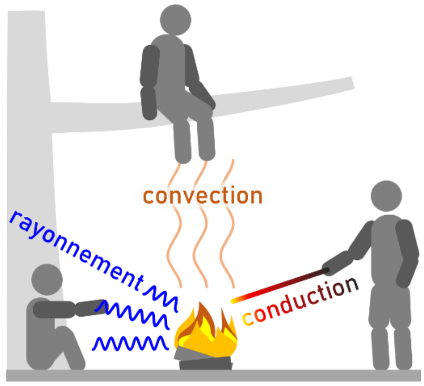
I - TRANSFERTS THERMIQUES

On distingue trois modes de transferts thermiques :

- **Conduction** : la chaleur est transmise de proche en proche, par communication de l'agitation thermique des particules qui composent la matière. Cela ne nécessite pas de déplacement macroscopique de la matière.
- **Convection** : la chaleur est transportée par un déplacement macroscopique de la matière des parties chaudes vers les parties plus froides (dans un fluide).
- **Rayonnement** : la chaleur est transportée par un rayonnement électromagnétique émis par le corps. Tout corps à température non-nulle émet un rayonnement, qui devient visible à quelques centaines de degrés Celsius.



Compte tenu de leurs spécificités, ces modes de transfert ne se manifestent pas tous également dans les mêmes situations :

Support	Solide	Liquide	Gaz	Vide
Modes de transfert	Conduction	Convection ≫ Convection	Convection ≫ Conduction et rayonnement	Rayonnement

I.1 - Vecteur densité de flux thermique, ou densité de courant thermique

Vecteur densité de flux thermique

Vecteur densité de flux $\overrightarrow{j_{th}}$ est le vecteur qui, intégré sur une surface, donne la puissance thermique algébrique la traversant :

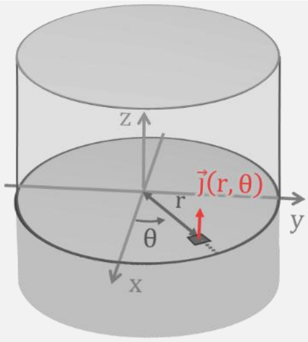
$$\mathcal{P}_{th} = \int_{M \in S} \overrightarrow{j_{th}}(M) \cdot \overrightarrow{dS}\,(M) \qquad \text{avec} \qquad [\mathcal{P}_{th}] = W \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{j_{th}}] = W.m^{-2}$$

$\overrightarrow{j_{th}}$ est donc une puissance surfacique, donc l'intégrale sur une surface donne bien une puissance. La chaleur traversant une surface pendant un temps dt s'écrit $\delta Q = \mathcal{P}_{th}\, dt$.

Un exemple pour comprendre - Flux thermique au travers d'une surface

On considère un barreau cylindrique de rayon R, d'axe z, dans lequel la densité de flux thermique en son sein a pour expression :

$$\overrightarrow{j_{th}}(r,\theta,z) = j_0\left(1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2\right)\vec{e}_z \qquad 0 < r < R$$



1. Représenter la norme du flux thermique en fonction de r.
2. Calculer le flux thermique $\mathcal{P}_{th}$ passant par une section de cylindre.

$$\mathcal{P}_{th} = \int_{M \in S} \overrightarrow{j_{th}}(M) \cdot \overrightarrow{dS}(M) = \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0\left(1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2\right)\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_z\, r\, dr d\theta) = 2\pi\, j_0 \int_0^R \left(1-\left(\frac{r}{2R}\right)^2\right) r\, dr = \boxed{2\pi\, j_0 \left(\frac{7R^2}{16}\right)}$$

I.2 - Loi de Fourier : lien entre densité de flux thermique et température

Loi de Fourier

Le vecteur densité de courant est lié au champ de température par la loi de Fourier $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T)$

Où λ est une caractéristique du matériau appelée conductivité thermique, exprimée en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Milieu matériel	Cuivre	Zinc	Acier	Béton	Verre	Bois	Gomme, caoutchouc, isolant
Conductivité λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	~ 400	~ 100	~ 50	~ 1 à 2	~ 1	$\sim 0{,}2$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$
O.d.g. (à retenir)	Métaux : conductivité élevée ($\sim 10^2$)			Pierre / céramique / bois : conductivité moyenne ($\sim 10^{-1}$ à 1)			Isolants thermiques, polystyrène : Conductivité faible ($\sim 10^{-2}$)

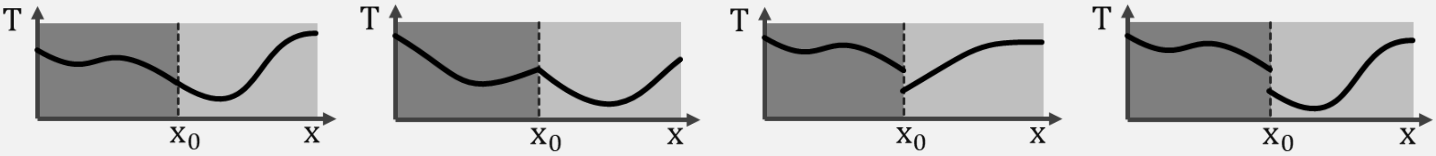
I.3 - Conditions aux limites : densité de flux à une interface et loi de Newton

Continuité du flux thermique aux interfaces

La température n'est pas nécessairement continue à une interface entre deux corps.
Le vecteur densité de flux est continu (sinon, il y aurait accumulation d'énergie à l'interface).
Lorsque la température est continue à une interface entre deux milieux, on dit que le **contact thermique est « parfait »**

Un exemple pour comprendre – Condition aux interfaces

On représente ci-dessous la température dans un milieu 1 en contact avec un milieu 2. Indiquer si la température et le flux thermique sont continus ou discontinus, et déterminer les cas physiquement possibles.



Température c^0, flux c^0 → Possible (contact parfait) | Température continue, flux discontinu → Impossible | Température discontinue, flux discontinu → Impossible | Température discontinue, flux continu → Possible

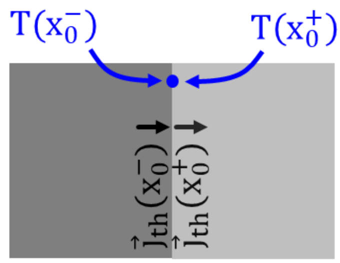
I.3.A - Interface solide-solide

Interface solide-fluide – Continuité du flux thermique

Si on exprime la continuité du vecteur densité de flux à l'interface entre le milieu 1 et 2, on obtient une condition sur les dérivées de la température des deux côtés de l'interface :

$$\vec{j}(x_0^-) = \vec{j}(x_0^+) \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T) = -\lambda_2 \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T)$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda_1 \frac{dT}{dx}(x_0^-) = -\lambda_2 \frac{dT}{dx}(x_0^+)$$



I.3.B - Interface solide-fluide

Interface solide-fluide - Loi de Newton

Le flux thermique à une interface solide-fluide est proportionnelle à l'écart de température à la surface d'échange :

$$\phi = \mathcal{P}_{s\to f} = h(T_s - T_f)\,S \qquad \text{ou} \quad \text{sur une surface infinitésimale :} \quad \overrightarrow{j_{th}} = h(T_s - T_f)\,\vec{n}(M)\,dS$$

où h est un coefficient phénoménologique appelé « coefficient conducto-convectif » qui s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

La valeur du coefficient h dépend fortement de la dynamique du fluide au contact de la surface. On pourra retenir que, dans le cas de la convection naturelle, dans laquelle le fluide se met en mouvement de manière spontanée :

- Pour un gaz, $h \sim 10\ W.m^{-2}.K^{-1}$ (mesuré entre 10 et 30 dans le TP n°1, pour un bécher qui refroidit) ;
- Pour un liquide, $h \sim 500\ W.m^{-2}.K^{-1}$

I.3.C - Interface calorifugée

À une interface calorifugée idéale (qui ne laisse passer aucun flux de chaleur), le vecteur densité de flux est tangent à la surface :

$$\overrightarrow{j_{th}} \cdot \vec{n} = 0$$

ce qui signifie que l'énergie thermique ne peut pas sortir du corps calorifugé.

II - DIFFUSION THERMIQUE ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

II.1 - Équation de la chaleur

Équation de la chaleur à une dimension en coordonnées cartésiennes

Dans un milieu **homogène**, **isotrope**, **indilatable**, caractérisé par une **masse volumique μ** et une **conductivité thermique λ,** le champ de température $T(x,t)$ exprimé en coordonnées cartésiennes vérifie **l'équation aux dérivées partielles** :

$$\text{équation de la chaleur à une dimension, en cartésien : } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Les équations qui lient une dérivée temporelle simple à une double dérivée spatiale sont appelées « équations de diffusion ». Ce sont des systèmes qui subissent des **transformations irréversibles**.

Équation de la chaleur, expression générale (hors-programme)

Dans un milieu **homogène**, **isotrope**, **indilatable**, caractérisé par une **masse volumique μ** et une **conductivité thermique λ,** le champ de température T vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{équation de la chaleur en système de coordonnées quelconque : } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c}\Delta T$$

L'opérateur Δ est le **Laplacien**, qui s'applique à un champ scalaire (ou vectoriel), et renvoie un champ scalaire (ou vectoriel) dont l'expression cartésienne est $\boldsymbol{\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}$ (mais différente dans les autres repères).

II.2 - Diffusivité thermique et temps caractéristique de diffusion

On voit que l'équation différentielle partielle fait intervenir un coefficient qui n'est pas seulement la conductivité thermique λ : la masse volumique et la capacité thermique massique interviennent également pour former le coefficient de diffusivité thermique.

Coefficient de diffusivité thermique

Le « **coefficient de diffusivité thermique** » régit la vitesse de diffusion de la température, et s'exprime :

$$D = \frac{\lambda}{\mu c} \quad \text{en } m^2.s^{-1} \quad \xrightarrow{\text{eq. chaleur}} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Il s'exprime en $m^2.s^{-1}$: $\quad \frac{K}{s} = [D]\cdot\frac{K}{m^2} \quad \Rightarrow \quad [D] = m^2.s^{-1}$

Analyse dimensionnelle sur une équation aux dérivées partielles

Par analyse dimensionnelle, établir une relation entre un temps caractéristique de diffusion thermique, une distance caractéristique du système, et l'ordre de grandeur du coefficient de diffusivité thermique.

Pour le raisonnement en odg, on peut dire que $\frac{df}{dx} \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$, et que $\frac{d^2 f}{dx^2} \sim \frac{\Delta f}{\Delta x^2}$.

On reprend l'équation différentielle : $\quad \frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\Theta}{T} \sim [D]\frac{\Theta}{L^2} \quad \text{i.e.} \quad T \sim L^2/D$

Ordres de grandeur concernant la conduction de chaleur

Pour parcourir une distance de l'ordre de L, un front de température met un temps d'ordre τ, appelé « temps caractéristique de diffusion » :

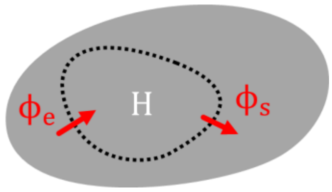
$$\tau \sim L^2/D \qquad \left(\text{ou } L = \sqrt{D\tau}\right)$$

Le temps de diffusion n'est pas proportionnel à la distance, mais au carré de la distance.

III - CONDUCTION TH. EN RÉGIME STATIONNAIRE ET ANALOGIE ÉLECTRIQUE

III.1 - Conservation du flux thermique en régime permanent

Conservation du flux thermique en régime stationnaire (démonstration manuscrite)



En régime stationnaire, en l'absence de production de chaleur dans le système, le flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant de n'importe quel volume de contrôle : il y a **conservation du flux thermique** (ou le flux thermique est **conservatif**) :

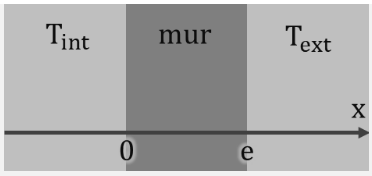
$$\phi_s = \phi_e$$

En présence de production de chaleur dans le système, le flux thermique vérifie :

$$\phi_e + \mathcal{P}_V = \phi_S$$

où $\mathcal{P}_V$ est la puissance produite dans le volume de contrôle V.

Un exemple pour comprendre - Profil de température stationnaire via conservation du flux thermique, en géométrie simple



On considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S schématisé ci-contre.

1. Déterminer la direction et les variables dont dépend $\vec{j}_{th}$.
2. Déterminer l'expression du flux thermique ϕ dans mur.
3. En déduire la température.

Invariance par translation selon y et z (on néglige les bords).
Donc T ne dépend que de x, et selon la loi de Fourier, on a $\vec{j} = j(x)\,\vec{e}_x$.

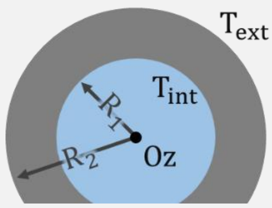
Flux par la loi de Fourier :

$$\phi = j(x)S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \text{i.e.} \quad \phi\, dx = -\lambda S\, dT \quad \text{i.e.} \quad \phi \cdot e = -\lambda S(T_{ext} - T_{int}) \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\phi = \frac{\lambda S}{e}(T_{int} - T_{ext})}$$

Par la loi de Fourier, on trouve la température :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\phi}{\lambda S} = -\frac{1}{e}(T_{int} - T_{ext}) \quad \text{i.e.} \quad T(x) = -\frac{x}{e}(T_{int} - T_{ext}) + cte \quad \overset{CL}{\Longrightarrow} \quad \boxed{T(x) = \frac{x}{e}(T_{ext} - T_{int}) + T_{int}}$$

Un exemple pour comprendre - Profil de température stationnaire via conservation du flux thermique, en géométrie cylindrique



On considère un tuyau de longueur L, de diamètre intérieur R_1, parcouru par un fluide à température T_{int}, et de diamètre extérieur R_2, entouré d'un milieu à température T_{ext}.

1. Déterminer la direction et les variables dont dépend $\vec{j}_{th}$.
2. Déterminer l'expression du flux thermique ϕ dans la paroi du tuyau.
3. En déduire la température.

On donne l'expression du gradient en cylindrique : $\overrightarrow{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z$

Invariance par rotation selon θ et par translation selon z.
Donc T ne dépend que de r, et selon la loi de Fourier, on a $\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r$.

Flux par la loi de Fourier :

$$\phi = j(r) \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot (2\pi r L) \quad \text{i.e.} \quad \phi \frac{dr}{r} = -2\pi L \lambda\, dT \quad \text{i.e.} \quad \phi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -2\pi L \lambda\, (T_{ext} - T_{int}) \quad \text{i.e.}$$

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi L \lambda}{\ln(R_2/R_1)}(T_{int} - T_{ext})}$$

III.1 - Analogie entre conduction électrique et conduction thermique

Notion de résistance thermique

En régime stationnaire (ou quasi-stationnaire), le flux thermique ϕ au travers d'un système et l'écart de température ΔT aux extrémités sont liés par :

$$\Delta T = R_{th} \cdot \phi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{1}{R_{th}} \Delta T = G_{th} \cdot \Delta T$$

La résistance thermique R_{th} s'exprime en $K.W^{-1}$, et la conductance thermique en $K^{-1}.W^{-1}$.

III.2 - Calcul de résistances thermiques

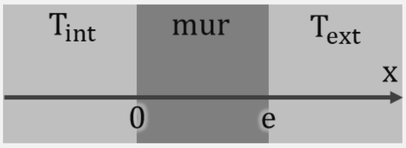
III.2.A - Cas usuel – résistance thermique d'une paroi quelconque

On peut calculer la résistance thermique d'un milieu dont les températures sont imposées aux deux extrémités en :

- Exprimant le flux thermique ϕ (qui est conservé) et en le reliant à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
- Intégrant la relation obtenue entre les deux extrémités du milieu (souvent par séparation des variables).

Un exemple pour comprendre - Calcul direct de la résistance thermique d'un mur

Calculer la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S, sachant que le mur est de conductivité thermique λ.



$$\phi = j_{th}(x)\, S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \text{i.e.} \quad dT = -\frac{\phi}{\lambda S} dx$$

On intègre :

$$\int_{T_{int}}^{T_{ext}} dT = \int_0^e -\frac{\phi}{\lambda S} dx \quad \Rightarrow \quad T_{ext} - T_{int} = -\frac{e}{\lambda S}\phi \quad \text{i.e.} \quad T_{int} - T_{ext} = -\frac{e}{\lambda S}\phi \quad \text{donc} \quad \boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}}$$

On vérifie qu'il n'y a pas de problème de signe : $T_{ext} < T_{int} \;\Rightarrow\; \phi > 0$, ce qui est cohérent avec la perte de chaleur.

Résistance thermique d'une paroi plane

La résistance thermique d'une paroi plane, d'épaisseur e, de surface S, et de conductivité thermique λ s'écrit : $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S}$

III.3 - Associations de résistances thermiques

III.3.A - Installation de résistances thermiques en série (les unes après les autres)

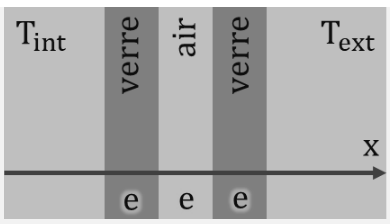
Résistances thermiques en série

Des résistances thermiques sont montées « en série » lorsqu'elles sont traversées par le même flux thermique ϕ, mais soumises à des conditions aux limites de température différentes (cela survient quand on superpose les matériaux, par exemple pour isoler un mur).

Dans ce cas, la résistance thermique équivalente est $\mathbf{R_{eq} = R_1 + R_2}$

Application classique - Étude d'un double vitrage en régime stationnaire

Les doubles vitrages usuels sont composés de deux plaques de verre, séparées par une faible épaisseur d'air. On suppose que les trois couches sont de même surface S, et d'épaisseur e. On a $\lambda_v \simeq 1\ W.m^{-1}K^{-1}$ et $\lambda_{air} \simeq 0{,}03\ W.m^{-1}K^{-1}$.



1. Justifier qu'il s'agit d'une association en série de résistances thermiques.
2. Exprimer la résistance thermique du double vitrage, et la résistance thermique d'un simple vitrage d'épaisseur $3e$. Exprimer alors le rapport des deux résistances.

3. Comment pourrait-on améliorer les performances d'isolation du double vitrage ? Quels problèmes se posent alors ?

1. Les températures T_{int} et T_{ext} ne changent pas, ce sont des conditions au limites fixées. Si on met plusieurs couches entre ces deux températures, le flux qui traverse une couche doit aussi traverser les deux autres (il identique dans chaque couche).
2. Calcul des résistances thermiques :

$$R_{th}(s.v.) = \frac{3e}{\lambda_v S} \quad \text{et} \quad R_{th}(d.v) = \frac{e}{\lambda_v S} + \frac{e}{\lambda_{air} S} + \frac{e}{\lambda_v S} = \frac{e}{S}\left(\frac{2}{\lambda_v} + \frac{1}{\lambda_{air}}\right)$$

On a donc :

$$\frac{R_{th}(d.v)}{R_{th}(s.v.)} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_v}{3\lambda_{air}} \simeq \frac{2}{3} + \frac{1}{0{,}09} \simeq 10$$

Flux thermique 10 fois moins important (et on utilise moins de matière). On pourrait augmenter l'épaisseur d'air, mais la convection à l'intérieur de la fenêtre pourrait alors jouer un rôle dans le transfert thermique.

III.3.B - Installation de résistances thermiques en parallèle (les unes à côté des autres)

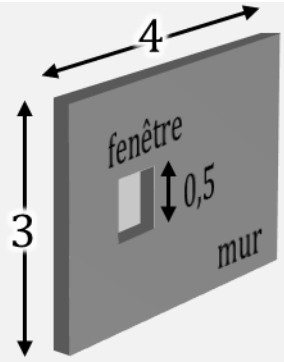
Résistances thermiques en parallèle

Des résistances thermiques sont montées « en parallèle » lorsqu'elles sont soumises à des conditions aux limites de température différentes, mais traversées par le même flux thermique ϕ (cela survient installe côte à côte des résistances thermique, par exemple lorsqu'on fait plusieurs fenêtres sur un même mur).

Dans ce cas, la résistance thermique équivalente est : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad G_{eq} = G_1 + G_2$

Application classique - Étude d'une fenêtre sur un mur

On considère un mur en bois de dimensions 4×3 m dont la résistance thermique est $R_{mur} = 0{,}08\ K.W^{-1}$. Sur ce mur, on perce un trou de 50×50 cm pour poser une fenêtre en simple vitrage, de résistance thermique $R_{fen} = 0{,}9\ K.W^{-1}$.



1. Expliquer pourquoi la résistance thermique du mur est plus faible que la fenêtre, alors que le bois est un meilleur isolant que le verre (et qu'il est plus épais).
2. Justifier que ces deux résistances sont en parallèle, et exprimer la résistance thermique totale. Déterminer ensuite quelle proportion des pertes thermiques est due à la fenêtre.

1. Sur une paroi plane, $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$, donc la résistance thermique ne caractérise pas seulement le matériau, mais aussi son épaisseur et son étendue ! Comme le mur est bien plus grand que la fenêtre, sa résistance thermique est faible.
2. La fenêtre a une surface $S_f = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25\ m^2$. Le mur (sans fenêtre) a une surface $S_m = 4 \cdot 3 - S_f = 11{,}75\ m^2 \simeq 12\ m^2$. Ces deux résistances sont soumises aux mêmes conditions aux limites de température, mais ne sont pas forcément traversées par le même flux thermique. Elles sont en parallèle, donc :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_{mur}} + \frac{1}{R_{fen}} \quad \text{i.e.} \quad R_{tot} = 0{,}073\ K.W^{-1}$$

3. On voit que $R_{tot} < R_{mur}$, donc la fenêtre rend le mur moins isolant. Pour des conditions aux limites fixées, le flux thermique sans fenêtre est $\phi_{mur} = \Delta T / R_{mur}$ et avec la fenêtre il sera $\phi_{tot} = \Delta T / R_{tot}$. Le flux thermique sera donc plus important avec la fenêtre, d'un facteur $\frac{\phi_{tot}}{\phi_{mur}} = \frac{R_{mur}}{R_{tot}} = 9$ % (alors que la fenêtre est bien plus petite que le mur !).