Infine si devono esplicitare i vincoli di non negatività della variabili cioè $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Come si può facilmente osservare la matrice A dei coefficienti delle disequazioni lineari che descrivono i vincoli è rimasta immutata rispetto alla matrice considerata nella formulazione del caso delle risorse concorrenti già vista, ma c'è una sostanziale differenza nelle variabili.

Modelli multi–plant

Si tratta di problemi di pianificazione della produzione in cui modelli di grandi dimensioni sono ottenuti come combinazione di modelli piú piccoli. Tali modelli combinati sono sicuramente piú efficaci dei sottomodelli dai quali essi sono costituiti. Esaminiamo un esempio di questa situazione.

Esempio 3.4.5 *Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica due tipi di prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *utilizzando due macchine utensili: una per la levigatura e una per la pulitura. Per avere un prodotto finito è necessaria l'utilizzazione di entrambe le macchine. Il primo impianto ha una disponibilità massima settimanale di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali. La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere un prodotto finito (poiché le macchine possedute dal secondo impianto sono piú vecchie, i tempi di utilizzo sono maggiori)*

	Impianto 1		Impianto 2	
	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$
levigatura	4	2	5	3
pulitura	2	5	5	6

Inoltre ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo. Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *è rispettivamente di 10\$ e 15\$.*

(a) *Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.*

(b) *Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.*

Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotto $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricato settimanalmente dal primo impianto e le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotto $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricato settimanalmente dal secondo impianto.

Formulazione del caso (a)

Questo caso, nella pratica, corrisponde a costruire due modelli indipendenti: uno riferito al primo impianto, uno riferito al secondo impianto. Una "risorsa" (il materiale grezzo) è già allocata a priori.

IMPIANTO 1: La formulazione relativa al primo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

IMPIANTO 2: La formulazione relativa al secondo impianto è:

$$\begin{cases} \max(10x_3 + 15x_4) \\ 4x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Formulazione del caso (b)

Questo caso corrisponde a costruire un unico modello comprendente entrambi gli impianti. L'allocazione della "risorsa" data dal materiale grezzo è lasciata al modello stesso.

La formulazione relativa a questo caso è:

$$\begin{cases} \max\ (10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 15x_4) \\ \quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ \quad 5x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ \quad 5x_3 + 6x_4 \leq 75 \\ \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

□

Osservazione 3.4.6 Nel caso (b) si richiede al modello di ripartire i 120 Kg di materiale grezzo piuttosto che effettuare un'allocazione arbitraria a priori, quindi ci si può aspettare una maggiore efficienza nell'allocazione di queste risorse nel caso (b). Un confronto delle soluzioni ottime di questi problemi conferma questa intuizione: infatti nel caso (a), ottimizzando la produzione dell'impianto 1 e quella dell'impianto 2, si ottiene un guadagno complessivo di $225\$ + 168.75\$ = 393.75\$$, mentre nel caso (b) si ottiene un guadagno di 404.15$.

Osservazione 3.4.7 Si osservi la particolare struttura della matrice dei coefficienti dei vincoli che è tipica dei problemi di questo tipo

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Una matrice con questa struttura si chiama *matrice a blocchi.* Una siffatta struttura permette di utilizzare metodi particolari per la soluzione del problema. Infatti possono essere utilizzate *tecniche di decomposizione* che consentono di risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo anche di dimensioni molto elevate. Si osservi che le tecniche di decomposizione non consistono nella suddivisione del problema in sottoproblemi, ma piuttosto con tale termine ci si riferisce a procedure computazionali specifiche che pur considerando il problema complessivo sfruttano la sua particolare struttura. L'importanza della decomposizione non è soltanto computazionale ma ha anche una significativa interpretazione economica; infatti essa corrisponde a considerare una pianificazione decentralizzata.

Modelli multiperiodo

Si tratta di problemi di allocazione ottima di risorse limitate analoghi a quelli già trattati, ma dove la pianificazione è effettuata su un orizzonte temporale composto da piú periodi elementari; si richiede, cioè, di estendere la programmazione mensile della produzione di un'azienda in modo da ottenere un piano di produzione semestrale con possibilità di giacenze al termine di ciascun mese. L'esempio che segue riporta una semplice situazione di questo tipo.

Esempio 3.4.8 *Si consideri l'industria manifatturiera vista nel precedente Esempio 3.4.5 nel caso in cui abbia solamente il primo impianto di produzione. In questo caso si deve programmare la produzione dei due prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *nelle due successive settimane sapendo che nella prima settimana si potranno vendere al piú 12 prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e 4 prodotti* $\mathbf{P_2}$*, mentre nella seconda si potranno vendere* *al piú 8 prodotti* $\mathbf{P_1}$ *e 12 prodotti* $\mathbf{P_2}$*. Inoltre nella prima settimana c'è la possibiltà di produrre piú prodotti rispetto a quelli che si possono vendere, immagazzinando i prodotti in eccesso prevedendo un loro utilizzo nella settimana successiva. Costruire un modello lineare che permetta di massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo e tenendo conto che il costo di immagazzinamento di un prodotto (sia di tipo* $\mathbf{P_1}$ *sia di tipo* $\mathbf{P_2}$*) è di 2 \$. Si ricorda che il profitto netto ottenuto dalla vendita di 1 unità di prodotto* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *è rispettivamente di 10\$ e 15\$.*

Formulazione

– *Variabili.* Si introducono le variabili x_1 e x_2 associate alla quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella prima settimana, le variabili x_3 e x_4 associate alla quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella seconda settimana e le variabili y_1 e y_2 che indicano le quantità di prodotti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ fabbricati nella prima settimana ed immagazzinati per venderli nella seconda.

– *Funzione obiettivo.* Nella prima settimana saranno vendute le quantità (x_1-y_1) di prodotto $\mathbf{P_1}$ e (x_2-y_2) di prodotto $\mathbf{P_2}$, nella seconda le quantità (x_3+y_1) di prodotto $\mathbf{P_1}$ e (x_4+y_2) di prodotto $\mathbf{P_2}$. Tenendo conto dei costi di immagazzinamento si ottiene la seguente funzione obiettivo:

$$10(x_1-y_1)+15(x_2-y_2)+10(x_3+y_1)+15(x_4+y_2)-2(y_1+y_2) =$$
$$10(x_1+x_3)+15(x_2+x_4)-2(y_1+y_2).$$

– *Vincoli.* In questo problema si hanno nuovamente quattro tipologie di vincoli:

- i vincoli sulle capacità produttive nelle due settimane:

$$\begin{array}{ccccccccc}
4x_1 & + & 4x_2 & & & & & \leq & 75 \\
4x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 80 \\
2x_1 & + & 5x_2 & & & & & \leq & 60 \\
 & & & & 4x_3 & + & 4x_4 & \leq & 75 \\
 & & & & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 80 \\
 & & & & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq & 60
\end{array}$$

- vincoli che rappresentano il fatto che, alla fine della prima settimana, una parte dei prodotti può essere immagazzinata

$$x_1 - y_1 \leq 12$$

$$x_2 - y_2 \leq 4$$

- vincoli che rappresentano il fatto che il numero dei prodotti disponibili nella seconda settimana non deve superare le richieste del mercato

$$y_1 + x_3 \leq 8$$

$$y_2 + x_4 \leq 12$$

- vincoli che rappresentano la non negatività delle variabili

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

La formulazione relativa a questo problema è:

$$\begin{cases} \max \; \Big(10(x_1 + x_2) + 15(x_3 + x_4) - 2(y_1 + y_2) \Big) \\ \\ \begin{array}{ccccccccccccc} 4x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & & \leq & 75 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & & \leq & 80 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & & & \leq & 60 \\ & & & & 4x_3 & + & 4x_4 & & & & & \leq & 75 \\ & & & & 4x_3 & + & 2x_4 & & & & & \leq & 80 \\ & & & & 2x_3 & + & 5x_4 & & & & & \leq & 60 \\ x_1 & & & & & & & - & y_1 & & & \leq & 12 \\ & & x_2 & & & & & & & - & y_2 & \leq & 4 \\ & & & & x_3 & & & + & y_1 & & & \leq & 8 \\ & & & & & & x_4 & & & + & y_2 & \leq & 12 \end{array} \\ \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.4.9 Se non si fosse prevista la possibilità di poter immagazzinare dei prodotti non venduti, si sarebbe dovuto massimizzare separatamente i profitti ottenuti dalla vendita dei prodotti fabbricati nella prima e nella seconda settimana risolvendo i seguenti problemi:

$$\begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \max(10x_1 + 15x_2) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2 \leq 12. \end{cases}$$

In questo caso si sarebbe ottenuto un guadagno complessivo di 180\$ + 212\$ = 392\$. Mentre la soluzione ottima del modello di Programmazione Lineare, descritto precedentemente e che prevedeva anche la possibilità di poter immagazzinare i prodotti non venduti, porta ad un guadagno di 429.1\$. Questo mette in evidenza la convenienza di effettuare una programmazione complessiva sulle due settimane, prevedendo la possibilità di produrre nella prima settimana di piú di quanto si possa vendere e considerando anche le spese relative all'immagazzinamento dei prodotti non venduti.

Osservazione 3.4.10 Si osservi che i primi sei vincoli del precedente modello multiperiodo presentano una struttura particolare. Infatti possono essere rappresentati da una matrice *a blocchi* (in particolare nell'esempio considerato tutti i blocchi sono uguali). Il fatto di avere la maggior parte dei vincoli con una struttura a blocchi è una caratteristica di tutti i modelli multiperiodo. Come detto per i modelli multi-plan, questa particolare struttura può essere sfruttata attraverso l'uso di tecniche di decomposizione in modo da risolvere efficientemente anche problemi di questo tipo di grosse dimensioni.

Esaminiamo ora un altro modello multiperiodo.

Esempio 3.4.11 *Una fabbrica produce due tipi di pneumatici A e B ed ha una gestione trimestrale della produzione. Per i prossimi tre mesi deve soddisfare il seguente ordine (espresso in numero di pneumatici richiesti ciascun mese)*

	tipo A	**tipo B**
ottobre	*16000*	*14000*
novembre	*7000*	*4000*
dicembre	*4000*	*6000*

Per la produzione di questi pneumatici la fabbrica dispone di due linee di produzione **L1** *e* **L2**. *Per avere un pneumatico finito e pronto per essere venduto, è necessaria la lavorazione di materiale grezzo su solo una delle due linee di produzione. Il numero di ore in cui le linee di produzione sono disponibili ciascun mese sono riportate nella seguente tabella*

	L1	**L2**
ottobre	*2000*	*3000*
novembre	*400*	*800*
dicembre	*200*	*1000*

I tempi necessari per produrre questi pneumatici varia a seconda del tipo e della linea di produzione usata. Tali tempi sono riportati nella seguente tabella (in ore)

	L1	**L2**
tipo A	*0.10*	*0.12*
tipo B	*0.12*	*0.18*

Il costo di ogni ora di lavorazione su una linea di produzione è uguale per entrambe le linee ed è pari a 6 euro. Il costo del materiale grezzo necessario per produrre ciascun pneumatico è di euro 2.50 per il tipo A e di euro 4.00 per il tipo B.