ჯგუფთა წარმოდგენის თეორია

ანდრო ნიდენს

თბილისის თავისუფალი უნივერსიტეტი

საბაკალავრო ნაშრომი

20 ივლისი, 2020

Contents

1 აბსტრაქტი

წარმოდგენის თეორია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის აბსტრაქტულ ალგებრულ სტრუქტურებს მათი ელემენტების წარმოდგენით ვექტორულ სივრცეზე წრფივი გარდაქმნების სახით. მატრიცებისა და წრფივი ოპერატორების თეორია საკმაოდ კარგად შესწავლილია, ასე რომ აბსტრაქტული ობიექტების ნაცნობი წრფივი ალგებრის ობიექტებით წარმოდგენა გვიმარტივებს მათი თვისებების აღქმას და ზოგჯერ აბსტრაქტულ ელემენტებზე გამოთვლებს გვიმარტივებს. შინაარსობრივად, წარმოდგენა აბსტრაქტულ ობიექტს აძლევს კონკრეტულ მატრიცულ სახეს, სადაც ობიექტებზე ოპერაციები აღწერილია მატრიცული ალგებრული ოპერაციებით (მაგალითად, მატრიცული ჯამი, მატრიცული ნამრავლი).

როგორც ვიცით, ჯგუფთა თეორიას დიდი როლი აქვს ფიზიკაში. ჯგუფების განმარტება ბუნებრივად ერწყმის სიმეტრიებს, ფიზიკურ სისტემებში კი სიმეტრიები გვაძლევს სისტემების უკეთ შესწავლის საშუალებას, რადგან სიმეტრიებიდან გამომდინარეობს შენახვის კანონები.

ჯგუფის ელემენტების წარმოდგენა შესაძლებელია მატრიცების სახით. ჯგუფის წარმოდგენის თეორია სავსეა მოულოდნელი და საინტერესო შედეგებით, როგორიცაა, მაგალითად, ორთოგონალურობის თერემა.

ჩვენ განვიხილავთ შესავალს ჯგუფის ელემენტების წარმოდგენის თეორიაში. შემოვიღებთ მნიშვნელოვან განმარტებებს, როგორიცაა ჯგუფის წარმოდგენის ხასიათი. დამტკიცებული იქნება მნიშვნელოვანი თეორემები ჯგუფთა წარმოდგენაზე, ასევე შევეცდებით, ავხსნათ, თუ რატომ არის ეს თეორემები სამართლიანი და ინტუიციურ ხედვას ჩამოვაყალიბებთ.

განხილული გვექნება წარმოდგენების ეკვივალენტურობა, დაყვანადი და დაუყვანადი წარმოდგენები და ამ ცნებების მნიშვნელობა. ვიტყვით, თუ რა კავშირშია ქვეჯგუფის დაყვანადობა ჯგუფის დაყვანადობასთან. განვიხილავთ და დავამტკიცებთ უნიტარულობის თეორებას, რომელსაც გამოვიყენებთ შურის ლემის დასამტკიცებლად. ამ მიმოხილვის საბოლოო შედეგად გვექნება დიდი ორთოგონალურობის თეორემის დამტკიცება როგორც ჯგუფის ელემენტებისთვის, ასევე ჯგუფის ხასიათებისთვის. საბოლოოდ მოკლედ ვიტყვით, თუ როგორ გამოიყენება დამტკიცებული თეორემები ჯგუფების თვისებების შესწავლაში.

ნაშრომის ძირითადი ნაწილი მიყვება წიგნის [2] მეორე თავს. ამავე წიგნის პირველ თავში განხილულია ჯგუფის განმარტებები და ძირითადი ცნებები. ჩვენ ჩავთვლით, რომ მკითხველს უკვე შესწავლილი აქვს ჯგუფების თეორია დამწყებ დონეზე. რადგან ჯგუფთა წარმოდგენის თეორია არის ჯგუფთა თეორიისა და წრფივი ალგებრის შერწყმა, ამიტომაც ასევე მნიშვნელოვანია წრფივი ალგებრის ცოდნა.

2 შესავალი

2.1 განმარტებები

ჯგუფთა თეორიის შესწავლის დაწყება შეიძლება სიმეტრიებით და გარდაქმნებით. წარმოდგენის თეორია თითო ჯგუფის ელემენტს შეუსაბამებს მატრიცას, რაც გვაძლევს საშუალებას, რომ ჯგუფის ელემენტებს ვუყუროთ როგორც სივრცეზე მოქმედ გარდაქმნებს. ეს არ არის ნებისმიერი მატრიცების სიმრავლე, მას აქვს მნიშვნელოვანი შეზღუდვა: მატრიცების გადამრავლებით (კომპიზიციით) ნარჩუნდება ჯგუფის სტრუქტურა. უფრო ფორმალურად,

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2) \tag{1}$$

აქ წარმოდგენა D თითო ჯგუფის ელემენტს g შეუსაბამებს მატრიცას, ასე რომ ჩვენ დავწერთ ამ მატრიცას როგორც $D(g)$. რადგან მატრიცები უნდა იყოს შებრუნებადი, ისინი კვადრატული მატრიცები არიან განზომილებით $d \otimes d$, და d ცნობილია როგორც წარმოდგენის განზომილება.

ფიზიკოსები ხშირად გულისხმობენ მატრიცებს, როდესაც საუბრობენ ჯგუფის ელემენტებზე და ფიქრობენ, რომ ეს ერთი და იგივე არის. ბოლოს და ბოლოს, მათ მხოლოდ გარდაქმნები აღელვებთ. მაგალითად, როდესაც ფიზიკოსი ფიქრობს მობრუნებაზე, ის გულისხმობს $3 \otimes 3$ მატრიცას. მაგრამ არსებობს სხვანაირი ხედვაც, ძირითადად, მათემატიკოსებში, რომლებიც შეისწავლიან ჯგუფის ელემენტებს და მათ თვისებებს დამოუკიდებლად და არ ფიქრობენ, რომ ისინი სხვა ობიექტებზე მოქმედებენ. პრაქტიკაში, ბევრი ჯგუფი, რომელიც გამოიყენება თეორიულ ფიზიკაში, განიმარტება მატრიცების წარმოდგენით (მაგალითად, ლორენცის ჯგუფი).

შეგვიძლია ვნახოთ, რომ $D(I) = I_d$, სადაც მარცხენა I გულისხმობს ჯგუფის ერთეულოვან ელემენტს, და ჩვენ გვაქვს $d \otimes d$ ერთეულოვანი მატრიცა მარჯვენა მხარეს. ზოგადად, d არ არის ფიქსირებული რაიმე ჯგუფისთვის და დამოკიდებულია წარმოდგენაზე D.

ამის საჩვენებლად, ჩვენ შევამოწმებთ, რომ $D(I)D(g) = D(Ig) = D(g)$. თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ $D(g^{-1})$-ზე მარჯვნიდან, ჩვენ მივიღებთ: $D(I)D(g)D(g^{-1}) = D(g)D(g^{-1})$, რომელიც, (1)-ის გათვალისწინებით, გვაძლევს $D(I)D(I) = D(I)$. გავამრავლოთ $(D(I))^{-1}$-ზე და მივიღებთ $D(I) = I_d$. აქედან გამომდინარეობს $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$, რადგან $D(g^{-1})$ და $D(g)$-ის გამრავლება გვაძლევს I_d-ს, რაც მოსალოდნელი იყო, რადგან ორი მატრიცა ერთმანეთს "აბათილებს", როგორც ჯგუფის ელემენტებს შეუძლიათ ერთმანეთის "გაბათილება".

ვცადოთ, უკეთესად გავერკვიოთ წარმოდგენებში. აქვს თუ არა ნებისმიერ ჯგუფს წარმოდგენა? რამდენი აქვს? არის თუ არა განზომილება შეზღუდული? როგორ გავარჩიოთ ორი წარმოდგენა, თუ მათ ერთნაირი განზომილება აქვთ?

ჩვენ ვიცით, რომ ყველა სასრული ჯგუფი S_n-ის რომელიმე ქვეჯგუფის იზომორფულია, თითო ელემენტი S_n-ში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ მატრიცული სახით (თითო

ბაზისის ვექტორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ რიცხვი და გადავანაცვლოთ ეს ვექტორები ერთმანეთში აბსტრაქტული ობიექტების გადანაცვლების მაგივრად). ასე რომ, ყველა სასრულ ჯგუფს გააჩნია წარმოდგენა. ზოგი ჯგუფის წარმოდგენა შეუძლებელია სასრულგანზომილებიანი მატრიცებით. ამის მიუხედავად, ჯგუფების ძირითად ნაწილს, რომელიც ფიზიკაში გვხვდება, გააჩნია სასრულგანზომილებიანი წარმოდგენა. ასე რომ წარმოდგენის თეორიის სწავლა მაინც სასარგებლოა.

არსებობს ტრივიალური წარმოდგენა : $D(g) = 1$, თუ განვიხილეთ 1 როგორც $1 \otimes 1$ მატრიცა. გასაგებია, რომ, (1) სრულდება, რადგან ჩვენ ვამრავლებთ 1-იანებს მარჯვენა მხარეს. ამ წარმოდგენას ტრივიალური ეწოდება, მაგრამ, პირველი შეხედვით, მას გამოყენება არ გააჩნია. ამის მიუხედავად, მისი გამოყოფა მნიშვნელოვანია, რიცხვი 0-ს ანალოგიურად, რომელიც არ ცვლის არაფერს, თუ მას სხვა რიცხვს დავუმატებთ.

მათემატიკური ენის გამოყენებით, ჩვენ განვსაზღვრავთ d-განზომილებიან წარმოდგენას როგორც ასახვას ჯგუფიდან G $GL(d, C)$-ის რომელიმე ქვესიმრავლეში. (1) გვეუბნება, რომ ასახვა არის ჰომომორფული, მაგრამ თუ ის ასევე იზომორფულია, ან ერთი ერთში, ჩვენ ვამბობთ, რომ წარმოდგენა არის ერთგული.

ჩვენ ასევე შეგვიძლია მატრიცებით ჯგუფების განვსაზღვრა. ასეთ შემთხვევაში წარმოდგენას ეწოდება განმსაზღვრელი, ან ფუნდამენტური.

2.2 ხასიათი კლასის ფუნქციაა

ჯგუფებს შეიძლება ჰქონდეთ სხვადასხვა წარმოდგენები, ასე რომ ჩვენ მათ გავარჩევთ ზედა ინდექსის გამოყენებით. ჩვენ დავწერთ $D^{(r)}(g)$ მატრიცისთვის, რომელიც წარმოადგენს ჯგუფის ელემენტს g-ს წარმოდგენაში r.

არსებობს ისეთი მნიშვნელოვანი ცნება, როგორიცაა ჯგუფის ხასიათი.

$$\chi^{(r)}(g) \equiv trD^{(r)}(g) \tag{2}$$

ხასიათი, როგორც დასახელებიდან გამომდინარეობს, გვეხმარება წარმოდგენის დახასიათებაში.

ჩვეულებრივად, ხასიათი დამოკიდებულია წარმოდგენასა r და ელემენტზე g. გავიხსენოთ, რომ ჯგუფი შეიძლება იყოს დაყოფილი ეკვივალენტურობის კლასებად. ორი ელემენტი g_1 და g_2 არის ეკვივალენტური ($g_1 \sim g_2$), თუ არსებობს სხვა ელემენტი f, რომ

$$g_1 = f^{-1} g_2 f \tag{3}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვნახოთ, რომ

$\chi^{(r)}(g_1) = trD^{(r)}(g_1) = trD^{(r)}(f^{-1}g_2 f) = trD^{(r)}(f^{-1})D^{(r)}(g_2)D^{(r)}(f) = trD^{(r)}(g_2)D^{(r)}(f)D^{(r)}(f^{-1}) = trD^{(r)}(g_2)D^{(r)}(I) = trD^{(r)}(g_2) = \chi^{(r)}(g_2)$ სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ განტოლება (1) და კვალის ციკლურობის თვისება. სხვა სიტყვებით, თუ $g_1 \sim g_2$, მაშინ $\chi^{(r)}(g_2) = \chi^{(r)}(g_1)$. ასე რომ, თუ $(g \in c)$, მაშინ

$$\chi^{(r)}(c) = trD^{(r)}(g) \tag{4}$$

სადაც c აღნიშნავს ეკვივალენტურობის კლასს, რომელშიც არის ელემენტი g. მარჯვენა მხარეს მყოფი კვალი არ არის დამოკიდებული ელემენტზე g იმდენად, როგორც დამოკიდებულია მის კლასსზეიმ კლასსზე, რომელშიც შედის ეს ელემენტი.

2.3 ეკვივალენტური წარმოდგენები

ორ წარმოდგენას $D(g)$ და $D'(g)$ ეწოდება ეკვივალენტური, თუ

$$D'(g) = S^{-1}D'(g)S \tag{5}$$

როგორც ვიცით წრფივი ალგებრიდან, $D(g)$ და $D'(g)$ არის ერთი და იგივე მატრიცა ჩაწერილი სხვადასხვა ბაზისში. ამ ორი ბაზისის ვექტორების ერთმანეთში გადაყვანა ხდება S მარტიცის საშუალებით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ გვაქვს მოცემული წარმოდგენა $D(g)$, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ შებრუნებადი მატრიცა S და მისი გამოყენებით გავნმარტოთ $D'(g)$ ფორმულიდან (5). მაშინ ისიც იქნება წარმოდგენა, რადგან

$D'(g_1)D'(g_2) = (S^{-1}D(g_1)S)(S^{-1}D(g_2)S) = S^{-1}D(g_1)D(g_2)S = S^{-1}D(g_1g_2)S = D'(g_1g_2)$

აღვნიშნოთ, რომ ეს უნდა იყოს ერთი და იგივე S ყველა g-სთვის. ზოგადად, მატრიცების სიმრავლე $D(g)$ და $D'(g)$ შეიძლება სხვადასხვანაირად გამოიყურებოდეს. თუ გვაქვს ორი წარმოდგენა, როგორ უნდა გავიგოთ, ეკვივალენტურები არიან თუ არა?

თუ ავიღებთ (5)-ს კვალს და გავიხსენებთ კვალის ციკლურობის თვისებას, მივიღებთ: $\chi'(c) = trD'(g) = trS^{-1}D(g)S = trD(g)SS^{-1} = trD(g) = \chi(c)$

სადაც g არის c კლასის წევრი. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ არსებობს რომელიმე კლასი ისეთი, რომ $\chi'(c) \neq \chi(c)$, მაშინ ორი წარმოდგენა არის განსხვავებული. მაგრამ თუ $\chi'(c) = \chi(c)$ სრულდება ყველა კლასისთვის, არის თუ არა ორი წარმოდგენა ერთნაირი? ზოგი თეორეთიკოსი ფიზიკოსისთვის ეს დებულება საკმარისია ეკვივალენტურობის დასამტკიცებლად, აბა დამთხვევა ხომ არ იქნება? ჩვენ ვნახავთ, რომ ეს მართლაც ასეა და ორი სხვადასხვა წარმოდგენისთვის $\chi^r(c)$ და $\chi^s(c)$ არის არა მხოლოდ განსხვავებული, არამედ რაღაც გაგებით ორთოგონალურიც კი.

2.4 დაყვანადი და დაუყვანადი წარმოდგენა

ახლა განვიხილავთ ასეთ მნიშვნელოვან ცნებას, როგორიცაა დაყვანადი და დაუყვანადი წარმოდგენა. მაგალითისთვის, განვიხილოთ ჯგუფი $SO(3)$. ჩვენ გვაქვს ტრივიალური 1-განზომილებიანი წარმოდგენა $D^{(1)}(g) = 1$ და 3-განზომილებიანი განმსაზღვრელი წარმოდგენა $D^{(3)}(g)$. არსებობს თუ არა სხვა წარმოდგენები?

არსებობს თუ არა 8-განზომილებიანი წარმოდგენა? შეგვიძლია მოვიყვანოთ ასეთი მაგალითი:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)}(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(3)}(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)}(g) \end{pmatrix}$$

ეს ნამდვილად არის $8 \otimes 8$ მატრიცა, და თითო ელემენტს შეესაბამება ერთი ასეთი მატრიცა (8 იმიტომ რომ 1+ 1+ 3 + 3 = 8). ასეთ მატრიცას ეწოდაბა ბლოკური დიაგონალური მატრიცა. მასში ბლოკები დამოუკიდებლად მრავლდება როგორც მატრიცები, ანუ ბლოკებს ერთმანეთზე არ აქვთ არანაირი გავლენა გამრავლებისას. ასევე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ მატრიცაში სიმბოლო 0 შეიძლება აღნიშნავდეს $1 \otimes 1$, $3 \otimes 1$, $1 \otimes 3$ ან $3 \otimes 3$ მატრიცას, რომელშიც ყველა მნიშვნელობა არის 0-ს ტოლი, რადგან $D^{(3)}(g)$ და $D^{(1)}(g)$ -ს განზომილებები არ ემთხვევა ერთმანეთს. ასეთი აღნიშვნა შემოვიღეთ თვალსაჩინოებისთვის.

ჩვენ მივადგით ორი $D^{(1)}(g)$ და ორი $D^{(3)}(g)$ ერთად, და ვამბობთ, რომ მივიღეთ ახალი წარმოდგენა. ასეთი იაფი ტრიუკით ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი განზომილების წარმოდგენა მივიღოთ (ყველაზე მარტივად, რამდენიც გვინდა $D^{(1)}(g)$ მივადგათ ერთმანეთს. გამოვა ერთეულოვანი მატრიცა, ანუ ჯგუფი ინვარიანტულს ტოვებს სივრცეს.) როგორც რაციონალური ხალხი, ჩვენ უნდა შევთანხმდეთ, რომ ასეთი წარმოდგენა "ახალ" წარმოდგენას არ გვაძლევს.

წარმოდგენა $D(g)$-ს ეწოდება დაყვანადი,და ის ჩაიწერება როგორც პირდაპირი ჯამი იმ წარმოდგენების, რომლებზეც ის დაიყვანება. ჩვენს მაგალითში, $D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(1)}(g) \oplus D^{(3)}(g) \oplus D^{(3)}(g)$.

წარმოდგენებს, რომლებიც არ არიან დაყვანადი, დაუყვანადი ეწოდებათ. გასაგებია, რომ ჩვენ უნდა შევისწავლოთ დაუყვანადი წარმოდგენები.

ნათელია, რომ $D(g)$ არის დაყვანადი, მაგრამ თუ ვინმე გაამრავლებს ამ მატრიცას S-ზე ისე, რომ მიიღებს $D'(g) = S^{-1}D'(g)S$, მაშინ გაგვიჭირდება თქმა, არის თუ არა $D'(g)$ დაუყვანადი, რადგან, ზოგადად, მას აღარ ექნება ბლოკური დიაგონალური ფორმა და არც 0-ებით სავსე დარჩება.

გავიხსენოთ ტრივიალური წარმოდგენის განმარტება $D^{(1)}(g) = 1$. რატომ გამოვიყენეთ 1, და არა ერთეულოვანი I_k მატრიცა განზომილებით $k \otimes k$ რომელიმე დადებითი k რიცხვისთვის? საქმე იმაშია, რომ ასეთი მატრიცა იქნებოდა დაყვანადი თუ $k \neq 1$. წარმოდგენა $D^{(1)}(g)$, შეიძლება, ტრივიალურია, მაგრამ დაყვანადი არ არის.

წარმოდგენის თეორიის ერთ-ერთი მიზანია, გავარკვიოთ რაიმე კრიტერიუმით, არის თუ არა წარმოდგენა დაუყვანადი და ჩამოვთვალოთ ყველა დაუყვანადი წარმოდგენა. რადგან ყველა ჯგუფს აქვს უსასრულო რაოდენობის დაყვანადი წარმოდგენა, ჩვენ გვაინტერესებს, რამდენი დაუყვანადი წარმოდგენა აქვს მას.

2.5 შეზღუდვა ქვეჯგუფზე

G ჯგუფის წარმოდგენა ასევე გვაძლევს საშუალებას, გვქონდეს წარმოდგენა რომელიმე მისი ქვეჯგუფისთვის. აღვნიშნოთ H ქვეჯგუფის ელემენტები, როგორც h. თუ

$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$ ნებისმიერი ჯგუფის ელემენტისთვის, მაშინ იგივე სრულდება ჯგუფის ქვეჯგუფის ელემენტებისთვის : $D(h_1)D(h_2) = D(h_1h_2)$. ასეთ H-ის წარმოდგენას ეწოდება G-ს წარმოდგენა, რომელიც არის შეზღუდული H-ზე.

როდესაც წარმოდგენა არის შეზღუდული ქვეჯგუფზე, ზოგადად, G-ში დაუყვანადი წარმოდგენა შეიძლება აღარ იყოს დაუყვანადი H-ში. დიდი ალბათობით, ის დაიშლება H-ის დაუყვანად წარმოდგენებად. ამის მიზეზი გასაგებია: შეიძლება არსებობდეს რამე ბაზისი, რომელშიც $D(h)$-ს აქვს ბლოკური დიაგონალური ფორმა ყველა h - ისთვის, მაგრამ ეს შეიძლება არ იყოს სამართლიანი დანარჩენი g - სთვის, რომელიც არ შედის H-ში. უფრო მარტივად რომ ვთქათ, H-ში არის უფრო ცოტა ელემენტი.

ის, თუ როგორ იშლება G-ს დაუყვანადი წარმოდგენა H-ში, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია.

2.6 უნიტარული წარმოდგენები

აქ განვიხილავთ საკვანძო თეორემას, რომელიც გვეუბნება, რომ ყველა სასრულ ჯგუფს აქვს უნიტარული წარმოდგენა, ანუ $D(g)^\dagger D(g) = I$ ყოველი g-სა და წარმოდგენისთვის.

პრაქტიკაში, ეს თეორემა გვეხმარება სასრული ჯგუფების წარმოდგენების მოძიებაში. დასაწყისისთვის, ჩვენ შეგვიძლია უგულვებელვყოთ ნებისმიერი მატრიცა, რომელიც არ არის უნიტარული.

მოდით, ინტუიციურად დავინახოთ, რას გულისხმობს ეს თეორემა. წარმოვიდგინოთ, რომ წარმოდგენა $D(g)$ არის $1 \otimes 1$, ანუ კომპლექსური რიცხვი $re^{i\theta}$. ჩვენ ვიცით, რომ, თუ ავიღეთ სასრული ჯგუფის რომელიმე ელემენტი g და ის თავის თავზე ვამრავლეთ, მაშინ სასრული რაოდენობა მოქმედებების შედეგად ჩვენ ერთეულოვან ელემენტს მივიღებთ : $g^k = I$ რომელიმე k -სთვის. მაგრამ g^k არის წარმოდგენილი, როგორც $D(g^k) = D(g)^k = r^k e^{ik\theta}$. თუ $r \neq 1$, მაშინ ეს ელემენტი ვერ იქნება I. ამიტომაც, $D(g)$ უნიტარულია.

2.7 უნიტარულობის თეორემის დამტკიცება

გადანაცვლების ლემის თანახმად, თუ მოცემული გვაქვს ფუნქცია ჯგუფის ელემენტებზე, მაშინ, ყოველი $g' \in G$-სთვის:

$$\sum_{g\in G} f(g) = \sum_{g\in G} f(g'g) = \sum_{g\in G} f(gg') \tag{6}$$

ეს სამი ჯამი სინამდვილეში ერთნაირი, მაგრამ გადანაცვლებული წევრებისგან შედგება, ამიტომაც ტოლობა არის სამართლიანი.

ახლა დავამტკიცოთ უნიტარულობის თეორემა.

დავუშვათ, რომ მოცემული წარმოდგენა $\tilde{D}(g)$ არ არის უნიტარული. შემოვიღოთ განმარტება

$$H = \sum_g \widetilde{D}(g)^\dagger \widetilde{D}(g)$$

სადაც ჯამში ვგულისხმობთ ყველა ელემენტს G-დან. მაშინ ნებისმიერი ელემენტი g'-სთვის: $\widetilde{D}(g')^\dagger H \widetilde{D}(g') = \sum_g \widetilde{D}(g')^\dagger \widetilde{D}(g)^\dagger \widetilde{D}(g) \widetilde{D}(g') = \sum_g (\widetilde{D}(g)\widetilde{D}(g'))^\dagger \widetilde{D}(g)\widetilde{D}(g') = \sum_g (\widetilde{D}(gg'))^\dagger \widetilde{D}(gg') = H$

ბოლო ტოლობა სამართლიანია გადანაცვლების ლემის გამო. მარტიცა H არის "ინვარიანტული". რადგან H ერმიტულია, არსებობს უნიტარული მატრიცა W ისეთი, რომ $\rho^2 = W^\dagger H W$ არის ნამდვილი და დიაგონალური. ახლა ვაჩვენოთ, რომ დიაგონალური ელემენტები არა მარტო რეალურია, არამედ დადებითიც. (ამიტომაც შემოვიღეთ აღნიშვნა ρ^2: ჩვენ შეგვიძლია მისი ფესვის ამოღება, რომ მივიღოთ დიაგონალური და ნამდვილი მატრიცა ρ). ამისთვის გამოვიყენოთ თეორემა, რომელიც გვეუბნება, რომ ნებისმიერი მატრიცისთვის M, მატრიცა $M^\dagger M$-ს აქვს არაუარყოფითი საკუთრივი რიცხვები. დავუშვათ, ψ იყოს სვეტი ვექტორი, რომელსაც აქვს 1 j-ურ პოზიციაზე, სხვაგან კი 0 არის.

$(\rho^2)_{jj} = \psi^\dagger \rho^2 \psi = \psi^\dagger W^\dagger H W \psi = \sum_g \psi^\dagger W^\dagger \widetilde{D}(g)^\dagger \widetilde{D}(g) W \psi = \sum_g \phi(g)^\dagger \phi(g) > 0$

(აქ ჩვენ განვმარტეთ $\phi(g) = \widetilde{D}(g) W \psi$). გამოდის, მატრიცა ρ არსებობს და მას აქვს ზემოაღნიშნული თვისებები.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი აღნიშვნა: $D(g) \equiv \rho W^\dagger \widetilde{D}(g) W \rho^{-1}$. ვაჩვენოთ, რომ $D(g)$ არის უნიტარული. ამისთვის გამოვთვალოთ $D(g)^\dagger = \rho^{-1} W^\dagger \widetilde{D}(g)^\dagger W \rho$, ასე რომ

$D(g)^\dagger D(g) = \rho^{-1} W^\dagger \widetilde{D}(g)^\dagger W \rho^2 W^\dagger \widetilde{D}(g) W \rho^{-1} = \rho^{-1} W^\dagger \widetilde{D}(g)^\dagger H \widetilde{D}(g) W \rho^{-1} = \rho^{-1} W^\dagger H W \rho^{-1} = \rho^{-1} \rho^2 \rho^{-1} = I$

მესამე ტოლობა სრულდება, რადგან $H = \widetilde{D}(g')^\dagger H \widetilde{D}(g')$, როგორც უკვე ვაჩვენეთ.

უნიტარულობის თეორემა დამტკიცებულია. საინტერესოა, რას მივიღებდით, თუკი $\widetilde{D}(g)$ თავიდანვე იქნებოდა უნიტარული. მაშინ $H = N(G)I$, სადაც $N(G)$ არის ჯგუფში ელემენტების რაოდენობა, ასე რომ $W = I$, $\rho = \sqrt{N(G)} I$ არის ერთეულოვანი მატრიცის პროპორციული, ასე რომ $D(g) = \rho \widetilde{D}(g) \rho^{-1} = \widetilde{D}(g)$.

ბევრ მაგალითში წარმოდგენის მატრიცა არის ნამდვილი და არა კომპლექსური. ნამდვილი უნიტარული მატრიცა ორთოგონალურია, სხვა სიტყვებით, თუ $D(g)$ ნამდვილია, მაშინ $D(g)^T D(g) = I$ ყველა g-სთვის.

2.8 ნამრავლის წარმოდგენა

წარმოდგენების ერთმანეთზე გადაბმა არის მარტივი, მაგრამ უინტერესო გზა, მივიღოთ უფრო დიდი წარმოდგენა, რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ პარატა წარმოდგენებიდან პირდაპირი ნამრავლით მიღებულ წარმოდგენას.

თუ მოცემული გვაქვს ორი წარმოდგენა განზომილებებით d_r და d_s, და წარმოდგენის მატრიცებით $D^{(r)}(g)$ და $D^{(s)}(g)$, ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ წარმოდგენა, რომელიც

არის განსაზღვრული მატრიცების პირდაპირი ნამრავლით $D(g) = D^{(r)}(g) \otimes D^{(s)}(g)$, ანუ $d_r d_s * d_r d_s$ -ზე მატრიცით, რომელიც მოცემულია, როგორც

$$D(g)_{a\alpha,b\beta} = D^{(r)}(g)_{ab} D^{(s)}(g)_{\alpha\beta}$$

აქ ჩვენ სპეციალურად გამოვიყენეთ სხვადასხვა ასოები $D^{(r)}(g)$-სა და $D^{(s)}(g)$-ზე იმის აღსანიშნავად, რომ ეს სხვადასხვანაირი ობიექტებია და ინდექსები სხვადასხვა ინტერვალებს გარბიან, კერძოდ: a, $b = 1, \dots d_r$, და α, $\beta = 1, \dots d_s$.

პირდაპირი ნამრავლის მატრიცების გადამრავლების წესია:
$D(g)D(g') = (D^{(r)}(g) \otimes D^{(s)}(g))(D^{(r)}(g') \otimes D^{(s)}(g')) = D^{(r)}(g)D^{(r)}(g') \otimes D^{(s)}(g)D^{(s)}(g') = D(gg')$

მართლაც გვეუბნება, რომ ნამრავლის წარმოდგენა მართლაც არის წარმოდგენა. ზოგადად, არ არის მიზეზი, რომ ეს ნამრავლი დაუყვანადი იყოს. ჩვენ უნდა ვისწავლოთ, როგორ დაიყვანება ნამრავლის წარმოდგენა დაუყვანადი წარმოდგენების პირდაპირ ნამრავლზე.

პირდაპირი ნამრავლის ხასიათი შეიძლება იყოს მარტივად გამოთვლილი, თუ ჩვენ ინდექსს $a\alpha$ გავუტოლებთ $b\beta$ და ავჯამავთ:

$\chi(c) = \sum_{a,\alpha} D(g)_{a\alpha,a\alpha} = (\sum_a D^{(r)}(g)_{aa})(\sum_\alpha D^{(s)}(g)_{\alpha\alpha}) = \chi^{(r)}(c)\chi^{(s)}(c)$ ჩვეულებრივად, c აღნიშნავს კლასს, რომელსაც ეკუთვნის ჯგუფის ელემენტი g. პირდაპირი ნამრავლის წარმოდგენის ხასიათი არის წარმოდგენების ხასიათების ნამრავლი, რომლებისგანაც ის შედგება. ეს შედეგი კარგ ანალოგიაშია წინასთან, როდესაც ჩვენ მივიღეთ, რომ პირდაპირი ჯამის წარმოდგენის ხასიათი არის წარმოდგენების ხასიათების ჯამი, რომლებისგანაც ის შედგება.

ამ მსჯელობაში ჩვენ არ მოგვითხოვია, რომ r და s იყვნენ დაუყვანადი.

ფიზიკაში, ხშირად გამოსადეგია ვიფიქროთ ობიექტებზე, რომლებზეც მოქმედებს ჯგუფი. დავუშვათ, ϕ_a, $a = 1, \dots, d_r$, აღნიშნავდეს d_r ობიექტს, რომლებიც გარდაიქმნებიან ერთმანეთის წრფივ კომბინაციებში. ანალოგიურად, ξ_α, $\alpha = 1, \dots, d_s$ აღვნიშნოთ ობიექტები s წარმოდგენისთვის. მაშინ $d_s d_r$ ობიექტი $\phi_a \xi_\alpha$ განსაზღვრავს პირდაპირი ნამრავლის წარმოდგენას $r \otimes s$. როგორც ვნახავთ, ეს აბსტრაქტული მათემატიკური ობიექტები არის რეალიზებული კვანტურ მექანიკაში ტალღური ფუნქციების სახით.

3 შურის ლემა და დიდი ორთოგონალურობის თეორემა

ჩვენ განვიხილავთ რამოდენიმე თეორემას, რომელიც ზოგის აზრით ერთ-ერთI ყველაზე ლამაზია მათემატიკაში. შემდგომ ჩვენ შევძლებთ მათ გამოყენებას სხვადასხვა სასრული ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენის დასადგენად.

3.1 შურის ლემა

წარმოდგენის თეორიაში კრიტიკული თეორემა, რომელიც ცნობილია, როგორც შურის ლემა, გვეუბნება შემდეგს: თუ $D(g)$ არის სასრული ჯგუფის G დაუყვანადი წარმოდგენა და თუ არსებობს მატრიცა A ისეთი, რომ $AD(g) = D(g)A$ ყოველი g-სთვის, მაშინ $A = \lambda I$ რომელიმე მუდმივი λ-სთვის.

ეს რას ნიშნავს?

თუ ჩვენ ავიღებთ რამოდენიმე მატრიცას $D_1, D_2, \ldots, D_n$, ერთეულოვანი მატრიცა I კომუტირებს ყველასთან, რა თქმა უნდა. მაგრამ, შესაძლოა, ჩვენ ვიპოვოთ მატრიცა A, არა ერთეულოვანი, რომელიც კომუტირებს ყველა ამ n მატრიცასთან. თეორემა გვეუბნება, რომ ჩვენ ამას ვერ გავაკეთებთ თუ მოცემული მატრიცები $D_1, D_2, \ldots, D_n$ არ არიან ჩვეულებრივი მატრიცები, არამედ წარმოდგენის მატრიცებია, რომლებიც განისაზღვრება ჯგუფის დაუყვანადი წარმოდგენით.

შურის ლემის დასამტკიცებლად დავიწყოთ უფრო პატარა ლემით: ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ A ერმიტული ზოგადობის დაურღვევლად. ამის დასანახად გავიხსენოთ, რომ $D(g)$ არის უნიტარული "უნიტარულობის თეორემის" თანახმად. ავიღოთ $AD(g) = D(g)A$-ს ერმიტული შეუღლებული, რომ მივიღოთ $D(g)^\dagger A^\dagger = A^\dagger D(g)^\dagger$. რადგან $D(g)$ უნიტარულია, ჩვენ შეგვიძლია ეს გადავწეროთ, როგორც $D(g)^{-1}A^\dagger = A^\dagger D(g)^{-1}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $A^\dagger D(g) = D(g)A^\dagger$. ჯამისა და სხვაობის აღებით, ჩვენ მივიღებთ $(A + A^\dagger)D(g) = D(g)(A + A^\dagger)$ და $i(A - A^\dagger)D(g) = D(g)i(A - A^\dagger)$. თუ შურის ლემა სრულდება ორი ერმიტული მატრიცისთვის $(A + A^\dagger)$ და $i(A - A^\dagger)$, მაშინ ის შესრულდება A-სთვისაც. ამიტომაც ჩვენ შეგვიძლია დავარქვათ თავდაპირველ მატრიცას H, რომ ხაზი გავუსვათ მის ერმიტულობას.

3.2 შურის ლემის დამტკიცება

ჩვენ გვინდა დავამტკიცოთ, რომ, თუ $HD(g) = D(g)H$ ყოველი g-სთვის, მაშინ $H = \lambda I$ რომელიმე მუდმივი λ-სთვის.

რადგან H არის ერმიტული, ჩვენ შეგვიძლია მისი დიაგონალიზაცია: $H = W^\dagger H' W$, სადაც H' დიაგონალურია და W არის რომელიმე უნიტარული მატრიცა. გადავიდეთ ამ ბაზისში: $D(g) = W^\dagger D'(g) W$. თეორემის დებულება $HD(g) = D(g)H$ გახდება $(W^\dagger H'(g)W)(W^\dagger D'(g)W) = (W^\dagger D'(g)W)(W^\dagger H'(g)W)$. მარცხნიდან გავამრავლოთ W-ზე და მარჯვნიდან - $W^\dagger$-ზე და შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ: $H'D'(g) = D'(g)H'$. ახლა წავუშალოთ აპოსტროფები. თეორემის დებულებაში, H შეგვიძლია ავიღოთ არა მარტო ერმიტული, არამედ დიაგონალურიც. (მოკლედ რომ გავიმეოროთ, რაც გავაკეთეთ,

უბრალოდ ისეთ ბაზისში გადავედით, სადაც H დიაგონალურია).

ახლა ავიღოთ $HD(g) = D(g)H$ -ის ij-ური კომპონენტი. (აქ ერთნაირი ინდექსებით ჯამს არ ვიღებთ) $(HD(g))^i_j = H^i_i D(g)^i_j = (D(g)H)^i_j = D^i_j H^j_j$. აქ შიდა იქდექსებით ჯამს იმიტომ არ ვიღებთ, რომ H დიაგონალურია და მხოლოდ ეს წევრები გვრჩება. აქედან გამომდინარეობს, რომ $(H^i_i - H^j_j)D^i_j(g) = 0$. აღვნიშნოთ, რომ აქ არის ბევრი განტოლება, სადაც i, j და g გარბიან თავის მნიშვნელობებს.

ჩვენ თითქმის მოვრჩით. მოცემული წყვილი i, j-სთვის, თუ არ სრულდება $D^i_j(g) = 0$ ყველა g-სთვის (აქ ხაზგასმულად ვამბობთ "ყველა"-ს), ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ $H^i_i = H^j_j$. ჩვენ ისედაც ვიცოდით, რომ H დიაგონალურია; ახლა ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ამ დიაგონალზე სხვადასხვა ელემენტები ტოლია. თუ ავიღეთ ყველა შესაძლო i, j, ჩვენ დავასკვნით, რომ შურის ლემა სამართლიანია.

წარმოდგენის დაუყვანადობა გვიცავს წინა პარაგრაფში აღნიშნული ცუდი შემთხვევისგან. დავუშვათ, რომ წარმოდგენა დაიყვანება 3-განზომილებიანი და 7-განზომილებიანი წარმოდგენების პირდაპირ ნამრავლზე:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(3)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(7)}(g) \end{pmatrix}$$

მაშინ ელემენტი $D(g)$, მაგალითად, მეორე სტრიქონსა და მეხუთე სვეტში ქრება ყველა g-სთვის. დამტკიცებაში, ჩვენ ვერ ვაჩვენებთ, რომ $H^2_2 = H^5_5$. ამიტომაც ჩვენ ვერ დავასკვნით, რომ H აუცილებლად პროპორციული ერთეულოვანი მატრიცის, არამედ მხოლოდ იმას, რომ

$$H = \begin{pmatrix} \mu I_3 & 0 \\ 0 & \nu I_7 \end{pmatrix}$$

ტოლია ორი შეერთებული ერთეულოვანი მატრიცის, სადაც μ და ν არის ნებისმიერი რიცხვები.

გავიმეოროთ, იმის პირობა, რომ წარმოდგენა დაუყვანადია, არის კრიტიკულად მნიშვნელოვანი. სხვანაირად, H-ს შესაძლოა ჰქონდეს სხვა ფორმაც, რაც არ არის ერთეულოვანი მატრიცის პროპორციული.

3.3 დიდი ორთოგონალურობის თეორემა

ახლა ჩვენ მზად ვართ წარმოდგენის თეორიის ცენტრალური თეორემისთვის: თუ მოცემულია სასრული ჯგუფის G d-განზომილებიანი დაუყვანადი წარმოდგენა, ჩვენ გვაქვს

$$\sum_g D^\dagger(g)^i_j D(g)^k_l = \frac{N(G)}{d} \delta^i_l \delta^k_j \tag{7}$$

სადაც $N(g)$ აღნიშნავს ჯგუფის ელემენტების რაოდენობას.

ამ თეორემის ძირითადი ნაწილი არის მტკიცება, რომ ტოლობის მარცხენა ნაწილი არის პროპორციული $\delta^i_l \delta^k_j$ -ს, რომელიც არის 0 ან 1.

შინაარსობრივად, თუ ჩვენ ავიღებთ ჯამს მთელი ჯგუფით, მაშინ რომელიმე 'ორიენტაციის' ინფორმაცია იკარგება. ეს ანალოგიურია ფიზიკაში ხშირი სიტუაციის: ფიზიკური სიდიდე, როდესაც ყველა კუთხით ავიღეთ ინტეგრალი, ვერ აირჩევს რომელიმე განსაკუთრებულ მიმართულებას.

შეგიძლიათ, არ დაიმახსოვროთ მარჯვენა მხარეს მყოფი პროპორციულობს კონსტანტის მნიშვნელობა; მისი დადგენა მარტივია, თუ ავიღებთ $j = k$ და ავჯამავთ ყველა d მნიშვნელობით, რომელსაც ინდექსი მიიღებს. მარცხენა ნაწილი გახდება $\sum_g \delta^i_l = N(G)\delta^i_l$, რაც აფიქსირებს კონსტანტას $\frac{N(G)}{d}$. (ჩვენ ავიღეთ ჯამი ინდექსებით, რამაც შემოიღო d წევრი).

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა.

ავიღოთ მატრიცა $A = \sum_g D^\dagger(g)XD(g)$ რომელიმე მატრიცისთვის X. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი g-სთვის, $D^\dagger(g)AD(g) = D^\dagger(g)(\sum'_g D^\dagger(g')XD(g'))D(g) = \sum'_g D^\dagger(g'g)D(g'g) = A$ გადანაცვლების ლემის თანახმად. შურის ლემის თანახმად, $A = \lambda d$, რადგან A კომუტირებს ნებისმიერი $D(g)$-სთან. ავიღოთ კვალი და მივიღოთ

$trA = \lambda d = tr \sum_g D^\dagger(g)XD(g) = \sum_g trX = N(G)trX$,

რაც განსაზღვრავს $\lambda = \frac{N(G)}{d}trX$.

აქამდე, ჩვენი მსჯელობა იყო ნებისმიერი X - ისთვის. ახლა ავიღოთ ისეთი, რომ ის იყოს 0 ყველგან გარდა ერთი ადგილისა $X^j_k = 1$, j-ურ სვეტში და k-ურ სტრიქონში.(მაგალითად, 3 და 11 იყოს მაგათი მნიშვნელობა), რომელიც ავიღოთ ერთის ტოლი. ასე რომ, $trX = \delta^k_j$. (შეიძლება უცნაური ჩანდეს, რომ მარცხენა მხარე არ არის დამოკიდებული ინდექსებზე, მაგრამ ჩვენ გვაქვს ფიქსირებული k და j, საიდანაც გამომდინარეობს X-ის ფორმა, და ასევე A-ც).

მოდით, ვიპოვოთ A^i_l-ს მნიშვნელობა A მატრიცაში : $A^i_l = (\sum_g D^\dagger(g)XD(g))^i_l = \sum_g D^\dagger(g)^i_j D(g)^k_l = \lambda\delta^i_l = \frac{N(G)}{d}\delta^i_l trX = \frac{N(G)}{d}\delta^i_l\delta^k_j =$ რაც არის (7). ეს არის დიდი შეზღუდვა წარმოდგენების მატრიცებზე, რომელსაც გამოვიყენებთ $D(g)$-ს გასაგებად.

აქედან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი ფაქტი: თუ r და s არიან ორი არაექვივალენტური წარმოდგენა, მაშინ $\sum_g D^{(r)\dagger}(g)^i_j D^{(s)}(g)^k_l = 0$.

ერთი მოკლე და "ფიზიკოსებისთვის" დამტკიცება არის ის, რომ ორ არაექვივალენტურ წარმოდგენაში ინდექსები i, j და ინდექსები k, l არიან სხვადასხვა სივრცეებში, შესაბამისად, მარჯვენა მხარეს კრონეკერის დელტების დაწერა შეუძლებელია. ჩვენ უდნა დაგვეწერა $\sum_g D^{(r)\dagger}(g)^\mu_\nu D^{(s)}(g)^k_l = 0$ ამის აღსანიშნავად. თუ s და r სხვადასხვა განზომილებისაა, მაშინ დელტას აზრიც არ აქვს. ამის გათვალისწინებით ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_g D^{(r)\dagger}(g)^i_j D^{(s)}(g)^k_l = \frac{N(G)}{d_r}\delta^{rs}\delta^i_l\delta^k_j \tag{8}$$

კრონეკერის სიმბოლო δ^{rs} არის 1 თუ ორი წარმოდგენა იგივე არის (ანუ ექვივალენტური), ან 0 სხვანაირად.

3.4 ხასიათის ორთოგონალურობა

წარმოდგენის მატრიცები $D^{(r)}(g)$ დამოკიდებულია ბაზისზე: ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია გავაკეთოთ მსგავსების გარდაქმნა $D^{(r)}(g) \rightarrow S^{-1}D^{(r)}(g)S$. ავიღოთ კვალი, რომ გავაქროთ დამოკიდებულება ბაზისზე. ხასიათი $\chi^{(r)}(c) \equiv trD^{(r)}(g)$ არის დამოკიდებული მხოლოდ კლასზე, რომელსაც ეკუთვნის g.

მართლაც, (8)-ში იმდენი ინფორმაცია დევს, რომ ჩვენ კვალის აღებით ბევრს არ დავკარგავთ: $\sum_g(\chi^{(r)}(g))*\chi^{(s)}(g) = \sum_c n_c(\chi^{(r)}(c))*\chi^{(s)}(c) = N(G)\delta^{rs}$ სადაც n_c აღნიშნავს ელემენტების რაოდენობას, რომლებიც შედიან c კლასში. ასე ჩვენ გამოვიყვანეთ დებულება ხასიათებზე :

$$\sum_c n_c(\chi^{(r)}(c)) * \chi^{(s)}(c) = N(G)\delta^{rs} \tag{9}$$

ეს შედეგი ძალიან სასარგებლო აღმოჩნდება.

მოვიყვანოთ მაგალითი ჯგუფიდან Z_n. ორთოგონალურობა ამ ჯგუფში არის ფურიე ანალიზის ძირითადი იდეა. Z_n-ისთვის, წარმოდგენები გადანომრილია რიცხვი k-თი, რომელიც გარბის $0, \ldots, N-1$. ექვივალენტურობის კლასებე დანორმილია რიცხვი j-თი, რომელიც ასევე იღებს მნიშვნელობებს $0, \ldots, N-1$. რადგან დაუყვანადი წარმოდგენები 1-განზომილებიანია, ხასიათები არის ტრივიალურად $\chi^{(k)}(j) = e^{i2\pi kj/N}$. ხასიათის ორთოგონალურობა გვეუბნება, რომ $\sum_{j=1}^{N-1} e^{-i2\pi lj/N}e^{i2\pi kj/N} = \sum_{j=1}^{N-1} e^{i2\pi(k-l)j/N} = N\delta^{lk}$, რაც ფურიეს იდეის ბაზისს წარმოადგენს.

4 დასკვნა

ჩვენ დავამტკიცეთ მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც მომავალში გამოსადეგი იქნება ჯგუფების სხვადასხვა თვისების დასადგენად.

ჯგუფებისთვის შევძლებთ შევავსოთ ე.წ. "ხასიათის ცხრილი", და შემოვიღებთ მნიშვნელოვან ცნებებს, რომლებიც დაკავშირებულია $N(C)$-სა (ეკვივალენტურობის კლასი)და $N(R)$-თან (დაუყვანადი წარმოდგენების რაოდენობა მოცემული ჯგუფისთვის). ჩვენს მიერ მიღებული შედეგის გამოყენებით ჩვენ შემოვიღებთ ვექტორებს $N(C)$-განზომილებიან კომლექსურ ვექტორულ სივრცეში და მათი ორთოგონალურობის გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$N(R) \leq N(C)$$

რაღაც გაგებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ კლასების რაოდენობით იზომება ჯგუფის სირთულე.

ზოგადად, ამ უტოლობის შებრუნებულის დამტკიცებასაც შევძლებთ, რის მერეც მივიღებთ, რომ

$$N(R) = N(C)$$

ანალოგიური მსჯელობით ჯგუფის ელემენტებისთვის და არა კლასებისთვის, ჩვენ მივიღებთ, რომ

$$\sum_s d_s^2 = N(G)$$

სადაც s აღნიშნავს წარმოდგენას, d_s კი მის განზომილებას. რადგან 0-განზომილებიანი წარმოდგენები არ გვაქვს და ჯამში შედის დადებითი წევრები (განზომილება ისედაც დადებითია და ჩვენ ვიღებთ მის კვადრატს), და თან ეს რიცხვი არის შეზღუდული ჯგუფის ელემენტების ტოლობით, შეგვიძლია გარკვეული დასკვნები გამოვიტანოთ ამ წარმოდგენების განზომილებებზე. როგორც შედეგი, დაუყვანადი წარმოდგენები ვერ იქნება "ძალიან დიდი". (დაყვანადი კი, შეიძლება იყოს ნებისმიერი ზომის).

ელემენტების ხასიათების გამოთვლით გვექნება კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი - $\sum_r (n_r)^2$, სადაც (n_r) აღნიშნავს, თუ რამდენჯერ გვხვდება დაუყვანადი წარმოდგენა r ჩვენს მიერ მიღებულ წარმოდგენაში, და ეს უნდა იყოს არაუყარყოფითი რიცხვი. თუ კი ესე ჯამი ტოლია 1-ის, მაშინ ჩვენ გავიგებთ, რომ მოცემული წარმოდგენა $D(g)$ შეიცავს დაუყვანად წარმოდგენს r მხოლოდ ერთხელ, ანუ არის თვითონ დაუყვანადი, სხვა დაუყვანად წარმოდგენებს კი 0-ჯერ შეიცავს. (სხვანაირად კვადრატების ჯამით 1-ს ვერ მივიღებდით).

მეორე მხვრივ, თუ ეს სიდიდე მეტია 1-ზე, მაშინ ჩვენ გავიგებთ იმას, რომ წარმოდგენა არის დაყვანადი. მაგრამ ამის გარდა, მივიღებთ მეტ ინფორმაციას იმაზე, თუ რამდენი დაუყვანადი წარმოდგენა შედის მასში. მაგალითად, თუ ეს სიდიდე არის 3-ის ტოლი, ჩვენ გავიგებთ, რომ სამი დაიუყვანადი წარმოდგენა გვხვდება თითო ერთხელ (სხვანაირად,

$2^2 = 4 > 3$, ანუ ორჯერ ან მეტჯერ ერთი რომელიმე დაუყვანადი წარმოდგენა არ გხვდება). ჩვენ გავიგებთ არა მარტო იმას, რომ მოცემული წარმოდგენა დაიშლება, არამედ იმასაც, რამდენ ნაწილად იქნება დაშლილი.

თუ ჩვენ გავიგებთ $N(R)$-ს, მაშინ გვეცოდინება, რამდენი წევრი არის ჯამში $\sum_s d_s^2 = N(G)$ პატარა რიცხვებისთვის ჯგუფის სტრუქტურა ფიქსირებულია, მაგალითად, A_4 ჯგუფისთვის, ოთხი ექვივალენტურობის კლასით, ჩვენ გვაქვს $1^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 12$. ერთადერთი ამონახსნი არის $1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12$, საიდანაც გავიგებთ, რომ ჩვენ გვაქვს საქმე სამ არაექვივალენტურ 1-განზომილებიან დაუყვანად წარმოდგენასთან და ერთ 3-განზომილებიან დაუყვანად წარმოდგენასთან.

5 ბიბლიოგრაფია

References

[1] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*.

დოკუმენტების ნახვა და შესწორება შეგიძლიათ შემდეგ ბმულზე:
https://github.com/SoulAdor/Articles/tree/master/Representation theory