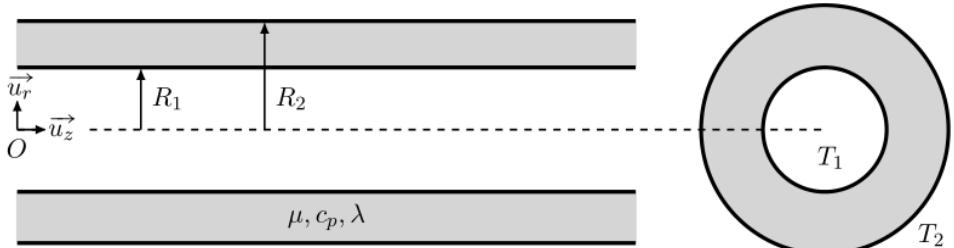
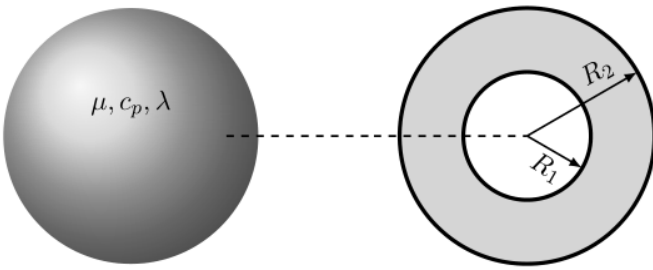


La difficulté et l'originalité de l'exercice sont notées de 1 à 3. Les exercices d'originalité 1 sont des classiques qu'il faut bien comprendre et savoir refaire sans hésitations. Les exercices d'originalité 3 sont des exercices plus éloignés du cours, dans lesquels il est nécessaire de s'adapter à la nouveauté (ou de faire face à des difficultés calculatoires).

Programme d'interrogation orale
<ul style="list-style-type: none"> • Connaître les différents types de transferts de chaleur (conduction, convection, rayonnement), et leurs spécificités respectives. • Savoir calculer un flux thermique au travers d'une surface à partir d'un champ de densité de flux thermique \vec{j}_{th}. • Savoir démontrer l'équation de la chaleur dans le cas cartésien unidimensionnel, et donner les ordres de grandeur des conductivités thermiques de quelques matériaux. • Savoir estimer l'ordre de grandeur d'un temps de diffusion thermique, via la formule $\tau \sim L^2/D$, avec $D = \lambda/\mu c_p$. • Savoir établir l'expression du flux thermique et du profil de température en régime stationnaire dans un cas simple. • Savoir utiliser la conservation du flux thermique dans un cas stationnaire. • Savoir établir l'expression d'une résistance thermique pour une géométrie simple (comme une plaque d'épaisseur e). • Savoir expliquer l'analogie conduction électrique \leftrightarrow conduction thermique. • Savoir déterminer une résistance thermique totale à partir de résistances thermiques en série ou en parallèle.

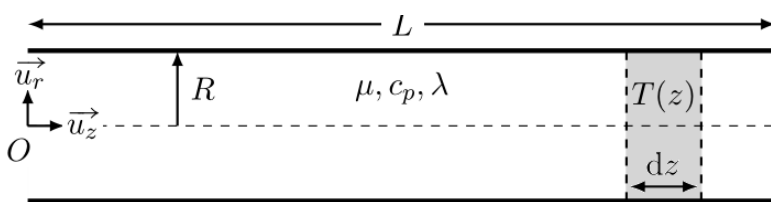
I - BILANS MÉSCOPHIQUES

Exercice - Équation de la chaleur radiale en coordonnées cylindriques	Difficile 2 - Original 1
<p>Soit une canalisation horizontale de longueur infinie, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 séparant un milieu intérieur de température constante T_1 du milieu extérieur à $T_2 \neq T_1$.</p> <p>Cette canalisation a une conductivité thermique λ, une capacité thermique massique c_p et une masse volumique μ (toutes supposées uniformes et constantes).</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Représenter sur le schéma le vecteur densité de flux thermique (sans calculs). Pourquoi ce problème est-il bien 1D ? 2. À l'aide d'un bilan enthalpique sur un élément de canalisation d'épaisseur infinitésimale, établir l'équation de la chaleur dans l'épaisseur de la canalisation. 3. Simplifier cette équation en régime permanent. Dans ces conditions, établir le profil de température dans la canalisation. 4. Représenter la température $T(r)$ sur un graphique. 	

Exercice - Équation de la chaleur radiale en coordonnées sphériques	Difficile 3 - Original 1
<p>Soit une coquille sphérique, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 séparant un milieu intérieur de température constante T_1 du milieu extérieur à $T_2 \neq T_1$. Cette canalisation a une conductivité thermique λ, une capacité thermique massique c_p et une masse volumique μ (toutes supposées uniformes et constantes).</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Représenter sur un schéma le vecteur densité de flux thermique. 2. À l'aide d'un bilan enthalpique sur un élément de coquille d'épaisseur infinitésimale, établir l'équation de la chaleur dans l'épaisseur de la coquille. 3. Simplifier cette équation en régime permanent. Dans ces conditions, établir le profil de température dans la coquille. 4. Représenter la température $T(r)$ sur un graphique. 	

Exercice - Ailette de refroidissement soumise à un flux	Difficile 2 - Original 2
<p>On considère une tige cylindrique de longueur L et de rayon $R \ll L$ dont l'extrémité gauche est maintenue à la température T_0 et l'extrémité droite à la température T_1. On suppose de plus l'homogénéité de la température dans une section droite de la tige.</p>	

Cette tige est entourée d'un fluide à la température T_∞ qui fournit à la tige la puissance thermique $d\mathcal{P}(z) = h(T_\infty - T(z)) dS$ ou h est une constante, dS est la surface de la tige en contact avec le fluide extérieur et $T(z)$ la température locale de la tige.



1. À l'aide d'un bilan enthalpique sur un élément de tige de longueur infinitésimale, établir l'équation de la chaleur dans la tige (en tenant compte des pertes latérales par conducto-convection). Comment se simplifie-t-elle en régime permanent ?
2. Établir dans ces conditions le profil général de température dans la tige. On établira le système permettant de trouver les éventuelles constantes associées aux conditions aux limites, sans chercher à le résoudre. On pourra poser $\delta^2 = \frac{R\lambda}{2h}$.
3. Résoudre le système pour $T_1 = T_\infty$ et montrer que

$$T(z) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \left(\frac{\exp\left(\frac{z-L}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{-z+L}{\delta}\right)}{\exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{L}{\delta}\right)} \right)$$

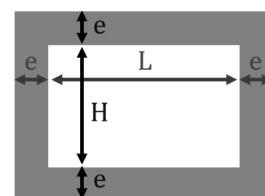
4. Quel est alors la puissance prise au thermostat ? Quelle est la puissance sortant à l'autre extrémité de la barre (en $z = L$) ? Pourquoi ces deux flux ne sont pas identiques ?

II - RÉSISTANCES THERMIQUES

Exercice - Combinaison de résistances thermiques

Difficile 1 - Original 1

On considère une fenêtre à simple vitrage sur châssis en PVC telle que schématisée ci-dessous. Le verre a une épaisseur de l et le châssis en PVC a une épaisseur de $6l$.



1. Exprimer la résistance thermique de la surface de verre.
2. Exprimer la résistance thermique du châssis en PVC.
3. En déduire l'expression et la valeur de la résistance thermique de la fenêtre complète.
4. On remplace la vitre par un double vitrage composé de deux vitres identiques à la première et d'une couche d'air de mêmes dimensions que le verre. En déduire la valeur de la nouvelle résistance thermique de la fenêtre complète.

Données : Vitre : $H = 100$ cm, $L = 150$ cm, $l = 5$ mm
PVC : $e = 5$ cm

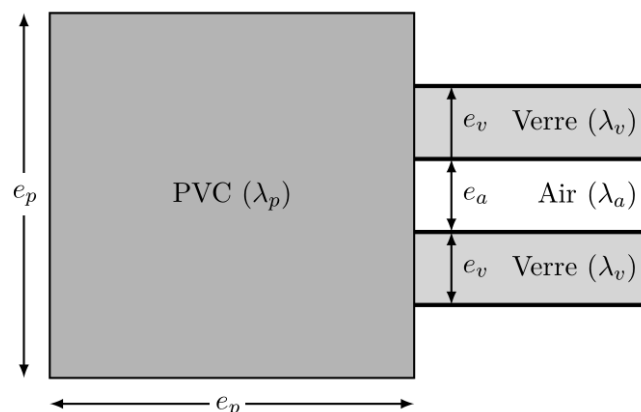
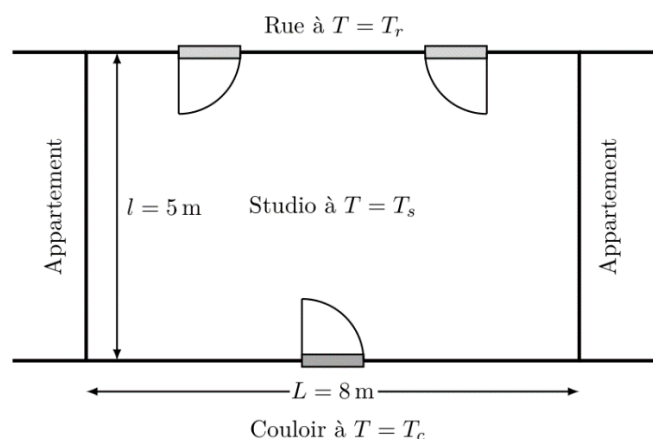
Conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) :
PVC $\rightarrow 0,17$ Verre $\rightarrow 1,2$ Air $\rightarrow 0,026$

Exercice - Résistances thermiques

Difficile 1 - Original 1

On considère un studio à température T_s , d'une hauteur sous plafond de $H = 2,5$ m entouré de 4 appartements voisins chauffés (à sa droite, gauche, au-dessus et en-dessous). Ce studio donne sur une rue à température T_r , et s'ouvre sur un couloir à la température T_c (voir figure ci-dessous, à gauche).

Les murs sont tous constitués d'une même épaisseur e_b de béton. La porte d'entrée est en bois, de dimensions $h \times l \times e$, et le mur donnant sur la rue est agrémenté d'une fenêtre en double vitrage de dimensions totales $h_f \times l_f \times e_f$ dont le schéma est donné ci-dessous à droite (on n'y représente que le bord d'une fenêtre, en coupe, vue du dessus).



1. Calculez la valeur de la résistance équivalente du système {mur + porte} donnant sur le couloir.
2. Calculez la valeur de la résistance équivalente de la fenêtre, puis du système {mur + fenêtre}.
3. Le studio et les appartements voisins sont tous à la même température. Quelle est la valeur du flux reçu par le studio de la part des appartements ?
4. Calculez la puissance nécessaire pour maintenir le studio à la température voulue. Combien de radiateurs sont nécessaires ?

Températures : $T_s = 20^\circ\text{C}$; $T_r = 5^\circ\text{C}$; $T_c = 15^\circ\text{C}$

Épaisseur du béton : $e_b = 15\text{ cm}$

Épaisseur de la laine de verre : $e_i = 5\text{ cm}$

Dimensions de la porte : $h = 215\text{ cm}$; $l = 90\text{ cm}$; $e = 5\text{ cm}$

Dimensions de la fenêtre : $h_f = 115\text{ cm}$; $l_f = 100\text{ cm}$; $e_a = e_v = 5\text{ mm}$

Une largeur de $e_p = 5\text{ cm}$ de PVC permet le maintien des vitres.

Conductivités thermiques ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) :

Bois $\rightarrow 0,15$

PVC $\rightarrow 0,17$

Béton $\rightarrow 0,92$

Verre $\rightarrow 1,2$

Air $\rightarrow 0,026$

Exercice – Résistance thermique d'un cylindre creux

Difficile 1 – Original 1

On reprend l'exercice 1, où canalisation horizontale, de longueur infinie, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , sépare un milieu intérieur de température constante T_1 du milieu extérieur à $T_2 \neq T_1$. Cette canalisation a une conductivité thermique λ , une capacité thermique massique c_p et une masse volumique μ . On donne l'expression de la distribution de température :

$$T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + T_2$$

1. En déduire l'expression de la résistance thermique de la canalisation.
2. Quelle valeur trouve-t-on si l'épaisseur ($R_2 - R_1$) devient très faible devant R_1 ?

Remarque : la manière la plus simple de déterminer la résistance thermique du cylindre est de passer par la conservation du flux thermique en régime stationnaire, comme cela a été fait dans un exercice de cours (c'est la méthode à connaître).

Exercice – Résistance thermique dans une boule

Difficile 1 – Original 1

On reprend l'exercice 2, où une calotte sphérique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 sépare un milieu intérieur de température constante T_1 du milieu extérieur à $T_2 \neq T_1$. Cette calotte sphérique a une conductivité thermique λ , une capacité thermique massique c_p et une masse volumique μ . On donne l'expression de la distribution de température :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + T_1$$

1. En déduire l'expression de la résistance thermique de la calotte sphérique.
2. Quelle valeur trouve-t-on si la différence $R_2 - R_1$ devient très faible devant R_1 ?
3. Établir l'expression de la résistance thermique en utilisant le caractère conservatif du flux thermique Φ à travers toute surface de rayon $R_1 < r < R_2$. On pourra utiliser l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

III - BILANS THERMIQUES VARIÉS

Exercice – Diffusion thermique dans un mur (oral banque PT)

Difficile 1 – Original 1

On s'intéresse à la diffusion thermique dans un mur unidimensionnel cartésien dont l'épaisseur e est repérée par un axe (Ox).

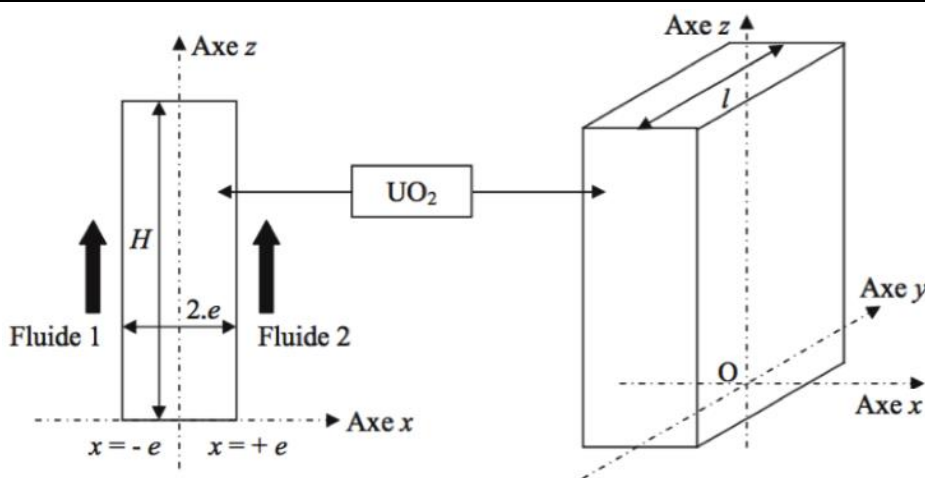
1. Établir l'équation différentielle de diffusion dans le mur : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Exprimer a et donner son unité.
2. Un mur de béton d'épaisseur $e = 20\text{ cm}$, et de conductivité $\lambda_b = 0,92\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ sépare un milieu intérieur thermostaté à 20°C d'un milieu extérieur thermostaté à -5°C . Établir l'allure de la fonction $T(x)$ dans le mur.

- On accole au premier mur, un deuxième mur de polystyrène de conductivité $\lambda_p = 0,03 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et d'épaisseur $e' = e/2 = 10 \text{ cm}$. Établir l'allure de $T(x)$. Quelle épaisseur de polystyrène doit-il y avoir pour diviser la consommation électrique de l'habitation par 10 ?
- On place une fenêtre vitrée de surface $s = 1 \text{ m}^2$ dans un mur de surface $S = 20 \text{ m}^2$.
Calculer le flux thermique total à travers ce mur.

Exercice – Igloo (oral banque PT)	Difficile 2 – Original 1
<p>Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid. Les murs sont d'épaisseur $e = 50 \text{ cm}$ et chaque explorateur dégage une puissance de 50 W. L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique $0,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Pour simplifier, on néglige tout transfert thermique par le sol.</p> <ol style="list-style-type: none"> Déterminer le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R + e$. Établir l'expression de la résistance thermique de l'igloo. Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ? L'igloo a un rayon intérieur de 1 m et la température externe est de -10°C. Déterminer la température interne en régime permanent. 	

Exercice – Refroidissement d'une boule par un fluide	Difficile 2 – Original 2
<p>On reprend le problème de la calotte sphérique de l'exercice 2 placée en régime permanent. Cette calotte sphérique a sa température intérieure fixée à $T = T_1$ sur sa paroi en $r = R_1$. On prend maintenant en compte un transfert thermique conducto-convectif avec le milieu extérieur sur sa paroi en $r = R_2$.</p> <p>Ce transfert thermique est modélisé par une puissance reçue par la calotte qui s'écrit selon la loi de Newton : $\mathcal{P} = hS(T_\infty - T_p)$ où h est une constante, S est la surface de la calotte en contact avec le fluide extérieur, T_∞ est la température du fluide extérieur et T_p la température de la paroi extérieure de la calotte.</p> <ol style="list-style-type: none"> En effectuant un bilan thermique sur une sphère, exprimer la température de paroi T_2 en fonction de h, R_2, de la résistance thermique de la calotte sphérique R_{th} (calculée précédemment) et des températures T_1 et T_∞. On se place dans la situation où $R_2 - R_1 = e \ll R_1$. Exprimer T_p en fonction de T_∞, T_1, λ, h et e. Calculer sa valeur. <p>Données : $T_\infty = 15^\circ\text{C}$ $T_1 = 40^\circ\text{C}$ $\lambda = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ $H = 25 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ $e = 2 \text{ mm}$</p>	

Exercice – Thermique simplifiée d'une plaque de combustible nucléaire	Difficile 2 – Original 2
<p>Soit une plaque de combustible nucléaire parallélépipédique schématisée ci-dessous qui dégage une puissance thermique volumique constante $\phi_v = 500 \text{ W.cm}^{-3}$.</p> <p>Ce combustible est un corps solide homogène, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ indépendants de la température. On se place en régime permanent et la plaque est réfrigérée par des fluides circulant à l'extérieur qui imposent :</p> $\begin{cases} T(x = -e) = T_1 \\ T(x = e) = T_2 \end{cases}$ <ol style="list-style-type: none"> Établir l'équation de la chaleur en 1D, la généraliser en 3D sans démonstration. Exprimer la puissance thermique P_{th} produite dans le combustible. 	

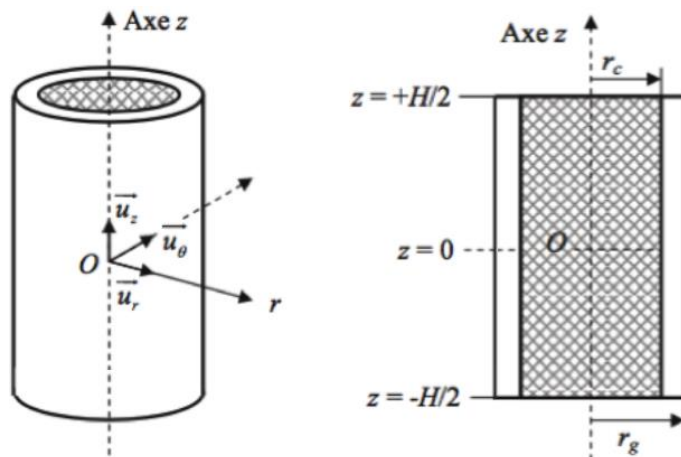


- On donne l'équation de la chaleur avec terme source suivante : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \phi_v + \lambda \Delta T$. Après une simplification que vous justifierez, en déduire l'expression de $T(x)$ et tracez l'allure de la courbe.
- En déduire la valeur x_{\max} de x pour laquelle la température est maximale.
- Donner l'expression de cette température maximale en fonction de ϕ_v, T_1, T_2, e et λ .

Exercice – Thermique d'une plaque de combustible nucléaire**Difficile 3 – Original 2**

L'expression générale de l'équation de la chaleur avec terme source ϕ_v s'écrit : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \phi_v + \lambda \Delta T$. On se place en régime permanent et on supposera que les transferts thermiques dans le crayon combustible schématisé ci-dessous se font uniquement par conduction radiale. Les conductivités thermiques du combustible et de la gaine sont respectivement λ_c et λ_g .

- En remarquant que le système possède une symétrie de révolution autour de l'axe Oz, simplifier l'équation de la chaleur proposée.
- En déduire, en régime permanent, l'expression de l'évolution de la température selon r dans le combustible en fonction de la température au centre $T(r=0) = T_0$.
- Exprimer alors l'écart de température moyen $\Delta T_{\text{comb}} = T_0 - T_c$ où $T_c = T(r_c)$.
- Exprimer ensuite la température $T(r)$ dans la gaine en fonction de la température T_c et celle de la paroi de la gaine : $T(r_g) = T_g$.
- Exprimer le flux thermique surfacique ϕ_s s'échappant de la paroi du crayon en $r = r_c$ en fonction de ϕ_v, r_c et H .
- En déduire l'expression de $\Delta T = T_c - T_g$ en fonction de ϕ_v, r_c, r_g et λ .



Données : Expression du Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta(T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

Exercice – Source thermique sphérique**Difficile 3 – Original 2**

On considère une sphère solide de rayon R , de centre O , de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c . Cette sphère est le siège d'une réaction chimique exothermique responsable d'une production d'énergie. On modélise cette production énergétique par une source de puissance volumique, notée S , uniforme et constante.

La sphère est alors placée dans un fluide illimité de conductivité thermique λ_f et de température à l'infini T_∞ dans lequel on peut négliger tout phénomène convectif. On se place en régime permanent.

- Justifier qualitativement que la distribution de température dans la sphère et en dehors est uniquement dépendante de r . Quelle base de projection est la plus adaptée à cette étude ?
- À l'aide d'un bilan enthalpique sur un petit élément de calotte sphérique d'épaisseur infinitésimale dr , établir l'équation de la chaleur dans la sphère (ou reprendre celle déjà établie dans l'exercice 2, si la méthode est connue).
- On note T_p la température à la surface de la sphère. En déduire l'expression de la distribution de température dans la sphère $T(r)$. Faire ensuite de même pour la distribution de température à l'extérieur de la sphère $T_f(r)$.
- Calculer la puissance totale produite dans la sphère, notée Φ_{th} , et le flux thermique entrant dans le fluide, noté $\Phi_{th,f}$.
- En déduire une relation entre T_p, T_∞, R, S et λ_f .
- Exprimer finalement $T(r)$ et $T_f(r)$ en fonction de $T_p, T_\infty, R, S, \lambda$ et r en utilisant $\lambda \gg \lambda_f$.

Exercice – Étude thermique d'un mammifère (oral banque PT)	Difficile 2 – Original 2
<p>Un mammifère est modélisé par une boule de rayon R et de centre O. À l'intérieur de son corps, il produit une puissance thermique volumique φ_0. La sphère est placée dans un fluide (eau ou air) de conductivité thermique λ. La température loin de la sphère est $T_0 = 293 \text{ K}$. On suppose le transfert thermique radial : $\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{u}_r$, et on donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Rappeler la loi de Fourier. Expliquer le signe négatif. Quel est l'unité du système international de la conductivité thermique ? Exprimer le flux thermique Φ dans le fluide en fonction de φ_0 et R, en régime permanent. Exprimer $j_{th}(R)$. Montrer que pour $r > R$, on a $4\pi r^2 j_{th}(r) = \text{cte}$. Expliciter la constante. En déduire l'équation vérifiée par $T(r)$ dans le fluide. Établir l'expression de $T(r)$ pour $r > R$. Déterminer la température cutanée T_c (on suppose la température continue à l'interface) On donne pour l'air $\lambda = 5 \text{ USI}$, pour l'eau $\lambda_e = 500 \text{ USI}$ et $R = 25 \text{ cm}$. Calculer φ_0 pour $T_c = 303 \text{ K}$. Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ? 	

Exercice – Profil de température dans une plaque conductrice	Difficile 3 – Original 3
<p>On étudie une plaque d'épaisseur e très inférieure à sa longueur L et sa largeur l. Elle est faite dans un métal de conductivité électrique σ et de conductivité thermique λ. Un courant électrique de densité uniforme $\vec{j} = J_0 \vec{u}_z$ parcourt la plaque.</p> <ol style="list-style-type: none"> Quelle est l'intensité du courant qui traverse la plaque ? Quelle puissance volumique est transmise à la plaque ? <p>On modélise les transferts thermiques avec l'air par la loi de Newton : en valeur absolue, la plaque échange avec l'air une puissance surfacique $P_N = h T_0 - T_{air}$, avec T_0 la température de surface de la plaque.</p> <ol style="list-style-type: none"> Déterminer T_0 en régime stationnaire. Montrer que la température vérifie l'équation $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{J_0^2}{\lambda \sigma} = 0$. <p>La résolution de cette équation donne $T(x) = \frac{J_0^2}{\lambda \sigma} x(e - x) + \frac{J_0^2}{2h\sigma} + T_{air}$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Commenter qualitativement l'expression. Représenter le profil de température pour x allant de $-e$ à $2e$. Exprimer la puissance thermique qui traverse une section de normale \vec{e}_x. 	