Daniel Muzzulini: Descartes' Töne – Newtons Farben

Die bildlichen Darstellungen bei René Descartes und Isaac Newton werfen Licht auf ein altes Thema. Und die Entwicklungen in der Mathematik und Physik des 17. Jahrhunderts eröffnen einen neuartigen Zugang zu den Wechselbeziehungen in der Lehre von Schall und Licht auf der einen und Hören und Sehen auf der andern Seite der Übertragungskette.
Descartes illustriert seine Herleitung des Tonsystems mit kreisförmigen Diagrammen, in welchen der zyklische Aspekt der Tonigkeiten- und Intervalldisposition mit dem linearen Element der Tonhöhen kombiniert ist. Diese Darstellungsform ist auf der Kippe zur echten Zweidimensionalität, in welcher der nicht-zyklische lineare Aspekt im Mittelpunktsabstand codiert ist. Für sich betrachtet erhält das System der Hexachorde durch Descartes eine moderne didaktische Veranschaulichung und Deutung, die über sich hinausweist.
Vor dem Hintergrund einer diskreten physikalischen Farbauffassung werden bei Newton der Kreis und sein Inneres zu einem kontinuierlichen psychologischen Farbraum. Diese Geometrie der Farbeindrücke stimmt in ihren Grundzügen mit den Farbräumen des 19. und 20. Jahrhunderts überein. Insbesondere formuliert Newton das Prinzip der additiven Farbmischung für Licht und beschreibt die Farbeindrücke mit den Aspekten Sättigung und Farbton. Die Erschliessung einer dritten Raumdimension der Farben, der Helligkeit, durch die Unbuntachse liegt in greifbare Nähe, wird aber von Newton nicht vollzogen.[1]

1. Die zentralen Abbildungen

Descartes verfasst sein *Musicae Compendium* 1619 in einer Zeit, in der er in engem Kontakt zu Isaac Beeckman steht. Es wird aber erst posthum 1650 und 1656 veröffentlicht[2]. Newton beginnt seine Untersuchungen des Sonnenlichts mit Prismen in den 60er-Jahren. Seine *Opticks* wird aber erst 1704 publiziert[3]. Ein Hauptzweck seiner Experimente war es, ein Mittel gegen die störende chromatische Aberration bei Linsensystemen (Fernrohren) zu finden. Die scheinbare Unvermeidbarkeit der Farbfehler am Rand von Linsen bei gleichzeitig

---

[1] Newtons Verfahren der Berechnung der Farbeindrücke mittels einer Schwerpunktskonstruktion macht von der dritten Dimension insofern Gebrauch, als dass die Farbkomponenten als Gewichtskräfte orthogonal zur Farbscheibe zu deuten sind.

[2] Renatus Descartes, *Musicae Compendium* / Leitfaden der Musik, Herausgegeben, ins Deutsche übertragen und mit Anmerkungen versehen von Johannes Brockt, lateinischer Text nach Amsterdam 1656, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstad,1978 [= Descartes 1656]

[3] Isaac Newton, *Opticks: Or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*, London 1704 [= Newton 1704]

optimaler Bildschärfe lässt ihn als Alternative 1672 das Spiegelteleskop erfinden. Dieses arbeitet mit gekrümmten Spiegeln statt Linsen. Wegen der Totalreflexion an Spiegeln gibt es bei Spiegelteleskopen keine systematischen Farbfehler.
Der entscheidende Versuch („experimentum crucis"), der Newton zur Deutung der Spektralfarben als unteilbare Komponenten des weissen Lichts führt, ist bereits 1666 mit folgender Tagebuchskizze dokumentiert:

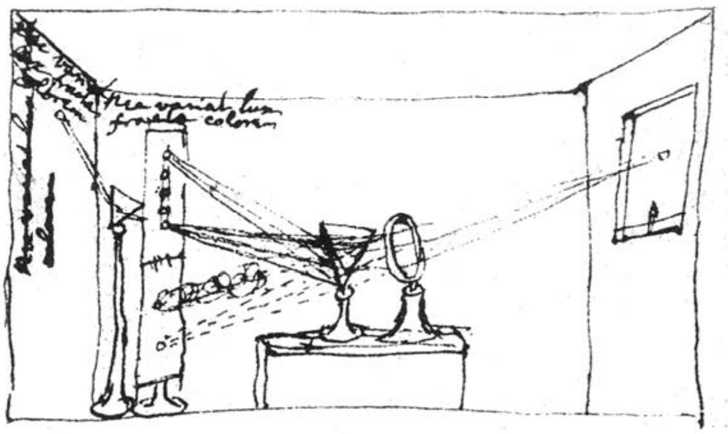


Abb. 1 Newtons „experimentum crucis"[4]. (By permission of the Warden and Fellows of New College, Oxford)

Diese Zeichnung enthält alles, was zum Verständnis der newtonschen Spektraltheorie der Farben erforderlich ist. Sonnenlicht dringt durch ein kleines Loch im Fensterladen oben rechts des ansonsten verdunkelten Raums (Camera obscura). Es wird an einer Sammellinse gebündelt und bildet (ohne dazwischen geschaltetes Prisma) unten auf der Leinwand einen weissen Fleck. Licht, das durch das Prisma geht, wird nach oben abgelenkt. Die fünf Punkte im oberen Teil der Leinwand sind „Hauptpunkte" des prismatischen Farbspektrums. Der unterste ist Rot, der oberste Violett. Rotes Licht wird am wenigsten, violettes am stärksten abgelenkt. Monochromatisches rotes Licht, das durch ein Loch in der Leinwand geht, wird an einem zweiten Prisma erneut gebrochen. Auf der Wand oben links erscheint ein roter Punkt. Spektrales Licht einer Farbe ändert also seine Farbe bei weiterer Brechung nicht mehr. Es ist deshalb gemäss Newton ein homogener, atomarer Bestandteil des Sonnenlichts, das aus Strahlen aller Farben zusammengesetzt ist. Mit Hilfe dieses differenzierten Brechungsgesetzes gelingt es Newton auch, den Regenbogen mit seinem Nebenbogen zu erklären.
In der Sekundärliteratur wird in Zusammenhang mit der Farbe/Ton-Problematik auf die hohe Ähnlichkeit der Kreisdarstellungen bei Descartes und Newton hingewiesen (vgl. Abb. 2b und

[4] Vgl. Heinrich Zollinger, *Color – A Multidisciplinary Approach*, Verlag Helvetica Chimica Acta, Zürich 1999 p. 19–21 [= Zollinger 1999].

2c). Dabei wird auch über die Tonartenauffassung von Newton spekuliert. Meistens wird Newtons Skala als Dorisch interpretiert. Hermann von Helmholtz, der offenbar von den griechischen Modusbezeichnungen ausgeht, nennt die Skala Phrygisch.[5]

a) b) c)

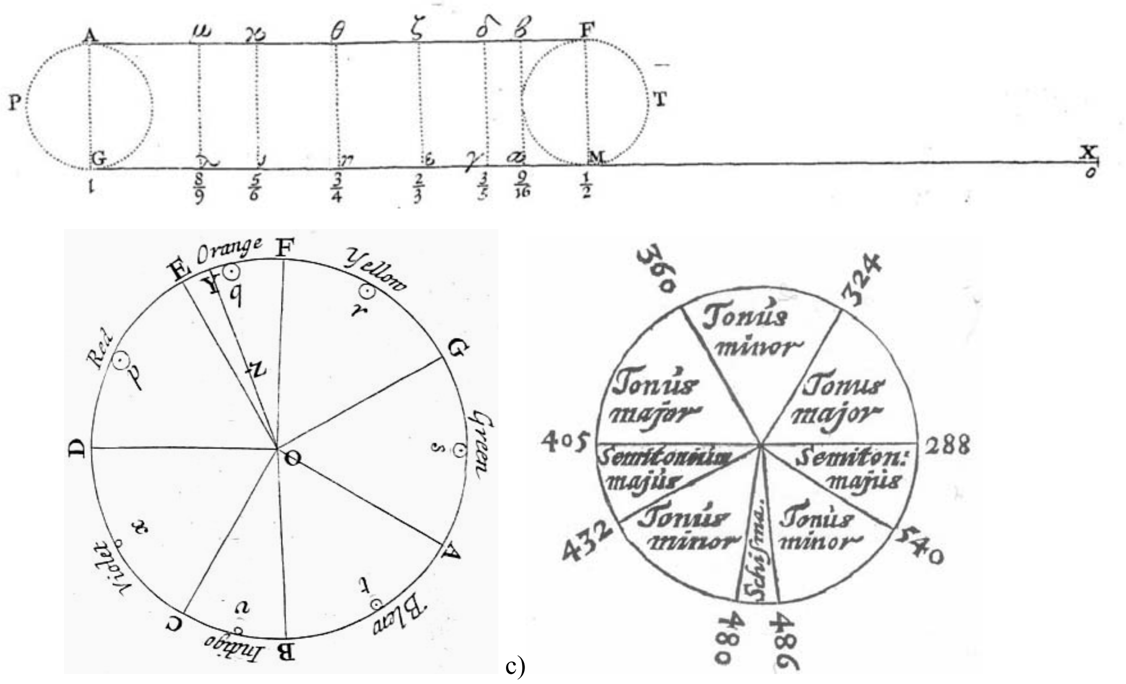


Abb. 2 a) Darstellung der Farbspektrums eines dreikantigen Prismas mit unterlegten musikalischen Intervallproportionen und b) Farbkreis bei Newton. c) Tonkreis bei Descartes.[6]

2. Descartes' Tonsystem

Neuartig ist Descartes' Darstellung der Töne und Intervalle auf einem Kreis. Ein Blick auf die anderen Illustrationen und seine Erklärungen in der gleichen Schrift lohnt sich, nicht nur in Hinsicht auf Newtons Farbe/Ton-Korrespondenz. Descartes' Compendium reflektiert den Stand der Musiktheorie zur Zeit Newtons, auch wenn sie in den 60er-Jahren des 17. Jahrhunderts schon mehr als 40 Jahre alt ist. Eine Theorie des dur/moll-tonalen Systems, die über Zarlino und Descartes hinausgeht, liegt für diese Zeit nicht vor, obschon die musikalische Praxis bereits weiter geschritten ist. Rameaus Funktionstheorie mit den Begriffen Tonika, Subdominante und Dominante ist bekanntlich ein Produkt des frühen 18. Jahrhunderts. Die strenge Durchführung und rückwärtsgewandte Abgrenzung gegen die herrschende Musikpraxis rückt Descartes paradoxerweise in die Nähe des dur/moll-tonalen Systems, wie im Folgenden angedeutet ist.

---

[5] Hermann von Helmholtz, *Handbuch der physiologischen Optik*, 2. Auflage Hamburg/Leipzig 1885, p. 308–309 [= Helmholtz1885]

[6] Quellen: Newton 1704, Vol. 1, Part II, Plate I, Fig. 4 / Vol. 1, Part II, Plate III, Fig. 11, Descartes 1656, p. 36

Descartes' Anordnung in Abbildung 2c ist spiegelsymmetrisch zur Vertikalen, welche das *Schisma* zwischen 480 und 486 in der geometrischen Mitte teilt. Die beigefügten Zahlen beziehen sich auf Saitenteilungen am Monochord. Sie repräsentieren also Wellenlängen- und nicht Frequenzverhältnisse. [7] Die aufsteigende Tonleiter entspricht also dem Durchschreiten des Kreises im Uhrzeigersinn, und somit abnehmenden Zahlen.

Die fortlaufende Proportion 288 : 324 : 360 : 405 : 432 : 480 : 486 : 540 hat den grössten gemeinsamen Faktor 3; sie kann also zu 96 : 108 : 120 : 135 : 144 : 160 : 162 : 180 gekürzt werden. Warum Descartes dies nicht tut und aus welchen Gründen er die Oktavreduktion (Division durch 2) zwischen 540 und 288 vornimmt, geht aus der Zeichnung allein nicht hervor. Es wäre auch die Anordnung 216 : 240 : 243 : 270 : 288 : 324 : 360 : 405 oder mit 3 gekürzt 72 : 80 : 81 : 90 : 96 : 108 : 120 : 135 möglich gewesen. Letztere ist minimal.

Descartes weist darauf hin, dass je nach Kontext die eine oder andere Variante der durch ein syntonisches Komma (Schisma) geteilten Töne zu nehmen ist. Es handelt sich um eine bewegliche Tonstufe[8]. Im Übergang von 288 nach 405 scheine diese Doppelstufe 480 zu sein, wenn sie auf 288 bezogen wird. In Bezug auf 405 aber scheine sie 486 zu sein. So resultieren die kleinen Terzen $\frac{2 \cdot 288}{480} = \frac{6}{5}$ bzw. $\frac{486}{405} = \frac{6}{5}$. Die verminderte Quinte ist dabei in zwei kleine Terzen plus Schisma zerlegt[9].

In den beiden einzigen Kreisdiagrammen Descartes' mit Zuweisungen von Zahlen zu Tonstufen ist übereinstimmend C = 360. Und im Text wird in der Folge konsequent diese Zuordnung verwendet. Wegen der Akzidentien bei B ist klar, dass es sich bei den Bezeichnungen um Tonnamen und nicht etwa bloss um die ersten Buchstaben des Alphabets handelt (vgl. Abb. 3). Die fehlende Beschriftung im ersten Tonkreis erklärt sich einerseits daraus, dass die Theorie bis zu diesem Punkt ohne feste Bezugstöne auskommt. Anderseits dienen Descartes die Abbildungen 3c und 3d als Begründung der Wahl 3a. Die unbeschriftete Figur lässt sich demzufolge auch als Prototyp der diatonischen Skala verstehen.

Bei einer konsistenten Zuordnung von Zahlen zu Tonnamen ergibt sich F = 540 und nicht 360. Das erste Diagramm erklärt dann die F-Dur-Skala, und nicht C-Dur.

---

[7] Descartes 1656, p. 50. Die Frequenzdeutung der Tonhöhe setzt sich erst mit Marin Mersenne, *Harmonie universelle*, 1636 durch.

[8] Descartes 1656, p. 36/38: „mobilis", „mobilitas"

[9] Descartes 1656, p. 36. Doppelte Tonstufen werden im Folgenden zur Verdeutlichung durch hochgestellte Vorzeichen + (höherer Ton) und – (tieferer Ton) gekennzeichnet. Descartes schlägt sogar ein Tasteninstrument mit geteilten Tasten und 19 Tönen pro Oktave vor, vgl. Johannes Brockt in Descartes 1656, p. 57, Anm. 41.

Auch die zweite Grafik Abb. 3c – sie befindet sich auf der gleichen Seite wie 3d – ist zur Vertikalen symmetrisch, die Symmetrieachse verläuft nun aber durch die Mitte von *b* und # und durch die Mitte von E und F. Der Wechsel zwischen den beiden Lesarten für B (rotundum und quadratum) ist also ihre Spiegelung an der original gestrichelt angedeuteten Achse durch B.

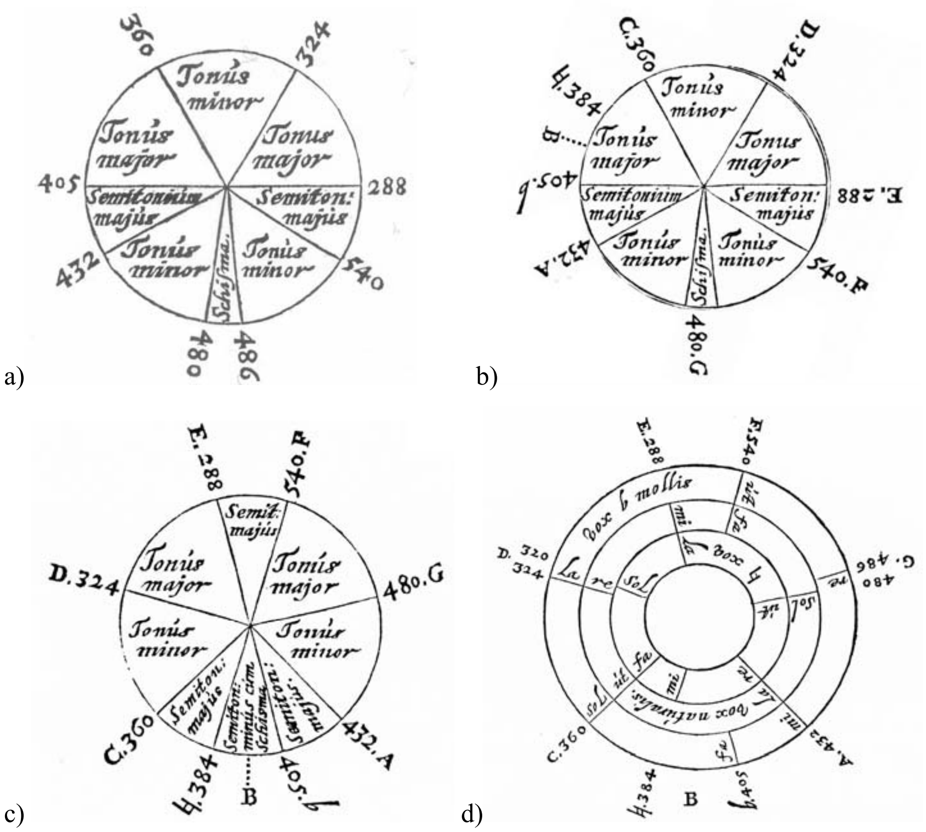


Abb. 3 Die Abbildung 3b entsteht aus 3a durch Unterlegung der geeignet verdrehten Beschriftung in 3c. Die originalen Abbildungen 3c und 3d verwenden die gleichen Tonnamen an gleicher Position mit gleichen Zahlen. Die letzte visualisiert die drei Hexachorde über F, C und G sowie den Gebrauch der Solmisationssilben.[10]

Ein Blick auf Abbildung 3d erklärt, weshalb Descartes die fortlaufende Proportion in den andern Darstellungen nicht mit 3 gekürzt hat, denn hier sind die Verhältniszahlen teilerfremd. Descartes hat die Zahlen so gewählt, dass alle drei Diagramme in einer einzigen fortlaufenden Proportion mit ganzen Zahlen ausgedrückt werden können.

Die Abbildungen 3c und 3d mit der Symmetrieachse zwischen den benachbarten Tönen *b* und *h* erklären zusammen das Tonsystem mit den drei „Stimmen“, „vox *b* mollis“, „vox naturalis“ und „vox #“, sowie den Gebrauch der Solmisationssilben für Hexachorde.

[10] Quellen: Descartes 1656, p. 36/40

Ein Hexachord ist bei Descartes eine streng symmetrische Abfolge von Halb- und Ganztönen T^-; T^+; S; T^+; T^-. [11] Das mittlere Hexachord kann auf zwei Arten zu einer siebentönigen Struktur erweitert werden, indem der Raum zwischen A und C durch *b* (405) oder durch # (384), das heisst *h*, aufgefüllt wird.[12] In linearer Anordnung präsentieren sich die drei Hexachorde und die Solmisationssilben wie folgt. Die eingefügten Töne sind in Klammern und Kleinbuchstaben angegeben:

Intervall		T^-	T^+	S	T^+	T^-	
vox #	G^+	A	H	C	D^+	E	[f]
vox naturalis	C	D^-	E	F	G^+	A	[b/h]
vox b mollis	F	G^-	A	B	C	D^-	[e]
Solmisation	ut	re	mi	fa	sol	la	

Die eingefügten "künstlichen" Septimen gehören in den andern Hexachorden zu den Stammtönen. Die drei Hexachorde stehen im Quintabstand mit vox b mollis dem tiefsten, vox naturalis dem mittleren und vox # dem höchsten. Die Wahlfreiheit zwischen *b* und *h* in der vox naturalis birgt potenziell eine Erweiterung des Tonsystems in sich, wenn andere Töne alteriert oder die Hexachorde transponiert werden:

> Sed respondeo hoc pacto fore progressum in infinitum, in illa autem | manu debuisse tantum unius cantilenæ mutationes exprimi: atqui illos intra tres ordines contineri demonstratur ex eo, quod in uno quoque ordine sex tantum termini contineantur, quorum duo mutantur […] unde evidentissimum est fore tunc eandem cantilenam quæ fuisset initio, cum nullus in eâ terminus idem remaneat. [13]

Die fortgesetzte Schichtung von Hexachorden im Quintabstand führt also zu einem unendlichen Tonvorrat, und schon nach wenigen Schritten haben die diese keine gemeinsamen Töne mehr. Durch Modulation in derart weit entfernte Bereiche ist die Identität einer Kantilene gefährdet, da zwischen Anfang und Ende keine Verbindung mehr besteht.
Die Gesamtheit der Tonigkeiten F – G^-/G^+ – A – B – H – C – D^-/D^+ – E in Abbildung 3d ist wiederum eine in sich symmetrische Struktur, bei der auch die Schismata der beiden variablen Stufen spiegelsymmetrisch zur vertikalen Achse durch B sind. Die drei konzentrischen Kreisringe bringen lineare und zyklische Aspekte des Systems zum Ausdruck. Zunehmende Tonhöhe ist nicht nur durch zunehmende „Uhrzeit", sondern auch im abnehmenden

---

[11] T^+/T^- = Tonus 8 : 9/9 : 10 = gr./kl. Ganzton; S = Semitonus 15 : 16 = Halbton

[12] „genera vocis arificialis, nempe *b* & #" [Descartes 1656, p. 40/42]

[13] Descartes 1656, p. 42/44

Mittelpunktsabstand codiert. Der Wechsel in ein benachbartes Hexachord ist dabei eine Drehung des Bezugssystems um eine Quinte (210.587°).
Mathematisch basiert Descartes' kreisförmige Anordnung auf einer logarithmischen Transformation der Frequenz- bzw. Wellenlängenverhältnisse in musikalische Intervalle. Gleiche Zahlenproportionen werden dabei auf gleiche Kreisbogenstücke abgebildet. Die Teilung der Oktave in 360 gleiche musikalische Intervalle der Grösse $1:\sqrt[360]{2}$ entspricht dabei 360 gleichen Winkeln auf einem vollen Kreis. Demzufolge wird das gleichstufige Tonsystem der zwölf Halbtöne auf eine arithmetische Folge mit Differenz 30° abgebildet ($1\,\text{cent} = \frac{1}{3}{}^\circ$). Die Zahlen auf Descartes' Horizontalen, $288 = 2 \cdot 144 = 2^5 \cdot 3^2$ und $405 = 5 \cdot 81 = 3^4 \cdot 5$, in Abbildung 3a ergeben $\frac{288}{405} = \frac{32}{45} \approx 0.7111$. Dieser Wert weicht von der geometrisch geteilten Oktave $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$ etwas ab und gehört zu einem Tritonus mit zwei grossen (8 : 9) und einem kleinen Ganzton (9 : 10). Der zugehörige Winkel beträgt $\log_2(\frac{405}{288}) \cdot 360° \approx 177.07°$ und nicht 180°.

Descartes' Siebentonskala baut auf den superpartikulären Verhältnissen der Form $n : (n+1)$ für $n = 8$, 9 und 15 auf. Durch die Aufspaltung der grossen Terz (4 : 5) in zwei kleine Ganztöne und ein Schisma (syntonisches Komma) kommt ein weiteres solches Verhältnis mit $n = 80$ dazu. Mit der doppelten Tonstufe sind im Tonvorrat drei Durdreiklänge (4 : 5 : 6) und drei Molldreiklänge (10 : 12 : 15) im Quintabstand (4 : 6 : 9) enthalten. Mit $F = 540$ ergibt sich so der Tonvorrat der Paralleltonarten F-Dur und D-Moll äolisch.

Die Konstruktion des Tonsystems basiert also auf symmetrischen Hexachorden, die durch eine Drehung um eine Quinte (3 : 2) ineinander überführt werden können. In ihrer drehsymmetrischen Anlage ist die Konstruktion moderner Tonsysteme, sowohl gleichstufiger als auch auf reinen Stimmungen basierender, vorgezeichnet. Descartes' Vorrat an Tonigkeiten erlaubt es in F-Dur und C-Dur sowie in ihren äolischen Paralleltonarten D-Moll und A-Moll mit reinen Dreiklängen auf den Hauptstufen zu musizieren. Wie bereits erwähnt ist allerdings die Wahlfreiheit zwischen *b* und *h* auf die vox naturalis beschränkt. Descartes argumentiert nicht mit Dreiklängen. Da seine Hexachorde aus Symmetriegründen mit einem kleinen

Ganzton beginnen müssen[14] ergibt sich für die vox naturalis mit *h* nicht die gleiche diatonische Skala wie bei Zarlino, bei der *c–d* ein grosser Ganzton ist.

Descartes weist im Text darauf hin, dass er dem tiefsten Ton F des Systems und damit der vox b mollis mit Absicht den höchsten Zahlenwert gegeben hat. Er bemerkt auch, dass der Tonvorrat auch aus Tetrachorden abgeleitet werden könnte und deshalb zur Solmisation eigentlich nur vier Silben (re – mi – fa – sol) notwendig wären.[15] Das Hexachord dagegen ist die maximale Struktur, welche die obige Überdeckung des Tonvorrats zulässt.

Geometrisch entsteht das unendliche Tonsystem, auf das Descartes im obigen Zitat anspielt, aus einer fortgesetzten Drehung um den Winkel, welcher die Hexachorde ineinander überführt. Dieser Winkel beträgt $\log_2(\frac{3}{2})\cdot 360° \approx 210.5865°$ und ist eine irrationale Zahl. Die pythagoreische Quinte (2 : 3) ist um etwas mehr als ein halbes Winkelgrad grösser als die gleichstufige mit dem Winkel 210°. Die Irrationalität der Zahl $210.5865...$ besagt, dass die Quinte und die Oktave inkommensurabel sind. Mit andern Worten, schon das pythagoreische Tonsystem ist potentiell unendlich, und die durch fortgesetzte Drehung um diesen irrationalen Winkel gewonnenen Töne füllen den Oktavraum mehr und mehr auf.

3. Newtons Farbtonordnungen

In Newtons linearer Anordnung der Farben und ihrer Proportionen (Abb. 2a und 4) liegt die symmetrische Abfolge grosser Ganzton, Halbton, kleiner Ganzton, grosser Ganzton, kleiner Ganzton, Halbton, grosser Ganzton vor, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$1 : \tfrac{8}{9} : \tfrac{5}{6} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{5} : \tfrac{9}{16} : \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{8}{9}$$
$$T^{+}\ S\ T^{-}\ T^{+}\ T^{-}\ S\ T^{+}$$

Im Rahmen des von Descartes vorgegebenen Tonvorrats sind mehrere Zuweisungen zu Tönen denkbar. Es ist nahe liegend die Strecke $\overline{XG}$ (von 0 bis 1) als ungeteilte Monochordsaite zu deuten. Dann ergeben sich die oberen beiden Skalen in Abb. 4. Gemäss Beschreibung Newtons im Text[16] sind die Farben von $\frac{1}{2}$ aus nach links abzutragen. Das Farbspektrum entsteht bei der nicht expliziten Versuchsanordnung aus einem vertikalen Lichtstrahl über *X*

[14] Descartes 1656, p. 40 Regel 2

[15] Descartes 1656, p. 44/46

[16] Newton 1704, Vol. I, p. 92

der am Prisma gebrochen wird. Gemäss Zuordnung der Farben zu Buchstaben im Kreisdiagramm wäre die unterste der vier Skalen die korrekte Deutung, wenn die Buchstaben Tonbezeichnungen sind[17]. Diese steht aber im Widerspruch zur Saitenteilung am Monochord. Die Schwierigkeit entsteht aus der Überlagerung der beiden Versuchsanordnungen „Saitenteilung am Monochord“ und „Brechung am Prisma“ bei gleichem Referenzpunkt *X* (= 0). Die Zuweisung im Kreisdiagramm ist im Sinne einer Frequenzproportionalität zwischen Tönen und Farben sinnvoll: Rot – Orange – Gelb – Grün – Blau – Indigo – Violett mit aufsteigenden Lichtfrequenzen gehören zu zunehmender Tonhöhe. Seit den 70er-Jahren des 17. Jahrhundert beschäftigt Newton die Frage der Übertragung der Oktavperiodizität auf die Farben.[18]

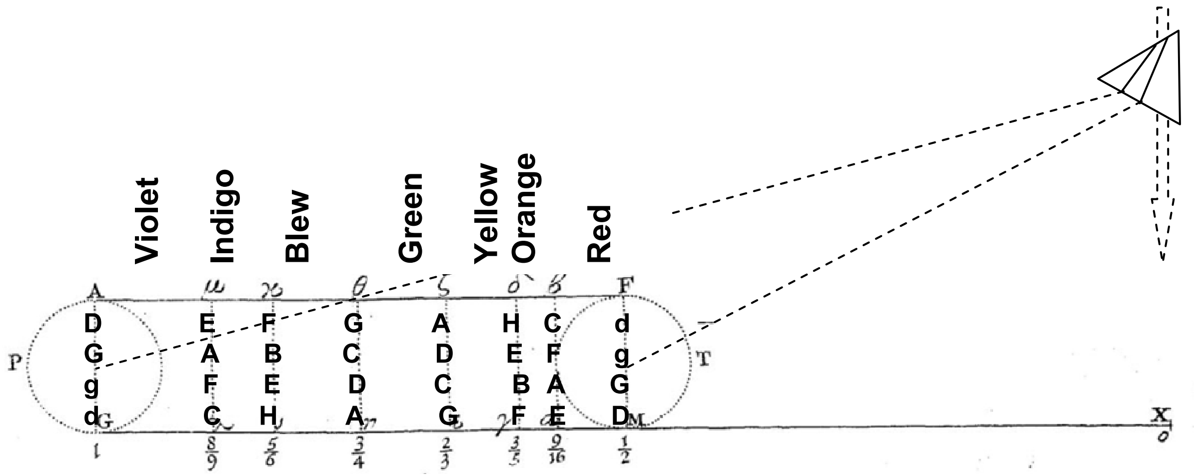


Abb. 4 Newtons Zuordnungen von Farben und musikalischen Intervallen am prismatischen Spektrum und Monochord (vgl. Abb. 2a).

Die lineare Anordnung ergibt für den violetten Ganzton eine grössere Strecke als für den roten Ganzton. Insofern scheint die Ausrichtung der Farbskala relevant zu sein. Die logarithmische Transformation auf den Kreis allerdings nivelliert diese Unterschiede aus, sodass sich für Rot, Grün und Violett gleich grosse Kreissektoren ergeben.
Newton gibt folgende Erklärung für die Entstehung des Farbkreises (vgl. Abb. 2b und 5):

With the Center O and Radius OD describe a Circle ADF, and distinguish its circumference into seven parts DE, EF, FG, GA, AB, BC, CD, proportional to the seven musical Tones or Intervals of the eight Sounds, *Sol*, *la*, *fa*, *sol*, *la*, *mi*, *fa*, *sol*, contained in an Eight, that is, proportional to the numbers, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$. Let the

[17] B ist als „B quadratum“, das heisst h, zu lesen.

[18] Vgl. David Whitwell, *Isaac Newton on Music, Essays on the Origins of Western Music, Essay Nr. 198*, <www.whitwellessays.com/docs/DOC_1096.doc>, Jan 2011) p. 3, Brief an Henry Oldenburg, 7. Dezember 1675

first part DE represent a red Colour, the second EF orange, the third FG yellow, the fourth GH green, the fifth AB blue, the sixth BC indico, and the seventh CD violet.[19]

Newton verwendet eine Solmisation mit Tetrachorden. Die äussern Töne “Sol –la” und “mi, fa, sol” können auf G (vox #) und die mittleren „fa – sol – la“ auf C (vox naturalis) bei Descartes bezogen werden. Dass auch Newtons Buchstaben Tonbezeichnung sind, ist offensichtlich[20]. Die Brüche mit Zähler 1 können zur fortlaufenden Proportion 80 : 45 : 72 : 80 : 72 : 45 : 80 erweitert werden. Die Grössenverhältnisse darin stimmen nicht genau mit den theoretischen Werten überein, wie der folgende Vergleich zeigt:

Farbe	Red	Orange	Yellow	Green	Blew	Indigo	Violet
Intervall	DE	EF	FG	GA	AB$^{\#}$	B$^{\#}$C	CD
	T^{+}	S	T^{-}	T^{+}	T^{-}	S	T^{+}
Newton Näherung	60.76	34.18	54.68	60.76	54.68	34.18	60.76
Logarithmen direkt	61.17	33.52	54.72	61.17	54.72	33.52	61.17
Farbkreis	60	33	58	58	58	33	60

60.2	47.3	44.1	57.9	57.9	44.1	47.3	60.2
V – R	R – O	O – Y	Y – G	G – B	B – I	I – V	V – R

Newtons Werte weichen um maximal 0.66° (gut fünf pythagoreische Kommata oder etwas weniger als ein syntonisches Komma) von den exakten Werten ab. Offenbar verwendet er die Potenzreihenentwicklung $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$ des Logarithmus. Für Werte von x in der Nähe von 0, also kleine musikalische Intervalle, ist $\ln(1+x) \approx x$ und durch Einsetzen der Werte $x = -\frac{1}{9}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{16}$ ergibt sich $\ln\left(\frac{8}{9}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{9}\right) \approx -\frac{1}{9}$, $\ln\left(\frac{9}{10}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{10}\right) \approx -\frac{1}{10}$ und $\ln\left(\frac{15}{16}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{16}\right) \approx -\frac{1}{16}$. Die Logarithmen der superpartikulären Verhältnisse $\frac{n-1}{n}$ verhalten sich also in erster Annäherung wie ihre Nenner, und zwar umso mehr, je grösser n ist.[21]
Für den üblichen Tritonus aus zwei grossen und einem kleinen Ganzton ergibt sich mit Newtons Rechnung 177.06°. Newtons Tritonus FB hingegen besteht aus zwei kleinen und

---

[19] Newton 1704, Vol. I, p. 114

[20] Als Mathematiker hätte er keinen Grund eine Beschriftung nicht mit *A* zu beginnen. Man beachte auch die korrespondierende Abfolge *p* bis *x* der Sektormittelpunkte! Newtons Beschriftungen sind sehr konsequent.

[21] Aus Briefen an Collins im Jahre 1670 geht hervor, dass sich Newton in Zusammenhang mit der musikalischen Arithmetik mit Logarithmen und Mercators Quadratur der Hyperbel, die damit in engem Zusammenhang steht, befasst hat (vgl. Whitwell, p. 2). Die Bestimmung von Logarithmen war zu dieser Zeit noch aufwendig. Die Zähler 1 in der fortlaufenden Proportion sind also keine Druckfehler.

einem dazwischen liegenden grossen Ganzton und ergibt nur 170.12° ($\approx 170.61°$ mit Logarithmen). Im Farbkreis, der nicht zwischen grossen und kleinen Ganztönen unterscheidet, beträgt er etwa $3 \cdot 58° = 174°$.[22]

Wegen der Verteilung der grossen und kleinen Ganztöne ist die Deutung der Skala als Dorisch (wie meistens angenommen wird) nicht unproblematisch. Insbesondere ist das Intervall CE bei Newton eine pythagoreische Terz aus zwei grossen Ganztönen. Im C-Durdreiklang ist somit der Grundton im Vergleich zur Proportion 4 : 5 : 6 um ein syntonisches Komma zu tief und damit für Verfechter der reinen Stimmung unbrauchbar. Dafür ist Newtons Skala spiegelsymmetrisch zum Ton D wie die Klaviatur des Klaviers und die C-Dur-Tonleiter der gleichstufigen Stimmung.

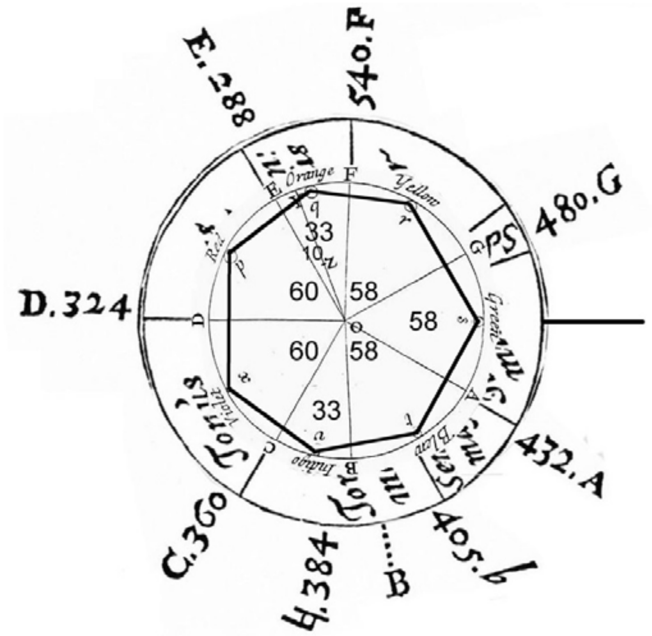


Abb. 5 Newtons Farbkreis (Abb. 2b) über Descartes diatonischer Skala (Abb. 3b). Descartes' Graphiken sind so verdreht worden, dass die Tonbezeichnungen zur Deckung kommen. Descartes' B, bezeichnet die Mitte zwischen den beiden Halbtönen *b* und *h*. Newtons B ist als „B quadratum", das heisst *h*, zu deuten.

Merkwürdig aus musikalischer Sicht ist ferner Newtons „Schisma", das dem Halbton EF von unten abgezogen ist. Nun erfüllt dieses aber einen andern Zweck. Wie aus dem Text[23] hervorgeht, deutet er nämlich auch das innere des Kreises als Orte von Farbempfindungen, und zwar wird der Kreismittelpunkt *O* als Unbuntpunkt verstanden. Die kleinen Kreise in der

[22] Die Winkel in den Zeichnungen der englischen, deutschen und französischen Ausgaben zwischen 1704 und 1720 variieren.

[23] Newton 1704, Vol. 1, p. 114–116

Mitte der Intervalle sind Repräsentanten der zugehörigen Spektralfarbe[24]. Der Punkt *Z* im Innern des Kreises stellt also eine schwach gesättigte Farbe im untern Bereich von Orange dar. Und ihr Farbton ist um ein Schisma von der Farbgrenze Rot/Orange entfernt[25].
Der Polygonzug von *p* bis *x* im Uhrzeigersinn enthält die Spektralfarbenrepräsentanten und die Purpurstrecke $\overline{px}$, das heisst die Mischfarben zwischen den spektralen Endpunkten Rot und Violett. Diese ist parallel zu CE und senkrecht zur Symmetrieachse des Siebenecks.

Das Innere des Siebenecks besteht aus den Mischfarben nicht benachbarter Spektralfarben. Newtons Anordnung und Deutung ist qualitativ dieselbe, wie diejenige der so genannten Helmholtz-Koordinaten Farbton und Sättigung[26]. Das Siebeneck der Primärfarben („primary colours") ist symmetrisch zur Achse durch „Green" und den Ton D und nahezu regulär, dass heisst es bildet eine Zerlegung der Oktave in sieben ähnlich grosse Tonschritte, die alle grösser als der Halbton und kleiner als der grosse Ganzton sind. Der Grund für diese Grössenverschiebung liegt darin, dass durch die Verbindung der Sektormittelpunkte, die Anteile benachbarter Halb- und Ganztöne je hälftig zum Zug kommen. Die Rechnung ergibt die folgenden Proportionen und Mittelpunktswinkel: $\sqrt{\frac{10}{9}\cdot\frac{16}{15}} \approx 1.0866\ (44.1°)$ bzw. $\sqrt{\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}} \approx 1.09545\ (47.3°)$ für die halbierten kleinen Terzen und $\sqrt{\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}} \approx 1.11803\ (57.9°)$ für den gemittelten Ganzton. Die regelmässige Teilung der Oktave in sieben gleiche Schritte hingegen ergibt $\sqrt[7]{2} = 1.10409\ (51.4°)$ und der (grosse) Halbton beträgt nur $\frac{16}{15} \approx 1.0667$ (33.5°). Newtons Farbtonkreis überlagert der Notenskala, welche Grenzfarben definiert, eine Siebenteilung des Kreises. Da seine Farbmischungen von den Intervallmittelpunkten als den bestmöglichen Farbrepräsentanten ausgeht, werden die Grenzpunkte, die das Tonsystem essentiell charakterisieren, für die Farbtheorie marginal. Sie sind die Farbgrenzen, dort wo beispielsweise Orange an Gelb oder Gelb an Grün stösst. Durch die Einführung der Farbprototypen wird es auf diese Weise möglich, auch die im Prismenspektrum nicht vorkommenden Purpurfarben in die Oktave des Farbkreises einzubinden.

---

[24] „p the center of gravity of the arch DE" / „the red-making rays", „the middle between F and G […] best Yellow" p. 115

[25] Newton 1704, Vol. 1, p. 116–117

[26] „quality" = Winkel vom Kreismittelpunkt aus gemessen; „fulness or intenseness" = Abstand vom Kreismittelpunkt [Newton 1704, Vol. 1, p. 114/115]

Newton gibt auch eine Methode der linearen Farbmischung mit einer Schwerpunktkonstruktion am Farbkreis. Danach liegen Mischfarben entsprechend ihren Anteilen auf der geradlinigen Verbindung zugehöriger Farbpunkte. Es ist möglich, den gleichen Farbeindruck auf verschiedene Weise additiv zu erhalten. Der Farbeindruck Z kann also mit einer geeigneten Gewichtung von Gelb, Orange und Weiss erhalten werden. Ebenso mit Gelb, Rot und Weiss. Mit Rot und Grün sowie mit Gelb und Violett allein lässt sich ein Farbeindruck mit gleichem Farbton wie Z aber etwas weniger gesättigt herstellen, da die Verbindungslinien Red-Green und Yellow-Violet nahe an Z vorbeigehen.
Aus seiner flächigen Darstellung der Farben, schliesst Newton ferner, dass es durch Mischen von nur zwei Spektralfarben möglich sein sollte, einen weissen Farbeindruck zu erzielen.[27] Dies ist tatsächlich der Fall, wie im 19. Jahrhundert von Maxwell und Helmholtz gezeigt wird.
Die Geradlinigkeit der Verbindung von Rot und Violett, der Purpurstrecke, ergibt sich zwingend aus Newtons Erläuterungen. In der heutigen Deutung werden nur gerade die Enden des kontinuierlichen Bogens der Spektralfarben geradlinig verbunden. Das ist die Form, von der Helmholtz ausgeht (vgl. Abb. 7a). Sie wird im 20. Jahrhundert als CIE-Dreieck in ihre heutige Form gebracht.
Die durch additive Mischung von Newtons Farbprototypen möglichen Farbeindrücke liegen im Innern des Siebenecks. Die Schwerpunktskonstruktion entspringt der Vorstellung von sieben Massenpunkten, die durch ihre Anteile in der Mischfarbe gewichtet werden. Auf diese Weise können grundsätzlich keine Farben erzeugt werden, die ausserhalb des konvexen Siebenecks liegen.

Eine Deutung der Spektralfarben mit Lichtfrequenzen (oder Wellenlängen) drängt sich für Newton nicht auf, da seine Korpuskeltheorie für Licht von verschiedenartigen Partikeln mit verschiedenem Brechungsverhalten ausgeht.[28] Wenn die Primärfarben in der Struktur (oder Grösse) der Partikel codiert ist, heisst dies aus Newtons diskreter Sicht, dass es sieben Sorten

---

[27] Newton 1704, p. 116

[28] In den Queries 12–14 [1704, Vol III, p. 135–136] ist Newton nahe an einer Wellendeutung. Er geht davon aus, dass Licht auf der Retina Schwingungen auslöst, die vom Sehnerv analog (wie durch eine Glasfaserleitung) ans Gehirn weitergeleitet wird. In der erweiterten Neuauflage der *Opticks* von 1717 wird die Korpuskelauffassung mit verschieden grossen Teilchen als minimale und hinreichende Hypothese verfochten. Die eindringenden Photonen lösen auf der Netzhaut schnelle Schwingungen aus, ähnlich wie ein fallender Stein auf einem ruhenden Gewässer [Qu. 29, 1717, Vol III, p. 347]

von Lichtpartikeln (Photonen) gibt. Die Beschreibung der Farbmischungen verweist den Ort der kontinuierlichen Übergange an die Wahrnehmung („Sensorium“):

It has been proved also, that when the several sorts of rays are mixed, and in crossing pass through the same space, they do not act on one another so as to change each others colorifick qualities, (Exper. 10. Pt.2.) but by mixing their actions in the Sensorium beget a sensation differing from what either would do apart, that is a sensation of a mean Colour between their proper Colours.[29]

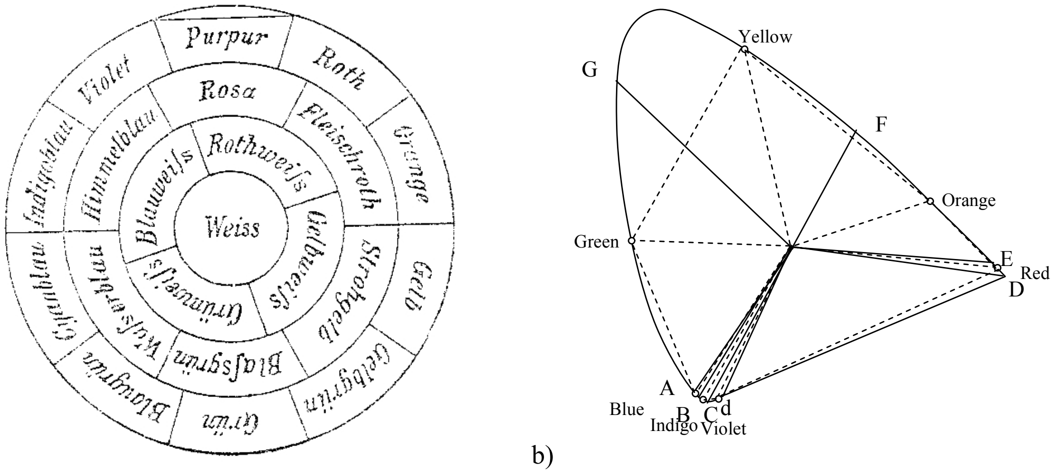
4. Gegenfarbentheorie und Ausblick

Farben auf Kreisdurchmessern sind in Newtons Farbtopologie Gegenfarbenpaare. Durch die richtige Balance ihrer Anteile lässt sich wie bereits erwähnt Licht herstellen, das als Weiss empfunden wird. Eine Rückübertragung dieser Eigenschaft auf Töne im Tritonusabstand ist wenig zwingend. Immerhin liesse sich sagen, dass Töne im geometrischen Tritonus-Abstand ($1:\sqrt{2}$) den Bezug zu einer eindeutigen Tonart verunmöglichen und sich so neutralisieren, ähnlich wie der gleichstufige übermässige Dreiklang, die vollständige chromatische Skala, aber auch wie ein Durdreiklang bei geeigneter Gewichtung seiner Bestandteile. Der Tritonus zu Grün ist im Übrigen auf der im Regenbogen und in den prismatischen Farben nicht vorkommenden Purpurlinie zu finden. Purpur, die königliche Farbe, ist also nachgerade etwas künstlich Diabolisches jenseits von Grün, der Naturfarbe par excellence.
Die heute akzeptierte Young/Helmholtz’sche Dreifarbentheorie geht davon aus, dass auf der Retina drei Typen von Farbrezeptoren mit überlappenden spektralen Empfindlichkeitsbereichen am Anfang der Farbverarbeitung im Gehirn stehen. Das weisse Sonnenlicht hingegen hat ein kontinuierliches Frequenzspektrum, in dem alle Frequenzen des sichtbaren Lichts vorkommen. Newtons Siebeneck kann in das CIE-Farbendreieck[30] eingebettet werden (vgl. Abb. 6). Die Purpurstrecken kommen dabei zur Deckung, und um das Siebeneck liegen auf einer gekrümmten Linie die Spektralfarben. Zwischen dem Siebeneck und dem gekrümmten Spektralfarbenzug liegen diejenigen Farbeindrücke, die durch additive Mischung der sieben Primärfrequenzen nicht erhalten werden können. Die Position der Frequenzen auf dem Spektralfarbenzug zeigt, dass kein linearer Zusammenhang zwischen Winkeln und musikalischen Intervallen besteht. Newton schlägt an andern Stellen eine nicht-lineare Transformation vor, bei der die musikalischen Proportionen mit

[29] Newton 1704, Vol. 1, p. 118

[30] Vgl. Zollinger 1999, p. 68

$x \mapsto \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ verzerrt werden[31], wodurch eine bessere Übereinstimmung am violetten Ende des Spektrums erzielt wird. Allerdings sind dadurch die musikalischen Harmonien mit ihren einfachen Proportionen verloren.



a) b)

Abb. 6 a) Helmholtz' schematischer Farbkreis[32]. Der äusserste Kreisring zwischen Roth und Violet repräsentiert die Spektralfarben. Die Purpurlinie schneidet dem Kreis ein kleines Segment ab. Die konzentrischen Kreise erinnern an die Hexachordringe bei Descartes (Abb. 3d). Der Abstand zur Kreismitte Weiss definiert die Sättigung, der Winkel zum Mittelpunkt den Farbton. b) Übertragung von Newtons Tönen und Farben auf den schuhsohlenförmigen Spektralfarbenzug im CIE-Dreiecks (qualitativ)[33]. Die Farben sind am violetten Ende sehr nahe beieinander. Ferner schneidet die Verbindung Yellow-Green ein grosses Stück aus der Schuhsohle ab.

Physiologisch hängen diese Ungereimtheiten zum einen damit zusammen, dass die Empfindlichkeitskurven der Farbrezeptoren für mittel- und langwelliges Licht generell viel näher zusammen liegen als diejenigen für kurz- und mittelwelliges und dass die Rezeptoren für kurzwelliges Licht empfindlicher als die andern beiden sind. Zum andern werden die drei Farbreize nach heutiger Auffassung nicht nur additiv sondern in asymmetrischer Weise auch differenziell ausgewertet. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass die Topologie der Farben gleicher Helligkeit zwingend zweidimensional ist, da wir Trichromaten sind, dass aber die Geometrie im CIE-Dreiecks nicht den euklidischen Gesetzen folgt. Bei einer nicht-linearen Transformation der Farbeindrücke auf eine Kreisscheibe hingegen, welche die subjektiven Farbabstände besser zum Ausdruck bringt, liegen die Spektralfarben nicht mehr auf dem Rand, und die Additivität der Farbmischung ist verloren. Das Farbuniversum ist gekrümmt.

---

[31] „as the Cube-roots of the Squares of the numbers $1 : \frac{8}{9} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4} : \frac{2}{3} : \frac{3}{5} : \frac{9}{16} : \frac{1}{2}$ " [Newton 1704, Vol. II, p. 18]

[32] Quelle: Helmholtz 1885, p. 325

[33] Als Referenz diente das CIE-Dreieck für den 2°-Beobachter in Kurt Schläpfer, *Farbmetrik in der Reproduktionstechnik und im Mehrfarbendruck*, UGRA, St. Gallen 1993, p. 63