

TABLE DES MATIERES

I - EXERCICES D'APPLICATION	- 1 -
II - PROBLÈME	- 3 -
III - ANNALES	- 5 -

On écrit ci-dessous l'expression des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques et sphériques (à connaître en cartésien)

Gradient	Rotationnel	Divergence
$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_z$	$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$
Gradient	Divergence	
$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$	$\text{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$	
Rotationnel		
$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(\sin(\theta) V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\varphi$		

I - EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 – Calcul du potentiel V à partir du champ électrostatique

Les opérateurs vectoriels sont rappelés au début du TD.

- Calculer le potentiel électrostatique V associé à la distribution de charge sphérique, donnant le champ ci-contre. On fixera le potentiel à $V(r = R) = 0$.
 - Aurait-on pu fixer le potentiel à une valeur nulle à l'infini ?
 - Faire de même pour la distribution de charge cartésienne donnant le champ ci-contre. On fixera le potentiel à $V(z = 0) = 0$.
 - Aurait-on pu fixer le potentiel à une valeur nulle à l'infini ?
- $$\begin{cases} \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ \vec{E}(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \vec{e}_r \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{E}(r < R) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \end{cases}$$

Exercice 2 – Calcul du champ de potentiel V à partir de l'équation de Poisson

On considère l'espace inter-armatures d'un condensateur plan. On le modélise par deux armatures planes de dimensions supposées infini selon les axes Ox et Oy, placée aux côtes $z = \pm a$. L'armature placée en $z = a$ est portée au potentiel V_+ et l'armature placée en $z = -a$ est portée au potentiel V_- .

- Quelle est la base de projection la plus adaptée à ce problème ?
- À partir d'une étude des invariances des charges, déterminer les variables spatiales dont dépend le potentiel $V(M)$.
- Utiliser la loi de Poisson pour exprimer le potentiel $V(z)$ entre les deux armatures. En déduire l'expression de \vec{E} entre les deux armatures.

Exercice 3 – Potentiel de Yukawa

Considérons une distribution de charge pour laquelle, à une distance r d'un point origine O, le potentiel électrostatique s'écrit :

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}$$

où a est une constante positive et e la charge élémentaire. Cette distribution permet de décrire un champ de potentiel semblable à celui d'une charge ponctuelle près de l'origine, mais très rapidement décroissant dès que r devient grand devant a.

- Calculer le champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.
- En déduire la charge contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon r.
- Étudier les limites $r \gg a$ et $r \ll a$. Que pourrait modéliser ce potentiel ? Que représente a ?

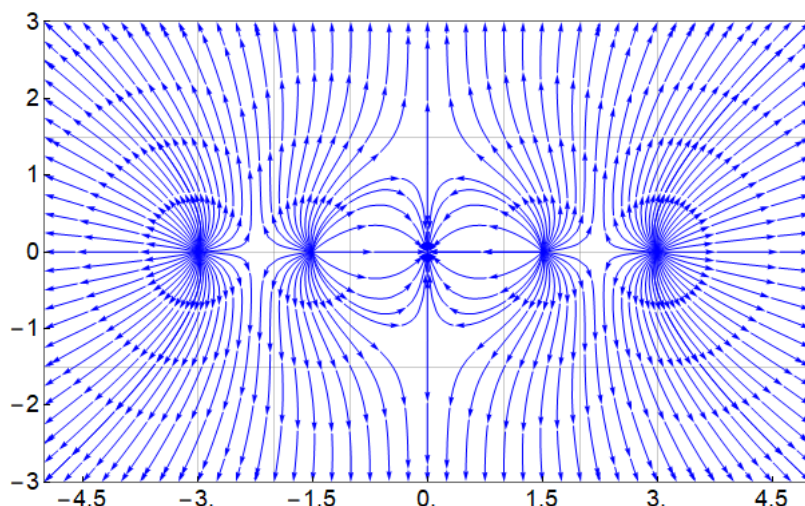
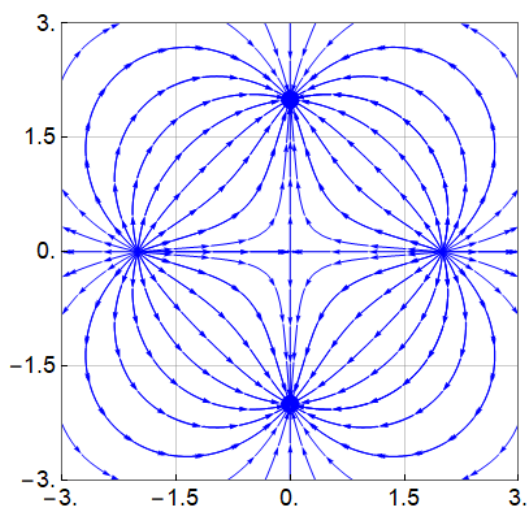
Exercice 4 – Charge en surface d'un semi-conducteur

Dans le domaine $x > 0$ se trouve un semi-conducteur chargé en volume selon une densité $\rho(x)$ et en surface selon une densité σ_0 uniforme. Le champ électrique dans ce semi-conducteur s'écrit $\vec{E} = E_0 e^{-x/l} \vec{u}$ avec $E_0 > 0$, $l > 0$ et \vec{u} un vecteur unitaire. Le champ électrique est nul dans le domaine $x < 0$.

1. Déterminer la direction \vec{u} du champ électrostatique.
2. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans les deux domaines $x < 0$ et $x > 0$.
3. Énoncer le théorème de Gauss. En déduire l'expression de σ_0 .
4. Déterminer le potentiel électrostatique en $x = 0$. On le supposera nul pour $x \rightarrow \infty$.

Exercice 5 – Distribution de charge

On donne les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles dans les figures ci-dessous.

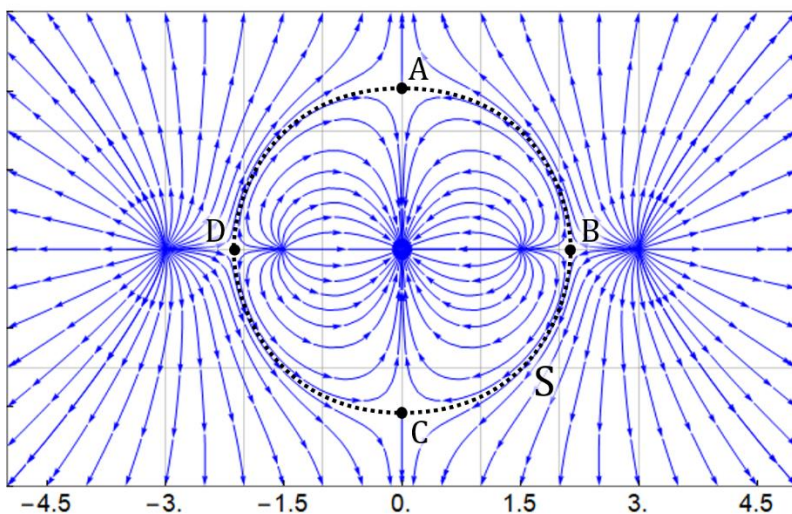


1. Pour chaque figure : donner le signe de chacune des charges.
2. Pour chaque figure : existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?
3. Pour chaque figure : existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?
4. Dans la figure de gauche, dessiner l'équipotentielle passant par le point $(1,5 ; 1,5)$
5. Dans la figure de droite, dessiner l'équipotentielle passant par le point $(-4,5 ; 0)$ et par le point $(-0,5 ; 0)$.

Exercice 6 – Théorème de Gauss et charge ponctuelle

On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par un ensemble de charges ponctuelles numérotées de 1 à 5, de gauche à droite. Le contour S a été ajouté sur le schéma afin de discuter du champ \vec{E} .

1. Donner le signe de chacune des charges.
2. Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.
3. On admet que le champ est nul en tout point de la surface S : comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?
4. En déduire q_3 en fonction des autres charges (on pensera au théorème de Gauss)



Exercice 7 – Condensateur cylindrique

Considérons un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales. L'armature interne, de rayon R_1 , supposée de potentiel nul, porte une charge $-Q$. L'armature externe, de rayon R_2 , porte une charge $+Q$. Les deux armatures sont de même longueur $l \gg R_2$. On supposera les effets de bord négligeables.

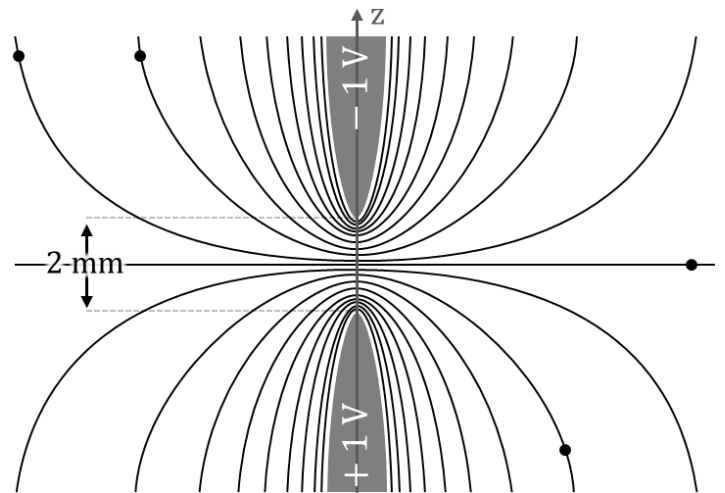
1. Justifier précisément la direction et le sens du champ électrostatique \vec{E} , ainsi que la (les) variable(s) dont il dépend.
2. Calculer le champ électrostatique dans tout l'espace.
3. En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace.
4. Déterminer la capacité C du condensateur.

II – PROBLÈME**Problème 1 – Apparition d'un arc électrique**

Un arc électrique est un phénomène durant lequel un courant électrique apparaît et devient visible dans l'air. Ce phénomène explique aussi bien les étincelles dues à « l'électricité statique » que les éclairs des orages. L'air étant un milieu isolant, il faut que le champ électrique dépasse une valeur critique $E_c = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, appelé champ disruptif, pour que l'arc électrique apparaisse (en ionisant les molécules dans l'air). Plus précisément, un arc électrique peut se produire entre deux électrodes s'il existe un chemin reliant ces conducteurs métalliques tel qu'en chaque point le champ électrique dépasse la valeur disruptive.

On s'intéresse maintenant à deux électrodes paraboliques distantes de $d = 2 \text{ mm}$. Un logiciel de simulation est mis à profit pour dresser une carte de potentiel dans la zone des extrémités des électrodes. Dans la simulation, l'une est portée au potentiel 1 V et l'autre au potentiel -1 V . D'une ligne à l'autre, le potentiel varie de 100 mV .

1. Indiquer dans chacun des cadres la valeur de potentiel correspondant.
2. Superposer à la figure un réseau de lignes de champ électrique.
3. Sur la carte ci-contre, peut-on obtenir un arc électrique ? À quel endroit ?

**Problème 2 – Phénomène de floculation**

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à $1 \mu\text{m}$) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible. La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées « floccs ». Les floccs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O , de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont $N_+(r) = N_0 e^{-zeV(r)/k_B T}$ pour les cations (charge $+ze$ avec $z = 2$ ou 3 en pratique) et $N_-(r) = N_0 e^{zeV(r)/k_B T}$ pour les anions (charge $-ze$), avec N_0 une constante, V le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. On suppose $|zeV(r)| \ll k_B T$.

1. Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?
2. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié.
3. Déterminer une expression du potentiel électrostatique V .
4. Montrer que le champ électrique est de la forme : $E(r) = \frac{K}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta}\right) e^{-r/\delta}$
Déterminer K en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.
5. Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.

Donnée : Laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique : $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV_r)}{\partial r}$.

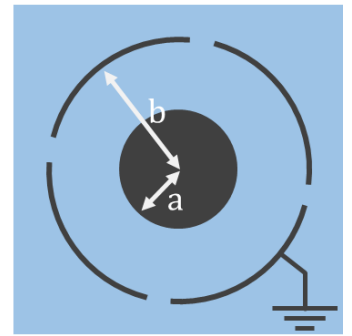
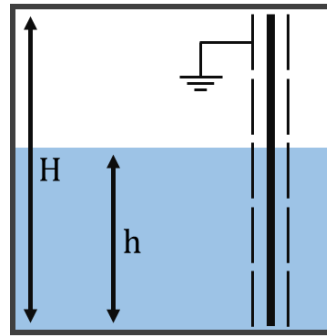
Problème 3 – Capteur capacitif de niveau de liquide

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs. Cet exercice propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible (voir schémas ci-dessous). Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.



Dans tout l'exercice, on supposera que :

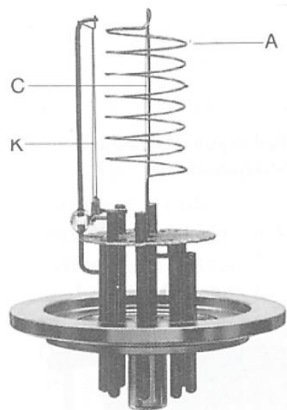
- les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par celle du liquide $\epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.



1. Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.
2. En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.
3. Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.
4. Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H .
5. Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.
6. La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (comme une solution électrolytique, par exemple) ?

III - ANNALES

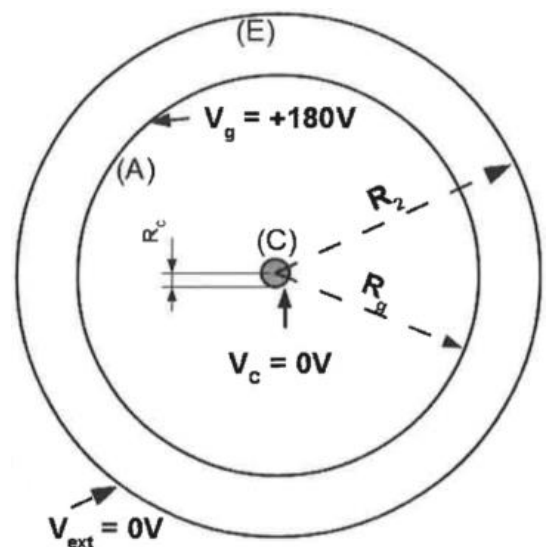
Annale 1 – « Mesure du vide » : les jauges de pression UHV



Une jauge de Bayard-Alpert est dite de type « ionique ». Son principe est basé sur l'accélération d'électron émis par un filament (K) au moyen d'une grille (A) plongée dans le gaz à analyser. Les électrons accélérés, en heurtant les molécules du gaz les ionisent. Les ions ainsi formés sont récoltés par un collecteur (C) situé au centre de la grille. Le nombre d'ions collectés et donc le courant généré dans le collecteur est proportionnel au nombre d'électrons émis et au nombre de particules du gaz, donc indirectement à la pression. Pour maximiser le nombre de particules heurtées par les électrons, on construit la grille de manière à confiner les électrons dans un mouvement oscillant au sein du gaz : ils sont ainsi certains de finir par heurter une particule de gaz. On se propose d'étudier le champ électrique de confinement ainsi créé.

La géométrie étant relativement complexe, on utilisera le modèle simplifié suivant :

- la grille (A) et un cylindre de longueur infinie, d'épaisseur négligeable et de rayon R_g . Elle est portée au potentiel $V_g = 180 \text{ V}$ uniforme.
- le collecteur (C) est un cylindre infini plein de rayon R_c porté au potentiel $V_c = 0 \text{ V}$ uniforme.
- une enceinte métallique extérieure (E), cylindrique de rayon R_2 est maintenue au potentiel $V_{\text{ext}} = 0 \text{ V}$ uniforme.
- l'ensemble (A), (C), et (E) formé de cylindres coaxiaux, possède une symétrie cylindrique.
- un filament rectiligne (K) est positionné parallèlement à l'axe \vec{e}_z des cylindres, à la distance R_K du centre. On admet que sa présence conserve à l'ensemble {A, C, E, K} la symétrie cylindrique.
- à l'intérieur se trouve un gaz raréfié : le milieu est assimilable au vide.



On notera Oz l'axe de symétrie des cylindres (orienté par \vec{e}_z).

- On s'intéresse au champ électrique $\vec{E}(M)$ et au potentiel $V(M)$ en un point M repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
 - Faire apparaître sur un schéma les vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la base cylindrique.
 - Expliquer, par des arguments qualitatifs précis, pourquoi on a $V(M) = V(r)$ et $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.
- On cherche à déterminer les grandeurs électrostatiques entre C et A.
 - Donner l'équation de Maxwell-Gauss.
 - En déduire l'équation différentielle que vérifie le potentiel $V(r)$ dans cette zone. (On pourra faire intervenir l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques $\Delta f = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$).
 - Exprimer $V(r)$ en fonction de r , R_g , R_c et V_g .
- Déduire de la question précédente l'expression du champ $\vec{E}(M)$ entre A et C.
- L'allure du champ électrique en tout point intérieur de la jauge est donné sur la figure ci-contre représentant $V_{\text{sym}}(r)$ en fonction de r .
 - À partir de ce graphique, donner une estimation de R_c et R_g .
 - Donner l'expression littérale du potentiel $V(r)$ entre G et E.
 - En déduire l'expression littérale du champ \vec{E} entre G et E.
 - Reproduire l'avant dernière figure ci-dessus et représenter les lignes de champ électrique en précisant leur orientation.

