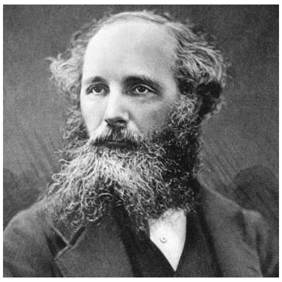
Équations de Maxwell

Dans un espace contenant une densité de charges $\rho(M)$, et une densité de courant $\vec{j}(M)$, les champs vectoriels $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ vérifient les quatre équations de Maxwell :



Maxwell-Gauss	Maxwell-Thompson	Maxwell-Faraday	Maxwell-Ampère
$\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Champs électriques et magnétiques :
$\vec{E}$: vecteur champ électrique ($\mathrm{V.m^{-1}}$)
$\vec{B}$: vecteur champ magnétique (T)

Sources de champs :
ρ : densité de charge ($\mathrm{C.m^{-3}}$)
$\vec{j}$: vecteur densité de courant ($\mathrm{A.m^{-2}}$)

Constantes :
ϵ_0 : permittivité du vide ($8{,}854\cdot10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$)
μ_0 : perméabilité du vide ($1{,}257\cdot10^{-6}\ \mathrm{H.m^{-1}}$)

Comme l'indique l'équation de Maxwell-Ampère, les densités de courants $\vec{j}$ sont des sources de champ magnétique (c'est même la seule source, si on se place en régime stationnaire, dans lequel $\partial\vec{E}/\partial t = \vec{0}$). L'étude du champ magnétique en régime stationnaire, ou du « champ magnétostatique » doit donc passer par l'étude du courant électrique (de la même manière que l'étude du champ électrostatique passait par l'étude des densités de charges) : c'est l'objet de la première section de ce chapitre.

Dans les sections suivantes, on abordera l'étude du champ engendré par une certaine distribution de courant, en s'aidant à nouveau des symétries de la distribution de courant, via un théorème analogue au théorème de Gauss présenté en électrostatique : le **théorème d'Ampère**.

TABLE DES MATIERES

I - DESCRIPTION LOCALE DU COURANT ÉLECTRIQUE

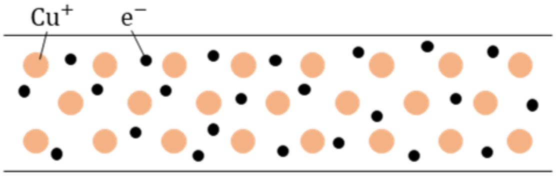
I.1 - Structure de la matière et déplacement de charges

Pour comprendre la conduction métallique dans un métal, il convient de s'intéresser à sa structure microscopique. Lorsque des atomes se regroupent pour former un matériau, les liaisons qui se forment entre les atomes peuvent être de nature variée :

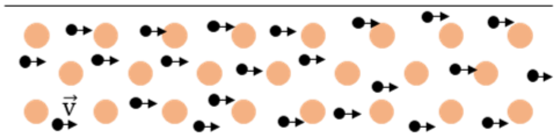
- Liaisons covalentes entre atomes uniquement (rare, par exemple le diamant) ;
- Liaisons covalentes entre atomes, puis cohésion moléculaire par forces de Van der Waals (courant, par exemple le diiode) ;
- Liaisons métalliques entre atomes (par définition, tous les métaux).

Lorsque des atomes métalliques se regroupent, ils créent entre eux des liaisons métalliques, dans lesquelles : une partie des électrons initialement attachés à chaque atome deviennent libre de se déplacer au sein du métal : on les appelle **électrons de conduction**, et on dit qu'ils sont délocalisés au sien du métal.

On représentante ci-dessous une vision microscopique très schématique du cuivre :



Zoom sur l'échantillon de cuivre : ions Cu^+ fixes et électrons e^- libres de de déplacer



Imposer une différence de potentiel cause un déplacement d'électrons : c'est un courant électrique.

Remarque : Il existe des milieux dans lesquels :

- Tous les porteurs de charge sont liés (ou quasi-liés) : les matériaux isolants (ou peu conducteurs) ;
- Tous les porteurs de charge sont libres : les solutions électrolytiques, ou les plasmas.

Courant électrique (rappel)

Un courant électrique est un mouvement d'ensemble ordonné des porteurs de charges libres. L'exemple le plus usuel est le courant d'électrons dans un métal.

On peut alors définir l'intensité du courant de manière quantitative :

Intensité du courant électrique (rappel)

L'intensité i du courant dans un fil est le débit de charge traversant une section du fil :
Où dq est la **charge** traversant pendant un temps dt. L'unité est l'ampère $A = C.s^{-1}$

I.2 - Densité de courant et intensité

I.2.A - Densité de courant

L'intensité du courant dans un fil indique une valeur du débit de charge au travers d'une section de fil, sans information sur la répartition du courant au sein du fil : cette grandeur ne dit pas si le courant passe plutôt près des bords, près du centre, etc.

Vecteur densité de courant électrique

Le vecteur densité de courant, noté $\vec{j}$, est le vecteur qui, intégré sur une surface, donne le courant algébrique i traversant la surface :

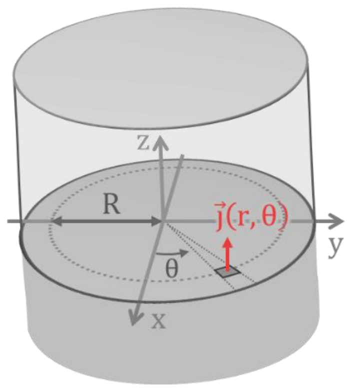
Son unité est donc naturellement le $C.s^{-1}.m^{-2} = A.m^{-2}$, alors que l'unité du courant est simplement A.

Remarque : l'intensité i traversant un conducteur est à la densité de courant $\vec{j}$ ce que le flux thermique ϕ est au vecteur densité de flux j_{th}. Les grandeurs globales (ϕ et i) comptent un flux total au travers d'une surface, alors que les grandeurs locales ($\vec{j}_{th}$ et $\vec{j}$) sont des champs de vecteurs définis dans tout l'espace, indiquant la direction et l'intensité d'une grandeur en chaque point.

Un exemple pour comprendre - Courant et densité de courant dans un fil

Lorsque le courant qui traverse un fil prend des valeurs importantes, il se déporte vers l'extérieur du fil, causant ainsi un effet Joule important sur les bords. Le vecteur densité de courant dans un tel cas peut prendre la forme (en repère cylindrique) :

$$\vec{j} = j_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \vec{e}_z \qquad j_0 \in \mathbb{R}$$



On fait circuler un courant I dans ce fil de rayon R.

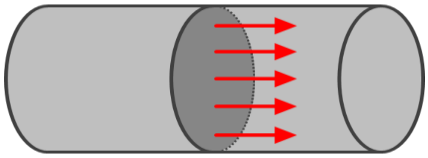
1. Quelle est la densité de courant au centre du fil ? Au bord ?
2. Exprimer l'intensité totale I.
3. Quelle serait la densité de courant au centre et aux bords si le courant était réparti dans le fil de manière homogène ?

Remarque : si on s'intéresse à des phénomènes qui se produisent loin d'un conducteur (à une distance grande devant le diamètre du fil), alors on pourra considérer uniquement l'intensité circulant dans le conducteur, puisque le détail de la répartition du courant dans la section aura peu d'influence.

I.2.B - Lien avec le mouvement des porteurs de charge

On souhaite connaitre le détail du mouvement des électrons au sein d'un conducteur parcouru par une densité de courant uniforme $\vec{j} = j_z\,\vec{e}_z$, dans lequel les porteurs de charge sont de charge q, et de densité volumique n. On suppose pour simplifier que les porteurs de charge se déplacent à la même vitesse, $\vec{v} = v_z\,\vec{e}_z$, qu'on appellera **vitesse d'ensemble**, ou **vitesse de dérive**.

On considère une surface contrôle traversée par une charge δq pendant dt :



Le résultat trouvé semble cohérent : la densité de courant en un point est d'autant plus grande que la vitesse des charges est grande, que la densité de charges est élevée, ou que la charge individuelle des porteurs est grande.

Relation entre le courant électrique et la vitesse des porteurs de charge

Si un matériau contient des porteurs de charge, de charge individuelle q (en Coulombs), avec une densité n (en m^{-3}), se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, la densité de courant au point M peut s'exprimer :

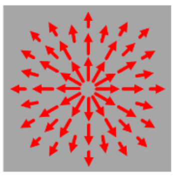
On a utilisé l'égalité $\rho = nq$, et on a supposé la densité n indépendant du point M dans le matériau, ce qui sera toujours le cas.

Attention : la densité de courant est un débit surfacique de charge. Si plusieurs porteurs de charge interviennent (comme dans une solution électrolytique), on doit sommer les contributions. On a alors $\vec{j}(M) = \sum_k n_k\, q_k\, \vec{v_k} = \sum_k \rho_k\, \vec{v_k}$ (les grandeurs indicées par k réfèrent au porteur de charge n°k : le plus souvent, un cation et un anion de charge opposée).

Un exemple pour comprendre – Vitesse des électrons dans un fil

Déterminer la vitesse d'ensemble des électrons dans un fil de conducteur métallique de section $S = 1\ mm^2$ parcouru par un courant de $0{,}1$ A. La densité volumique des électrons dans un bon conducteur est de l'ordre de $10^{29}\ m^{-3}$.

I.3 - Conservation de la charge



Puisque la charge électrique ne peut être créée ou détruite (seulement transportée), toutes les distributions imaginables de densité de courant ne sont pas physiquement réalistes. Par exemple, une densité de courant 2D comme représentée ci-contre n'est possible que si des chargent positives fuient la zone centrale (ou des charges négatives s'y rendent). Cela implique des conditions sur l'évolution de la densité de charges ρ au sein du matériau.

Équation de conservation de la charge

Dans un système unidimensionnel, la conservation de la charge s'exprime (en chaque point) par :

Dans les deux démonstrations qui suivent, on considère un milieu unidimensionnel d'axe (Oz) parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j_z\,\vec{e}_z$ uniforme sur une section (de surface constante S).

I.3.A - Démonstration par les équations de Maxwell

Puisque les équations de Maxwell sont suffisantes pour décrire la totalité des phénomènes magnétiques, il doit être possible de les utiliser pour retrouver l'équation de conservation ci-dessus. Pour cela, on commence par présenter l'équation de Maxwell-Ampère :

Équation de Maxwell-Ampère

En tout point de l'espace, on a

Où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ est la perméabilité (magnétique) du vide, et $\vec{j}$ la densité de courant.

En régime stationnaire (le cadre de ce chapitre) :

En règle générale, on voit que le champ magnétique est créé de deux manières :

- Par l'existence d'une densité de courant $\vec{j}$ (c'est-à-dire un déplacement de charges) ;
- Par la variation temporelle d'un champ électrique $\partial\vec{E}/\partial t$, dont l'effet est similaire à celui d'une densité de courant (le terme $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est d'ailleurs appelé **courant de déplacement**).

Démonstration de l'équation de conservation de la charge (par les équations de Maxwell)

Préambule mathématique :

- **Théorème de Schwartz** : puisque les variables de temps et d'espace sont indépendantes, on peut intervertir les dérivées temporelles et spatiales portant sur une fonction du temps et de l'espace ;
- Pour tout champ vectoriel $\vec{U}$, on a $\mathbf{div}\left(\mathbf{rot}(\vec{U})\right) = \mathbf{0}$ (ce qui se démontre de manière pédestre mais directe en cartésien).

I.3.A - Démonstration par un bilan de charge

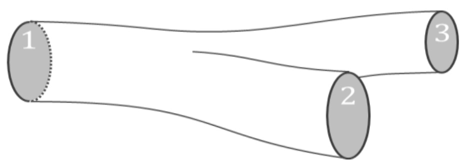
Démonstration manuscrite de l'équation de conservation de la charge (par un bilan)

I.3.B - Conséquence de la conservation de la charge

Il est alors possible de démontrer la loi des nœuds, connue depuis le lycée, de manière plus rigoureuse, en utilisant directement l'équation de conservation de la charge (précédemment démontrée de deux manières).

Application directe - Démonstration de la loi de nœuds

En appliquant l'équation de conservation de la charge, retrouver la loi des mailles (en régime stationnaire).



I.4 - Loi d'Ohm, version locale et intégrale

Puisqu'on s'intéresse désormais aux densités de courant, il est possible de définir une version locale de chacune des lois de l'électrocinétique définies en première année, en commençant par la loi d'Ohm.

I.4.A - Loi d'Ohm locale

En se basant sur une modélisation minimaliste du déplacement des électrons dans un milieu, il est possible d'établir une relation de proportionnalité entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$, (appelée « modèle de Drude » de la conduction électrique) :

Loi d'Ohm locale dans un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique est un milieu dans lequel la loi d'Ohm est vérifiée en chaque point :

La grandeur γ (parfois notée σ) est appelée conductivité électrique du milieu

Remarque : Il arrive souvent que soit définie la résistivité électrique, $\rho = 1/\gamma$, qui s'exprime en $\Omega.\mathrm{m}$.

Dans la quasi-totalité des exercices, on supposera que les matériaux sont des conducteurs ohmiques. Dans la pratique, c'est une bonne approximation dans les milieux homogènes et isotropes, pour des champs électriques relativement faibles (ce qui est toujours le cas dans les applications usuelles).

La conductivité thermique prend des valeurs élevées dans les bons conducteurs, et faibles dans les isolants :

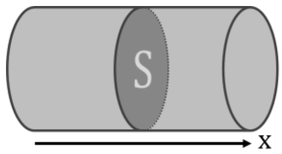
Milieu	**Cuivre, argent, or, …** **(bons conducteurs)**	**Silicium, germanium, …** **(semi-conducteurs)**	**Silicone, caoutchouc, verre** **(isolants)**
Conductivité électrique $(\mathbf{S.m^{-1}})$			

Remarque : dans le cas des solutions électrolytiques, la conductivité dépend de la concentration en ions. Par exemple, l'eau ultrapure (quasi parfaitement distillée) a une conductivité électrique de l'ordre de $10^{-10}\ \mathrm{S.m^{-1}}$, alors que l'eau de mer a une conductivité d'environ $5\ \mathrm{S.m^{-1}}$.

I.4.B - Loi d'Ohm intégrale

Démonstration – Passage de la loi d'Ohm locale à intégrale

On considère un milieu cylindrique unidimensionnel d'axe (Oz), de longueur L, de section S, et de conductivité γ. Retrouver la loi d'Ohm $U = Ri$, et exprimer la résistance R en fonction des données.



Loi d'Ohm intégrale dans un conducteur ohmique de section constante

La loi d'Ohm intégrale est simplement ______________________________

Où la résistance d'un conducteur ohmique de section S et longueur L s'exprime : ______________________________

Un exemple simple pour comprendre – utiliser la loi d'ohm intégrale

Un fil de tungstène, de diamètre $d \sim 0{,}05\ \mathrm{mm}$ et de longueur $l \simeq 0{,}5\ \mathrm{m}$ est parcouru par un courant $i \simeq 1\ \mathrm{A}$ (conductivité du tungstène : $\gamma \simeq 10^7\ \mathrm{S.m^{-1}}$).

1. Déterminer la puissance perdue par effet Joule. Sous quelle forme est dissipée cette puissance ?
2. On place le filament dans une enceinte en verre remplie d'argon. Quel objet a-t-on ainsi fabriqué ?

II - NATURE ET PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Dans cette section, on s'intéresse au champ magnétique en régime stationnaire. Le terme $\partial\vec{E}/\partial t$ de l'équation de Maxwell-Ampère est nul, si bien que la seule source du champ $\vec{B}$ doit être une distribution de courant $\vec{j}$.

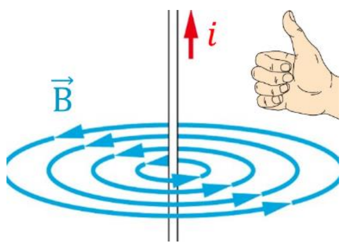
II.1 - Rappels : sources de champ magnétique et lignes de champ

Le concept de ligne de champ est toujours identique au cas de l'électrostatique et de la dynamique des fluides : ce sont des courbes orientées tangentes aux vecteurs $\vec{B}$ en chaque point. Cela dit, leur construction et leur allure obéit à des règles différentes dans chaque cas.

Champ magnétique créé par un courant et par un aimant

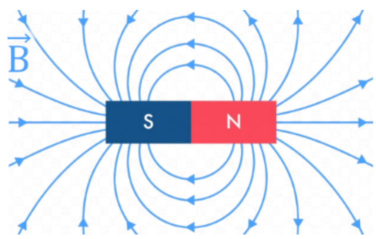
Champ créé par un courant :

Sens d'enroulement des lignes de champ magnétique lié à la règle de la main droite.

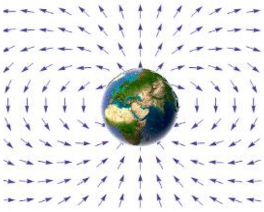
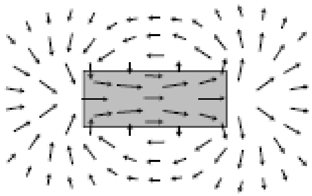
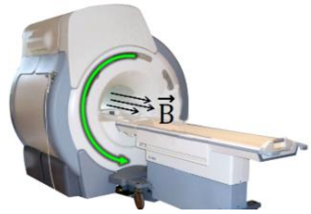


Champ créé par un aimant :

Lignes de champ magnétique orientées du pôle nord vers le pôle sud.



L’unité du champ magnétique est le Tesla, noté T. La plupart des champs magnétiques rencontrés usuellement sont d’une intensité très inférieure au Tesla :

	Champ terrestre	Aimant permanant	IRM (Imagerie par Résonance Mag.)	Record en laboratoire (non-destructif)
Source				
$\|\vec{B}\|$ (T)				

Les bobines utilisées en TP, typiquement constituées de quelques spires par millimètre, et parcourues par quelques ampères, créent en leur centre un champ magnétique d’intensité $\|\vec{B}\| \simeq 0{,}1$ T. Seuls certains objets cosmiques sont capables de créer des champs magnétiques supérieurs à quelques milliers de Tesla (étoile, étoile à neutron, etc.)

Comme au chapitre d’électrostatique, l’additivité des forces sur une particule permet de conclure au principe de superposition concernant les champs magnétiques.

Principe de superposition

Le champ magnétique créé par un ensemble de distributions de courants est la somme des champs créés par chaque distribution considérée individuellement.

II.1 - Équation de Maxwell-Thompson et propriétés du flux magnétique

II.1.A - Équation de Maxwell-Thompson

Équation de Maxwell-Thompson

En tout point M de l’espace, ______________ (pour le champ électrique, on avait l’équation de Maxwell-Gauss, $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$).

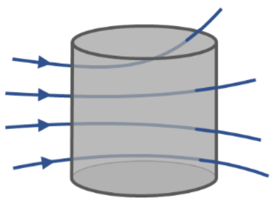
Cette équation est parfois appelée « équation de Maxwell-flux ». Elle stipule que, contrairement au champ électrique, le champ magnétique ne peut pas « émaner » d’un point de l’espace (sinon, la divergence en ce point serait non-nulle) : le champ magnétique est uniquement créé via l’équation de Maxwell-Ampère, par un courant $\vec{j}$ ou un courant de déplacement $\partial\vec{E}/\partial t$.

II.1.B - Propriétés du flux magnétique

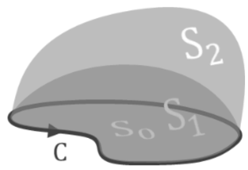
C’est le cas de tout champ dont la divergence est nulle (comme par exemple, le champ eulérien de vitesse d’un écoulement incompressible, c’est-à-dire non-divergent).

Propriétés du flux magnétique

Le flux du champ magnétique au travers d’une surface fermée est nul.
Le champ magnétique est **à flux conservatif**.



Le flux du champ magnétique est identique au travers de toutes les surfaces s’appuyant sur même un contour fermé (on peut donc choisir la surface la plus simple pour le calculer).



Les lignes de champ sont d’autant plus resserrées que le champ magnétique est intense (en moyenne sur une section).

Démonstration manuscrite : propriétés du flux magnétique

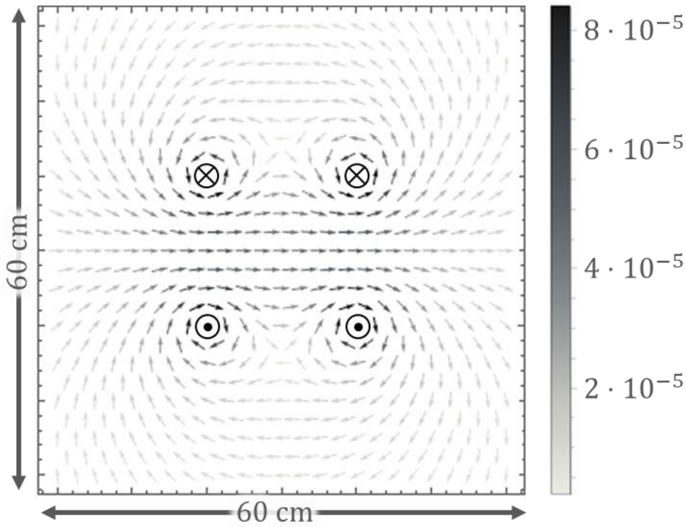
II.2 – Propriétés du champ magnétostatique en lien avec la distribution de courants

Comme en électrostatique, on s'intéresse ici à l'effet des symétries et des invariances de la distribution de courant sur le champ $\vec{B}$.

Il est possible d'établir une loi analogue à la loi de Coulomb, qui donne le champ magnétostatique en tout point par intégration sur la distribution volumique de courants (la loi de « Biot et Savart », hors programme en PT).

Cette loi permet de démontrer rigoureusement toutes les propriétés liées aux symétries de la distribution de courant, que nous présenterons plus bas.

Ici, nous nous contenterons de constater l'effet des symétries de la distribution de charge sur le champ magnétique en raisonnant sur l'exemple représenté ci-contre : quatre fils, éloignés de 20 cm, sont parcourus par un courant de 10 A (deux dans un sens, et deux dans l'autre). Le champ de vecteur est coloré conformément à son intensité.



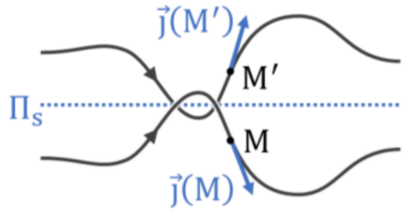
<u>Attention</u> **: L'effet des symétries et antisymétries concernant l'électrostatique et la magnétostatique se ressemblent, mais sont inversés. On prendra gare à ne pas les confondre.**

II.2.A – Relation entre symétries de la distribution de courant et direction du champ

De manière similaire à l'électrostatique, on étudier d'abord l'effet de distribution de sources (ici les courants) symétriques et anti-symétriques par rapport à un plan. On a d'abord, concernant les plans de symétrie :

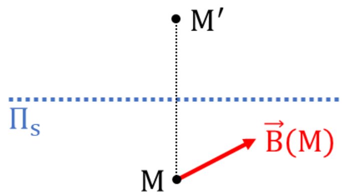
Plan de symétrie Π_s

Une distribution de courant présent un plan de symétrie, noté Π_s, ssi :



Champ créé par une distribution symétrique

Une distribution symétrique par un plan Π_S engendre un champ électrostatique anti-symétrique par rapport au même plan :

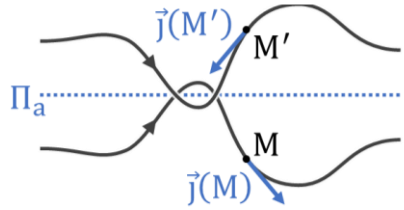


En particulier, tout point **inclus dans le plan de symétrie** des courants possède un champ magnétique **perpendiculaire au plan.**

Et concernant les plans d'antisymétrie :

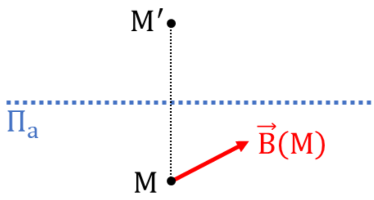
Plan d'anti-symétrie Π_a

Une distribution de courant présent un plan d'anti-symétrie, noté Π_a, ssi :



Champ créé par une distribution anti-symétrique

Une distribution anti-symétrique par un plan Π_A engendre un champ électrostatique anti-symétrique dans tout l'espace :



En particulier, tout point **inclus dans le plan d'antisymétrie** des courants possède un champ magnétique **inclus dans le plan.**

II.2.B - Relation entre invariances de la distribution et dépendances spatiales du champ

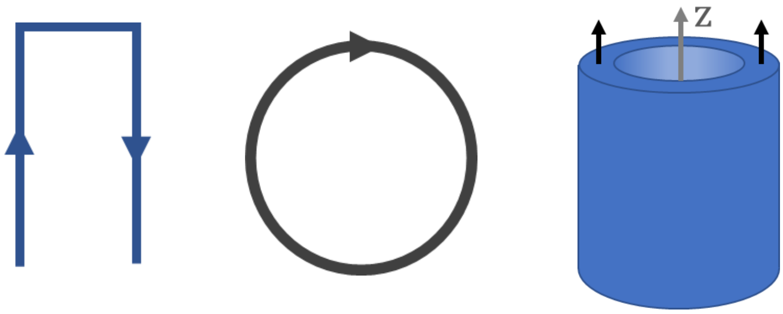
Champ créé par une distribution invariante (par rotation ou translation)

Comme en électrostatique, une invariance de la distribution de courant par rotation ou par translation (décrites par une variable θ ou X du système de coordonnées) engendre un champ magnétostatique indépendant de cette variable.

Exemple pour comprendre – Plans de symétrie

On considère les distributions de courant représentées ci-contre.

1. Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie.
2. En déduire les contraintes sur la direction des champs.



III - THÉORÈME D'AMPÈRE

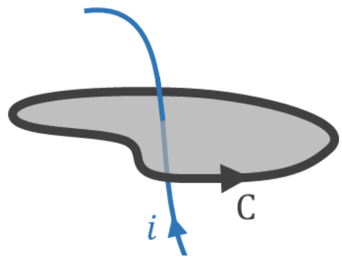
Le théorème d'Ampère est l'équivalent magnétostatique du théorème de Gauss pour l'électrostatique : il permet de calculer des champs magnétostatiques créés dans tout l'espace, mais uniquement dans les systèmes à haut degré de symétrie.

III.1 - Énoncé et démonstration

Théorème d'Ampère

La **circulation** du champ magnétique le long d'un **contour fermé** est reliée au courant algébrique enlacé par ce contour (appelé « contour d'Ampère ») :

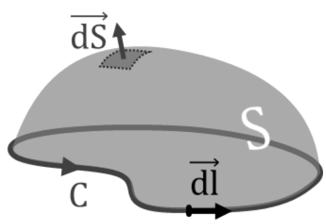
Où $I_{enlacé}$ est la somme de tous les courants passant à l'intérieur du contour.



Comme le théorème de Green-Ostrogradski, le théorème de Stokes est un théorème permettant de reformuler des intégrales ; il est nécessaire pour établir la démonstration du théorème d'Ampère.

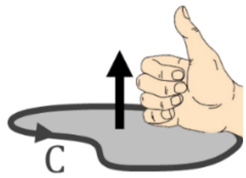
Préambule – Théorème de Stokes

Soit S une surface ouverte orientée s'appuyant sur le contour fermé C, orientés l'un par rapport à l'autre par la règle de la main droite. Alors, pour tout champ vectoriel $\vec{U}$ défini dans tout l'espace :



Démonstration – Théorème d'Ampère (via le théorème de Stokes)

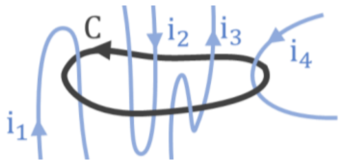
Attention : le courant enlacé doit être compté algébriquement : le courant est compté positivement s'il traverse le contour dans le sens donné par la règle de la main droite (voir image ci-contre).



Comme le théorème de Gauss, certaines implications du théorème d'Ampère sont contre-intuitives : les courants circulant à l'extérieur du contour ont un effet sur le champ $\vec{B}$ lui-même, mais n'ont aucun effet sur la circulation de $\vec{B}$ sur le contour.

Un exemple pour comprendre –Déterminer l'intensité enlacée

Sur l'exemple représenté ci-contre, déterminer l'intensité enlacée par le contour C.



III.2 - Champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant

III.2.A - À l'extérieur du fil

Application – Champ créé par un fil parcouru par un courant (à l'extérieur)

On considère un fil cylindrique de rayon R et de longueur infinie, parcouru par un courant i, réparti uniformément sur toute la section. On souhaite calculer le champ magnétostatique $\vec{B}$, d'abord à l'extérieur du fil.

Remarque : on obtient un champ magnétique décroissant selon $1/r$, et proportionnel à l'intensité i, ce qui semble acceptable.

III.2.B - À l'intérieur du fil

Puisque le champ magnétique peut être défini dans tout l'espace, on s'intéresse maintenant au champ électrique défini à l'intérieur du fil.

Application – Champ créé par un fil parcouru par un courant (à l'intérieur)

On reprend le même fil. Calculer alors le champ électrostatique $\vec{B}$ créé à l'intérieur.

On remarque que le champ est continu à l'interface : $\vec{B}(R^-) = \vec{B}(R^+)$. **Comme en électrostatique, les discontinuités ne se manifestent que dans le cas de distributions surfaciques ou linéiques de courant.**

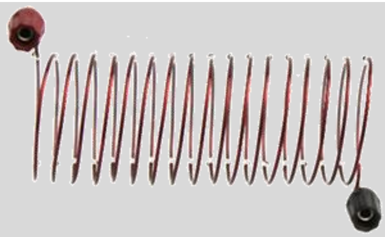
III.3 - Champ magnétique créé par un solénoïde infini

La manière la plus classique de créer un champ magnétique est d'utiliser une bobine, appelée aussi « **solénoïde** » (un fil conducteur enroulé en hélice).

III.3.A - À l'extérieur du solénoïde

Application – Champ créé par un solénoïde (à l'extérieur)

On considère On considère l'enroulement d'un fil formant un cylindre vide, d'axe Oz, de rayon R, formant une distribution de courant semblable à celle d'une bobine. L'objet, ou la forme ainsi obtenue est appelée « solénoïde »



Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

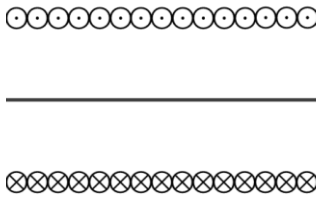
Remarque : il n'est pas possible d'avoir accès à la valeur du champ. À partir de maintenant, on accepte qu'en plus d'être uniforme, le champ magnétique extérieur au solénoïde est nul : $\vec{B}(r > R) = \vec{0}$. Nous allons utiliser ce résultat afin de calculer le champ à l'intérieur du solénoïde.

III.3.B - À l'intérieur du solénoïde

Application – Champ créé par un solénoïde (à l'intérieur)

On considère le même solénoïde. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur.

Champ créé par un solénoïde infini



Le champ magnétostatique créé par un solénoïde est :

- Nul à l'extérieur du solénoïde ;
- Uniforme à l'intérieur, $\vec{B} = \mu_0 n\, I\, \vec{e}_z$ (où n est la densité linéique de spires, en m^{-1}).

On remarque que le champ est discontinu au niveau de l'interface en $r = R$. Encore une fois, cela est dû à la modélisation unidimensionnelle du courant.

IV - THEOREME D'AMPERE EN REGIME QUASI-STATIONNAIRE

Tous les résultats établis en magnétostatique ne sont rigoureusement valables qu'en régime stationnaire, lorsque les dérivées temporelles des grandeurs sont nulles. En effet, l'équation de Maxwell-Ampère utilisée jusqu'alors avait la forme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\, \vec{j}$, alors que la forme complète (non-stationnaire) de l'équation de Maxwell-Ampère est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\, \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On peut alors se demander dans quelle limite les résultats établis dans le chapitre précédent restent valables si on relaxe la contrainte de stationnarité. Plus spécifiquement, est-il possible de négliger le courant de déplacement dans des cas où les variations temporelles sont lentes ? Dans quelles limites ?

IV.1 - Condition d'application du théorème d'Ampère en régime instationnaire

Dans la suite, on raisonner sur le cas particulier d'un fil parcouru par un courant $i(t)$, pour se demander dans quelles limites il est possible de considérer que le théorème d'Ampère (établi dans le cas stationnaire) reste approximativement valable :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}\, \vec{e}_\theta$$

Pour l'étude, on considérera une période d'oscillation des courants de T_j (ou une fréquence f_j).

IV.1.A - Première contrainte : ARQS de première année

D'abord, il ne faut pas s'intéresser au champ trop loin de la source, car le champ $\vec{B}$ se déplace « seulement » à la vitesse de la lumière dans le vide. Il faut que la propagation du champ entre le fil et la distance r soit faible devant le temps de variation des courants, c'est-à-dire :

Cette condition est celle de l'ARQS déjà abordée en première année en électrocinétique.

IV.1.B - Seconde contrainte : ARQS « magnétique »

Ensuite, comme il a été mentionné précédemment, il faut que le courant de déplacement soit négligeable devant la densité de courant :

Cette dernière contrainte revient à contraindre la vitesse de variation temporelle du champ $\vec{E}$. On peut la particulariser à différents cas, par exemple dans un conducteur ohmique, dans lequel $\vec{j} = \gamma \vec{E}$:

Pour un conducteur usuel, on doit donc vérifier $T \gg \frac{\epsilon_0}{\gamma} \sim \frac{10^{-11}}{10^6} \sim 10^{-17}$ s, c'est-à-dire que la fréquence de variation des courants doit être très inférieure à 10^{17} Hz, ce qui est très peu restrictif.

IV.2 - Bilan : ARQS et ARQS magnétique

ARQS magnétique

En régime stationnaire, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}$: les seules sources de champ magnétostatique sont les courants.

En régime variable, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$: les sources de champ $\vec{B}$ sont les courants et les courants de déplacement.

On définit **l'ARQS magnétique** :

- Les conditions de l'ARQS de PTSI sont vérifiées ;
- On peut négliger le courant de déplacement face aux courants (on dit parfois que l'effet des charges est négligeable).

En ARQS magnétique, **tous les résultats établis en magnétostatique restent vrais, même s'ils dépendent du temps.**

Par exemple, on avait établi que le champ magnétique créé par un fil conducteur infini parcouru par un courant i prenait la forme $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{r}\vec{e}_\theta$. Si ce conducteur est parcouru par un courant $i(t)$, de fréquence très inférieure 10^{17} Hz, alors le champ magnétique prend la forme $\vec{B} = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

V - ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

V.1 - Densité volumique d'énergie magnétique

La présence d'un champ magnétique dans l'espace est une forme d'énergie ; former un champ magnétique consomme de l'énergie, et l'annuler en rapporte (le plus souvent, cette énergie est prélevée ou injectée dans un circuit électrique).

Densité volumique d'énergie magnétique

La densité volumique d'énergie magnétique s'écrit : ______________________

Un volume $d\tau$ situé au point M contient une énergie magnétique ______________________

Remarque : cette expression est très semblable à la densité d'énergie électrique $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0\left\|\vec{E}\right\|^2$.

Une application pour comprendre – énergie du champ magnétique

On considère une bobine cylindrique de $L = 20$ cm de haut, composée de 1000 spires. Elle est parcourue par un courant $i = 1$ A. En négligeant les effets de bords, déterminer l'énergie du champ magnétique créé en son sein.

V.2 - Échanges énergétiques entre le champ et les porteurs de charge

De la même manière qu'on a défini la loi d'Ohm locale, on établit ici l'équivalent local de la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ et de la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P} = u \cdot i$, toutes deux définies en première année.

V.2.A - Densité de force de Lorentz

Force de Lorentz locale

En chaque point d'un milieu de densité de charge ρ soumis à un champ électromagnétique, la force volumique de Lorentz s'exprime :

____

V.2.B - Densité volumique de puissance Joule

Puissance volumique reçue par le milieu (i.e. les porteurs charges)

En tout point d'un milieu soumis à un champ électromagnétique, le milieu reçoit une densité de puissance volumique :

$$\mathcal{p} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Démonstration manuscrite - Puissance volumique reçue par le milieu

Puissance volumique reçue par un conducteur ohmique

En tout point d'un conducteur ohmique soumis à un champ électromagnétique, la densité de puissance volumique reçue est :

Cette puissance est toujours positive : c'est la **version locale de l'effet Joule.**

Dans le cadre d'une modélisation simple de l'aspect microscopique de la conduction, on peut interpréter cette puissance transmise au milieu comme étant dissipée par interaction entre les cations immobiles du conducteur, et le déplacement des porteurs de charge (comme une sorte de force de frottements entre les électrons en déplacement et les cations fixes).