Objectifs	Appliquer des techniques de mesure des incertitudes sur une expérience simple : le pendule.		
Thèmes	Systèmes mécaniques oscillants – Propagation des incertitudes		
Matériel sur les paillasses élèves	Potence Fil	Règles Masses	Rapporteur
Sécurité			

I - PARTIE THÉORIQUE : APPROXIMATION HARMONIQUE

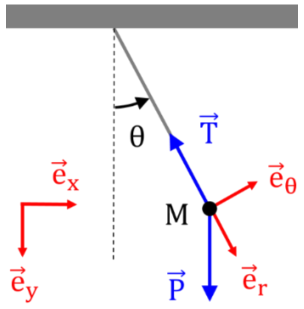
Dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ représenté ci-contre, on rappelle que l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Où l est la longueur du fil et g l'accélération de la pesanteur. Comme $[l] = m$ et $[g] = m.s^{-1}$, on a $[g/l] = s^{-1}$. On définit donc la pulsation propre du pendule :

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \qquad (\text{et } T = 2\pi/\omega_0)$$

Dans toutes les expériences, on lâchera la masse avec un angle θ_0, sans vitesse ($\dot{\theta}_0 = 0$). L'équation différentielle écrite ci-dessus n'est pas résoluble analytiquement. En revanche, on peut la simplifier lorsqu'on se place dans des conditions expérimentales particulières.



1. Effectuer un développement limité du sinus à l'ordre 3 dans l'équation différentielle.
2. Pour négliger le terme d'ordre 3, on souhaite qu'il soit au moins 100 fois plus petit que le terme d'ordre 1. Déterminer l'angle maximal qui permet de satisfaire cette condition, et simplifier l'équation différentielle dans ce cas.

Si on souhaite rester dans les conditions de validité de cette approximation, on veillera à ne pas trop dépasser cet angle limite lorsqu'on manipule le pendule.

3. Écrire la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle simplifiée, et exprimer la période T des oscillations en fonction de g et l.

II - DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE $\vec{g}$

4. Mesurer soigneusement la longueur l du fil, et peser la masse m. Dans le tableau suivant, on notera les mesures avec les incertitudes associées sous forme : $x = (x_{mesuré} + \Delta x)$ unité.

Longueur du fil l (en m)	**Masse m (en kg)**

5. Déterminer aussi précisément que possible la période d'oscillation T du pendule simple. On notera les valeurs avec les incertitudes associées, en ayant pensé à propager les incertitudes des mesures.
6. Utiliser la valeur de T pour en déduire une valeur de l'accélération de la pesanteur g. On utilisera les formules de propagation des incertitudes pour obtenir un résultat sous forme $g = (g_{calculé} + \Delta g)\ m.s^{-1}$.

La valeur de g mesurée très précisément à Paris est environ 9,809 (la valeur varie entre 9.77 et 9.83 $m.s^{-1}$ selon l'endroit où est réalisée la mesure. La valeur de g est plus élevée aux pôles qu'à l'équateur, à cause de la forme ellipsoïdale de la terre.)

7. Quelle est la mesure dont l'incertitude a le plus d'effet sur votre résultat (période, ou longueur du fil) ? Comment pourriez-vous réduire cette incertitude ?

III - SORTIE DE L'APPROXIMATION HARMONIQUE

En réalité, la formule obtenue pour la période d'oscillation est approximative (suite du développement limité du sinus au premier ordre). La période d'oscillation dépend en réalité de l'angle maximal θ_0. Cette formule prend la forme :

$$T(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + a\,\theta_0 + b\,\theta_0^2 + c\,\theta_0^3 + \cdots\right)$$

8. Justifier que $a = c = 0$ en utilisant un argument de symétrie.

9. Mesurer la période d'oscillation T pour plusieurs valeurs de $\theta_0 \in [0°, 80°]$, puis déterminer la **valeur du coefficient b** (<u>indice</u> : une fois les mesures réalisées, on pourra tracer les grandeurs pertinentes sur un logiciel de traitement de données).

$\boldsymbol{\theta_0}$									
$\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta_0})$									

IV - PRISE EN COMPTE DES FROTTEMENTS

Un pendule non-amorti (sans frottements) doit osciller indéfiniment. L'arrêt du pendule, au bout de quelques dizaines de secondes d'oscillations, est le signe qu'il existe une force de frottement qui dissipe l'énergie mécanique donnée au pendule en début d'expérience. Si on prend en compte cette force de frottement, de forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\, l\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, l'équation sur $\theta(t)$ est devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Avec les conditions initiales données en début d'énoncé, la solution de l'équation est :

$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\Omega t) \quad \text{avec} \begin{cases} \tau = \dfrac{2m}{\lambda} \\ \Omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{\lambda^2}{4m^2}} \end{cases}$$

10. Expliquer comment évaluer **l'ordre de grandeur** de la valeur de λ en réalisant une mesure sur le pendule. Faire cette mesure. Quelle est l'origine physique de ce terme de frottements ?

Au début de l'expérience, on fait augmenter l'énergie potentielle de pesanteur à la masse (en l'éloignant de la terre, pour la placer à une angle θ_0). Les questions suivantes sont qualitatives et ne demandent aucun calcul, seulement une réflexion physique :

11. Qu'est devenue cette énergie une fois le pendule immobilisé ?

12. Comment choisir la masse pour que le pendule oscille le plus longtemps possible ? Et la longueur du fil ?

Attendu pour la présentation

- Rappels théoriques sur le pendule simple ;
- Protocole expérimental permettant la g, avec les incertitudes associées ;
- Discussion sur les sources d'incertitudes, et la manière de les réduire ;
- Graphique montrant $T(\theta_0)$, et déduction de la valeur du coefficient b, avec les incertitudes associées.
- Réponse à la question 10.