

# Modelli di allocazione ottima di risorse



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Modelli di allocazione di risorse

recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

# Modelli di allocazione di risorse

## recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

- Modelli con **risorse concorrenti**

*nella produzione di un bene occorre **combinare tutte le risorse***

# Modelli di allocazione di risorse

## recap

Nell'ambito dei **modelli di allocazione di risorse** abbiamo introdotto:

- Modelli con **risorse concorrenti**  
*nella produzione di un bene occorre combinare tutte le risorse*
- Modelli con **risorse alternative**  
*ogni risorsa può autonomamente produrre il bene*

# Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

# Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

- **Modelli Multi-Plant**

*si hanno a disposizione più impianti di produzione*

# Modelli di allocazione di risorse

Introduciamo ora altri due esempi di modelli di allocazione di risorse:

- **Modelli Multi-Plant**

*si hanno a disposizione più impianti di produzione*

- **Modelli Multi-Periodo**

*la pianificazione della produzione prevede anche la gestione di come deve avvenire la produzione in un arco temporale formato da periodi elementari*

# Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare



# Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare

- in **MODO SEPARATO**

decidendo **a priori** quanta produzione è assegnata ad ogni impianto (e quindi avrò  $n$  problemi separati, con  $n$  numero di impianti che lavorano in modo separato)

# Modelli Multi-Plant

Nell'ipotesi di avere più impianti di produzione si può decidere di farli lavorare

- in **MODO SEPARATO**

decidendo **a priori** quanta produzione è assegnata ad ogni impianto (e quindi avrò  $n$  problemi separati, con  $n$  numero di impianti che lavorano in modo separato)

- in **MODO COMBINATO**

facendo **decidere al modello** come distribuire la produzione tra gli impianti

## Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti  $P_1$  e  $P_2$  utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

## Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti  $P_1$  e  $P_2$  utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

## Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti  $P_1$  e  $P_2$  utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina

## Esempio

Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica i prodotti  $P_1$  e  $P_2$  utilizzando due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura.

Per avere un prodotto finito è necessario l'uso di entrambe le macchine. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel primo impianto sono rispettivamente di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali.

La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina

	IMPIANTO 1		IMPIANTO 2	
	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>
<b>levigatura</b>	4	2	5	3
<b>pulitura</b>	2	5	5	6

## Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

## Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto  $P_1$  e  $P_2$  è rispettivamente di 10€ e 15€.



## Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto  $P_1$  e  $P_2$  è rispettivamente di 10€ e 15€.

- (a) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.

## Esempio

Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo.

Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto  $P_1$  e  $P_2$  è rispettivamente di 10€ e 15€.

- (a) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.
- (b) Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.

## Formulazione del caso (a)

Questo caso corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

## Formulazione del caso (a)

Questo caso corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una “risorsa” (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

IMPIANTO 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\begin{aligned}\max \quad & 10x_1 + 15x_2 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

IMPIANTO 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\begin{aligned}\max \quad & 10x_3 + 15x_4 \\ & 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ & 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ & x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\end{aligned}$$

## Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. **L'allocazione della "risorsa" data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.**

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\begin{array}{rcll} \max & 10x_1 & + & 15x_2 & + & 10x_3 & + & 15x_4 \\ & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & \leq & 120 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 80 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & & & & & \leq & 60 \\ & & & & & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 60 \\ & & & & & 5x_3 & + & 6x_4 & \leq & 75 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0 \end{array}$$

## Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

## Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

Nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15€

## Soluzioni ottime e osservazione

Nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di

$$225\text{€} + 168.75\text{€} = 393.75\text{€}$$

Nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15€

**Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori (e quindi non necessariamente ottima!!)**



# Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate dove **la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da piú periodi elementari**

# Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate dove **la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da piú periodi elementari**

Ad esempio, si richiede di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con **possibilità di giacenze al termine di ciascun mese**

## Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

## Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti  $P_1$  e  $P_2$  nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti  $P_1$  e 4 prodotti  $P_2$ , mentre nella seconda si potranno vendere al più 8 prodotti  $P_1$  e 12 prodotti  $P_2$

## Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti  $P_1$  e  $P_2$  nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti  $P_1$  e 4 prodotti  $P_2$ , mentre nella seconda si potranno vendere al più 8 prodotti  $P_1$  e 12 prodotti  $P_2$

Inoltre nella prima settimana c'è la possibilità di produrre più prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva

## Esempio

Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente esempio nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione

Si deve programmare la produzione dei due prodotti  $P_1$  e  $P_2$  nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al più 12 prodotti  $P_1$  e 4 prodotti  $P_2$ , mentre nella seconda si potranno vendere al più 8 prodotti  $P_1$  e 12 prodotti  $P_2$

Inoltre nella prima settimana c'è la possibilità di produrre più prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva

Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo  $P_1$  sia di tipo  $P_2$ ) è di 2€.

# Formulazione

$$\max \quad 10(x_1 + x_3) + 15(x_2 + x_4) - 2(y_1 + y_2)$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 75$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$4x_3 + 4x_4 \leq 75$$

$$4x_3 + 2x_4 \leq 80$$

$$2x_3 + 5x_4 \leq 60$$

$$x_1 - y_1 \leq 12$$

$$x_2 - y_2 \leq 4$$

$$x_3 + y_1 \leq 8$$

$$x_4 + y_2 \leq 12$$

$$-x_1 + y_1 \leq 0$$

$$-x_2 + y_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$