4.3.1 Problema del costo fisso

Esaminiamo un altro esempio di applicazione di variabili indicatrici: *il problema del costo fisso*. Nei modelli di PL la funzione obiettivo è una funzione lineare nelle variabili di decisione che, di solito, rappresentano livelli di attività. Questa ipotesi, in molti problemi pratici, non è verosimile: può infatti accadere che il costo di un'attività abbia un costo iniziale (set-up), ad esempio l'acquisto di un macchinario, che esiste solo se quell'attività è svolta a livello non nullo.
In riferimento ad un'applicazione industriale, indichiamo con c il costo della manifattura per unità di prodotto, con $f \geq 0$ il costo di set-up (costo fisso) e con $x \geq 0$ la quantità di prodotto da fabbricare.
Quindi se $x = 0$ il costo totale è ovviamente nullo; se $x > 0$ allora il costo totale è dato da $cx + f$. Quindi la funzione obiettivo è data dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} cx + f & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Tale funzione ha una discontinuità nell'origine e quindi non è lineare (Figura 4.3.1).

Fig. 4.3.1 Problema del costo fisso.

Per formulare questo problema in termini di programmazione lineare, introduciamo una variabile indicatrice $\delta \in \{0, 1\}$ tale che, se il prodotto rappresentato dalla x è fabbricato in una qualsiasi quantità allora $\delta = 1$; se il prodotto non è fabbricato allora $\delta = 0$. Dobbiamo, quindi modellare con un vincolo le condizioni logiche

$$x > 0 \Rightarrow \delta = 1 \tag{4.3.5}$$

$$x = 0 \Rightarrow \delta = 0. \tag{4.3.6}$$

L'implicazione (4.3.5) si realizza introducendo il vincolo

$$x - M\delta \leq 0$$

dove M è un numero positivo maggiore del più grande valore che può assumere la x. Per realizzare l'implicazione (4.3.6), si dovrebbe introdurre un vincolo del tipo $x - \varepsilon\delta \geq 0$ con $\varepsilon > 0$; in realtà, ciò non è necessario perché, come vedremo, la condizione (4.3.6) discende direttamente dal fatto che ci troviamo in un problema di minimizzazione. Infatti, il problema può essere formulato come

$$\min \,(cx + f\delta)$$

con vincolo aggiuntivo

$$x - M\delta \leq 0$$

con $x \geq 0$ e $\delta \in \{0, 1\}$.
Dalla struttura della funzione discende immediatamente che se $x = 0$ allora, poiché si tratta di un problema di minimo, all'ottimo deve essere $\delta = 0$, essendo $f \geq 0$. Quindi non è necessario introdurre nella formulazione la condizione logica (4.3.6).

Si può facilmente generalizzare il problema del costo fisso al caso di n attività. Supponiamo che x_i, $i = 1, \ldots, n$ rappresenti il livello al quale viene svolta ciascuna attività. Supponiamo che il costo della i-esima attività sia dato da

$$\begin{cases} c_i x_i + f_i & \text{se} \quad x_i > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove $f_i \geq 0$ è il costo fisso dell'attività i-esima e deve essere pagato solo se l'attività i viene svolta ad un livello non nullo.
Il corrispondente problema di ottimizzazione è:

$$\min \; z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i \in I(x)} f_i$$

dove $I(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i > 0\}$ e quindi è una funzione discontinua nell'origine, non lineare. Per formularlo come problema di PLI, si introduce per ogni $i = 1, \ldots, n$ una variabile $\delta_i \in \{0, 1\}$ tale che

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'attività } i \text{ è svolta a livello non nullo} \\ 0 & \text{se l'}i\text{-esima attività non è svolta.} \end{cases}$$

Si vuole quindi che siano verificate le seguenti condizioni logiche

$$x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 1, \qquad\qquad x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_i = 0.$$

Analogamente al caso precedente, il problema può essere formulato

$$\min \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i f_i \right)$$

con vincoli aggiuntivi

$$x_i - M\delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

e con

$$x_i \geq 0, \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n.$$

È chiaro che se $x_i = 0$, allora all'ottimo $\delta_i = 0$ perché $f_i \geq 0$ e quindi la condizione logica $x_i = 0 \Rightarrow \delta_i = 0$ è automaticamente verificata. Inoltre, se $x_i > 0$ allora $\delta_i = 1$ e quindi il suo costo fisso si aggiungerà al valore della funzione costo nella funzione obiettivo. È quindi evidente che una soluzione ottima del problema iniziale è anche ottima per il problema trasformato.

Esempio 4.3.2 *In una centrale elettrica sono a disposizione tre generatori e ogni giorno si deve decidere quali usare di giorno e quali di notte per assicurare una produzione di almeno 4000 megawatts di giorno e di almeno 2800 megawatts di notte. L'uso di un generatore comporta la presenza di personale tecnico che sorvegli il suo funzionamento; tale personale viene retribuito in maniera diversa tra il giorno e la notte e a seconda del tipo di generatore; tali costi di attivazione sono riportati nella tabella che segue (in euro) insieme al costo (in euro) per ogni megawatt prodotta e alla massima capacità di produzione in megawatts per ogni singolo periodo (giorno/notte).*

	Costo attivazione		**Costo per**	**Capacità**
	giorno	**notte**	**megawatt**	**max**
Generatore A	*750*	*1000*	*3*	*2000*
Generatore B	*600*	*900*	*5*	*1700*
Generatore C	*800*	*1100*	*6*	*2500*

Formulare un modello di PLI che permetta di rappresentare il problema in analisi.

Formulazione.
È un problema di costo fisso e può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto in generale. Per brevità di notazione, chiameremo 1^o periodo il giorno e 2^o periodo la notte.

– *Variabili.* Indichiamo con x_{A_i}, x_{B_i} e x_{C_i}, $i = 1, 2$, i megawatts generati rispettivamente dai generatori A, B e C nel periodo i. Inoltre, per ottenere una formulazione lineare, è necessario introdurre sei variabili $0-1$, δ_{A_i}, δ_{B_i} e δ_{C_i}, $i = 1, 2$, definite come segue :

$$\delta_{A_i} = \begin{cases} 1 & \text{se il generatore A è attivato nell'}i\text{-esimo periodo} \\ 0 & \text{se nell'}i\text{-esimo periodo il generatore A non è attivato} \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Analoga è la definizione per le altre variabili δ_{B_i} e δ_{C_i}, $i = 1, 2$.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare può esser scritta

$$3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + 750\delta_{A_1} +$$

$$+1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2}.$$

– *Vincoli.* Si devono considerare i vincoli sulla richiesta cioè

$$x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000$$

$$x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800.$$

Inoltre, per quanto esposto nel caso generale si devono considerare i vincoli

$$x_{A_i} - 2000\delta_{A_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$x_{B_i} - 1700\delta_{B_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$x_{C_i} - 2500\delta_{C_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2.$$

Quindi la formulazione complessiva può essere scritta

$$\begin{cases} \min\Big(3x_{A_1} + 3x_{A_2} + 5x_{B_1} + 5x_{B_2} + 6x_{C_1} + 6x_{C_2} + \\ \qquad +750\delta_{A_1} + 1000\delta_{A_2} + 600\delta_{B_1} + 900\delta_{B_2} + 800\delta_{C_1} + 1100\delta_{C_2}\Big) \\ x_{A_1} + x_{B_1} + x_{C_1} \geq 4000 \\ x_{A_2} + x_{B_2} + x_{C_2} \geq 2800 \\ x_{A_1} - 2000\delta_{A_1} \leq 0 \\ x_{B_1} - 1700\delta_{B_1} \leq 0 \\ x_{C_1} - 2500\delta_{C_1} \leq 0 \\ x_{A_2} - 2000\delta_{A_2} \leq 0 \\ x_{B_2} - 1700\delta_{B_2} \leq 0 \\ x_{C_2} - 2500\delta_{C_2} \leq 0 \\ x_{A_i} \geq 0, x_{B_i} \geq 0, x_{C_i} \geq 0, \qquad i = 1, 2 \\ \delta_{A_i} \in \{0, 1\}, \delta_{B_i} \in \{0, 1\}, \delta_{C_i} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

□

4.3.2 Problemi di "lot sizing" (gestione della scorte)

I modelli multiperiodo esaminati nel paragrafo 3.4.1 rientrano in una classe di modelli per la programmazione della produzione che va sotto il nome di *Modelli per la gestione della scorte ("lot sizing")* che anche da un punto di vista storico costituiscono un argomento centrale della Ricerca Operativa
Attualmente negli USA alcune indagini hanno evidenziato che il 50% delle aziende americane di produzione utilizzano strumenti matematici per la gestione ottima delle scorte. C'è la necessita di integrare la fase produttiva con quella della gestione delle scorte. L'utilizzazione di scorte nei processi produzione ha numerosi vantaggi:

- *economia di scala* che si possono conseguire aumentando i volumi produttivi minimizzando l'incidenza dei costi fissi;
- *flessibiltà della produzione*: si riesce a far fronte con le scorte all'eventuale andata fuori servizio di qualche linea di produzione;
- *equipartizione dei carichi di lavori* sull'intero orizzonte produttivo.

Un problema di "lot sizing" si può formalizzare nel seguente modo: si tratta di pianificare la fabbricazione di un bene in assegnato un orizzonte temporale costituito da un insieme finito di periodi di controllo $T = \{1, \ldots, t\}$. Per ogni periodo $i \in \{1, \ldots, t\}$ è nota la richiesta di questo bene (che deve essere soddisfatta esattamente) che indichiamo con d_i. Sono noti i costi unitari c_i, $i = 1, \ldots, t$ di produzione del bene in ciascun periodo ed inoltre in ogni periodo, ad eccezione dell'ultimo, è possibile immagazzinare quantità di questo bene che andrà a fare parte della quantità di bene disponibile nel periodo successivo. Anche il costo di stockaggio unitario è assegnato ed è pari a b_i. La novità rispetto ai modelli multiperiodo consiste nella presenza di costi di setup corrispondenti all'avviamento della produzione in ciascun periodo; si tratta di costi fissi che non dipendono dalle quantità prodotte e vengono sostenuti solamente se si produce qualcosa nel periodo; indichiamo con f_i questi costi fissi.
Il problema consiste nel determinare le quantità di bene da produrre in ciascun periodo e le quantià da immagazzinare in modo da soddisfare le richieste minizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stockaggio tenendo conto che all'inzio del primo periodo non c'è nessuna scorta disponibile e che nell'ultimo periodo non si può effettuare alcuno stockaggio.

Formulazione.

– *Variabili.* Indichiamo con x_i, $i = 1, \ldots, t$ il livello di produzione nel periodo i-esimo, cioè le quantità del bene da produrre in quel periodo. Indichiamo inoltre con s_i, $i = 1, \ldots, t-1$ le quantità di bene che vengono immagazzinate nel periodo

i. Inoltre, per $i = 1, \dots, t$ introduciamo le seguenti variabili $0-1$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se nell'}i\text{−esimo periodo c'è produzione} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

Il problema può essere efficacemente rappresentato come in Figura 4.3.2

Fig. 4.3.2 Un problema di "Lot sizing"

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo sarà data dalla somme dei costi di produzione e dei costi di stockaggio e quindi può essere scritta nella forma

$$\sum_{i=1}^{t} c_i x_i + \sum_{i=1}^{t-1} b_i s_i + \sum_{i=1}^{t} f_i \delta_i$$

– *Vincoli.* I vincoli del problema sono i seguenti già esaminati nel caso di modelli multiperiodo:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & d_1 + s_1 & \\ s_{i-1} + x_i & = & d_i + s_i, & i = 2, \dots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t & = & d_t & \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, & \dots & , x_t \ge 0, & \\ s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, & \dots & , s_{t-1} \ge 0 & \end{array}$$

Inoltre si devono considerare i vincoli relativi alla presenza dei costi fissi, ovvero i vincoli

$$x_i - M\delta_i \le 0 \qquad i = 1, \dots, t$$

dove M, ad esempio, può essere scelta pari a $\sum_{i=1}^{t} d_i$, cioè pari a quanto viene richiesto durante l'intero orizzonte temporale.

Quindi la formulazione complessiva di un problema di "lot sizing" si può scrivere come

$$\begin{cases} \min \left(\displaystyle\sum_{t=1}^{t} c_i x_i + \sum_{i=1}^{i-1} b_i s_i + \sum_{i=1}^{t} f_i \delta_i \right) \\ x_1 - s_1 = d_1 \\ s_{i-1} + x_i - s_i = d_i \qquad i = 2, \ldots, t-1 \\ s_{t-1} + x_t = d_t, \\ \\ x_i - M\delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, t \\ \\ x_1 \geq 0, \ldots, \quad x_t \geq 0, \\ s_1 \geq 0, \ldots, \quad s_{t-1} \geq 0 \\ \delta_1 \in \{0,1\}, \quad \ldots, \quad \delta_i \in \{0,1\}. \end{cases}$$

□

Esempio 4.3.3 *Un'industria deve pianificare la produzione di un unico prodotto per i prossimi tre mesi. La domanda mensile che il mercato è in grado di assorbire è nel primo, nel secondo e nel terzo mese pari rispettivamente a 120, 150 e 90 tonnellate. Questa industria dispone di magazzini e quindi ha la possibilità di stoccare le quantità prodotte nel primo o nel secondo mese, ma al termine del trimestre non intende lasciare scorte in magazzino. Lo stoccaggio ha un costo unitario (in migliaia di Euro per tonnellata) pari a 2. Infine per la produzione di ciascuna tonnellata di prodotto l'industria deve sostenere un costo (variabile nei tre mesi) pari a 10, 12 e 11 migliaia di Euro rispettivamente nel primo, nel secondo e nel terzo mese. Si deve determinare quanto produrre mensilmente e quanto stoccare nei primi due mesi in modo da minizzare il costo complessivo.*

Formulazione.
È un problema di "lot sizing" che può essere formulato come segue.

– *Variabili.* Indichiamo con x_1, x_2 e x_3 le quantità in tonnellate di prodotto da fabbricare rispettivamente nel primo nel secondo e nel terzo mese. Inoltre indichiamo con s_1 e s_2 le quantità di prodotto da stoccare rispettivamente nel primo e nel secondo mese.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è data dal costo complessivo che deve essere minizzato e quindi è data da

$$10x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 2s_1 + 2s_2.$$

– *Vincoli.* I vincoli sono dati dalle seguenti espressioni;

$$\begin{aligned} x_1 &= 120 + s_1 \\ x_2 + s_1 &= 150 + s_2 \\ x_3 + s_2 &= 90 \end{aligned}$$

Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività sulle variabili.

Quindi la formulazione complessiva è:

$$\begin{cases} \min\,(10x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 2s_1 + 2s_2) \\ x_1 = 120 + s_1 \\ x_2 + s_1 = 150 + s_2 \\ x_3 + s_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

4.3.3 Problemi di localizzazione di impianti

Si tratta di problemi che nascono nell'ambito della pianificazione industriale che possono essere schematizzati nel seguente modo: sono date n aree $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, distribuite in un territorio. In ciascuna di esse è possibile costruire una fabbrica che produce merce. Per ciascuna area $\mathbf{A_i}$, $i = 1, \ldots n$ è nota la massima capacità produttiva p_i, $i = 1, \ldots, n$ che una fabbrica avrebbe se fosse localizzata in $\mathbf{A_i}$. Sia inoltre f_i il costo fisso di costruzione della fabbrica nell'area $\mathbf{A_i}$. Sono inoltre dati m siti $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$, ove risiedono clienti ai quali deve essere trasportate la merce prodotta. Per ciascun sito $\mathbf{C}_j$ è assegnato un quantitativo r_j, $j = 1, \ldots, m$, di una data merce richiesta presso il sito $\mathbf{C}_j$. Tale richiesta deve essere soddisfatta esattamente. Per soddisfare questa richiesta possono essere costruite $q \leq n$ fabbriche che producono la merce. Esistono altri costi fissi dovuti alla eventuale costruzione di una strada dall'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots m$; indicheremo questi costi fissi con f_{ij}. Siano inoltre c_{ij} il costo necessario per trasportare una unità di merce dalla fabbrica costruita nell'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$ e M_{ij} il quantitativo massimo di merce trasportabile. Il problema consiste nel determinare quante fabbriche e su quali aree costruirle, insieme a quali strade di collegamento costruire, in modo da soddisfare le richieste di i siti minimizzando i costi di costruzione delle fabbriche, delle strade di collegamento e il costo del trasporto della merce una volta che le costruzioni delle fabbriche sono state ultimate determinando al tempo stesso il piano per il trasporto della merce per soddisfare tutte le richieste.

Questo problema può essere formulato come problema di Programmazione Lineare Intera nel seguente modo: si introducono le seguenti variabili

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se una fabbrica è costruita sull'area } \mathbf{A}_i \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se una strada è costruita da } \mathbf{A}_i \text{ a } \mathbf{C}_j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si introducono inoltre le variabili x_{ij} che rappresentano la quantità di merce trasportata dalla fabbrica costruita nell'area $\mathbf{A}_i$ al sito $\mathbf{C}_j$.

I vincoli sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_j \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Inoltre per ogni $i = 1, \ldots, m$, si vuole che se $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} > 0$ allora $\delta_i = 1$. Questa implicazione si realizza con i vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - p_i \delta_i \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ragionando analogamente si ottengono i vincoli

$$x_{ij} - M_{ij} y_{ij} \leq 0 \qquad i = 1, \ldots n, \quad j = 1, \ldots m.$$

Infine dovrà essere

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leq q.$$

Si devono poi esplicitare i vincoli $x_{ij} \geq 0$ e $\delta_i \in \{0,1\}$, $y_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots m$.

La funzione obiettivo si può quindi scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} y_{ij}.$$

Esaminiamo, ora, un esempio molto semplice di problema di localizzazione di impianti.

Esempio 4.3.4 *Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti* $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ *e* $\mathbf{C_5}$ *che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.*

	Costo costruzione	**Capacità massima**
Deposito 1	*10000*	*180*
Deposito 2	*15000*	*230*
Deposito 3	*13000*	*500*

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Richiesta	*91*	*170*	*135*	*153*	*110*
Deposito 1	*15*	*13*	*27*	*9*	*7*
Deposito 2	*12*	*21*	*34*	*21*	*3*
Deposito 3	*7*	*10*	*2*	*17*	*12*

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema in analisi per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

Formulazione.
È un problema che rientra nello schema generale di un problema di localizzazione di impianti e quindi può essere formulato in termini di Programmazione Lineare Intera come appena descritto nel caso generale.

– *Variabili.* È sufficiente introdurre le variabili binarie

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se è costruito l'}i\text{−esimo deposito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e le variabili x_{ij} che rappresentano la quantità di merce da trasportare dal deposito i−esimo alla zona j−esima.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà

$$\begin{aligned} &15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} + 21x_{24} + 3x_{25} \\ &\qquad +7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} + 10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3. \end{aligned}$$

– *Vincoli.* I vincoli da considerare sono innanzitutto i vincoli di richiesta

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 91, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 170, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 135, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 153, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 110.$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0.$$

Poiché non si possono costruire più di due depositi, si deve poi imporre che

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2.$$

Naturalmente devono essere anche esplicitati i vincoli

$$x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4,5.$$

Quindi la formulazione complessiva è:

$$\begin{cases} \min\Big(15x_{11} + 13x_{12} + 27x_{13} + 9x_{14} + 7x_{15} + 12x_{21} + 21x_{22} + 34x_{23} \\ \quad +21x_{24} + 3x_{25} + 7x_{31} + 10x_{32} + 2x_{33} + 17x_{34} + 12x_{35} \\ \quad +10000\delta_1 + 15000\delta_2 + 13000\delta_3\Big) \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 91 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 170 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 135 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 153 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 110 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{1j} - 180\delta_1 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} - 230\delta_2 \leq 0 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} - 500\delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \delta_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

□

4.4 VARIABILI BINARIE PER INDICARE IL SODDISFACIMENTO DI VINCOLI

Un altro uso importante delle variabili binarie consiste nell'indicare lo stato di una certa relazione tra le variabili di un problema di Programmazione Lineare, ad esempio lo stato di un vincolo. Si tratta di una generalizzazione di quanto già visto nel paragrafo 4.3 quando abbiamo introdotto variabili binarie per rappresentare attraverso vincoli lineari implicazioni logiche tra il valore assunto da una variabile reale $x \geq 0$ e una variabile indicatrice binaria $\delta \in \{0,1\}$, ad esempio del tipo

$$x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 1.$$

Ora consideriamo la necessità di costruire un modello lineare per rappresentare espressioni logiche più articolate, ad esempio del tipo

$$\phi(x) > \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 1,$$

dove ϕ è una funzione delle variabili di decisione $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ presenti nel modello e α un particolare scalare. Ad esempio, $\phi(x) \geq \alpha$ potrebbe rappresentare un vincolo del modello e in questo caso una variabile binaria $\delta \in \{0,1\}$ potrebbe avere il ruolo di indicare se un vettore x soddisfa quel vincolo in maniera stretta. È chiaro che prendendo $\phi(x) = x$ e $\alpha = 0$ otteniamo quanto già visto nel paragrafo 4.3.