un intermédiaire mathématique qui simplifie les calculs : la représentation complexe des signaux harmoniques.

**Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)**

Une onde plane progressive est dite harmonique ou sinusoïdale ou monochromatique :

$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)\,\vec{e}_P$

On retrouve le signal réel via la partie réelle : $\vec{E}(x,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}(x,t)\right)$.

**Attention** : on rappelle que le passage en complexe n'est qu'une astuce de calcul. **Le signal physique est réel, égal à la partie réelle du signal complexe.** On peut alors montrer qu'il existe deux conventions équivalentes pour représenter le signal réel :

$$\cos(\omega t \pm kx) \to e^{i(\omega t \pm kx)} \quad \text{ou} \quad e^{i(\pm kx - \omega t)} \qquad \left(\text{puisque } \mathrm{Re}\left(e^{iX}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-iX}\right) = \cos(X)\right)$$

Le choix de l'une ou l'autre des conventions n'impacte pas les résultats réels finaux, mais seulement le détail des calculs intermédiaires. Il faudra bien respecter la convention choisie par l'énoncé, et surtout, s'y cantonner pour tout l'exercice.

Qu'on se place en représentation réelle ou complexe, <u>l'OPPH n'est pas nécessairement solution</u> de l'équation de D'Alembert : il est nécessaire de l'y injecter pour déterminer la contrainte sur les paramètres $\omega$ et $k$ : c'est la <u>relation de dispersion.</u>

## II.2 - Relation de dispersion d'une OPPH

**Définition de la relation de dispersion**

Lorsqu'on considère une onde harmonique $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)\ \vec{e}_P$, la relation de dispersion est la relation entre $k$ et $\omega$ permettant que l'onde soit solution de l'équation de propagation.

**Démonstration – Déterminer la relation de dispersion pour l'équation de D'Alembert**

La forme générale de l'onde harmonique $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_P$ n'est pas a priori solution de l'équation de D'Alembert. Déterminer la relation de dispersion (i.e. les conditions nécessaires pour ce que ces ondes soient solutions).

**Application simple – Déterminer la relation de dispersion pour l'équation de D'Alembert (en complexe)**

La forme générale de l'onde harmonique $E_0\ e^{i(\omega t \pm kx)}\ \vec{e}_P$ n'est pas a priori solution de l'équation de D'Alembert. Déterminer la relation de dispersion (i.e. les conditions nécessaires pour ce que ces ondes soient solutions).

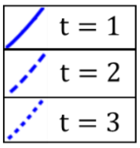
**Relation de dispersion de l'équation de D'Alembert**

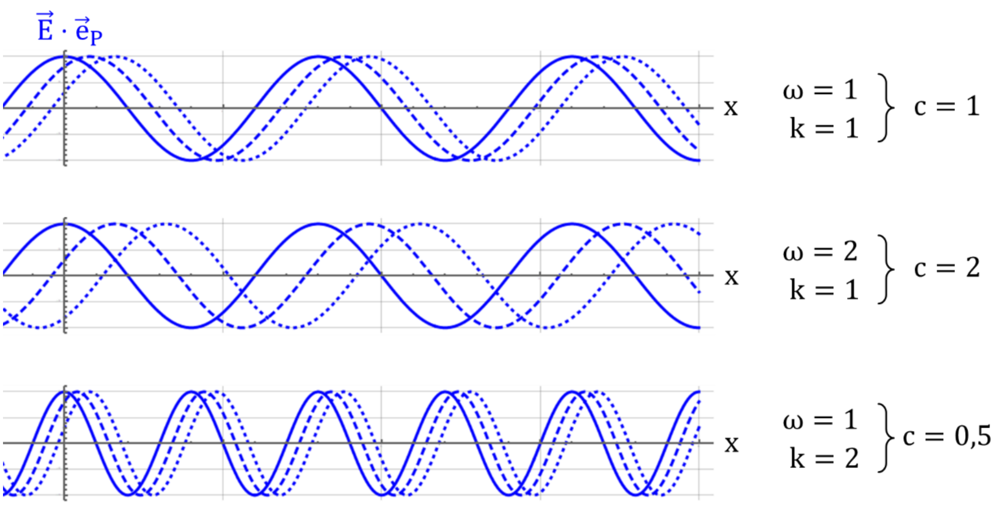
On a montré (dans le cas réel et complexe) que la relation de dispersion d'une OPPH vérifiant l'équation de D'Alembert est :

On représente ci-contre l'allure d'une OPPH solution de l'équation de D'Alembert, de forme :

$$E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_P$$

à trois temps successifs arbitraires. Les trois graphiques permettent d'illustrer l'influence de la pulsation $\omega$, ainsi que du vecteur d'onde $k$.




## II.3 - Généralisation à une OPPH quelconque : vecteur d'onde $\vec{k}$

Dans les sections précédentes, on a toujours pris l'exemple d'une onde plane se propageant selon l'axe $Ox$. Pour écrire des ondes planes dont la direction de propagation est quelconque, on définit le vecteur d'onde $\vec{k}$.

**Vecteur d'onde d'une OPPH**

Pour une **OPPH** se propageant selon le vecteur unitaire $\vec{u}$, le vec**teur d'onde est :**
**Il est homogène à l'inverse d'une distance ($m^{-1}$, $cm^{-1}$, etc.)**

L'OPPH se propageant dans la direction de $\vec{k}$ (et dont les plans d'ondes sont orthogonaux à $\vec{k}$) s'écrit alors :

**Expression OPPH se propageant dans une direction quelconque**

Une onde plane progressive se propageant dans la direction de $\vec{k}$ s'écrit :

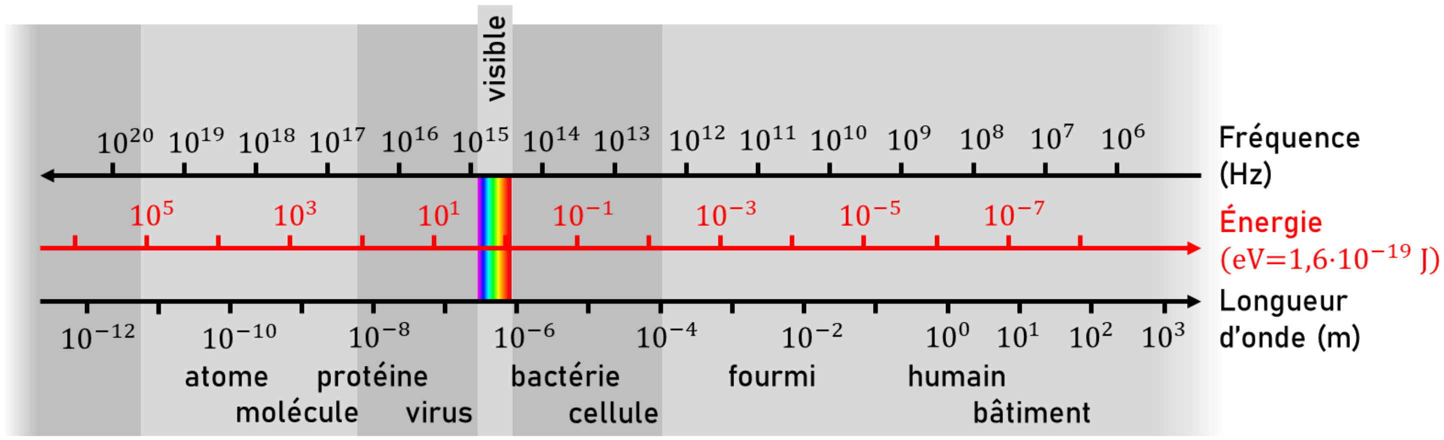
Où $\omega$ et $|\vec{k}|$ liés par la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$.

## II.4 - Onde électromagnétique

### II.4.A - Spectre électromagnétique

Il est important d'avoir en tête une représentation schématique des différentes zones de fréquence du spectre électromagnétique. On représente ci-dessous le spectre électromagnétique, indexé en fréquence (en Hz), en longueur d'onde (en m), mais aussi en énergie transportée par un les photons (en électronvolt, 1 eV $\simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J). La conversion est possible via les relations :

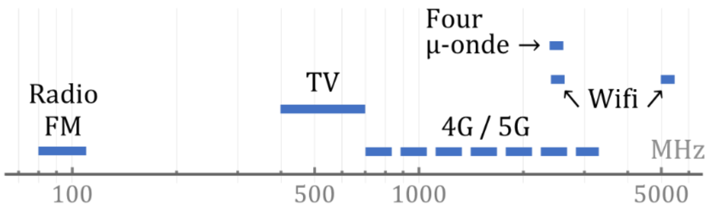
$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (c \simeq 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}) \qquad E_{photon} = h\,f \quad (h \simeq 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s})$$




**Remarque** : à l'inverse des ondes acoustiques, on a coutume de parler des ondes électromagnétiques infrarouges/visibles/UV en termes de longueur d'onde plutôt qu'en fréquence. Le rayonnement électromagnétique visible à des longueurs d'onde comprises entre 400 et 700 nm (ces bornes peuvent varier de quelques dizaines de nm en fonction des individus).

L'utilisation des ondes électromagnétiques, quasi-inexistante en 1900, est devenue tellement répandue qu'il est nécessaire de réguler strictement fréquences allouées aux services qui souhaitent en émettre. On sépare alors le spectre en « bandes de fréquences » dans lesquelles on autorise un certain type d'émission (communication aéronautique, satellite, radio, fréquences allouées à la radioastronomie, fréquences « amateur », fréquences militaires, fréquences radar, etc.)

On a représenté ci-contre la prépartition grossière des principales utilisations des fréquences d'ondes électromagnétique utilisées. En réalité, il en existe beaucoup plus, si bien qu'aucune bande de fréquence n'est laissée libre entre une dizaine de kHz, jusqu'à quelques centaines de GHz.




### II.4.B - Relation de structure

Les champs écrits jusqu'à maintenant sont solution de l'équation de D'Alembert si leur relation de dispersion est $\omega = kc$. Cela dit, il ne faut pas oublier que ce sont des champs électriques et magnétiques, qui doivent à tout moment et en tout point satisfaire les équations de Maxwell. Dans cette sous partie, on établit la « relation de structure » qui découle de cette contrainte.

**Opérateurs vectoriel appliqués aux représentations complexes**

Puisque le champ complexe s'écrit $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}\, \vec{e}_P = E_0\, e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\, \vec{e}_P$, on peut calculer simplement l'effet des opérateur vectoriels sur cette OPPH :

**Démonstration – Opérateurs appliqués aux représentations complexes**

Démontrer l'expression du gradient établie ci-dessus, puis en déduire celle du rotationnel et de la divergence.

**Attention** : ces résultats dépendent de la convention choisie pour représenter le signal réel. En prenant la convention $e^{i(-\omega t + \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$, on doit ajouter un signe $(-)$ à chaque opérateur. Il est donc préférable de refaire rapidement la démonstration (de tête) à chaque fois, plutôt que de retenir ces résultats par cœur.

Il est alors possible d'écrire les relations de Maxwell que doivent vérifier les OPPH électriques et magnétiques qui se propagent dans le vide :

**Équations de Maxwell dans le vide pour une OPPH**

**Pour une OPPH en représentation complexe,** les équations de Maxwell dans le vide deviennent donc :

| | Maxwell-Gauss | Maxwell-Thompson | Maxwell-Faraday | Maxwell-Ampère |
|---|---|---|---|---|
| Écriture réelle | $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$ | $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ | $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\partial\vec{B}/\partial t$ | $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$ |
| Écriture complexe | | | | |
| Conséquence | | | | |

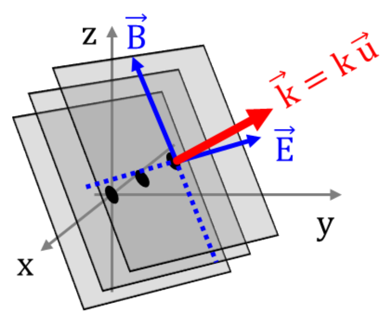
De ces relations, on déduit simplement les relations de structure de l'OPPH, qui indiquent

Puisque les relations faisant intervenir $\vec{u}$, $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont vraies pour toutes les OPPH se propageant dans la direction $\vec{u}$, et que toute OPP peut s'écrire comme une somme de Fourier d'OPPH, alors ces relations sont aussi valables pour toutes les OPP (pas seulement les OPPH).

**Structure d'une OPPH électromagnétique dans le vide**

Pour une OPPH en représentation complexe, les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

Les OPPH sont des ondes **transverses** : les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation. Les trois vecteurs $(\vec{u},\vec{E},\vec{B})$ ou $(\vec{k},\vec{E},\vec{B})$ forment un trièdre direct.




**Remarque :** les équations de Maxwell lient inévitablement les variations du champ $\vec{E}$ au champ $\vec{B}$, et vice-versa. Il est donc impossible de créer une onde purement électrique ou purement magnétique. Il n'existe que des ondes « électromagnétiques ».

Les relations de structure ont une conséquence sur la norme relative des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ :

L'amplitude du champ $\vec{B}$ (en T) est liée à celle du champ $\vec{E}$ (en $\mathrm{V.m^{-1}}$), par un coefficient de proportionnalité constant, $c$ (en $\mathrm{m.s^{-1}}$).

**Un exemple pour comprendre – Propriétés des OPPH**

Pour chaque champ électrique ci-dessous :

1. Identifier la direction de **propagation** de l'onde, ainsi que la direction de **polarisation** de l'onde.
2. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ associé.

$$\vec{E}_1 = E_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \qquad \underline{\vec{E}_2} = E_0\,e^{i(\omega t - kz)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right) \qquad \underline{\vec{E}_3} = E_0\,e^{i(\omega t - k_x z - k_y y)}\,\vec{e}_z$$

# III - POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Jusqu'à maintenant, on a gardé le vecteur de polarisation $\vec{e}_P$ constant, sans s'intéresser à son éventuelle variation dans le temps. En réalité, diverses sources de rayonnement électromagnétique (le soleil, les ampoules, etc.) peuvent produire des ondes ou ce vecteur n'est pas constant. Dans cette brève section, on introduit diverses polarisations susceptibles d'exister dans les rayonnements électromagnétiques. Il ne sera pas nécessaire de savoir effectuer des calculs avec chacun d'entre eux (seule la polarisation rectiligne est au programme), mais leur existence doit être connue.

## III.1 - États de polarisation d'une onde

**Polarisation d'un rayonnement électromagnétique**

La polarisation d'un onde E.M. est la direction du vecteur champ électrique $\vec{E}$.

- Une onde E.M. est dite **non-polarisée** si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement ;
- Une onde E.M. est dite **polarisée rectilignement** si la direction du vecteur champ électrique est constante, selon un vecteur que nous avons jusqu'ici appelé $\vec{e}_P$ ;
- Il existe d'autres modes de polarisation, dans lesquels la direction de polarisation varie de manière régulière : **polarisation circulaire ou elliptique** (hors-programme).

Les animations présentées sur ce site permettent de visualiser une onde rectiligne (horizontale ou verticale), circulaire, et elliptique

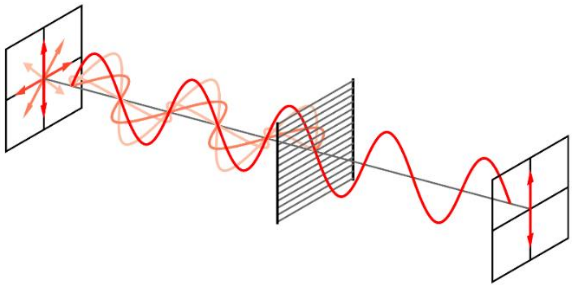
## III.2 - Polariseur

Certains phénomènes naturels, comme les réflexions sur l'eau ou les métaux, produisent des ondes dont la polarisation est particulière (circulaire, rectiligne, etc.) Cela dit, la majeure partie des sources de rayonnement produisent un rayonnement non-polarisé. L'obtention d'une onde polarisée nécessite alors l'utilisation d'un polariseur.

**Polariseur**

Un polariseur est un instrument d'optique qui absorbe le champ électrique d'un rayonnement, sauf dans une direction particulière de polarisation appelée **<u>axe passant</u> du polariseur**.

Un polariseur permet de construire une onde polarisée rectilignement à partir de n'importe quelle onde incidente.



Sur l'animation ci-contre, on représente l'effet d'un polariseur sur une onde électromagnétique polarisée rectilignement (le champ électrique est représenté en rouge, et le champ magnétique en bleu). On peut voir que selon la direction relative de l'axe passant du polariseur avec le champ électrique, ce dernier est plus ou moins absorbé par le polariseur : le champ électrique transmis est toujours d'amplitude inférieure (ou égale) à celui entrant.

Si on appelle $\vec{n}$ l'axe passant du polariseur, le champ électrique sortant est simplement la projection du champ entrant sur la direction de polarisation :

Notamment, cette relation implique qu'un polariseur aligné à la polarisation incidente $(\vec{n} \parallel \vec{E})$ n'a pas d'effet sur le passage de l'onde. Inversement, un polariseur perpendiculaire à la polarisation de l'onde incidente $(\vec{n} \perp \vec{E})$ absorbe totalement l'onde.

**Un exemple pour comprendre – Polarisation et polariseur**

Pour chaque champ électrique ci-dessous, exprimer l'onde électrique transmise après passage par un polariseur d'axe passant $\vec{e}_y$.

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \qquad \underline{\vec{E}}_2 = E_0\, e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right) \qquad \underline{\vec{E}}_3 = E_0\, e^{i(\omega t - k_x z - k_y y)}\,\vec{e}_z$$

# IV - TRANSPORTS ET BILANS D'ÉNERGIE

## IV.1 - Densité volumique d'énergie électromagnétique

Dans les chapitres précédents, on avait établi l'expression des densités volumiques d'énergie électrique et magnétiques. En présence d'une onde électromagnétique, ces deux contributions se somment simplement :

> **Densité d'énergie volumique**
>
> La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit : ______________________

Cette relation signifie qu'un **volume infinitésimal $\mathbf{d\tau}$ contient une quantité d'énergie $\mathbf{du_{EM} = u_{EM}\,d\tau}$**. Cette relation peut alors être intégrée sur un volume quelconque afin de déterminer l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume.

### IV.1.A - Densité d'énergie d'une OPPH

On particularise ici les expressions énoncées pour l'énergie électromagnétique aux cas de l'OPPH.

> **Densité d'énergie électromagnétique d'une OPPH**
>
> La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH d'amplitude $E_0$ est :
>
> - Équirépartie entre les formes électrique et magnétique ;
> - Positive, et de moyenne uniforme en tout point : ______________________

> **Démonstration – Énergie d'une OPPH**
>
> On considère une OPPH dont le champ $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \vec{e}_y$.
>
> 1. Déterminer le champ $\vec{B}$ correspondant ;
> 2. Calculer la densité d'énergie électrique et magnétique en chaque point de l'espace ;
> 3. En déduire sa moyenne temporelle.

## IV.2 - Flux de puissance rayonnée

### IV.2.A - Vecteur de Poynting

En diffusion thermique, on avait défini le vecteur densité de flux thermique, dont l'intégrale sur une surface donnait la puissance thermique traversant la surface : $\phi = \mathcal{P}_{th} = \iint_{M\in S} \vec{j_{th}}(M) \cdot \vec{dS}(M)$ (en W ou $J.s^{-1}$)

On définit ici un vecteur « densité de puissance électromagnétique », dont l'intégrale sur une surface est égale à la puissance transmise au travers de cette surface, non pas par diffusion thermique, mais par transport d'énergie électromagnétique.

> **Vecteur densité de flux électromagnétique (vecteur de Poynting)**
>
> Le vecteur **densité de flux d'énergie électromagnétique** (appelé « **vecteur de Poynting** ») est le vecteur qui, intégré sur une surface S, donne la puissance électromagnétique traversant la surface :
>
> $$\mathcal{P} = \iint_{M\in S} \vec{\Pi}(M) \cdot \vec{dS}(M)$$
>
> Le vecteur de Poynting s'exprime simplement en fonction des champs : ______________________

> **Un exemple pour comprendre – Vecteur de Poynting d'une OPPH**
>
> On considère la même OPPH que dans l'application précédente, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \vec{e}_y$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\ \vec{e}_z$
>
> 1. Déterminer le vecteur de Poynting de cette onde ;
> 2. En déduire sa moyenne temporelle. Dans quelle direction de l'énergie est-elle transportée par cette onde ?

### IV.2.B - Énergie en représentation complexe

On considère un champ de forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$, représenté par le champ complexe $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y$. Ces deux grandeurs sont donc liées par la relation $\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$. Le calcul de l'énergie passe par l'évaluation du carré du champ électrique :

Puisque $\boxed{\mathrm{Re}(\underline{a} \cdot \underline{b}) \neq \mathrm{Re}(\underline{a}) \cdot \mathrm{Re}(\underline{b})}$, il est impossible de calculer des produits de signaux réels via un produit en représentation complexe. **Le calcul de l'énergie d'une onde électromagnétique doit donc impérativement être réalisé via les signaux réels**. En revanche, il est possible de calculer les valeurs moyennes de l'énergie directement en représentation complexe, en constatant la propriété suivante :

**Grandeurs énergétiques moyennes via la représentation complexe**

Les grandeurs énergétiques ne peuvent pas être calculées en représentation complexe. En revanche, on peut simplement calculer des valeurs moyennes, ce qui est très souvent suffisant :

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \text{et} \quad \langle u_E \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \right\rangle$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{et} \quad \langle u_B \rangle = \left\langle \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right\rangle$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$$

## IV.3 - Bilan local d'énergie

Tout comme la charge, on sait que l'énergie d'un système ne peut être ni créée, ni détruite, seulement déplacée. Il en résulte une équation de « conservation de l'énergie » analogue à celle qui avait été établie pour la conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$.

L'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique fait intervenir un terme supplémentaire, dû au fait que, contrairement à la charge, l'énergie électromagnétique peut changer de forme, en étant dissipée par effet Joule au sein d'un conducteur ohmique.

**Loi de conservation électromagnétique locale**

La loi de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit :

Cette équation est appelée équation (ou théorème) de Poynting.

Cette équation de conservation sera admise, mais sa démonstration dans un cas cartésien unidimensionnel simple est très semblable à celle qui avait été réalisée pour la conservation de la charge.

On remarque que l'intégrale de cette relation du un volume V, délimité par une surface S permet d'utiliser le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \iiint_V -\mathrm{div}(\vec{\Pi})\, dV - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E}\, dV$$

**Loi de conservation électromagnétique intégrée**

La loi de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit : $\frac{\partial U_{EM}}{\partial t} = -\oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} - \mathcal{P}_J$

Dans un volume, la variation temporelle de l'énergie s'explique par une fuite par rayonnement, et l'effet Joule (qui convertit l'énergie électromagnétique en chaleur).