Objectifs	Appliquer des techniques de mesure des incertitudes sur une expérience simple : le pendule.		
Thèmes	Systèmes mécaniques oscillants – Propagation des incertitudes		
Matériel	Potence, fil et masses	Mètre ruban	Chronomètre

I - PENDULE SIMPLE AUX PETITS ANGLES

I.1 - Rappels concernant le pendule simple

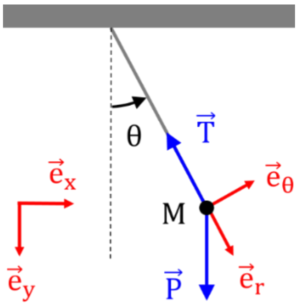
Dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ représenté ci-contre, on rappelle que l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Où l est la longueur du fil et g l'accélération de la pesanteur. Comme $[l] = m$ et $[g] = m.s^{-1}$, on a $[g/l] = s^{-1}$. On définit donc la pulsation propre du pendule :

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \qquad (\text{et } T = 2\pi/\omega_0)$$

L'équation différentielle écrite ci-dessus n'est pas résoluble analytiquement. En revanche, on peut la simplifier lorsqu'on se place dans des conditions expérimentales particulières.



1. Effectuer un développement limité du sinus à l'ordre 3 dans l'équation différentielle.
2. Pour négliger le terme d'ordre 3, on souhaite qu'il soit au moins 100 fois plus petit que le terme d'ordre 1. Déterminer l'angle maximal d'oscillation qui permet de satisfaire cette condition, et simplifier l'équation différentielle dans ce cas.

Si on souhaite rester dans les conditions de validité de cette approximation, on veillera à ne pas trop dépasser cet angle limite lorsqu'on manipule le pendule.

3. Écrire la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle simplifiée pour un lâcher sans vitesse initiale.
   Exprimer et calculer la période T des oscillations pour un pendule d'un mètre.

I.2 - Détermination expérimentale de $\vec{g}$

Dans cette partie, on tente de calculer précisément la valeur de g à partir d'une mesure de taille l du pendule et de la période d'oscillations T. Il sera nécessaire de faire usage la <u>**formule de propagation des incertitudes**</u> présentée en dernière partie du TP.

4. Mesurer soigneusement la longueur l du fil, et peser la masse m. Ci-dessous, on notera les mesures avec les incertitudes associées sous forme : $x = (x_{mesuré} + \Delta x)$ unité. **Choisir des valeurs permettant de rendre les résultats les plus précis possibles.**

Longueur du fil l (en m)		**Masse m (en kg)**	

5. Déterminer aussi précisément que possible la période d'oscillation T du pendule simple. On notera les valeurs mesurées ainsi que les incertitudes associées, en ayant réfléchi à la manière de **minimiser les incertitudes**.
6. En déduire une valeur de l'accélération de la pesanteur g. On utilisera la formule de propagation des incertitudes pour obtenir un résultat sous forme $g = (g_{obtenu} + \Delta g)$ unité.

Valeur de g (et incertitude)	

La valeur de g mesurée très précisément à Paris est environ ______________________________. La valeur de g est plus élevée aux pôles qu'à l'équateur, à cause de la forme ellipsoïdale de la terre, et dépend de la composition locale de la croute terrestre).

7. Quelle est la mesure dont l'incertitude a le plus d'effet sur votre résultat ? Comment pourriez-vous réduire cette incertitude ? Quelles incertitudes ou approximations n'avons-nous pas mentionné ?

II - PENDULE SIMPLE AUX GRANDS ANGLES

II.1 - Formule de Borda

En réalité, la formule obtenue pour la période d'oscillation est approximative (à cause du développement limité du sinus au premier ordre). La période d'oscillation dépend en réalité de l'angle d'oscillation θ_0. Cette formule prend la forme :

$$T(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + a\,\theta_0 + b\,\theta_0^2 + c\,\theta_0^3 + \cdots\right)$$

8. Justifier que $a = c = 0$ en utilisant un argument de symétrie.

II.2 – Mesure du coefficient b

L'objectif des manipulations qui vont suivre est de vérifier le modèle donné ci-dessus pour $T(\theta_0)$, et si possible déterminer la valeur du paramètre **b** inconnu. Pour cela, il sera bien sûr nécessaire de réaliser diverses mesures à des angles θ_0 variés, pas forcément petits. **Attention** : c'est une expérience qui demande beaucoup de précision pour donner des résultats convenables.

9. Mesurer <u>aussi précisément que possible</u> la période d'oscillation T pour plusieurs valeurs de $\theta_0 \in [0°, 80°]$.
   Recopier les grandeurs mesurées et les incertitudes associées dans le tableau ci-dessous.

$\boldsymbol{\theta_0}$									
$\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta_0})$									

10. Quelles mesures tracer en abscisse et ordonnée dans Regressi afin que le paramètre **b** soit le coefficient directeur d'une droite ?

11. Afficher les mesures nécessaires dans Regressi, **<u>en incluant les incertitudes</u>** notées dans le tableau ci-dessus (il faut cliquer sur le bouton « incertitudes » au-dessus du tableur de Regressi, ce qui permet de rentrer les valeurs). On vérifiera que le graphique tracé par Regressi prend bien en compte les incertitudes renseignées.

12. Modéliser la courbe obtenue par une droite pour obtenir une estimation de **b** avec l'incertitude associée (donnée par Regressi).

Valeur de b (et incertitude)	

La valeur correcte de **b** (issue du développement théorique de l'équation du pendule simple) est ________________.

III – FORMULE DE PROPAGATION DES INCERTITUDES

On se place dans le cas où on souhaite connaitre une grandeur $F(X_1, X_2, \dots)$ en effectuant une mesure des paramètres $(X_1, X_2, \dots)$. On suppose que les mesures des X_i ont chacune des incertitudes associées :

$$X_i = \underbrace{X_{i,0}}_{\substack{\text{valeur}\\\text{mesurée}}} + \underbrace{\Delta X_i}_{\substack{\text{incertitude}\\\text{estimée}}}$$

Puisque les mesures ont des incertitudes ΔX_i, la grandeur F aura aussi une incertitude, qu'on note ΔF. Cette incertitude ΔF peut être calculée à partir des dérivées partielles de la fonction F, ainsi que des incertitudes ΔX_i :

$$\Delta F \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)^2_{X_{i,0}} \cdot (\Delta X_1)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2}\right)^2_{X_{i,0}} \cdot (\Delta X_2)^2 + \cdots}$$

Dans cette formule, $(\partial F/\partial X_1)_{X_{i,0}}$ représente la dérivée partielle de F par rapport à la variable X_1, la fonction résultante étant évaluée aux valeurs mesurées $(X_1 = X_{1,0}, X_2 = X_{2,0}, \dots)$.

Remarque : cette formule n'est pas au programme. Seule ses restrictions au cas $F(X_1, X_2) = \alpha\, X_1/X_2$ et $F(X_1, X_2) = \alpha\, X_1 X_2$ le sont. Il est possible de retrouver les formules particulières à partir de celle donnée ici, qui est plus générale.

Attendu pour la présentation

- Rappels théoriques sur le pendule simple ;
- Protocole expérimental permettant la g, avec les incertitudes associées ;
- Discussion sur les sources d'incertitudes, et la manière de les réduire ;
- Graphique montrant $T(\theta_0)$, et déduction de la valeur du coefficient b, avec les incertitudes associées.