La difficulté et l'originalité de l'exercice sont notées de 1 à 3. Les exercices d'originalité 1 sont des classiques qu'il faut bien comprendre et savoir refaire sans hésitations. Les exercices d'originalité 3 sont des exercices plus éloignés du cours, dans lesquels il est nécessaire de s'adapter à la nouveauté (ou de faire face à des difficultés calculatoires).

Programme d'interrogation orale
• Savoir expliquer et donner un exemple de représentation lagrangienne et eulérienne. • Notion de viscosité, unité, force visqueuse exercée sur une paroi, ordres de grandeur de viscosité. • Savoir dessiner un profil de vitesse et des lignes de champ. • Connaitre, démontrer et utiliser les formules de débit massique et volumique au travers d'une section de conduite. • Connaitre et savoir appliquer les opérateurs vectoriels div, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$. • Définition et application du nombre de Reynolds et lien avec les types d'écoulements. • Démonstration de la relation de Bernoulli simplifiée (sans travail indiqué et travail visqueux). • Connaître la relation de Bernoulli sous la forme « massique » et « en puissance ». • Savoir prendre en compte des pertes de charge dans le cas où elles sont indiquées par un ΔP ou un Δh.

DONNÉES COMMUNES AUX EXERCICES

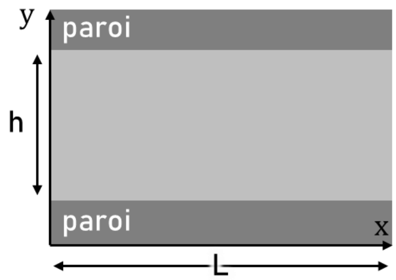
Gradient en coordonnées cylindriques	Rotationnel en coordonnées cylindriques
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

I - FROTTEMENTS VISQUEUX

Exercice 1 - Frottements visqueux sur une paroi — Difficile 1 – Original 1

On donne l'expression du profil de vitesse d'un fluide circulant entre deux plaques planes de longueur L et de largeur l, distantes de h, lorsqu'il est soumis à un gradient de pression uniforme selon son axe d'écoulement $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) = \frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L} = \mathrm{cte}$:

$$\vec{v}(y) = \frac{\Delta P}{2\eta L} y(h-y)\,\vec{e}_x$$



(l'expression n'est valable qu'en régime laminaire, qu'on définira dans la suite du cours)

1. Représenter le profil de vitesse en un plan $x = \mathrm{cte}$ quelconque.
2. Établir l'expression de la force de frottement subie par le fluide sur un élément de surface dS de la paroi.
3. En déduire la force totale subie par la paroi dans la conduite.

Exercice 2 – Minimiser les forces visqueuses — Difficile 2 – Original 2

On considère un tuyau de faible dans lequel on doit faire circuler un liquide visqueux (on peut imaginer un échangeur de chaleur, dans lequel une grosse conduite se sépare en une multitude de petits tuyaux dans le but d'optimiser l'échange thermique avec l'extérieur). Dans le cas d'un tuyau cylindrique de rayon R et de longueur totale L, si on impose une différence de pression ΔP aux extrémités, on obtient un profil de vitesse dont l'expression est :

$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{R^2}{4\eta}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\vec{e}_x$$

1. Représenter le profil de vitesse sur une section de tuyau.
2. Déterminer l'expression du débit volumique. Quel paramètre intervient de manière centrale dans l'obtention d'un bon débit ?
3. Calculer la force de frottement subit par le fluide en provenance d'un élément infinitésimal de paroi. En déduire la force de frottement sur l'intégralité de la paroi du tuyau.
4. On impose un débit volumique constant dans le tube. Comment minimiser la force de frottement subie par le fluide ? Quel problème cela pose-t-il ?

Exercice 3 – Lubrification et glissement (oral banque PT) — Difficile 2 – Original 3

On place un fluide de viscosité η entre deux plaques distantes d'une hauteur e. La plaque inférieure est immobile tandis que la plaque supérieure est en mouvement de translation rectiligne uniforme à une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$.

5. Quelles sont les conditions aux limites de l'écoulement du fluide ?
6. Donner la forme mathématique la plus simple permettant de décrire l'écoulement du fluide à travers son champ de vitesse.
7. Quelle force exerce le fluide sur la plaque supérieure ?

Un bloc cubique de côté $a = 10$ cm et de masse $m = 300$ g glisse sur une plaque plane inclinée de 45° par rapport au sol. Un fluide de viscosité η se trouve entre le bloc et la plaque sur une épaisseur de $e = 3$ mm. On reprend la forme la plus simple de l'écoulement définie à la première partie.

8. Déterminer l'équation du mouvement du bloc.
9. Au bout d'un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à une vitesse $v = 0{,}06\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Calculer la viscosité η du fluide.
10. Quelle est la durée du régime transitoire ?

II - ÉCOULEMENTS LAMINAIRES OU TURBULENTS, NOMBRE DE REYNOLDS

Exercice 4 – Écoulement laminaire ou turbulent — Difficile 1 – Original 1

Déterminer le caractère laminaire ou turbulent des écoulements suivants (des suppositions pertinentes devront être réalisées) :

1. La circulation d'air dans une bronchiole pulmonaire (tube de diamètre 1 mm, traversée par $1{,}5\ \mathrm{L.min^{-1}}$) ;
2. La circulation du sang dans l'aorte (artère de diamètre 2 cm).

Données : $\eta_{sang}(37°\mathrm{C}) \simeq 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa.s^{-1}}$ $\quad \eta_{air}(37°\mathrm{C}) \simeq 7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa.s^{-1}}$

Exercice 5 - Nature de l'écoulement dans un gazoduc — Difficile 1 – Original 1

Le pipeline Nord Stream 1 (entre la Russie et l'Allemagne), d'un diamètre de 120 cm, délivre environ 137 millions de $\mathrm{m^3}$ de méthane par an, à une pression de 200 bar (dans sa section sous-marine). Dans ces conditions, la viscosité du méthane est $\eta \sim 20\ \mathrm{\mu Pa.s}$.

1. En supposant que le gaz est parfait dans les conditions de transport, déterminer sa masse volumique. Quelle critique peut-on faire à cette hypothèse ?
2. Déterminer si le gaz s'écoule de manière laminaire ou turbulente

III - ANALYSE DES ÉCOULEMENTS

Exercice 6 – Débit massique d'un écoulement de Couette — Difficile 1 – Original 1

On s'intéresse à l'expérience de Couette dans laquelle un fluide de masse volumique μ est placé entre deux plaques horizontales de largeur L, espacées de h, l'une étant fixe et l'autre se déplaçant à la vitesse constante $\vec{v}_0$. On observe l'évolution du profil de vitesse selon la verticale et on mesure une vitesse qui vérifie la relation $\vec{v}(z) = v_0\, z/h\ \vec{e}_x \quad \forall z \in [0, h]$

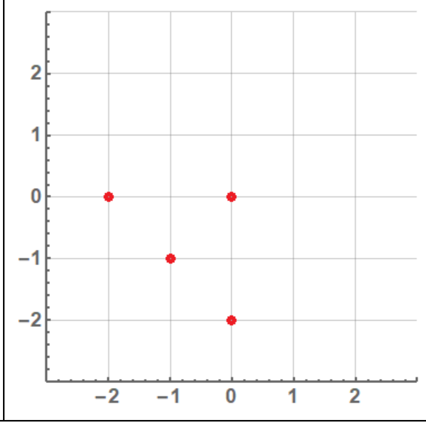
1. Calculer le débit massique à travers une section perpendiculaire à l'écoulement pour $\mu = \mu_0 = \mathrm{cte}$;
2. Calculer le débit massique à travers une section parallèle à l'écoulement ;
3. Calculer le débit massique à travers une section perpendiculaire à l'écoulement pour $\mu = \mu_0\, z/h$.

Exercice 7 - Profil de vitesse et lignes de champ	Difficile 2 – Original 2

On considère l'écoulement défini par son champ de vitesse eulérien en statique :

$$\vec{v} = \alpha\left(y\,\vec{e}_x - x\,\vec{e}_y\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$$

1. Déterminer les vecteurs vitesse aux points rouges sur le schéma ci-contre. Quelle est la forme générale du champ de vitesse ?
2. Déterminer l'équation mathématique paramétrique d'une ligne de courant passant par le point $(x_0, y_0) = (1{,}0)$.
3. Dessiner le tube de courant passant par le segment $x \in [1{,}2]$ et $y = 0$.



Exercice 8 – Compressibilité d'un écoulement de Poiseuille	Difficile 1 – Original 1

On donne le profil de vitesse en coordonnées cylindriques d'un écoulement de Poiseuille dans un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de longueur L (mu par une différence de pression ΔP) :

$$\vec{v}(r) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z$$

1. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide ;
2. Tracer les lignes de courant de cet écoulement ;
3. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en $z = 0$, $z = L/2$ et $z = L$;
4. Déterminer si cet écoulement est compressible ou incompressible ;
5. Mêmes questions avec l'écoulement dans la même géométrie, mais avec $\vec{v}(r,z) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta P}{L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{z}{L}\right)\vec{e}_z$

Exercice 9 – Caractère rotationnel d'un écoulement de type cyclone	Difficile 2 – Original 1

On donne le profil de vitesse en coordonnées cylindriques d'un écoulement de type « cyclone ». On note a le rayon dit « critique » du cyclone, et on note Oz l'axe vertical de rotation. Le profil de vitesse obéit à :

$$\vec{v}(r,\theta) = \begin{cases} v_0 \dfrac{r}{a}\,\vec{e}_\theta & \forall r \in [0, a] \\ v_0 \dfrac{a}{r}\,\vec{e}_\theta & \forall r \in]a, \infty[\end{cases}$$

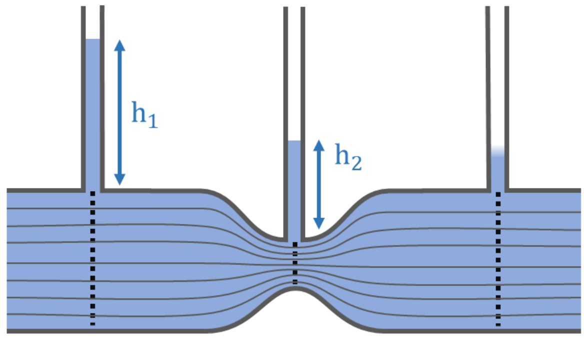
1. Tracer le profil de cet écoulement pour $r \in [0{,}3a]$
2. Déterminer si cet écoulement est rotationnel ou non.

IV - APPLICATION DE LA RELATION DE BERNOULLI (AVEC UN FLUIDE PARFAIT)

Exercice 10 - Effet Venturi (réduction de section d'un écoulement)	Difficile 1 – Original 1

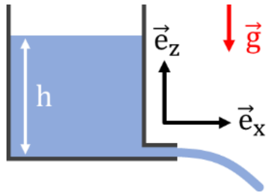
On étudie un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ dans une conduite horizontale de section variable. On suppose l'écoulement parfait, et le profil de vitesse uniforme sur les sections verticales du tuyau. Enfin, la hauteur de la conduite est suffisamment faible pour qu'on considère que la pression ne varie pas sur une section.

Trois tubes piézométriques, aussi appelés **prises de pression**, sont situés en trois points de la conduite (1,2,3).



1. Sachant que les tubes piézométriques ne perturbent pas l'écoulement (c'est-à-dire que l'eau est immobile en leur sein), déterminer la pression à leur base en fonction de la hauteur d'eau h_i. D'après la figure, comment évolue la pression du fluide dans la conduite ?
2. Exprimer la vitesse v_2 du fluide à la section n°2, en fonction de S_1, S_2, et v_1. Commenter l'allure des lignes de courant.
3. Utiliser le théorème de Bernoulli pour exprimer P_1 en fonction de grandeurs connues relatives à la section 1 et 2.
4. Déterminer la hauteur h_3 dans le cadre des hypothèses de l'énoncé. Quelle serait-elle dans la réalité ?

Exercice 11 – Vidange de Torricelli — Difficile 1 – Original 1



La relation de Torricelli, établie de manière phénoménologique en 1643 par Torricelli, donne la vitesse à laquelle se vidange un réservoir rempli de liquide.

On considère un récipient de section S rempli d'eau sur une hauteur h. Le récipient des percé à sa base d'un petit orifice de section $S' < S$, par lequel l'eau peut s'écouler.

1. Exprimer la conservation du débit entre la surface horizontale et la sortie.

1. Exprimer et simplifier le théorème de Bernoulli entre A et B. On considèrera que la surface S de la section horizontale est très grande devant la section S' de l'orifice de vidange.
2. Exprimer v_B en fonction de la hauteur d'eau h.

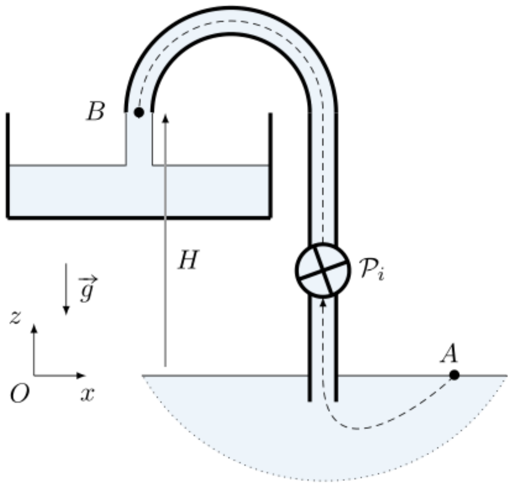
Exercice 12 – Centrale hydroélectrique de Romanche Gavet — Difficile 1 – Original 1

Mise en service en octobre 2020, la centrale de Romanche Gavet est l'ouvrage hydroélectrique français le plus récent, destiné à remplacer cinq petites installations perturbant le cours de la rivière Romanche. Un débit maximal $D_V = 40\ m^3.s^{-1}$ est dévié de la rivière (sans grand barrage, pour éviter de perturber le milieu écologique du cours d'eau). Une conduite souterraine longue de plus de 9 km permet d'emmener l'eau sur une hauteur de chute $h = 280$ m jusqu'à une installation souterraine où plusieurs turbines sont montées en parallèle. Enfin, l'eau passée par les turbines est renvoyée dans la rivière. L'objectif de l'exercice est de trouver la puissance électrique extractible de la chute d'eau.

1. Écrire et simplifier la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la conduite.
2. En déduire la puissance indiquée disponible sur les turbines en négligeant toute perte de charge.
3. La puissance électrique sortant des alternateurs est $P = 97$ MW. Sachant que le rendement d'une turbine à eau est de l'ordre de 90 %, conclure quant au résultat du calcul de puissance.

Exercice 13 – Remplissage d'une piscine — Difficile 1 – Original 1

On dispose d'une pompe de puissance indiquée $\mathcal{P}_i$ et on cherche à amener de l'eau d'un lac de très grande surface libre S_l vers une piscine de surface libre S_p. La conduite de section $s \ll S_p$ fait circuler un débit massique D_m d'eau qui peut être considérée comme un fluide parfait et incompressible.



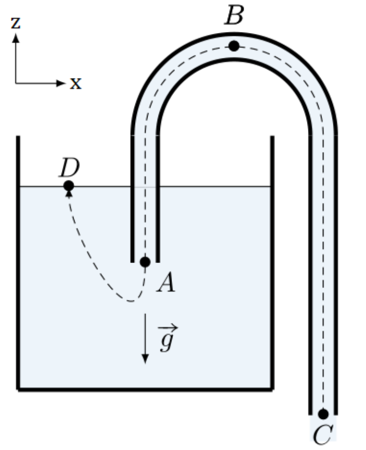
La figure schématise les deux installations décrites ainsi qu'une ligne de courant.

1. Exprimer la conservation du débit entre les points A et B en fonction des vitesses et des sections.
2. La pression en B est égale à la pression atmosphérique. En déduire une expression de la puissance indiquée $\mathcal{P}_i$ en fonction de la hauteur H, de g, du débit massique D_m et de la section s.
3. Sachant que la pompe a un rendement de 85 %, déterminer la puissance électrique consommée $\mathcal{P}_{elec}$.

Données : $D_m = 6\ kg.s^{-1}$ $s = 20\ cm^2$ $H = 5$ m

Exercice 14 – Utilisation d'un siphon **Difficile 2 – Original 1**

On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante s. On note S la section du réservoir. L'origine du repère cartésien est placée au fond du réservoir.



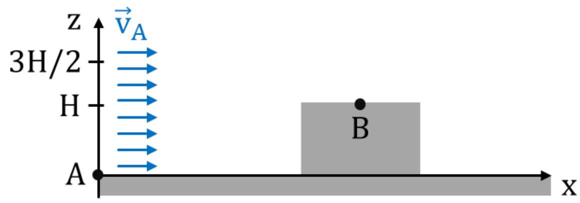
Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir. On note z_A, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes. La surface libre du réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique notée P_{atm}.

1. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon en fonction des coordonnées pertinentes. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
3. Exprimer les pressions P_A et P_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
4. En reprenant la réponse à la question 2, exprimer $z_D(t)$. Dessiner son allure.

Données : $z_A = 5$ cm | $z_B = 70$ cm | $z_C = -10$ cm | $z_D(t = 0) = 60$ cm | $\mu_0 = 10^3$ kg. m^{-3} | $S = 1$ m^2 | $s = 1$ cm^2

Exercice 15 – Écoulement sur un obstacle (oral banque PT) **Difficile 2 – Original 2**

On suppose qu'un fluide parfait, et incompressible s'écoule en régime permanent sur un obstacle, de largeur L suffisamment grande pour être considérée infinie, tel que représenté ci-contre. Au-delà de l'altitude $z = \frac{3}{2}H$, les lignes de courant ne sont plus affectées par la présence de l'obstacle.



1. Établir une relation entre v_A et v_B, puis entre v_A, v_B, p_A et p_B.
2. Compléter le tracé des lignes de courant du schéma, en tenant compte des remarques de l'énoncé.
3. Établir une expression de la pression en B.
4. Une partie du toit de l'obstacle est constitué d'une simple plaque de surface S et de masse m. En déduire l'expression de la vitesse du vent en A permettant de soulever cette plaque.

V - RELATION DE BERNOULLI ET PERTES DE CHARGE

Introduction à la prise en compte des pertes de charge (données en pression ΔP_{pertes} ou en hauteur Δh_{pertes})

On rappelle que nous avons démontré dans le cours la relation de Bernoulli généralisée sous deux formes :

Par unité de masse traversant le système : $$\left(\frac{P_s}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_s^2 + g\,z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_e^2 + g\,z_e\right) = w_i + w_{visc}$$

En puissance : $$D_m\left[\left(\frac{P_s}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_s^2 + g\,z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{1}{2}v_e^2 + g\,z_e\right)\right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{visc}$$

Entre l'entrée et la sortie du système, les pertes de charge sont, par définition, une diminution de la « charge hydraulique » $\left(P/\rho + \frac{1}{2}v^2 + g\,z\right)$. Elles peuvent donc se traduire par une perte de pression entre l'entée et la sortie, mais aussi par une perte de vitesse, ou une perte de hauteur d'eau (si on suppose que le système peut voir varier la hauteur d'une entrée ou d'une sortie).

Pour ces raisons, il est courant de donner les pertes de charges sous forme d'un Δh, ou d'un ΔP (quasi jamais sous forme d'une puissance visqueuse $\mathcal{P}_{visc}$ ou d'un travail massique visqueux w_{visc}). Il faut alors trouver un moyen de prendre en compte ces pertes de charge dans la relation de Bernoulli généralisée ci-dessus.

Pour cela, on calculera simplement $\mathcal{P}_{visc}$ ou w_{visc} à partir du ΔP_{pdc} ou du Δh_{pdc} donné, pour l'ajouter simplement au terme de droite de la relation de Bernoulli :

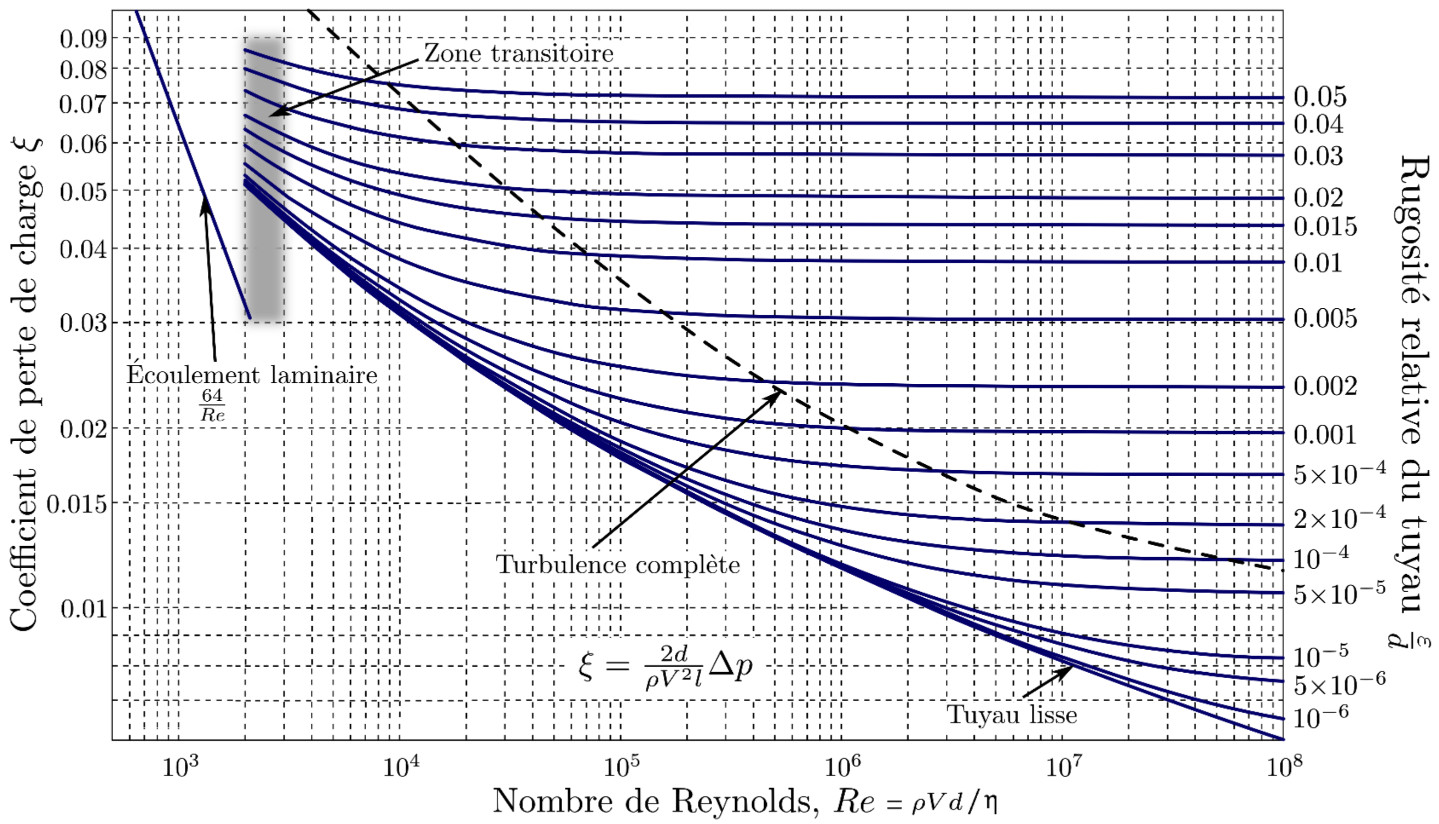
$$\left(\frac{P_s}{\rho_0}+\frac{1}{2}v_s^2+g\,z_s\right)-\left(\frac{P_e}{\rho_0}+\frac{1}{2}v_e^2+g\,z_e\right)=w_i+\begin{cases} & \text{si } \Delta h_{pdc} \text{ est donnée} \\ & \text{si } \Delta P_{pdc} \text{ est donnée}\end{cases}$$

$$D_m\left[\left(\frac{P_s}{\rho_0}+\frac{1}{2}v_s^2+g\,z_s\right)-\left(\frac{P_e}{\rho_0}+\frac{1}{2}v_e^2+g\,z_e\right)\right]=\mathcal{P}_i+\begin{cases} & \text{si } \Delta h_{pdc} \text{ est donnée} \\ & \text{si } \Delta P_{pdc} \text{ est donnée}\end{cases}$$

Attention : puisque les forces visqueuses sont dissipatives, elles ne peuvent que prélever de l'énergie mécanique au système ; on les écrit donc avec un signe ⊖.

L'une des manières de connaitre la valeur de ΔP_{pdc} est d'utiliser un diagramme de Moody, décrit ci-dessous :

Introduction au diagramme de Moody



Le diagramme de Moody n'est pas explicitement au programme, mais c'est un grand classique des exercices concernant les pertes de charges. Il est nécessaire de savoir l'identifier ay premier coup d'œil, et de savoir le lire sans difficulté. **Le diagramme de Moody permet d'évaluer une valeur de ΔP_{pdc} lors de pertes de charge régulières dans le cas d'un écoulement dans une conduite.** Il représente :

- En abscisse, le nombre de Reynolds de l'écoulement, faisant intervenir la masse volumique ρ du fluide, sa vitesse V, sa viscosité η, et le diamètre d de la conduite ;
- En ordonnée, le coefficient de perte de charge, ici noté ξ. **Attention** : la valeur de ξ dépend de la rugosité relative du tuyau ; à chaque valeur de rugosité correspond donc une courbe différente. La rugosité est simplement définie comme ϵ/d, où ϵ est la taille caractéristique des aspérités de la paroi de la conduite, et d le diamètre de la paroi.

Pour utiliser le coefficient de perte de charge ξ, on utilise la formule ici rappelée au-dessus de l'abscisse :

$$\xi=\frac{2d}{\rho V^2\ell}\,\Delta P_{pdc}\qquad \text{i.e.}\qquad \Delta P_{pdc}=\frac{\rho V^2\ell}{2d}\,\xi$$

Ainsi, connaissant les paramètres de circulation du fluide (ρ, V, d), le coefficient ξ permet de remonter à la chute de pression ΔP_{pdc} sur une distance ℓ liée à la perte de charge.

Application directe – Lecture du diagramme de Moody

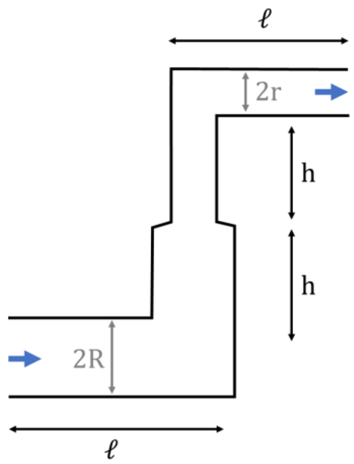
De l'eau d'un réseau domestique circule à $2\ \mathrm{m.s^{-1}}$ dans un tuyau de diamètre $d = 1\ \mathrm{cm}$. On rappelle que la viscosité de l'eau est $1\ \mathrm{mPa.s}$. Le tuyau métallique est partiellement usé et corrodé, et possède des aspérités de surface de l'ordre de $0{,}05\ \mathrm{mm}$.

1. Déterminer la perte de charge en pression ΔP sur une distance de $10\ \mathrm{m}$.

Attention : la question sera rarement formulée aussi simplement. On aurait par exemple pu avoir : « *calculer la perte de charge dans un tuyau de* $10\ m$ *et de section* $S = 4\ cm^2$, *parcouru par un débit d'eau de* $0{,}5\ kg.s^{-1}$ ». Il aurait alors fallu déduire la vitesse du fluide, le diamètre du tuyau, etc.

Application simple de la relation de Bernoulli avec pertes de charge : Lance à incendie

On considère une lance à incendie, dans laquelle l'eau circule avec un débit de $5\ \mathrm{L.s^{-1}}$, poussée au niveau du camion par une pression $P \simeq 10\ \mathrm{bar}$. Pour éteindre un incendie au 4ème étage d'un immeuble, la conduite s'élève d'une hauteur $2h \simeq 12\ \mathrm{m}$, et sa section passe brutalement d'un diamètre $2R = 10\ \mathrm{cm}$ à un diamètre $2r = 4\ \mathrm{cm}$ à mi-hauteur. La longueur horizontale est $2\ell = 10\ \mathrm{m}$. En plus de cela, la conduite subit 2 coudes à 90°.



1. En négligeant les pertes de charges, déterminer la pression dans la conduite au 4ème étage.
2. Même question, sans négliger les pertes de charge.
   Conclure sur leur effet dans ce cas précis.
3. Même question, mais maintenant la longueur horizontale est $2\ell = 500\ \mathrm{m}$ (et non plus $10\ \mathrm{m}$, comme indiqué dans l'énoncé).

Données (ici, on n'utilise pas le diagramme de Moody ; l'énoncé donne directement les formules de ΔP_{pdc}) :

- On prend en compte les pertes de charges singulières par la formule : $\Delta P_s = \frac{1}{2} K_s \rho_0 v^2$ ou K_s est un coefficient dépendant du type de résistance à l'écoulement : pour un coude à 90°, $K_s(\text{coude}) \simeq 1{,}5$. On néglige ici les pertes de charge dues au rétrécissement.
- On prend en compte les pertes de charges régulières par la formule : $\Delta P_r = \frac{1}{2} \rho_0 v^2\ K_r L/D$ ou K_r est un coefficient dépendant des paramètres du tuyau (ici, $K_r \simeq 10^{-2}$), L est la longueur de la conduite considérée, et D est son diamètre.

Exercice 16 – Pertes de charge dans une conduite domestique — Difficile 1 – Original 1

Dans une maison, de l'eau est portée à 60°C par le chauffe-eau, puis amenée aux robinets via des conduites métalliques d'un diamètre $d \simeq 10\ \mathrm{mm}$, à un débit maximal de $0{,}2\ \mathrm{L.s^{-1}}$. L'eau quitte le chauffe-eau sous une pression $P_c = 4\ \mathrm{bar}$. On considèrera que la taille des rugosités de la surface interne des tuyaux est de $2\ \mu\mathrm{m}$, et que la viscosité de l'eau est $1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa.s}$.

2. Déterminer la nature de l'écoulement.
3. Déterminer le coefficient de perte de charge à l'aide du diagramme de Moody.
4. Déterminer la pression de l'eau au niveau d'un robinet situé à $10\ \mathrm{m}$ du chauffe-eau (on supposera qu'il n'existe que des pertes régulières).
5. En réalité, la pression mesurée est deux fois plus faible que celle trouvée à la question précédente. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17 – Perte de charge dans un gazoduc — Difficile 2 – Original 2

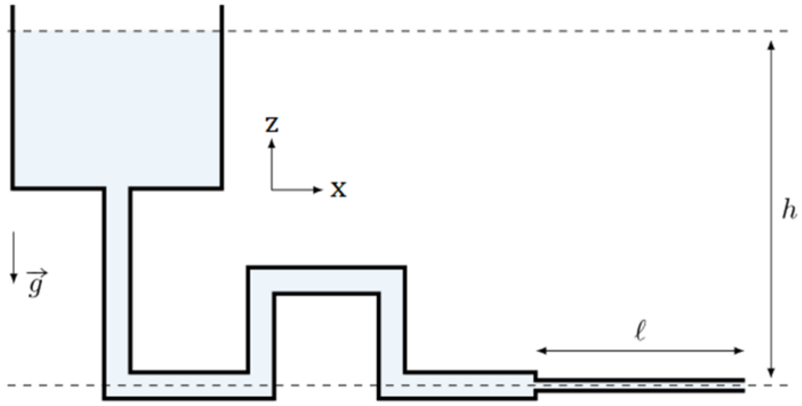
La section terrestre du gazoduc Nord Stream 1, située en Russie, transporte du méthane sur une distance de $917\ \mathrm{km}$. Le diamètre interne du tuyau est $1420\ \mathrm{mm}$, et transporte le gaz à la pression $P = 100\ \mathrm{bar}$, avec un débit d'environ 550 millions de $\mathrm{m^3}$ par an. Dans ces conditions, la viscosité du méthane est $\eta \simeq 20\ \mu\mathrm{Pa.s}$.

1. Déterminer la masse volumique du gaz dans ces conditions (on supposera que le gaz est approximativement parfait), ainsi que sa vitesse d'écoulement.
2. En supposant ces valeurs constantes, déterminer la distance au bout de laquelle la pression du gaz est divisé par deux (on utilisera le diagramme de Moody en considérant que la taille des aspérités du tuyau est de l'ordre de $30\ \mu\mathrm{m}$).
3. Estimer le nombre de stations de recompressions à installer si on souhaite maintenir le fluide au-dessus de $50\ \mathrm{bar}$.

Exercice 18 – Perte de charge dans un réseau d'eau — Difficile 3 – Original 1

Une citerne alimente un réseau d'eau selon la figure ci-contre présentant des coudes, et une réduction de section. On note h la hauteur entre la surface libre dans la citerne et la sortie du réseau (à la pression atmosphérique).

On note L la longueur totale de la conduite de grand diamètre D, parcourue par le fluide à la vitesse V, et l celle de petit diamètre d, parcourue à la vitesse v.



1. On suppose qu'un bouchon placé à l'extrémité du réseau empêche le fluide de s'écouler. Quelle est la pression supportée par ce bouchon ?
2. En négligeant toute perte de charge, quelle hauteur minimale doit-on donner au réseau d'eau pour obtenir un débit Q en sortie ? Faire l'application numérique.

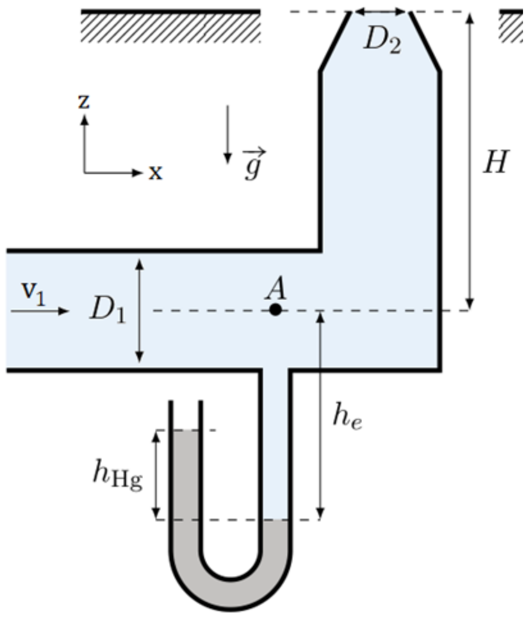
Une perte de charge régulière peut s'exprimer $\Delta P_r = K_r \frac{L_r}{D_r} \cdot \frac{1}{2} \mu_0 v^2$, où L_r est la longueur du tuyau et D_r son diamètre (et K_r est un coefficient qui dépend de la géométrie du tuyau). Une perte de charge singulière peut s'exprimer par $\Delta P_s = K_s \cdot \frac{1}{2} \mu_0 v^2$, où K_s est un coefficient qui dépend de la nature de l'obstacle.

3. Exprimer la perte de charge singulière totale ΔP_s en fonction des données de l'énoncé.
4. Exprimer la perte de charge régulière dans les diverses conduites ΔP_r en fonction des données de l'énoncé.
5. En déduire la hauteur de perte de charge totale ΔP_{tot}, puis l'expression et la valeur de la hauteur minimale h_{tot} pour que le fluide s'écoule avec un débit volumique Q.

Données : $L = 60$ m $l = 10$ m $D = 4{,}5$ cm $d = 2$ cm $\mu_0 = 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$ $Q = 1\ \text{L.s}^{-1}$
$K_s(\text{coude}, 90°) = 1{,}5$ $K_s(\text{rétrécissement}) = 0{,}25$ $K_r(\text{tuyau}) = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$

Exercice 19 – Jet d'eau dans l'air — Difficile 2 – Original 2

De l'eau de masse volumique invariable μ_0 circule dans un coude et sort sous forme de jet vers le haut à travers une buse, représentée sur la figure ci-contre. Un manomètre à mercure est placé en un point S de la tuyauterie horizontale, en amont du coude. On négligera les frottements dans le fluide, et on négligera l'effet de la pesanteur dans l'épaisseur du tube horizontal.



1. Exprimer la pression en A en fonction des masses volumiques et des différentes hauteurs indiquées.
2. En utilisant la conservation du débit volumique (D_1 et D_2 sont les diamètres des conduites) et la relation de Bernoulli, exprimer la vitesse d'entrée v_1 en fonction de grandeurs connues (voir ci-dessous). Faire ensuite l'application numérique.

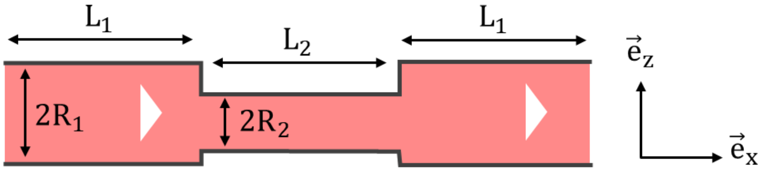
La présence d'un coude entraîne une perte de charge que l'on peut modéliser par une perte de pression $\Delta P = K_s \cdot \frac{1}{2} \mu_0 v^2$.

3. Comment qualifie-t-on cette perte de charge ? En déduire la valeur de la vitesse v_1 en tenant compte de cette perte de charge.
4. Le dispositif sert de système d'arrosage placé à ras du sol. À l'aide d'arguments de mécanique du point, déterminer la masse d'eau présente en l'air à tout instant.

$\mu_{Hg} = 13\,400\ \text{kg.m}^{-3}$ | $K_s = 0{,}25$ | $D_1 = 3$ cm | $D_2 = 1{,}5$ cm | $H = 20$ cm | $h_e = 20$ cm | $h_{Hg} = 15$ cm | $v_1 = 0{,}5\ \text{m.s}^{-1}$

Exercice 20 – Sténose artérielle **Difficile 2 – Original 3**

On étudie la circulation sanguine dans une artère moyenne saine modélisée par un cylindre de longueur $L_1 + L_2 + L_1 = 7$ cm, avec $L_1 = L_2$ et de rayon $R_1 = 0{,}7$ cm. Cette artère est parcourue par du sang, de masse volumique $\mu_s \simeq 10^3$ kg. m^{-3}, et de viscosité $\eta_s \simeq 6 \cdot 10^{-3}$ Pa. s, de vitesse débitante $v_0 = 10$ cm. s^{-1}.



On suppose dans un premier temps que le sang est un fluide parfait. Une portion de cette artère est le siège d'une sténose dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère à une valeur $R_2 = R_1/2$. Le tronçon artériel étudié est tel que représenté sur le schéma ci-dessus.

1. Par application de la relation de Bernoulli, en déduire la dépression qui règne entre A et B.

On prend maintenant en compte les effets de la viscosité sur l'écoulement. On donne l'expression du débit volumique valable pour un écoulement laminaire :

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$$

Par analogie avec la loi d'Ohm, en déduire l'expression de la résistance hydraulique R_H de cette artère.

2. Déterminer les expressions des résistances hydrauliques R_{H_2} d'une section saine de longueur L_1 et R_{H_2} de la portion sténosée. En déduire celle de l'artère complète $R_{H(\text{sténose})}$.
3. Comparer le débit artériel D_{sain} et $D_{\text{sténose}}$ (en raisonnant à ΔP fixé, imposé par le cœur). Conclure.
4. Un pontage artériel consiste à créer une dérivation en parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon R_3 de façon à retrouver le débit initial. En déduire le rayon R_3 nécessaire pour réaliser ce pontage.