

## I - TABLE DES MATIERES

II - RAPPEL IMPORTANT DE PTSI : INDUCTION ET LOI DE FARADAY .....	- 1 -
II.1 - Induction et loi de Faraday - Rappels et compléments.....	- 1 -
II.2 - Induction et loi de Faraday - Exercices .....	- 1 -
III - COURANTS, CONDUCTIVITÉ, POTENTIEL.....	- 3 -
IV - APPLICATIONS DU THÉORÈME D'AMPÈRE .....	- 4 -
V - ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE RÉUNIES .....	- 5 -

## Programme d'interrogation orale

- Connaître la relation entre l'intensité dans un fil et la densité de courant électrique ;
- Connaître la relation entre la densité de courant et la vitesse des porteurs de charge ;
- Connaître et savoir démontrer de deux manières l'équation de conservation de la charge ;
- Connaître la loi d'Ohm locale et des ordres de grandeur de conductivité ;
- Savoir démontrer les 3 propriétés du flux magnétique ;
- Connaître l'effet des plans de symétrie de d'antisymétrie des courants sur le champ magnétique, ainsi que l'effet des invariances de la distribution de courant.
- Savoir appliquer le théorème d'Ampère **très rigoureusement** sur les exemples du cours ; Savoir le démontrer ;
- Savoir quand il est possible d'utiliser les résultats de magnétostatique dans le cas des régimes lentement variables (notion d'ARQS magnétique) ;
- Connaître la densité d'énergie magnétique ; et savoir l'intégrer sur un volume pour obtenir l'énergie totale ;
- Connaître la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique soumis à un champ électrique.

## II - RAPPEL IMPORTANT DE PTSI : INDUCTION ET LOI DE FARADAY

## II.1 - Induction et loi de Faraday - Rappels et compléments

Dans cette partie, on rappelle la loi de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday qui en découle. La démonstration de la loi de Faraday est l'objet du premier exercice.

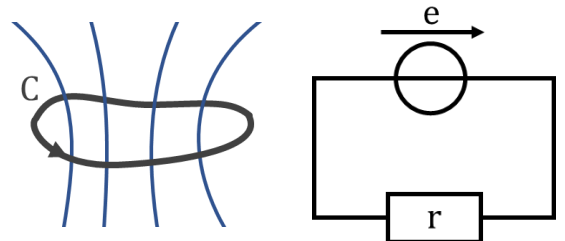
## Rappel de cours - Équation de Maxwell-Faraday

En tout point M de l'espace, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

## Rappel de PTSI - Induction et loi de Faraday (pour un circuit fixe)

Les variations de flux magnétique au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un générateur induit dans le circuit, dont la f.é.m. en convention générateur s'écrit :

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt}$$



**Remarque :** Le générateur et la résistance placés dans l'équivalent électrocinétique sont à prendre comme des modélisations suffisantes pour décrire l'apparition du courant dans la boucle. Le générateur n'est pas situé à un endroit particulier du circuit, mais est « réparti en chaque point du conducteur ». La résistance, elle, représente la résistance du conducteur qui compose l'entièreté de la boucle. Cette modélisation permet de prédire correctement l'intensité traversant la boucle de courant.

## II.2 - Induction et loi de Faraday - Exercices

## Exercice 1 – Démonstration de la loi de Faraday

Difficile 1 – Original 1

On considère un contour fermé orienté plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  variable. La surface délimitée par le contour est S.

1. En utilisant la loi de Maxwell-Faraday, démontrer que la circulation de  $\vec{E}$  sur le circuit fermé est proportionnelle à la dérivée temporelle du flux de  $\vec{B}$  au travers de  $S$ .

(on admettra ensuite que la circulation de  $\vec{E}$  non-nulle sur le contour produit le même effet qu'un générateur de tension, d'où la loi d'induction de Faraday)

### Exercice 2 – Application simple de la loi de Faraday

Difficile 1 – Original 1

On connecte un générateur de courant à une bobine dont la densité de spire est  $n \approx 1000 \text{ m}^{-1}$ , et on impose un courant de fréquence  $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$  de forme  $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ , avec  $i_0 \approx 1 \text{ A}$ . Dans cette bobine, on place une unique spire de courant, de conductivité  $\gamma_{\text{Cu}} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ , de rayon  $r_s \approx 5 \text{ cm}$ , composée d'un fil cylindrique de rayon  $r_f \approx 1 \text{ mm}$ .

1. Déterminer l'expression du champ magnétique dans la bobine (on négligera les effets de bord).
2. Déterminer le courant induit circulant dans la spire.

### Exercice 3 – Conditions d'ARQS

Difficile 1 – Original 1

1. On considère une antenne radio parcourue par un courant alternatif à la fréquence  $f \approx 107 \text{ MHz}$  (station « autoroute info »). Une voiture est à une distance  $L \approx 300 \text{ m}$  pour détecter le champ électromagnétique qui sera démodulé et converti en onde sonore. Est-il possible de se placer dans l'ARQS ?
2. On considère un aimant placé sur un pot vibrant à  $f \approx 100 \text{ Hz}$ , et on place un capteur de champ magnétique à une distance de  $3 \text{ m}$ . Est-il possible de se placer dans l'ARQS ?

### Exercice 4 – Inductance propre d'une bobine par le flux magnétique

Difficile 1 – Original 1

L'inductance d'une bobine (ou d'un conducteur enroulé), notée  $L$ , est définie par  $L = \Phi_B / i$ , où  $\vec{B}$  est le champ généré par la bobine elle-même, et  $S$  la surface **totale** des spires traversées par  $\vec{B}$ . On considère ici une bobine de longueur  $l$ , dont la densité linéique de spires est  $n$ .

1. Calculer le flux de  $\vec{B}$  dans le solénoïde (supposé suffisamment grand pour que les effets de bord soient négligeables).
2. En déduire l'expression de l'inductance propre de la bobine.
3. Si on dispose d'une certaine masse de cuivre, comment réaliser la bobine de plus haute inductance ? Quelle contrainte rencontre-t-on ?

### Exercice 5 – Inductance propre d'une bobine par l'énergie magnétique

Difficile 2 – Original 1

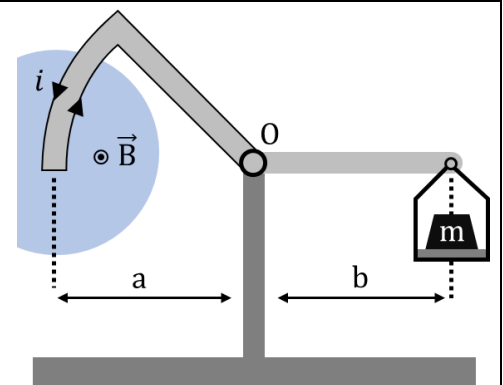
Considérons une bobine d'axe  $\vec{e}_z$ , de longueur  $L$  très supérieure à son rayon  $R$ , contenant  $N$  spires et de surface  $S$ .

1. On modélise la bobine par un solénoïde infini. Que néglige-t-on ? Quel est l'expression du champ dans la bobine ?
2. La bobine est parcourue par un courant  $i$ . Déterminer l'inductance  $L$  de la bobine par un raisonnement énergétique.

### Exercice 6 – Mesure de champ magnétique par Balance de Cotton

Difficile 2 – Original 2

La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du 20<sup>ème</sup> siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en  $O$ . La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre  $O$ , reliés par une portion horizontale de longueur  $L$ . La partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse  $m$  afin d'équilibrer la balance.



La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O. À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse  $m$ , la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1. Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
2. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.
3. En déduire la relation entre la masse  $m$  à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique  $B$ , à exprimer en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $l$ ,  $i$  et de l'intensité de la pesanteur  $g$ .
4. La sensibilité de la balance étant de  $\delta m = 0,05 \text{ g}$ , en déduire la plus petite valeur de  $B$  mesurable pour  $a = b = 25 \text{ cm}$ ,  $L = 5 \text{ cm}$  et  $i = 5 \text{ A}$ . En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

### III - COURANTS, CONDUCTIVITÉ, POTENTIEL

#### Exercice 7 – Courant et circulation d'électrons dans un fil de cuivre

Difficile 1 – Original 1

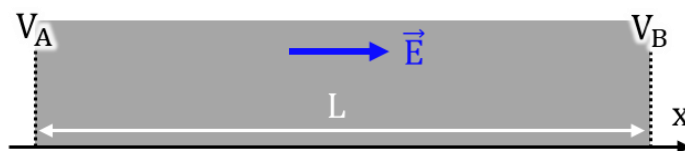
On considère un fil de cuivre de section  $s = 2,5 \text{ mm}^2$  qui support un courant continu  $I = 1 \text{ A}$ . On donne  $\mu_{\text{Cu}} = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $M_{\text{Cu}} = 69,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Exprimer le courant traversant le fil par unité de surface (en ampère par mètre carré).
2. On estime que chaque atome d'un cristal de cuivre libère 1,3 électron libre. En utilisant les données ci-dessous, établir et calculer la densité volumique de charges libres  $\rho_m$ .
3. En déduire la vitesse moyenne des porteurs de charge.

#### Exercice 8 – Résistance d'un fil conducteur

Difficile 1 – Original 1

On modélise un fil conducteur par un cylindre d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$ , de section  $S$  et de conductivité  $\gamma$ . En régime permanent, un champ  $\vec{E} = \frac{V_A - V_B}{L} \vec{e}_x$  règne dans le fil où  $V_A$  (resp.  $V_B$ ) est le potentiel qui règne en A (resp. B).

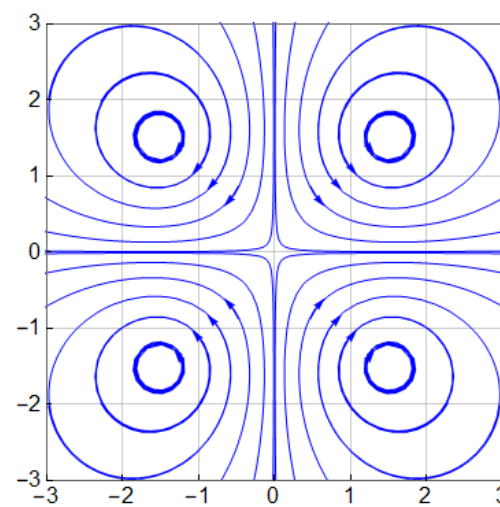
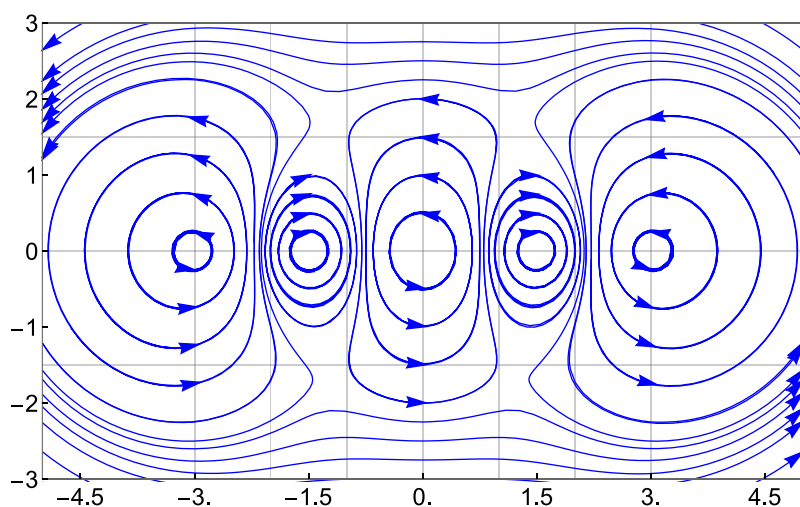


1. Exprimer le vecteur densité volumique de courant présent dans ce fil.
2. En déduire une expression du courant  $I$  en fonction de  $\gamma$ ,  $S$ ,  $L$  et  $U = V_A - V_B$  la différence de potentiel aux bornes du fil.
3. En déduire une expression de la résistance  $R$  du fil en fonction de  $S$ ,  $L$  et  $\gamma$ .

#### Exercice 9 – Distribution de courant

Difficile 1 – Original 1

On donne les lignes de champ magnétostatique générées par une distribution de courants filiforme perpendiculaires aux plans représentés dans les figures ci-dessous. On prend la convention de compter positivement les courants orientés vers le lecteur.



Pour chaque distribution :

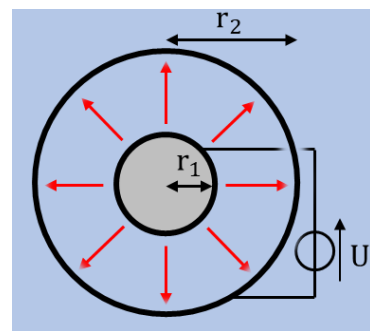
- a. Donner le signe de chacun des courants.
- b. Existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de courants ?
- c. Existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de courants ?

**Exercice 10 – Chute ohmique dans un électrolyseur****Difficile 2 – Original 2**

L'électrolyse est un processus fondamental en chimie. Parmi ses multiples applications, citons la métallurgie (production de métaux à partir de minerais) ou la production de dihydrogène « vert » à partir d'énergies renouvelables.

Cette technique étant très consommatrice en énergie, l'optimisation du rendement est essentielle. On modélise dans cet exercice l'un des phénomènes affectant le rendement énergétique d'électrolyse, la chute ohmique, dans un électrolyseur cylindrique.

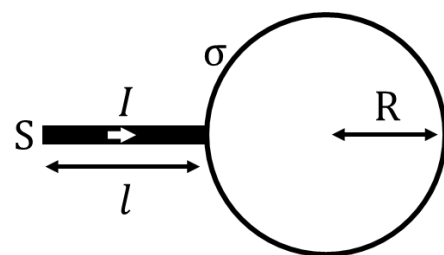
L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons  $r_1 < r_2$  plongeant sur une hauteur  $h$  dans une solution électrolytique de conductivité  $\sigma$  supposée uniforme et constante. Une tension  $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$  est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme :  $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$



1. En procédant à un bilan de charge sur une couche cylindrique comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  ( $r_1 < r < r + dr < r_2$ ), montrer que l'intensité  $I$  qui traverse un cylindre de rayon  $r$  ne dépend pas de  $r$ .
2. En déduire l'expression de  $j(r)$  en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $h$ , puis celle du champ électrique  $\vec{E}$  au sein de la solution électrolytique.
3. Établir l'expression de la résistance  $R$  de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.
4. Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant  $I$  d'électrolyse.

**Exercice 11 – Charge d'une sphère par un courant électrique****Difficile 3 – Original 2**

Une sphère de rayon  $a$  est mise sous tension afin d'être chargée. Elle est supposée parfaitement conductrice : les charges ne peuvent subsister qu'à sa surface, avec une densité surfacique  $\sigma(t)$  supposée uniforme à tout instant. Elles sont apportées par un fil de conductivité  $\gamma$ , de longueur  $l$  et section  $S$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , dont une extrémité est reliée à la sphère et l'autre à un générateur non représenté sur le schéma. Le processus est supposé suffisamment lent pour que les résultats de l'électrostatique demeurent valables bien que  $\sigma$  dépende du temps.



1. Dans un premier temps, on suppose que la charge se fait à courant  $I$  constant. Déterminer l'évolution de la densité surfacique de charge  $\sigma(t)$  en fonction du temps.
- Dans un second temps, on suppose que c'est le potentiel  $V_0$  imposé par le générateur qui reste constant, et non plus le courant  $I$ .
2. En négligeant l'influence du fil, déterminer le champ créé par la sphère en tout point de l'espace. En déduire le potentiel  $V_s$  auquel se trouve la surface de la sphère en prenant comme référence  $V = 0$  à l'infini.
  3. En reprenant la démarche de la première question, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\sigma(t)$  et la résoudre.
  4. Déterminer un ordre de grandeur du temps caractéristique de charge de la sphère, ainsi qu'une valeur de la charge maximale atteinte pour une sphère de rayon 10 cm, en cuivre ( $\gamma_{Cu} \sim 6 \cdot 10^7$ ), chargée par un fil de section 1 mm<sup>2</sup> et de longueur 1 m. On prendra une tension imposée par le générateur égale à 100 V.

**IV – APPLICATIONS DU THÉORÈME D'AMPÈRE****Exercice 12 – Fil parcouru par une densité de courant non-uniforme****Difficile 2 – Original 1**

On considère un câble cylindrique de rayon  $R$  et d'axe  $z$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  réparti de façon non-uniforme au sein du câble :

$$\vec{j} = j_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z$$

1. Exprimer  $j_0$  en fonction de  $I$ .
2. Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
3. Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

**Exercice 13 – Plaque parcourue par un courant**

**Difficile 2 – Original 2**

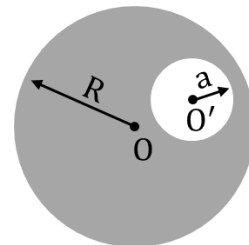
Entre les deux plans  $z = -a$  et  $z = +a$  circule un courant de densité volumique uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_x$ . Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement. On pourra montrer par des arguments de symétrie que le champ magnétique est nul dans le plan  $z = 0$ .

**Exercice 14 – Fil électrique troué dans sa longueur**

**Difficile 2 – Original 2**

On considère un cylindre infini d'axe  $Oz$  de rayon  $R$  parcouru par un vecteur densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ . Ce cylindre est percé d'un autre cylindre d'axe  $O'z$  et de rayon  $a < R$ .

1. Calculer le champ magnétostatique généré par un cylindre infini, d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un vecteur densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ .
2. Par application du théorème de superposition, déterminer le champ magnétostatique dans la cavité et montrer qu'il s'exprime sous la forme  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}$ .



## V - ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE RÉUNIES

**Exercice 15 – Manipulation des équations de Maxwell dans un cas particulier**

**Difficile 2 – Original 2**

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique suivant :  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \\ \vec{B}(M, t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \end{cases}$  où  $\tau$  est une constante de temps et  $f, g$  deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1. Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre  $g(z)$  et  $f'(z)$ .
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre  $f(z)$  et  $g'(z)$ .
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par  $f$ . La résoudre en supposant que  $\vec{E}(z = 0, t = 0) = E_0 \vec{e}_x$  et que le champ électrique est nul en  $z \rightarrow \infty$ , à tout instant.
5. En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

**Exercice 16 – Chauffage d'un métal par induction magnétique**

**Difficile 2 – Original 2**

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique  $\gamma$ . Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.



1. Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.
2. Justifier qu'un champ  $\vec{E}$  apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.
3. On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme  $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$ . Exprimer  $\vec{E}$  en fonction notamment de  $r$  et  $I_0$ .
4. En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

**Exercice 17 – Charge, courant, et champs créés par un échantillon radioactif**

**Difficile 2 – Original 3**

Un amas d'atomes radioactifs, supposé ponctuel, émet à partir de l'instant  $t = 0$  des particules  $\alpha$  avec une vitesse constante  $v_0$ . On suppose la distribution de la direction d'émission isotrope. On rappelle que les particules  $\alpha$  sont des noyaux d'hélium  ${}^4_2\text{He}$ , et on admet qu'à l'instant  $t$  la charge électrique de l'amas vaut :

$$q(t) = Q_0(e^{-t/\tau} - 1) \quad (Q_0 > 0)$$



1. Vérifier qualitativement la cohérence de la loi  $\mathbf{q}(t)$ .
2. Montrer que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.
3. Calculer le champ électrique  $\vec{E}(\mathbf{M}, t)$  en tout point  $\mathbf{M}$  de l'espace. On pourra l'exprimer en fonction de  $t - r/v_0$ .
4. Déterminer les densités volumiques de charge  $\rho(\mathbf{M}, t)$  puis de courant  $\vec{j}(\mathbf{M}, t)$ .

En coordonnées sphériques, pour un champ  $\vec{A} = A_r(r, t) \vec{u}_r$ , on a :  $\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}$  et  $\text{rot}(\vec{A}) = \vec{0}$ .

### Exercice 18 – Diode à vide

Difficile 3 – Original 2

Une diode à vide est modélisée par un fil cylindrique (anode A) de rayon  $R_A$  placé sur l'axe d'un cylindre creux (cathode C) de rayon  $R_C > R_A$  de même hauteur  $H$ . Les deux électrodes sont conductrices et sont placées dans une ampoule dans laquelle un vide poussé a été réalisé. Une tension  $U_0 = V_C - V_A$  est imposée entre l'anode et la cathode. L'anode est supposée reliée à la masse :  $V_A = 0$ . On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnée cylindriques :  $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right)$ .

1. On admet que le problème est « à symétrie cylindrique ». Définir ce terme.
2. Calculer le potentiel  $V(r)$  régnant entre les deux électrodes en fonction de  $r$ ,  $U_0$ ,  $R_A$  et  $R_C$ .

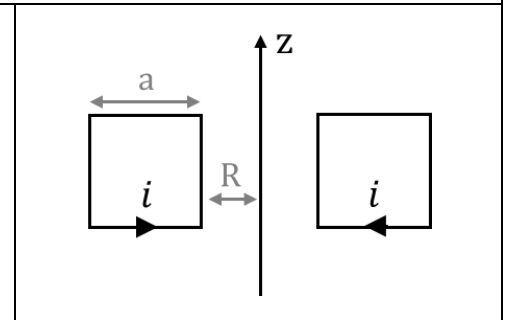
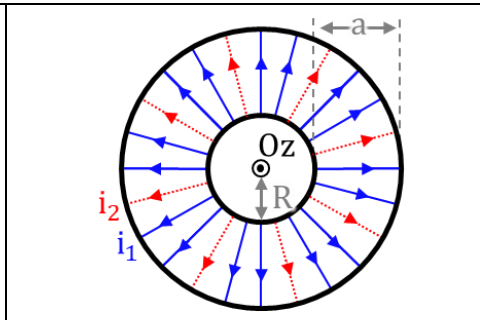
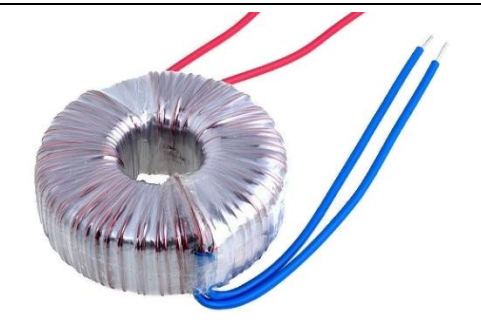
L'anode est portée à très haute température (plus de 1000 °C) et des électrons en sont arrachés sous l'effet de l'agitation thermique. On supposera négligeable la vitesse d'un électron venant juste d'être arraché de l'anode. Sous l'effet du potentiel  $V(r)$ , ces électrons peuvent être amenés à rejoindre la cathode. On les suppose suffisamment peu nombreux pour qu'ils ne perturbent pas le potentiel  $V(r)$  déterminé précédemment.

3. Quel doit être le signe de  $U_0$  pour que la diode soit passante (un courant est transmis de l'anode à la cathode) ? Et pour qu'elle soit bloquée ?
4. Justifier que la vitesse d'un électron dans l'espace inter-électrodes s'écrit  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_r$ . Déterminer  $v(r)$ .
5. Notons  $I$  le courant total circulant entre les deux électrodes. Déterminer la densité volumique d'électrons  $n(r)$  dans l'espace inter-électrodes.

### Exercice 19 – Transformateur torique à profil carré

Difficile 3 – Original 2

On s'intéresse dans cet exercice au transformateur représenté ci-dessous, dans lequel les spires du primaire et du secondaire sont bobinées en alternance autour d'un tore de section carrée. Le primaire compte  $N_1 \gg 1$  spires, parcourues en série par le courant  $i_1$ , et le secondaire  $N_2 \neq N_1$  spires parcourues par le courant  $i_2$ .



1. Calculer le champ  $B_1$  créé en tout point de l'espace par le primaire pris seul, puis son inductance propre  $L_1$ .
2. En déduire sans calcul l'inductance propre  $L_2$  du secondaire.
3. Calculer l'inductance mutuelle  $M$ . Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de  $L_1$  et  $L_2$  uniquement.
4. On impose au primaire une tension sinusoïdale  $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$ , alors que le secondaire est ouvert. Quelle est la tension  $u_2(t)$  mesurée aux bornes du secondaire ? Que se passerait-il si  $u_1$  était constante ?
5. Le transformateur annonce une conversion 230 V  $\rightarrow$  12 V. En déduire la valeur numérique du rapport  $N_1/N_2$ .