3.4.3 Modelli di trasporto

Si tratta di problemi in cui si hanno un certo numero di località (origini) ciascuna delle quali ha una quantità fissata di merce disponibile e un certo numero di clienti residenti in altre località (destinazioni) i quali richiedono quantitativi precisi di merce. Quindi conoscendo il costo unitario del trasporto della merce da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione è necessario pianificare i trasporti, cioè la quantità di merce che deve essere trasportata da ciascuna località origine a ciascuna località destinazione in modo da soddisfare l'ordine dei clienti minimizzando il costo complessivo derivante dai trasporti.

Esempio 3.4.17 *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *e di tre impianti di produzione* $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$. *Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
80	*100*	*150*

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
$\mathbf{M_1}$	*10*	*8*	*21*
$\mathbf{M_2}$	*12*	*20*	*14*

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.

Analisi del problema.
È un problema di trasporti con 2 origini ($\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$) e 3 destinazioni ($\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$). Si noti che risulta $130 + 200 = 330$ e $80 + 100 + 150 = 330$, ovvero la somma delle disponiblità uguaglia la somma delle richieste.

Formulazione.

– *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con x_{ij} $\;i = 1, 2,\;$ $j = 1, 2, 3,$ le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera $\mathbf{M_i}$ a ciascun impianto di produzione $\mathbf{P_j}$.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera $\mathbf{M_i}$ deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200. \end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione $\mathbf{P_j}$ deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} &= 100 \\ x_{13} + x_{23} &= 150. \end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2, \;\; j = 1, 2, 3$.
La formulazione completa è quindi

$$\begin{cases} \min\,(10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

Formulazione generale di un problema di trasporti
Sono definite m località *origini* indicate con $\mathbf{O_1}, \ldots, \mathbf{O_m}$, e n località *destinazioni* indicate con $\mathbf{D_1}, \ldots, \mathbf{D_n}$. Ogni origine $\mathbf{O_i}$, $(i = 1, \ldots, m)$ può fornire una certa disponibilità $a_i \geq 0$ di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O_1} & \cdots & \mathbf{O_m} \\ a_1 & \cdots & a_m. \end{array}$$

Ad ogni destinazione $\mathbf{D_j}$, $(j = 1, \ldots, n)$ è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D_1} & \cdots & \mathbf{D_n} \\ b_1 & \cdots & b_n. \end{array}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da $\mathbf{O_i}$ a $\mathbf{D_j}$ sia pari a c_{ij}. Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni.
Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{3.4.1}$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione $\mathbf{D_j}$ deve uguagliare la richiesta b_j.

Formulazione.
Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione $\mathbf{O_i}$, $\mathbf{D_j}$ si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di merce da trasportare da $\mathbf{O_i}$, a $\mathbf{D_j}$. Si tratta di mn variabili

	$\mathbf{D_1}$	$\cdots$	$\mathbf{D_j}$	$\cdots$	$\mathbf{D_n}$
$\mathbf{O_1}$	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_i}$	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_m}$	x_{m1}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m; \tag{3.4.2}$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di m vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{3.4.3}$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta si n vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con mn variabili e $m + n + mn$ vincoli:

$$\begin{cases} \min \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Osservazione 3.4.18 È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Esaminiamo, ora, un risultato che è una condizione necessaria e sufficiente affinché un generico problema dei trasporti scritto nella forma (3.4.4) con $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ abbia soluzione; tale risultato chiarisce perché nella formulazione classica del problema dei trasporti si adotta l'ipotesi (3.4.1) cioè che la disponibilità complessiva uguagli la richiesta complessiva.