Programme d'interrogation orale

- Savoir décrire une distribution de charge de manière adaptée (volumique, surfacique ou linéique), et savoir intégrer ces grandeurs de manière adéquate pour trouver la charge totale contenue dans un système.
- Connaitre et utiliser l'expression de la force de Coulomb (cas général, cas d'une charge au centre d'un repère sphérique).
- Savoir établir des contraintes sur l'expression du vecteur champ électrique en fonction des symétries et invariances d'une distribution de charge.
- Savoir appliquer le théorème de Gauss sur les distributions à haut degré de symétrie : plan chargé infini, cylindre chargé infini, boule chargée. On attend une utilisation très rigoureuse du théorème de Gauss ; aucune approximation ne sera tolérée.
- Savoir établir une correspondance formelle entre le théorème de Gauss électrostatique et gravitationnel.

On écrit ci-dessous l'expression des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques et sphériques :

Gradient	Rotationnel	Divergence
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$	$\mathrm{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Gradient	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	**Divergence**	$\mathrm{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial (\sin(\theta)\, V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotationnel	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)\, V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\varphi)}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$		

Attention : les applications du théorème de Gauss doivent être faites avec la plus grande rigueur. La méthode appliquée dans le cours doit être comprise et réalisée avec autant de soin dans les exercices de TD. Un schéma est toujours très fortement conseillé.

Exercice 1 – Entrainement au calcul d'une charge totale (questions indépendantes) — Difficile 1 – Original 1

Soit la distribution de charge D_1, sphérique, de rayon R et de centre O. Calculez la charge totale Q comprise dans D_1 si :

1. D_1 est une distribution de charge de densité volumique constante ρ_0 constante ;
2. D_1 est une distribution de charge de densité surfacique constante σ_0 constante ;
3. D_1 est une distribution de charge de densité volumique $\rho(r) = \rho_0 \frac{R-r}{R}$.

Soit la distribution de charge D_2 de forme cylindrique, d'axe Oz, de rayon R et de hauteur H comprise entre les altitudes $z = 0$ et $z = H$. Calculez la charge totale Q comprise dans D_2 si :

4. D_2 est une distribution de charge de densité volumique constante ρ_0 constante ;
5. D_2 est une distribution de charge de densité surfacique constante σ_0 constante ;
6. D_2 est une distribution de charge de densité volumique $\rho(z) = \rho_0 \frac{H-z}{H}$.

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on approxime la densité volumique de charge associée à l'électron par $\rho(M) = K\, r\, e^{-r/a}$. Où **a** est le « rayon de Bohr » du noyau de l'hydrogène (une constante).

7. Quel est l'ordre de grandeur de l'extension spatiale du nuage électronique ? Exprimer alors la charge q associée à la distribution volumique $\rho(M)$, puis en déduire une expression de K en fonction de **a** et de la charge élémentaire **e**.

En présence d'un certain champ électrostatique, des particule nanométriques peuvent voir leur nuage électronique décentrer du noyau chargé positivement. On modélise la charge d'une telle particule par une sphère de rayon R et de densité surfacique de charge $\sigma(r, \theta, \phi) = \sigma_0 \cos(\varphi)$ où $\varphi \in [0, 2\pi]$.

8. Quelle partie de la sphère est chargée positivement ? et négativement ? Il est possible de répondre par un schéma.
   Montrez que, malgré cette distribution surfacique de charge, la particule reste neutre.

Réponses aux questions 1 à 7 : $\frac{4}{3}\pi R^3$; $4\pi R^2 \sigma_0$; $\frac{1}{3}\pi\rho_0 R$; $\pi R^2 H \rho_0$; $2\pi R^2 \sigma_0$; $\frac{1}{2}\pi R^2 H\rho_0$; $K = \frac{-e}{24\pi a^4}$

Exercice 2 – Entrainement au calcul d'opérateur vectoriels

Difficile 1 – Original 1

Les champs générés par une sphère centrée en O de rayon R et contenant une charge Q uniformément répartie est le suivant :

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{E}(r \leq R) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\, r\, \vec{e}_r \\ \vec{E}(r \geq R) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \vec{e}_r \end{cases}$$

L'expression des opérateurs vectoriels est rappelée au début de la fiche de TD.

1. Montrez que ce champ est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss.
2. Montrez que ce champ est compatible avec les équations de Maxwell-Faraday.

Exercice 3 – Symétries de la distribution de charge et symétrie du champ $\vec{E}$

Difficile 1 – Original 1

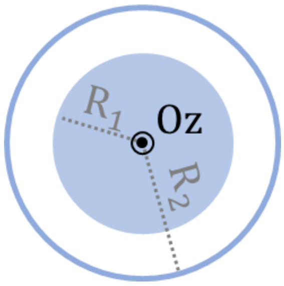
On raisonne dans un espace à deux dimensions, muni de la base de projection cartésienne $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On place deux charges de même valeur q en $M_1(-3,0)$ et $M_2(3,0)$.

1. Donner l'expression du champ $\vec{E}$ en $P(0,4)$ en fonction de q et ϵ_0.
2. Montrer alors que $\forall P \in \Pi^+, \vec{E}(P) \parallel \Pi^+$ où Π^+ est le plan défini par $x = 0$.
3. Réponse aux deux mêmes questions dans le cas où les charges sont opposées : $-q$ en $M_1(-3,0)$ et q en $M_1(3,0)$.

Exercice 4 – Champ créé par deux cylindres concentriques

Difficile 1 – Original 1

On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques infinis de même axe Oz. Le premier cylindre, de rayon R_1, est un cylindre plein chargé en volume par une densité de charge $\rho(r) = -\alpha r$ $(\alpha > 0, r \leq R_1)$. Le second cylindre, de rayon $R_2 > R_1$ est un cylindre creux chargé uniquement sur son pourtour extérieur avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$.



1. Calculer le champ électrique créé par cette distribution (de la rigueur est attendue).
2. Étudier la continuité de $\vec{E}$ en $r = R_1$ et $r = R_2$. Commenter.
3. Représenter sa composante non-nulle en fonction de r.

Exercice 5 – Champ créé par une armature épaisse

Difficile 2 – Original 1

On considère une distribution de charge volumique, uniformément répartie entre deux plans infinis situés entre $z = -a$ et $z = +a$. La densité volumique de charge est notée ρ_0.

1. Déterminer les symétries et invariances de cette distribution. En déduire les dépendances et la direction du champ $\vec{E}$.
2. Trouver une surface de Gauss permettant de déduire le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace, et le calculer.
3. Tracer le graphe représentant $E_z(z)$ pour $\rho_0 > 0$. Commenter le comportement de $\vec{E}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine $(a \to 0)$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de charge σ_0 uniforme à partir des résultats précédents.

4. Exprimer la densité surfacique de charge σ_0 en fonction de ρ_0 et a. Que devient le champ $\vec{E}$ dans chaque demi-espace ?
5. Commenter le comportement de $\vec{E}$ au passage du plan chargé.

Exercice 6 – Champ créé par un noyau atomique

Difficile 2 – Original 2

La répartition de charge au sein de certains noyaux atomiques peut être modélisée par une densité volumique de la forme :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/a^2) & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est le rayon du noyau et r est la distance au centre O.

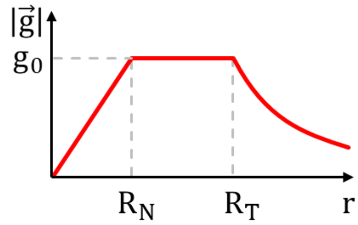
1. Exprimer la charge du noyau en fonction du numéro atomique Z. En déduire l'expression de ρ_0 en fonction de Z.
2. Calculer le champ électrostatique créé par le noyau en tout point de l'espace (y compris à l'intérieur du noyau).
3. Représenter graphiquement sa norme en fonction de r.
4. Si on avait souhaité calculer seulement le champ ressenti par un électron de l'atome, quelle démarche beaucoup plus simple aurait-on pu adopter ? Expliquer pourquoi elle s'applique.

Exercice 7 – Profil de masse volumique au sein de la Terre (oral banque PT)

Difficile 1 – Original 1

Dans un premier temps, on considère la terre comme une boule de masse volumique homogène entre $r = 0$ et $r = R_T$.

1. Expliciter la correspondance entre théorème de Gauss électrostatique et gravitationnel.
2. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}$ créé par la terre dans tout l'espace.



La répartition de masse au sein de la terre n'est pas uniforme : le champ de pesanteur évolue selon l'allure représentée ci-contre.

3. Déterminer la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre.

Exercice 8 – Théorie de la terre creuse (oral banque PT)

Difficile 1 – Original 1

Certains ouvrages de science-fiction (ou certaines théories pseudo-scientifiques) considèrent que des planètes, dont la terre, ne seraient que des coquilles épaisses qui possèderaient une surface intérieure habitable par des êtres vivants dont la tête serait donc orientée vers le centre de la planète, à l'inverse des habitants de la surface.

Pour l'exercice, on considère la terre est une sphère creuse, épaisse de 800 km (de rayon extérieur et de masse totale inchangés : $R_T \simeq 6400$ km et $M_T \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg). On souhaite connaitre la force de gravité qui serait ressentie par les habitants de la terre creuse.

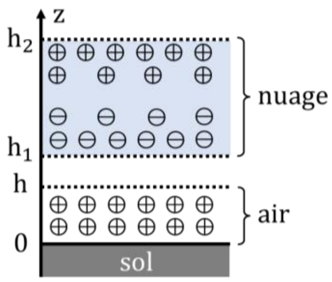
1. Par analyse des symétries, et application du théorème de Gauss, déterminer le champ en dehors de la planète. Est-il différent du champ créé par la terre « pleine » ?
2. Établir alors le champ subi par les habitants de la terre creuse, à l'intérieur de la coquille. Quel problème se pose pour ces habitants ?
3. En réalité, ces habitants ressentiraient une très faible force les attirant vers le « sol ». Pourquoi ?

Exercice 9 – Charge et champ électrostatique dans un nuage (oral banque PT)

Difficile 2 – Original 2

L'apparition de cumulonimbus, nuage colossal au profil en forme d'enclume (voir photo ci-dessous), est annonciatrice d'un orage imminent. On modélise dans cet exercice un nuage typique, situé entre les altitudes $h_1 = 2$ km et $h_2 = 10$ km. On se place à proximité suffisante du centre du nuage pour pouvoir négliger les effets de bord : toutes les grandeurs sont supposées ne dépendre que de z. On pose $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ et $H = h_2 - h_1$.

On constate habituellement dans ces nuages l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet : on considérera que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ au sommet du nuage à la valeur opposée $-\rho_0$ à sa base.



La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500\,\mathrm{m}$. On les supposera réparties uniformément avec une densité volumique ρ_{sol}. Le sol est supposé bon conducteur. L'air entre $z = h$ et $z = h_1$ n'est pas chargé.

Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : quasiment nul au niveau du sol, environ $65\,\mathrm{kV.m^{-1}}$ à $500\,\mathrm{m}$ d'altitude et jusqu'à $200\,\mathrm{kV.m^{-1}}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

1. Expliquer le phénomène d'influence à l'origine de la présence des charges au sol. La conservation de la charge ne semble pas vérifiée sur le schéma. Comment expliquer ce paradoxe ?
2. Justifier qu'en tout point M on ait $\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z$.
3. Déterminer le champ électrique dans les quatre domaines $0 < z < h$, $h < z < h_1$; $h_1 < z < h_2$ et $z > h_2$.
4. Tracer l'allure de $E(z)$.
5. Sachant que $E(z)$ admet un extrêmum au milieu du nuage, exprimer E_{max} en fonction de h et H. On supposera $\rho_0 \simeq \rho_{sol}$.
6. Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{dis} = 10\,\mathrm{kV.m^{-1}}$, appelé **champ disruptif**, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible. Comparer la valeur du champ disruptif à celle du champ électrique dans le nuage. Commenter.