



Стохастическая версия модели нейронной массы Янсена и Рита: анализ и численные данные

Маркус Аблайдингер¹·Эвелин Баквар¹·
Харальд Хинтерляйтнер¹

Получено: 26 сентября 2016 г. / Принято: 23 мая 2017 г. / Published online: 08 August 2017
© Автор(ы) 2017. Данная статья распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая разрешает неограниченное использование, распространение и воспроизведение на любых носителях при условии указания автора(ов) и источника, предоставления ссылки на лицензию Creative Commons и указания внесенных изменений.

Абстрактный Модели нейронной массы предоставляют полезную основу для моделирования мезоскопической нейронной динамики, и в этой статье мы рассматриваем модель нейронной массы Янсена и Рита (JR-NMM). Мы формулируем ее стохастическую версию, которая возникает путем включения случайного ввода и имеет структуру затухающей стохастической гамильтоновой системы с нелинейным смещением. Затем мы исследуем свойства траектории и границы моментов модели. Более того, мы изучаем асимптотическое поведение модели и предоставляем результаты долгосрочной устойчивости, устанавливая геометрическую эргодичность системы, что означает, что система — независимо от начальных значений — всегда сходится к инвариантной мере. В последней части мы моделируем стохастическую JR-NMM с помощью эффективной численной схемы, основанной на подходе расщепления, который сохраняет качественное поведение решения.

Ключевые слова Модель нейронной массы Янсена и Рита·Стохастическая гамильтонова система· Асимптотическое поведение·Стохастические схемы расщепления

1 Введение

Модели нейронной массы изучались как модели, описывающие крупнозернистую активность больших популяций нейронов [1–7] с 1970-х годов. Они успешно использовались для подгонки данных нейровизуализации, понимания ритмов ЭЭГ [8] или эпилептическая динамика мозга [9], и теперь они также являются основным строительным блоком в Виртуальном Мозге [10]. Для

Б.Х. Хинтерляйтнер

Харальд.Хинтерлейтнер@jku.at

М. Аблейдингер

Маркус.Аблейдингер@jku.at

Э. Баквар

Эвелин.Баквар@jku.at

Краткое изложение их истории, применения и перспективы их будущего возможного использования мы ссылаемся на [11]. В общем случае модели нейронной массы можно вывести как предел среднего поля из микроскопических моделей [12] и включают в себя всего несколько переменных состояния, таких как средние мембранные потенциалы и средние скорости активации популяции.

В этой статье мы сосредоточимся на модели нейронной массы Янсена и Рита (JR-NMM) [13], которая была представлена в качестве модели в контексте ритмов электроэнцефалографии (ЭЭГ) человека и вызванных зрительных потенциалов [14]. Он восходит к работам Лопеша да Силвы и Ван Роттердама [3,5,15]. JR-NMM — это биологическая мотивированная модель нейронной популяции, основанная на свертке, включающая две субпопуляции, а именно возбуждающие и тормозные интернейроны, образующие петли обратной связи, которые могут описывать фоновую активность, альфа-активность, спорадическую, а также ритмическую эпилептическую активность.

Оригинальная модель JR-NMM сформулирована как набор из трех связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, т. е. они составляют систему связанных нелинейных осцилляторов, часто переписываемую как шестимерная система уравнений первого порядка. После введения этой системы в разделе.2, мы переписываем систему в формате классической механики, то есть как затухающую гамильтонову систему с нелинейным смещением. Кроме того, в большинстве литературы JR-NMM включает термин, представляющий внешний вход или фоновый шум, что по сути делается путем объявления этой входной функции стохастическим процессом. Математически это подразумевает, что процесс решения системы ОДУ также является стохастическим процессом, наследующим аналитические свойства входного процесса и требующим некоторой структуры стохастического анализа для его математической обработки. В разделе.3 мы обсуждаем варианты такой структуры, и в этой статье мы решили сформулировать стохастическое JR-NMM как стохастическое дифференциальное уравнение (SDE) с аддитивным шумом, в частности, стохастическую затухающую гамильтонову систему с нелинейным членом. Системы SDE этой или подобной формы хорошо изучены в литературе по молекулярной динамике, где их часто называют уравнениями Ланжевена. В этой статье мы приводим ряд результатов, использующих различные методы, доступные в рамках стохастического анализа, разработанного для СДУ: в разделе.4 мы устанавливаем основные свойства SDE, такие как границы моментов и границы поведения пути. Раздел.5 дополняет существующий анализ динамики детерминированного JR-NMM, в частности, мы рассматриваем стохастические версии равновесных решений, т. е. инвариантные меры, а также долговременное поведение решений SDE относительно этой инвариантной меры. Эти результаты могут быть интерпретированы как отправные точки для изучения феноменологических стохастических бифуркаций или переходов, вызванных шумом. Наконец, в разделе.6, мы представляем эффективные численные методы, разработанные для стохастических гамильтоновых задач, и показываем, что эти численные методы, которые представляют дискретные стохастические системы для любого фиксированного размера шага, соблюдают свойства, ранее установленные для системы SDE (при условии соблюдения мягких условий на размер шага). Таким образом, полученные численные методы будут не только весьма эффективными для будущих вычислительных исследований со стохастическим JR-NMM, они также обеспечивают *надежные* результаты вычислений.

¹Термин «уравнение Ланжевена» восходит к модели броуновского движения Ланжевена (1908), описывающей скорость броуновской частицы в жидкости с помощью того, что сейчас называется процессом Орнштейна-Уленбека. Однако, например, в литературе по молекулярной динамике этот термин относится к классу моделей, описывающих взаимодействие тяжелых частиц с легкими [16], тогда как в некоторой физической литературе это может также относиться к уравнениям SDE в целом, как в [17].

2 Описание оригинальной модели нейронной массы Янсена и Рита

Подробное изложение вывода модели с точки зрения нейронауки можно найти в [18–20]. Основная нейронная популяция, возбуждающие и тормозные интернейроны, в каждом случае описывается как обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка, который преобразует среднюю входящую частоту срабатывания в средний мембранный потенциал, так и нелинейной функцией, которая преобразует средний мембранный потенциал в среднюю выходную частоту срабатывания. Для $\tau \in [0, T]$ с $T \in \mathbb{R}^+$, JR-NMM, предложенный в [13] состоит из трех связанных нелинейных ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0(t) &= Aa \operatorname{Сигм} x_1(t) - x_2(t) - 2ax_0(t) - a_2x_0(t), \\ \ddot{x}_1(t) &= Aa \left[p(t) + C_2 \operatorname{Сигм} C_1 x_0(t) \right] - 2ax_1(t) - a_2x_1(t), \\ \ddot{x}_2(t) &= Bb - b_1 \operatorname{Сигм} C_3 x_0(t) - 2Bx_2(t) - b_2x_2^2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

которую можно записать как шестимерную систему ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= x_3(t), \quad \dot{x}_1(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_5(t), \\ \dot{x}_3(t) &= Aa \operatorname{Сигм} x_1(t) - x_2(t) - 2\alpha x_3(t) - a_2x_0(t), \\ \dot{x}_4(t) &= Aa \left[p(t) + C_2 \operatorname{Сигм} C_1 x_0(t) - 2\alpha x_4(t) - a_2x_1(t) \right], \\ \dot{x}_5(t) &= Bb - b_1 \operatorname{Сигм} C_3 x_0(t) - 2bx_5(t) - b_2x_2(t),\end{aligned}\quad (2)$$

с начальным значением $(x_0(0), \dots, x_5(0)) = x_0 \in \mathbb{R}^6$. Здесь, x_j для $j \in \{0, 1, 2\}$ описывают средние постсинаптические потенциалы отдельных популяций нейронов. *выходной сигнал* $u(t) = x_1(t) - x_2(t)$ описывает средний мембранный потенциал основного семейства, т.е. главных нейронов JR-NMM (см. [18, 19, 21]). Функция $p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ описывает внешний вход, который может исходить как от внешних источников, так и от активности соседних нейронных популяций. Мы обсудим математическое моделирование более подробно в конце этого раздела. Сигмоидальная функция $\operatorname{Сигм}: \mathbb{R} \rightarrow [0, i_{\max}]$, $i_{\max} > 0$ (как предложено в [4]) дается выражением

$$\operatorname{Сигм}(x) = \frac{i_{\max}}{1 + e^{g(w_0 - x)}}$$

и работает как функция усиления, преобразующая средний мембранный потенциал нейронной популяции в среднюю частоту активации (см. [22, 23]). Константа i_{\max} обозначает максимальную частоту активации нейронной популяции, $w_0 \in \mathbb{R}$ это значение, при котором достигается 50% максимальной скорострельности и $g > 0$ определяет наклон сигмовидной функции при w_0 .

Система (2) включает 11 параметров $A, B, a, b, C_1, C_2, C_3, C_4, i_{\max}, g, w_0$ и типичные значения этих параметров, взятые из [13, 19], приведены в таблице 1. Параметры A, B и B моделируют основные черты постсинаптических потенциалов. В частности, A и B обозначают возбуждающее и тормозное синаптическое усиление, соответственно, и

Таблица 1 Типичные значения, установленные в оригинальном JR-NMM [13] взято из [19]

Описание параметра		Типичное значение
A	Средний возбуждающий синаптический прирост	3,25 мВ
B	Средний тормозной синаптический прирост	22 мВ
$a-1$	Постоянная времени возбуждающего постсинаптического	10 мс
$b-1$	потенциала Постоянная времени тормозного постсинаптического	20 мс
C	потенциала Среднее число синапсов между популяциями	135
C_1	Среднее число син., установленных главными нейронами на возбуждающих интернейронах	C
C_2	Среднее число син., установленных возбуждающими интернейронами на главных нейронах	0,8 C
C_3	Среднее число син., установленных главными нейронами на тормозных интернейронах Среднее	0,25 C
C_4	число син., установленных тормозными интернейронами на главных нейронах Максимальная	0,25 C
имакс	частота срабатывания нейронных популяций (макс. сигмовидной функции)	5 с ⁻¹
ν_0	Значение, при котором достигается 50% от максимальной частоты	6 мВ
Γ	импульсов. Наклон сигмовидной функции при ν_0	0,56 мВ ⁻¹

a -и b -1 являются соответствующими постоянными времени. Константы связности C_j для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, моделирующие взаимодействие между основной популяцией и интернейронами, предполагаются пропорциональными одному параметру C который характеризует среднее количество синапсов между популяциями (см. [13]). Поведение решения системы (2) чувствительно зависит от значений параметров (мы ссылаемся на бифуркационный анализ в [18, 19, 24]). В частности, изменения в константах связности C_j может привести к кардинальным изменениям пути решения.

Впоследствии мы применим гамильтонову формулировку классической механики для изучения связанных осцилляторов, таких как Система (1) или (2). Позволять $\mathbf{B} = (x_0, x_1, x_2)$ и $\mathbf{\Gamma} = (x_3, x_4, x_5)$ обозначают трехмерные векторы, тогда Система (2) можно записать как *затухающая гамильтонова система с нелинейным смещением*,

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \nabla_{\mathbf{P}} H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{Q}} H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - 2\mathbf{\Gamma} \mathbf{P} + \mathbf{G}(t, \mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой формулировке система состоит из *Гамильтонова часть* функций Гамильтона $\mathcal{H} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$,
0,

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{P}\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\mathbf{\Gamma} \mathbf{Q}\|_{\mathbb{R}^3}^2),$$

адемпфирующая часть матрицей демпфирования $\mathbf{\Gamma} = \text{диагональ}[a, a, b] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, и *нелинейная часть* заданная функцией $\mathbf{G} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, с

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{Q}) = A a \text{Сигм}(x_1 - x_2), A a \mathbf{p}(t) + C_2 \text{Сигм}(C_1 x_0), B b C_4 \text{Сигм}(C_3 x_0). \quad)_T$$

Гамильтониан $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ может быть интерпретирована как полная энергия электрического параллельного резонансного контура RCL; см. [22]. В частности, $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ пропорционален

сумма индуктивной и емкостной энергии нейронной популяции соответственно. Если $\text{вход}p(t)$ — ограниченная детерминированная функция, кривая решения и полная энергия $H(Q, P)$ ограничены (это непосредственный результат теоремы 4.2 в разделе 4) и изменение полной энергии во времени определяется выражением

$$\frac{d}{dt} H(Q, P) = -2\pi\Gamma P + \pi\Gamma G(t, Q).$$

В оригинальной статье Янсена и Рит [13], внешний $\text{вход}p(t)$ использовался для представления спонтанного фоновых шума, а также пиковых функций для генерации вызванных потенциалов. В последнем случае внешний вход был смоделирован как детерминированная периодическая функция (см. также [25]) и с этим типом входных данных решение Системы (1) (или (2) или (3)) остается детерминированной функцией, и математическим фоном для ее обработки является детерминированный анализ. В первом случае, т.е. когда $\text{вход}p(t)$ представляет собой спонтанный фоновый шум и моделируется как стохастический процесс, математический фон немедленно меняется на стохастический анализ. В частности, решение Системы (1), (2) или (3) становится стохастическим процессом и наследует математические свойства входного процесса $p(t)$. В рамках стохастического анализа, (1), (2) или (3) может интерпретироваться в различных рамках, с последствиями, зависящими от конкретного выбора $p(t)$.

(i) Структура случайных обыкновенных дифференциальных уравнений (RODE):

RODE — это путевые ОДУ, включающие стохастический процесс в правой части, т.е. для достаточно гладкой функции $\phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ m -мерный стохастический процесс $\xi(t)$, n -мерная система RODE задается выражением

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t), \xi(t)),$$

с соответствующим начальным значением. Затем можно выбрать стохастический входной процесс, например, как процесс Винера или процесс цветного шума, эти процессы существуют в классическом смысле и имеют почти наверняка непрерывные пути. В этой структуре стандартный детерминированный анализ, например, для гарантии существования и единственности решений может быть применен попутно; см., например, [26], Гл. 1. Однако решение этого уравнения наследует свойства гладкости движущегося случайного процесса $\xi(t)$, независимо от гладкости функции ϕ . Анализ свойств и динамики решений RODE может быть выполнен попутно с помощью стандартных методов анализа, имея в виду, что низкая гладкость решений ограничивает применимость многих классических результатов, таких как теорема Тейлора. Далее мы ссылаемся на [27] для соответствующих результатов, касающихся случайных динамических систем. Другое следствие касается численной обработки: поскольку порядок сходимости классических численных схем для ОДУ определяется гладкостью решения этого ОДУ, когда такие схемы применяются по пути к РОДУ, они обычно сходятся с более низким порядком, чем их ожидаемый. В частности, они сходятся с порядком не более $1/2$ когда в качестве входного процесса выбран процесс Винера или процесс цветного шума, поскольку их пути являются только непрерывными по Гельдеру порядка меньше $1/2$. Мы ссылаемся на [28] и ссылки на него для получения дополнительной информации о численных методах, специально разработанных для RODE.

(ii) Структура стохастического дифференциального уравнения: Если бы кто-то выбрал стохастический входной процесс в RODE, как указано выше, в качестве гауссовского процесса белого шума, то ему пришлось бы иметь дело с тем фактом, что такой процесс существует только в том смысле, что *обобщенные стохастические процессы*, видеть [29], Раздел 3.2 или [30], Приложение I. В частности, гауссовский белый шум обычно интерпретируется как (обобщенная) производная винеровского процесса, который сам по себе почти наверняка нигде не дифференцируем в классическом смысле. Гораздо удобнее работать в рамках классического стохастического анализа, разработанного для работы с дифференциальными уравнениями, «подверженными (белому) шуму», и интерпретировать системы (1), (2) или (3) как стохастическое дифференциальное уравнение; см. также [29], Раздел 4.1. Значительное количество результатов, касающихся анализа, динамики, численных данных, статистики и т. д. SDE, доступно, и для стохастических численных данных мы ссылаемся, например, на [31], который также обрабатывает SDE, вызванные цветным шумом.

3 Модель нейронной массы Янсена и Рита как затухающая стохастическая Гамильтонова система с нелинейным смещением

Позволять $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ быть полным вероятностным пространством вместе с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ которая является право-непрерывной и полной. Мы расширяем модель Системы (2) допуская такие возмущения, как $r(t)$ не только в $x_1(t)$ но в обоих случаях $x_0(t)$ и $x_2(t)$ также. Для этого мы определяем функции $\mu_\alpha: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\sigma_\alpha: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ для $\alpha \in \{3, 4, 5\}$. Функции μ_α будут использоваться для представления детерминированного ввода, тогда как σ_α будет использоваться для масштабирования стохастических компонентов. Аналогично изложению стохастических осцилляторов в [32], Глава 8, или в [33], Глава 14.2, мы символически вводим гауссовский белый шум \dot{W}_α представляющий стохастический вход в уравнение. (1) следующее:

$$\begin{aligned}
 dx_0(t) &= x_3(t) dt, & dx_1(t) &= x_4(t) dt, \\
 dx_2(t) &= x_5(t) dt, \\
 dx_3(t) &= A\alpha \left[\mu_3(t) + \text{Сигм} \left(x_1(t) - x_2(t) \right) \right] - 2a x_3(t) - a x_0(t) dt \\
 &\quad + \sigma_3(t) dW_3(t), \\
 dx_4(t) &= A\alpha \left[\mu_4(t) + C_2 \text{Сигм} \left(C_1 x_0(t) \right) \right] - 2a x_4(t) - a_2 x_1(t) dt \\
 &\quad + \sigma_4(t) dW_4(t), \\
 dx_5(t) &= B\beta \left[\mu_5(t) + C_4 \text{Сигм} \left(C_3 x_0(t) \right) \right] - 2b x_5(t) - b_2 x_2(t) dt \\
 &\quad + \sigma_5(t) dW_5(t),
 \end{aligned} \tag{4}$$

с детерминированным начальным значением $(x_0(0), \dots, x_5(0))$ $t=0 \in \mathbb{R}^6$. Здесь процессы $W_\alpha(t)$ для $\alpha \in \{3, 4, 5\}$ независимы, Φ -адаптированные процессы Винера на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Обратите внимание, что поскольку система выше является системой аддитивного шума, интерпретации Ито и Стратоновича этой системы SDE совпадают. Что касается детерминированного случая в разделе 2,

мы можем использовать (B, Π) -обозначения классической механики

$$\begin{aligned} dQ(t) &= \nabla_Q H(Q, P) dt, \\ d\Pi(t) &= -\nabla_P H(Q, P) - 2\Gamma \Pi + G(t, Q) dt + \Sigma(t) dW(t), \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными значениями

$$\begin{aligned} B(0) &= (X_0(0), X_1(0), X_2(0))^T \in \mathbb{R}^3, \\ \Pi(0) &= (X_3(0), X_4(0), X_5(0))^T \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

матрица диффузии

$$\Sigma(t) = \text{diag}[\sigma_3(t), \sigma_4(t), \sigma_5(t)] \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

и нелинейное смещение

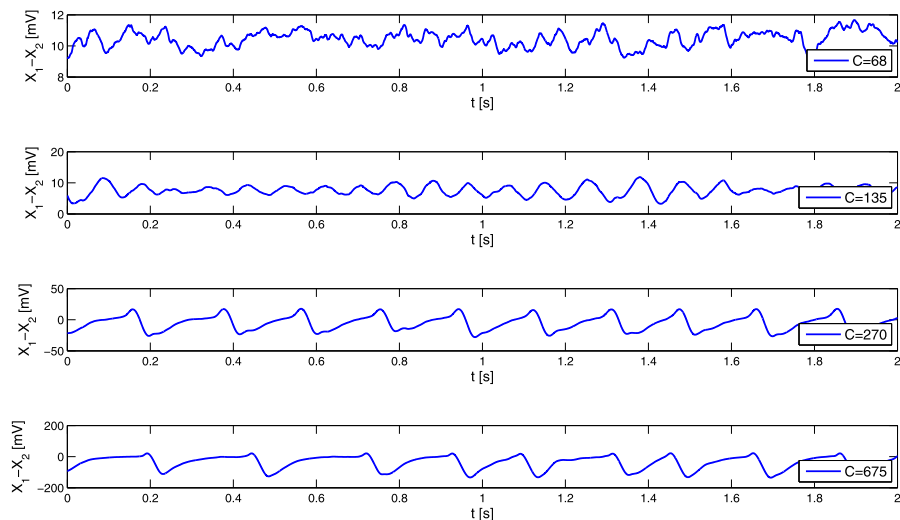
$$\begin{aligned} G(t, Q) &= \begin{pmatrix} A\alpha[\mu_3(t) + \text{Сигм}(X_1 - X_2)] \\ A\alpha[\mu_4(t) + C_2 \text{Сигм}(C_1 X_0)] \\ B\beta[\mu_5(t) + C_4 \text{Сигм}(C_3 X_0)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Как и прежде, мы определяем выходной сигнал как $Y(t) = X_1(t) - X_2(t)$.

Системы типа (5), обычно называемые уравнениями Ланжевена, получили значительное внимание в литературе по молекулярной динамике (см. [16] для обзора). В частности, долговременные свойства таких систем интенсивно изучались в [34–36]. Мы применяем эти методы в разделе 5 для изучения долговременного поведения Системы (5).

Кратко обсудим существование решения уравнения (5). Поскольку сигмоидальная функция Sigm глобально непрерывна по Липшицу, существование и путевая уникальность Φ_t -адаптированное решение является стандартным результатом; см., например, в [29], Теорема 6.2.2. В частности, непрерывно дифференцируема. В текущем контексте имеет смысл предположить, что функции μ_i являются гладкими и ограниченными, что мы и сделаем далее.

Мы моделируем решение уравнения (5) с разделяющим интегратором (24) предложено в разделе 6 и проиллюстрируем выходной сигнал на рис. 1. Коэффициенты и шумовые компоненты выбираются таким образом, чтобы результаты моделирования [14] для различных констант связности C могут быть воспроизведены. Численные значения параметров приведены в таблице 1. Для детерминированной части внешних входов мы устанавливаем $\mu_3 = \mu_5 = 0$ и $\mu_4 = 220$, для диффузионных компонентов устанавливаем $\sigma_3 = \sigma_5 = 10$ и $\sigma_4 = 1,000$ таким образом, что на компоненты действует «слабый шум» X_3, X_5, X_4 получает более сильный шумовой вход. Как и в оригинальной статье [14] мы видим (шумно) α -ритмоподобное поведение, а также импульсное поведение для различных констант связности C . На рис. 2 мы приводим иллюстрацию изменений в поведении системы, вызванных включением шума, с графиками фазового портрета выходного сигнала для случая $C=135$ и $C=270$. На двух верхних рисунках показаны симуляции Системы (2), т.е. без шума, где кривые решения быстро сходятся к предельному циклу. Нижние два рисунка показывают путь Системы (5) и в частности для $C=135$, поведение пути заметно отличается от детерминированного случая.

Trajectories of the output signal Y for varying coupling parameter C Рис. 1 Выходной сигнал Y

4. Границы моментов и поведение пути

Мы уже упоминали в разделе 2, что пути решения уравнения (1) принимают значения в ограниченном множестве. Естественно спросить, в каком смысле это поведение переносится в стохастическую обстановку. Мы отвечаем на этот вопрос с помощью двойной стратегии. С одной стороны, мы будем изучать временную эволюцию моментов решения, которая описывает среднее поведение всех путей решения. С другой стороны, мы будем изучать поведение на уровне отдельных путей и оценивать вероятность того, что конкретный путь превысит заданный порог. Прежде чем изучать эти качественные свойства уравнения (5) мы предоставляем представление на основе свертки для B -компонента уравнения (5), что значительно упрощает соответствующие расчеты.

4.1 Представление JR-NMM на основе свертки

В этом разделе мы перепишем уравнение (5) с использованием $X = (K, P)$ как

$$dX(\tau) = M X(\tau) + N t, X(t) dt + S(t) dW(t), \quad (6)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0_3 & \mathbf{y}_B \\ -\Gamma_2 & -2\Gamma \end{pmatrix},$$

$$N(\tau, X(\tau)) = \begin{pmatrix} 0_3 \\ G(\tau, Q(\tau)) \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} 0_3 \\ \Sigma(\tau) \end{pmatrix}.$$

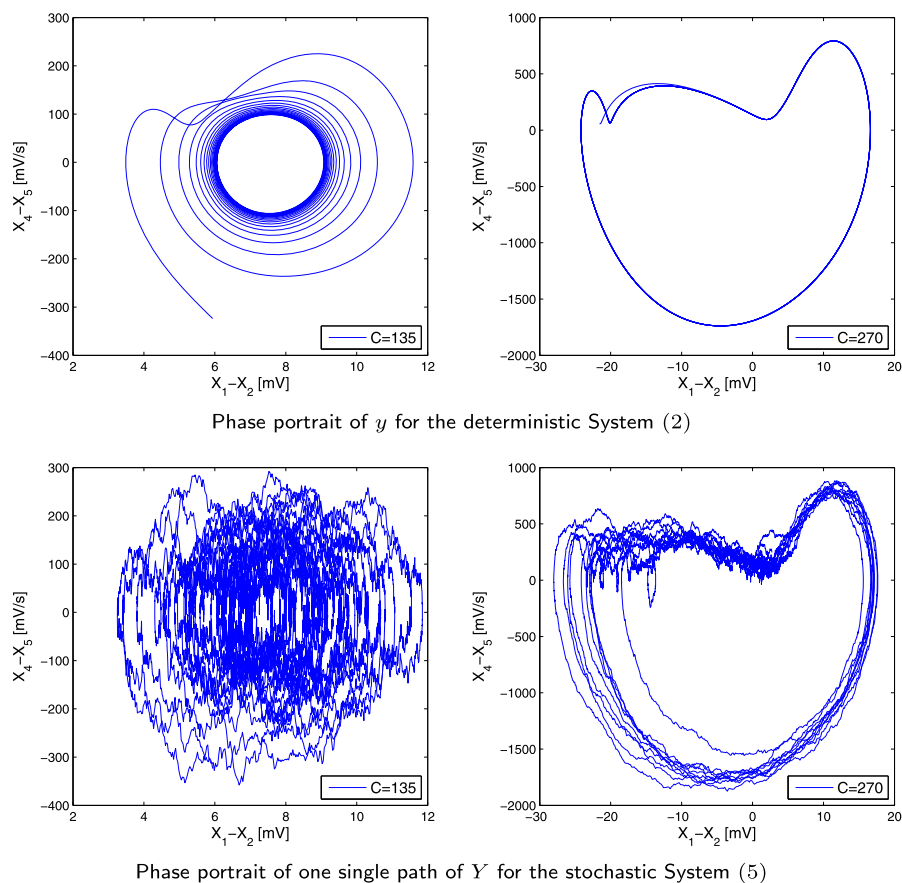


Рис. 2 Фазовые портреты

Здесь мы обозначаем через $O_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ нулевая и единичная матрица соответственно. Подробнее более, мы определяем $O_3 := (0, 0, 0)$ и $I_3 := (1, 1, 1)I$.

Обратите внимание, что M является блочной матрицей с диагональными подматрицами. Следовательно, мы можем вычислить явное выражение для экспоненты матрицы,

$$\begin{aligned}
 e^{Mt} &= \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t}(\gamma_3 + \Gamma T) & e^{-\Gamma t}T \\ -\Gamma_2 e^{-\Gamma t}T & e^{-\Gamma t}(\gamma_3 - \Gamma T) \end{pmatrix} \\
 &=: \begin{pmatrix} \vartheta(t) & \kappa(t) \\ \vartheta(t) & \kappa(t) \end{pmatrix}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что матричная экспонента удовлетворяет $e^{Mt}M = M e^{Mt}$. Это позволяет представить решения уравнения (5) с помощью следующей формулы, основанной на свертке.

Теорема 4.1 КомпонентВединственного решения уравнения. (5) решает для $t \in [0, T]$ интегральное уравнение

$$Q(t) = \vartheta(t)Q_0 + \kappa(t)\Pi_0 + \int_0^t \kappa(t-s)G(s, Q(s)) ds + \int_0^t \kappa(t-s)\Sigma(s) dW(s). \quad (8)$$

Мы называем уравнение. (8) представлением на основе свертки в уравнении. (5).

Доказательство Применяя формулу Ито ([29], теорема 5.3.8) к JR -NMM в уравнении (6) и используя коммутативность M и Σ мы получаем

$$e^{-Mt}X(t) = e^{-Mt}dX(t) - Me^{-Mt}X(t) dt = e^{-Mt}N \left(\int_0^t X(s) ds + \int_0^t S(s) dW(s) \right),$$

который читается в интегральной форме

$$X(t) = e^{-Mt}X(0) + \int_0^t e^{M(t-c)}N \left(\int_0^c X(s) ds + \int_0^c S(s) dW(s) \right) dc.$$

Так как нелинейная часть H зависит только от V уравнение для V определяется уравнением (8).

Замечание 1 Из последнего доказательства мы также получаем представление, основанное на свертке, для Π . Однако эта формула зависит от V . Действительно, для $t \in [0, T]$,

$$\Pi(t) = \vartheta(t)Q_0 + \kappa(t)\Pi_0 + \int_0^t \kappa(t-s)G(s, Q(s)) ds + \int_0^t \kappa(t-s)\Sigma(s) dW(s).$$

Замечание 2 Система (1) первоначально был выведен путем использования свертки функций импульсного отклика с функциями выходных данных других субпопуляций в пределах нейронной массы (см. [13, 18, 37, 38]). Эти функции отклика имеют ту же форму, что и ядра в уравнении (8), что, таким образом, можно интерпретировать как стохастическую версию этого представления ядра.

4.2 Границы момента

Используя представление (8) мы предоставляем границы первого и второго момента V ; аналогичные результаты можно получить для Π . В оставшейся части этого раздела мы выполним различные покомпонентные вычисления и оценки. Для простоты и единообразия обозначений мы определим следующее: Пусть $x, u \in \mathbb{R}_n$, затем $x \otimes u$ обозначает $x_i u_j$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Кроме того, для $U, V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ мы обозначаем *продукт Адамара* из U и V как $U \circ V$, которое определяется как поэлементное произведение (см. [39, 40]) таким образом, что каждый элемент $n \times k$ матрица $U \circ V$ дается как

$$(U \circ V)_{ij} = U_{ij} V_{ij} \text{ для } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k.$$

Кроме того, $\forall i, j \in \overline{1, 2} : Y_{ij} = Y_{ji}$ как поэлементный корень с $(Y_{1/2})_{ij} = Y_{ji}$.

Теорема 4.2 Пусть $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ для $\mu \in \{3, 4, 5\}$ быть неотрицательными функциями, ограниченными $\mu_{\max} \in \mathbb{R}^+$, соответственно, и $C_\Gamma = (Aa(\mu_3, \max + \mu_{\max}), Aa(\mu_4, \max + C_2 \nu_{\max}), Bb(\mu_5, \max + C_4 \nu_{\max}))$. Тогда $E[Q(t)]$ ограничено в каждом компоненте

$$\vartheta(t)Q_0 + \kappa(t)\Gamma_0 \leq E[Q(t)] \leq \vartheta(t)Q_0 + \kappa(t)\Gamma_0 + \Gamma - 2\gamma_3 - \vartheta(t)C_\Gamma.$$

Доказательство Мы пишем

$$Q(t) = \underbrace{\vartheta(t)Q_0 + \kappa(t)\Gamma_0}_{=: Y(t)} + \underbrace{\int_0^t \kappa(t-s)G(s, Q(s))ds}_{=: V(t)} + \underbrace{\int_0^t \kappa(t-s)\Sigma(s)dW(s)}_{=: \omega(t)}.$$

Обратите внимание, что $E[\omega(t)] = 0$ и что ожидание интеграла Ито равно нулю, т.е. $E[\omega(t)] = 0$. Напомним, что $\text{Sign}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \mu_{\max}]$, таким образом $0 \leq G(t, Q(t)) \leq C_\Gamma$. И также $0 \leq E[G(t, Q(t))] \leq C_\Gamma$. Применяя последние границы к $E[V(t)] = \int_0^t E[\kappa(t-s)G(s, Q(s))]ds$ и интеграция дают желаемые оценки.

Очевидно, что границы, предоставляемые теоремой 4.2 также справедливо для детерминированного уравнения (3), что подтверждает наше утверждение во введении.

Замечание 3 Верхняя граница линейно зависит от μ_{\max} и константы связности C_Γ тогда как $\omega(t)$ экспоненциально быстро убывает к 0. В частности,

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} E[Q(t)] \leq \Gamma - 2C_\Gamma.$$

Аналогичные расчеты можно провести для вторых моментов компонентов $Q(t)$. Получаем следующий результат.

Теорема 4.3 Пусть предположения теоремы 4.2 удерживаем и предполагаем $\Sigma(t)$ быть постоянной матрицей, $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Мы определяем для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ функция $1^+(x) = (1^+(x_1), 1^+(x_2), 1^+(x_3))$, где 1^+ обозначает индикаторную функцию множества \mathbb{R}^+ . Использование функций 1^+ в i -й теореме 4.2, оценка второго момента каждого компонента $Q(t)$ читает

$$\begin{aligned} E[B_2(t)] &\leq \gamma_2(t) + 2Y(t) + 1^+(Y(t)) \Gamma - 2\gamma_3 - \vartheta(t)C_\Gamma \\ &\quad + \left(\Gamma - 2\gamma_3 - \vartheta(t)C_\Gamma \right) \Gamma + \frac{1}{2} \Gamma - \frac{3}{2} \Sigma_{33} + \kappa(t)\vartheta(t) - \vartheta(t)\gamma_{1/2/3} \end{aligned} \quad [2].$$

В частности,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[B_2(t)] \leq \left(\Gamma - C_\Gamma \Gamma + \Gamma - \frac{1}{2} \Sigma_{33} \right)^2.$$

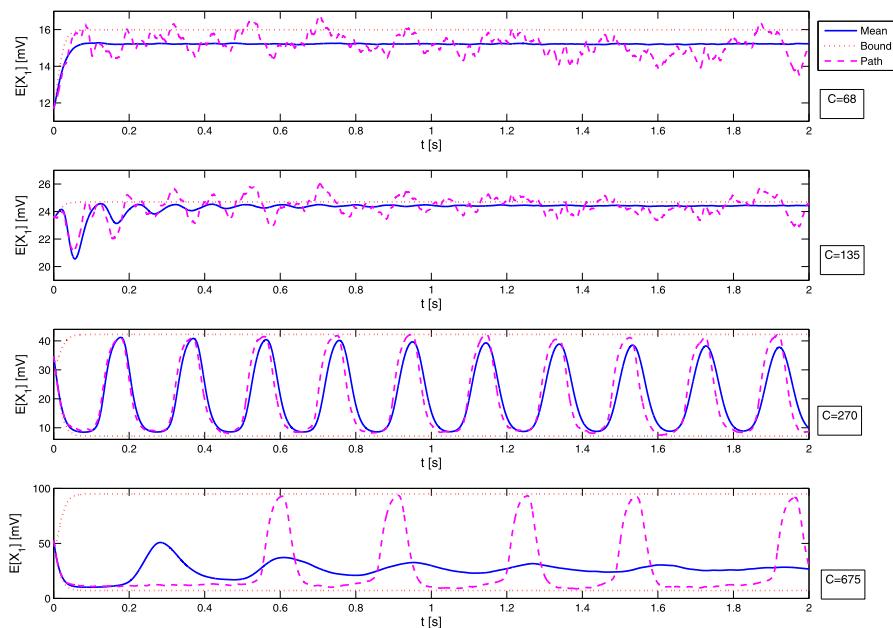


Рис. 3 Эволюция во времени $E[X_1]$

Доказательство Из доказательства теоремы 4.2 отсюда сразу следует, что

$$\mathbb{E}[X_{12}(t)] = X_{12}(t), \quad \mathbb{E}[X_{22}(t)] \leq \Gamma - 4\gamma \left(z - \vartheta(t) \right)^2 C^2 \quad \text{и} \quad (9a)$$

$$\mathbb{E}[X_{22}(t)] = \frac{1}{4} \Gamma - 3 \Sigma_{22} \left(z + \kappa(t) \vartheta'(t) - \vartheta_2(t) \right)^2. \quad (96)$$

Последнее равенство можно показать, применив изометрию Ито. Для простоты записи мы опускаем зависимость от t в следующем. Используя неравенство Коши–Шварца, мы связываем

$$\mathbb{E}[\text{фольксваген}] \leq \mathbb{E}[X_{22}] \quad \mathbb{E}[X_{22}]^{(1/2)}.$$

Применяя границы (9a)–(96), желаемый результат следует из

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{22}] &= X_{12} + \mathbb{E}[X_{22}] + \mathbb{E}[X_{22}] + 2X_{12}\mathbb{E}[V] + 2\mathbb{E}[V X_{12}] \\ &\leq X_{12} + 2X_{12} \mathbf{1} + (\gamma) \mathbb{E}[V] \\ &\quad + \left(\mathbb{E}[X_{22}] \right)^{(1/2)} + \left(\mathbb{E}[X_{22}] \right)^{(1/2)} 2. \end{aligned}$$

На рис. 3 мы используем моделирование Монте-Карло для оценки $\mathbb{E}[X_1(t)]$ для различных значений параметра $\text{pling } C$. Результаты для второго момента $\mathbb{E}[X_2 - 1(t)]$ по сути являются то же самое; см. рис. 4. Аналогичные результаты можно получить для X_2 и X_3 . Численные аппроксимации ожидания (синие кривые) остаются в пределах теоретических границ.

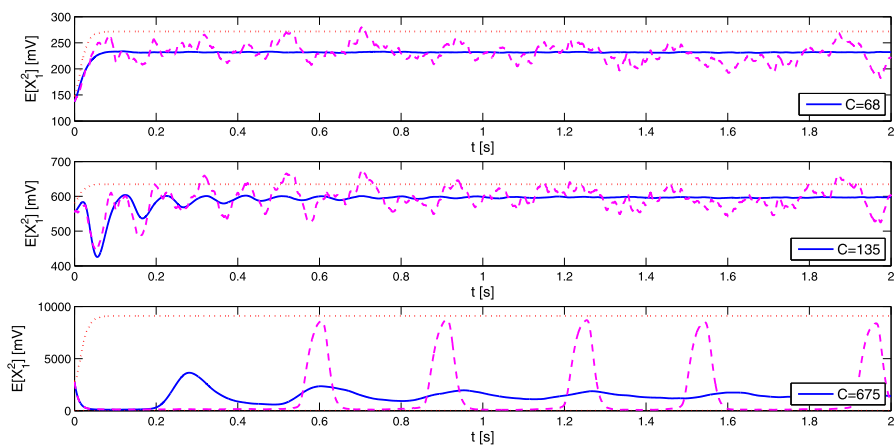


Рис. 4 Эволюция во времени $E[X_1^2]$

(красные кривые), тогда как отдельные траектории (фиолетовые кривые), конечно, могут выходить за пределы среднего. Обратите внимание, что для $C=68, 135$ и 675 , приближения $E[X_1(t)]$ быстро сходятся к фиксированным значениям для растущих t . Такое же поведение можно наблюдать и для $C=270$ на больших временных масштабах. Мы дадим теоретическое объяснение этому явлению в разделе 5, когда мы изучаем долговременное поведение уравнения (5).

4.3 Границы пути

Теорема 4.2 утверждает, что в среднем решение уравнения (5) остается в некотором ограниченном множестве. Однако теорема не дает никакой информации для путей с одним решением, которые в принципе могут достигать произвольно больших значений с положительной вероятностью; см. Лемму A.2 в Приложении. В этом разделе мы хотим количественно оценить вероятность таких больших значений. Следующая теорема дает верхнюю границу вероятности выхода компонентов B , т.е. вероятность того, что для $j \in \{0, 1, 2\}$ решение X_j больше чем заданный порог $\chi_j \in \mathbb{R}^+$.

Теорема 4.4 Пусть предположения теоремы 4.3 держать. Для фиксированного $t \in [0, T]$ мы определяем гауссовский случайный вектор $Y(t) = (Y_0(t), Y_1(t), Y_2(t))$ с

$$E[Y(t)] = y(t) + \Gamma^{-1} \Sigma^{-1} \vartheta(t) C \Gamma \quad \text{и} \\ \text{Cov}[Y(t)] = \Gamma^{-1} \Sigma \Gamma + k(t) \vartheta(t) \vartheta(t)^T + \Sigma_2(t),$$

где его компоненты $Y_j(t)$ независимы. Позволять $\Phi_{Y_j}(t)$ обозначим кумулятивную функцию распределения $Y_j(t)$. Тогда вероятность того, что компоненты $X_j(t)$ для $j \in \{0, 1, 2\}$ превышать заданные пороговые значения $\chi_j \in \mathbb{R}^+$ ограничено

$$\prod_{j=1}^3 P(X_j(t) \geq \chi_j) \leq \prod_{j=1}^3 \Phi_{Y_j}(t) \left(\frac{\chi_j}{y_j(t)} \right).$$

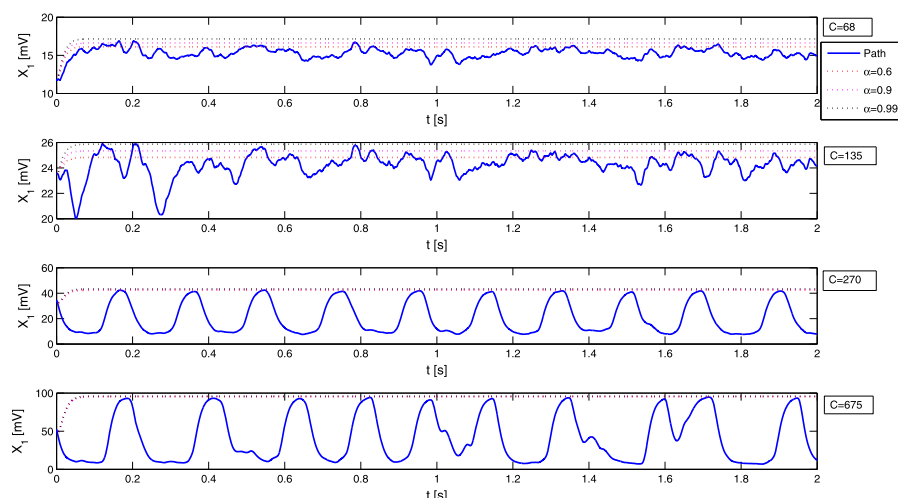


Рис. 5 Границы пути X_1

Доказательство Из уравнения (8), связанное с G и снова интегрируем k , мы сразу видим, что каждый путь Y ограничен стохастическим процессом Y и определяется

$$Y(t) = y(t) + G^{-2} \gamma_3 - \vartheta(t) C t + \int_0^t \kappa(t-c) \Sigma dW(c).$$

Процесс $Y(t)$ распределено по Гауссу со средним значением $y(t) + G^{-2}(\gamma_3 - \vartheta(t))Ct$ и ковариационная матрица: $4G^{-3}\Sigma(\gamma_3 + \kappa(t)\vartheta(t) - \vartheta_2(t))$, которые были рассчитаны в Theorems 4.2 и 4.3. Затем, для каждого $t \in [0, T]$,

$$P(X_{\gamma}(t) \geq x_{\gamma} | \mathcal{F}_{\gamma}) \leq P(Y_{\gamma}(t) \geq x_{\gamma} | \mathcal{F}_{\gamma}) - \Phi_{I_{\gamma}(t)}(x_{\gamma}) \quad (9).$$

Замечание 4 Теорема 4.4 может, например, использоваться для калибровки параметров шума в Σ . Позволять Σ — диагональ $[\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5]$. Предположим, мы хотим выбрать σ такой что соответствующий компонент $X_0(t)$ остается ниже некоторого заданного порога x_{γ} с ВЫСОКИМ вероятностью α . Тогда подходящий выбор σ неявно дается $\Phi_{I_0(t)}(x_{\gamma} | 0) = \alpha$.

На рис. 5 мы иллюстрируем численные траектории уравнения (5) и соответствующие границы для различных уровней α , т.е. для заданного момента времени t , вероятность $X_1(t)$ находится ниже красной, фиолетовой и черной кривой — не менее 60, 90 и 99 процентов соответственно.

5 долгосрочных решений поведения и стационарности

Еще одно интересное свойство SDE касается асимптотического поведения траекторий решения. Классический подход в теории ОДУ для анализа долговременного поведения систем ОДУ заключается в изучении устойчивости равновесных решений и предельных циклов. Даже в простейшем случае постоянного входа $p(t) = p \in \mathbb{R}$, детерминированный

уравнение (3) может иметь несколько равновесных решений (как устойчивых, так и неустойчивых), а также предельные циклы с типично нетривиальными бассейнами притяжения (снова ссылаемся на бифуркационный анализ в [18,19,24]). Таким образом, выбор начального значения может оказать большое влияние на долгосрочное поведение кривых решения уравнения (3). С практической точки зрения этот факт может быть проблематичным, так как совершенно не очевидно, как оценить начальное значение Γ -компонент.

В этом разделе мы проанализируем стохастический аналог равновесных решений, точнее инвариантные меры, и изучим долговременную асимптотику уравнения (5). Наш основной инструмент — теория эргодических марковских процессов, для удобства читателя мы повторим основные определения.

Позволяя $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ быть процессом решения уравнения. (5). Стандартный стохастический анализ показывает, что $X(t)$ является марковским процессом и соответствующая вероятность перехода $P_t(A, x)$, то есть вероятность того, что $X(t)$ достигает борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^6$ во время t , когда это началось в точке $x \in \mathbb{R}^6$ во время $t=0$, определяется как

$$P_t(A, x) = P(X(t) \in A \mid X(0) = x).$$

Мы используем определение, приведенное в [41], Глава 2, чтобы охарактеризовать инвариантные меры. Для простоты пусть η быть вероятностной мерой $(\mathbb{R}^6, \mathcal{B}(\mathbb{R}^6))$ (в общем η может вырождаться в некотором пространстве меньшей размерности). Мера η называется *инвариантной* если

$$\eta(A) = \int_{\mathbb{R}^6} P_t(A, x) \eta(dx) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^6), \forall t \in [0, \infty).$$

В частности, если мы установим начальное значение (\mathbb{R}^6, Γ_0) быть случайным вектором с распределением η , то существует марковский процесс $X(t)$ который удовлетворяет уравнению (5) и распределение $X(t)$ является η для всех $t \in [0, \infty)$. В этом смысле концепцию инвариантных мер можно рассматривать как естественное расширение стационарных решений детерминированных ОДУ.

Нас интересуют следующие вопросы:

- (i) Имеет ли место уравнение (5) имеют инвариантную меру?
- (ii) Является ли инвариантная мера единственной?
- (iii) Делают ли величины типа $E[\varphi(X(t))]$ сходятся к стационарным значениям для подходящего класса функций φ как $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ и любое начальное значение (\mathbb{R}^6, Γ_0) ?

Мы ответим на эти вопросы в два этапа: на первом этапе мы покажем, что уравнение (5) удовлетворяет условию Ляпунова, гарантируя существование (возможно, многих) инвариантных мер. На вопросы (ii) и (iii) будет дан положительный ответ с помощью концепции геометрической эргодичности. В классической механике и молекулярной динамике уравнения со структурой, подобной ур. (5), называемые в соответствующей литературе уравнениями Ланжевена (см., например, [16,31,36]), хорошо изучены, и мы используем соответствующие результаты, касающиеся долгосрочного поведения. В частности, мы следуем представлению в [34].

Как и в бифуркационном анализе для уравнения (3) упоминалось ранее, мы предполагаем, что детерминированные части возмущения, а также матрица диффузии постоянны, т.е.

$$\mu_j(t) = \mu_j \in \mathbb{R}, \text{ для } j \in \{3, 4, 5\} \text{ и } \Sigma(t) = \Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (10)$$

Таким образом, Γ не зависит от t мы просто пишем $\Gamma(K)$.

5.1 Существование инвариантных мер и геометрическая эргодичность

Существование инвариантных мер для уравнения (5) можно установить, найдя подходящую функцию Ляпунова. Эвристически говоря, существование функции Ляпунова гарантирует, что траектории решения остаются в некоторой ограниченной области (за исключением некоторых редких экскурсий), а в случае экскурсий траектории возвращаются в ограниченное множество. Следующая лемма показывает, что возмущенная версия гамильтониана CH в уравнении (5) может действовать как функция Ляпунова (см. [42]).

Лемма 5.1 *Предполагая, $b > 0$ и пусть для $n \in \mathbb{N}$*

$$V_n(K, \Pi) := 1 + \left(\frac{1}{2} \|\Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{3}{2} \|\Gamma Q\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \langle \Pi, \Gamma Q \rangle \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда V_n является функцией Ляпунова для уравнения (5) в следующем смысле:

- (я) $V_n \geq 1$ и $V_n \rightarrow \infty$ для $\|(K, \Pi)\|_{\mathbb{P}_6} \rightarrow \infty$,
 (ii) $\exists \alpha_n < 0, \beta_n > 0$ такой что

$$LV_n \leq \alpha_n V_n + \beta_n,$$

где L обозначает генератор уравнения (5),

$$L := \Pi \nabla V + V \Gamma_2 - 2 \Pi \Gamma + \Gamma(K) \Pi + \nabla \Pi + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Здесь, $\nabla \Pi$ обозначают градиент относительно V и Π компонент, соответственно.

Доказательство Для $a, b > 0$, Свойство (i) удовлетворяется по построению, и нам нужно доказать только (ii). На первом шаге мы устанавливаем $n=1$ и проанализируем действие L на V_1 . Обратите внимание, что V_1 является квадратичным, поэтому вторые производные в L результат в константах. Так как $\Pi \Gamma_2 V = V \Gamma_2 \Pi$, мы получаем

$$\begin{aligned} LV_1 &= \Pi \Gamma_2 \Gamma_2 V + \Gamma \Pi + \left[V \Gamma_2 - 2 \Pi \Gamma + \Gamma(K) \Pi + \nabla \Pi + \Gamma Q \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 \\ &= -\Pi \Gamma \Pi - V \Gamma_3 V + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 + \Gamma(K) \Pi + \nabla \Pi + \Gamma Q. \end{aligned} \quad (11)$$

Первые два члена в уравнении (11) являются квадратичными и неположительными. Так как V_1 является квадратичным и неотрицательным, всегда существуют константы $\tilde{\alpha} < 0$ и $\tilde{\beta} > 0$ такой, что первые три члена в уравнении (11) можно ограничить следующим образом:

$$-\Pi \Gamma \Pi - V \Gamma_3 V + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 \leq \tilde{\alpha} V_1(K, \Pi) + \tilde{\beta}.$$

Более того, неравенство Юнга подразумевает

$$\Gamma(K)\Gamma(\Pi+\Gamma Q) \leq \frac{\varepsilon}{2} (\|\Pi\|_{P_3} + \|\Gamma Q\|_{P_3})^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Gamma(K)\|_{P_3}^2,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым. Таким образом, существуют $\tilde{\alpha} < \alpha < 0$ и $\beta > 0$ достаточно большой, такой что

$$\mathcal{L}B_1(K, \Pi) \leq \alpha B_1(K, \Pi) + \beta. \quad (12)$$

На втором этапе мы расширим эту процедуру до B_n для $n \in \mathbb{N}$. Для краткости мы используем обозначение

$$\mathcal{L}_2 := \frac{1}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi_{2j}^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - \mathcal{L}_2.$$

\mathcal{L}_1 является дифференциальным оператором первого порядка и действие \mathcal{L}_1 на B_n можно ограничить следующим образом, используя уравнение (12):

$$\mathcal{L}_1 B_n = n B_{n-1} \mathcal{L}_1 B_1 \leq \alpha n B_n + n \beta B_{n-1}.$$

Применение \mathcal{L}_2 к B_n приводит к

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 B_n &= \frac{n}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 B_{n-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \chi_{2j}^2} + (n-1) B_{n-2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \chi_{2j}^2} \\ &= \frac{n}{2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 B_{n-1} + (n-1) B_{n-2} (\chi_{j+2, j-2} \chi_{j-3})^2, \end{aligned}$$

где $\chi_{j+2, j-2}$ обозначает запись Γ на пересечении j ряд и $j+2$ столбец. Обратите внимание, что

$$\sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 (\chi_{j+2, j-2} \chi_{j-3})^2 \leq \max\{\sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2\} \|\Gamma Q + \Pi\|_{P_3}^2.$$

Это подразумевает, что существуют $c_n > 0$ такой, что

$$\frac{n(n-1)}{2} B_{n-2} \sum_{j=3}^5 \sigma_j^2 (\chi_{j+2, j-2} \chi_{j-3})^2 \leq c_n B_{n-1},$$

и таким образом

$$\mathcal{L}_2 B_n \leq c_n B_{n-1}.$$

Вследствие этого существуют $\alpha_n < 0$ (возможно близко к нулю) и $\beta_n > 0$ такой, что

$$\mathcal{L}B_n = \mathcal{L}_1 B_n + \mathcal{L}_2 B_n \leq \alpha_n B_n + (\beta_n + c_n) B_{n-1} \leq \alpha_n B_n + \beta_n,$$

и свойство (ii) следует.

Лемма 5.1 имеет два немедленных следствия. Во-первых, применение формулы Ито на V_n получаем следующие оценки (см. [34]).

Следствие 5.2 Пусть предположение (10) держать ис, $\tau \in [0, T] \leq c$. Затем

$$\mathbb{E} [V_n(Q(\tau), P(\tau)) | \mathcal{F}(c)] \leq e^{-|a_n|(\tau - c)} V_n(Q(s), P(s)) + \frac{\beta_n (1 - e^{-|a_n|(\tau - c)})}{|a_n|}$$

В частности,

$$\mathbb{E} [V_n(Q(\tau), P(\tau)) | \mathcal{F}(0)] \leq e^{-|a_n|\tau} V_n(B(0), \Pi(0)) + \frac{\beta_n (1 - e^{-|a_n|\tau})}{|a_n|}$$

Во-вторых, существование функции Ляпунова гарантирует существование инвариантной меры (см., например, [43], Следствие 1.11).

Следствие 5.3 Пусть предположение (10) держи и дай $X(t)$ обозначим решение уравнения. (5). Тогда существует инвариантная мера η на $X(t)$.

Лемма 5.1 не дает никакой информации об уникальности инвариантной меры. Если мы далее предположим, что три винеровских процесса B_t действуют на все компоненты Π , то есть $\sigma_j > 0$ для $j \in \{3, 4, 5\}$, мы можем установить единственность инвариантной меры. Более того, марковский процесс X удовлетворяет свойству геометрической эргодичности в смысле [34]. Мы приводим модификацию результата в [34], Теорема 3.2, включая нелинейную функцию Γ .

Теорема 5.4 Пусть $\sigma_j > 0$ для всех $j \in \{3, 4, 5\}$. Марковский процесс $X(t)$ определяется уравнением. (5) имеет уникальную инвариантную меру η на \mathbb{R}^6 . Более того, позволить

$$\mathcal{C}AS_n := \{ \text{кас: } \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{измеримы по Борелю с } | \text{кас} | \leq \beta_n \}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любое начальное значение $X(0) = (B_0, \Pi_0)$ существуют положительные константы C_n, λ_n таковой что

$$\left| \mathbb{E} [V_n(X(t)) | \mathcal{F}(0)] - \int_{\mathbb{R}^6} V_n d\eta \right| \leq C_n V_n(X(0)) e^{-\lambda_n t} \quad \forall \text{ кас} \in \mathcal{C}AS_n, \forall t \geq 0.$$

Доказательство Доказательство такое же, как в [34]. Условие Ляпунова установлено в лемме 5.1, соответствующие результаты для необходимой гладкости вероятностей перехода и неприводимости марковского процесса приведены в Приложении в Лемме A.2 и A.1. Обе леммы основаны на предположении, что $\sigma_j > 0$ для $j \in \{3, 4, 5\}$.

Теорема 5.4 имеет два последствия для численного моделирования уравнения. (5). Во-первых, фактический выбор начального значения не имеет значения, поскольку влияние начального значения на распределение $X(t)$ уменьшается экспоненциально быстро для роста t соответствующее приближение поведения системы должно быть получено при любом выборе (B_0, Π_0) при условии, что система моделируется на достаточно большом временном горизонте.

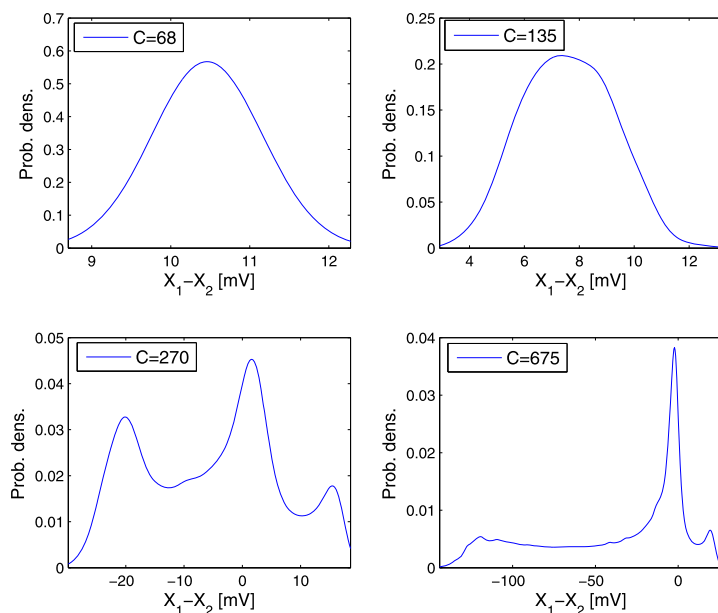


Рис. 6 Плотности инвариантной меры I

Во-вторых, из-за соответствия временных средних и «пространственных средних» эргодических систем (см. [41], теорема 3.2.4.), можно оценить величины типа $\mathbb{E}[\chi(\tau)]$ (для τ достаточно большой) путем вычисления среднего времени одного пути $\chi(\tau)$ на большом временном горизонте вместо использования оценки Монте-Карло, которая требует вычисления большого количества путей $\chi(\tau)$. Конечно, оба аспекта справедливы только в том случае, если численный метод воспроизводит геометрическую эргодичность исходной системы (см. раздел.6).

Вычисление инвариантной меры для нелинейных систем весьма нетривиально. Одной из возможностей было бы решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка, которое является шестимерным нелинейным уравнением в частных производных. Стандартной альтернативой является использование методов стохастического моделирования для аппроксимации предельных плотностей η . В литературе было предложено несколько возможностей оценки распределения решения СДУ; см., например, [44] для подхода, основанного на исчислении Маллявэна и оценке плотности ядра (см. [45], Глава 2). Мы используем последний подход, где мы выбираем функции ядра как гауссовские. Числовые выборки вычисляются как долговременное моделирование одного пути с разделяющим интегратором Eq. (24) предложено в разделе.6. На рис.6 мы сравниваем аппроксимации стационарной плотности вероятности выходного сигнала I для изменения параметра связи C . Мы наблюдаем изменение от унимодальных плотностей (для $C=68, 135$) к мультимодальным плотностям $C=270$ и пикообразная структура $C=675$. Такое поведение можно интерпретировать как феноменологическую стохастическую бифуркацию, как обсуждается, например, в [46] или переход, вызванный шумом (см. [47]).

6 Численное моделирование

Для того чтобы получить приближение уравнения (5), который точно воспроизводит качественное поведение, крайне важно построить числовые интеграторы, которые, с одной стороны, удовлетворяют свойствам уравнения (5) выведены в разделах 4 и 5, а с другой стороны, являются вычислительно эффективными, так что большие ансамбли траекторий могут быть рассчитаны за разумное время.

Мы хотим подчеркнуть, что трудность заключается не в построении среднеквадратичного сходящегося интегратора для уравнения (5). Фактически, как коэффициентные функции уравнения (5) глобально непрерывны по Липшицу, любой стандартный интегратор (например, метод Эйлера–Маруямы) сходится в среднеквадратичном смысле. Однако для линейных стохастических осцилляторов уже было показано, что метод Эйлера–Маруямы не сохраняет свойства второго момента этой системы [48] и ожидается, что этот отрицательный результат распространяется также на нелинейные стохастические осцилляторы. Методы расщепления удовлетворяют следующим свойствам:

- (i) Методы сохраняют ограничения моментов, предложенные в теоремах 4.2 и 4.3. Кроме того, для $\Sigma = O$, численный метод сохраняет границы точного решения.
- (ii) Марковский процесс, полученный с помощью численного метода, является геометрически эргодическим и удовлетворяет условию Ляпунова при очень мягких ограничениях на размер шага.

6.1 Разделение интеграторов для JR-NMM

Для удобства читателя мы приводим краткое введение в разделительные интеграторы. Более подробную информацию можно найти, например, в классической монографии [49], Глава II, для детерминированного случая и [35, 50] для стохастических уравнений типа Ланжевена.

Основная идея разделения интеграторов заключается в следующем: предположим для простоты, что мы хотим аппроксимировать детерминированную систему ОДУ

$$\dot{y} = \phi(y), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

для которого функция $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ можно записать как

$$\phi(r) = \sum_{j=1}^J \phi_{[dj]}(y), \text{ где } \phi_{[dj]}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ для } dj \in \{1, \dots, J\}.$$

Конечно, может быть несколько возможностей разложения ϕ . Цель состоит в том, чтобы выбрать $\phi_{[dj]}$ таким образом, чтобы подсистемы

$$\dot{y} = \phi_{[dj]}(y), \quad dj \in \{1, \dots, J\}, \quad (13)$$

можно решить точно. Пусть $\phi_{[dj]}(t_0)$ обозначим точный поток Подсистемы (13) с начальное значение y_0 . Тогда следующие композиции потоков определяют интеграторы детерминации

минимистический порядок один (расщепление Ли-Троттера) и два (расщепление Стрэнга):

$$\begin{aligned}\psi_{\Pi T}(r) &= (\phi_{[1]} \circ \dots \circ \phi_{[1]T})(y), \\ \psi_{\Sigma T}(r) &= (\phi_{[1]T/2} \circ \dots \circ \phi_{[1]T/2} \circ \phi_{[1]} \circ \phi_{[1]T/2} \circ \dots \circ \phi_{[1]T/2})(y).\end{aligned}$$

Эту стратегию можно распространить на стохастическую настройку (см. [35] и ссылки в нем на разделительные интеграторы в области молекулярной динамики, [50] для квазисимплектических интеграторов расщепления, [51] для вариационных интеграторов, основанных на подходе расщепления и [52] для расщепления интеграторов в группе Ли). В частности, расщепление интеграторов эффективно применялось к уравнениям Ланжевена со структурой, аналогичной уравнению (5), видеть [35, 50], поэтому мы распространяем этот подход здесь на уравнение (5).

Основным шагом в построении разделяющих интеграторов является выбор подходящего разложения коэффициентов функций уравнения (5). Правая часть распадается на три довольно отчетливые части: во-первых, затухающая, линейная колебательная часть, во-вторых, нелинейная и неавтономная часть связи, которая не зависит от \mathcal{P} -компонент, и третья, стохастическая часть, которая возникает только в \mathcal{P} -компонент. Поэтому,

$$\begin{aligned}\frac{dK}{d\mathcal{P}} &= \underbrace{\nabla_{\mathcal{P}} H(Q, P)}_{\text{демпф. линейн. колебание}} - 2\Gamma \mathcal{P} \underbrace{\frac{0_3}{\Gamma(\tau, Q)}}_{\text{нелин. пара}} \mathcal{A}T^+ \underbrace{\frac{0_3}{\Sigma(t) dW(t)}}_{\text{стохастический}}\end{aligned}$$

с нелинейным членом, заданным формулой

$$\Gamma(\tau, Q) = \Gamma_A(\tau) + \Gamma_B(B) = \left[A\alpha\mu_3(\tau) \right] + \left[A\alpha\text{Сигм}(X_1 - X_2) \right] \\ B\beta\mu_5(\tau) \quad \text{Би-би-симСигм}(C)\beta X_0$$

Имеет смысл разделить линейный и нелинейный вклады дрейфа, тем самым предоставляя два варианта для включения стохастического шума. Это дает два разных набора подсистем и, следовательно, два разных набора численных методов. В первом случае стохастическая подсистема определяет общий процесс Орнштейна–Уленбека, и мы обозначаем соответствующий разделяющий интегратор как *Интегратор Орнштейна–Уленбека*. Во втором случае стохастическая подсистема определяет винеровский процесс с дрейфом, и мы обозначаем разделяющий интегратор как *Винер интегратор*.

В дальнейшем пусть $0 = \tau_0 < \dots < \tau_N = T$, $N \in \mathbb{N}$ быть равноудаленным разбиением $[0, T]$ с размером шага τ .

6.2 Интегратор Орнштейна–Уленбека

Первый вариант заключается во включении стохастического вклада в часть линейного осциллятора, что приводит к появлению двух следующих подсистем:

$$\begin{aligned}\frac{dK_{[1]}}{d\mathcal{P}_{[1]}} &= \underbrace{\nabla_{\mathcal{P}_{[1]}} H(Q, P_{[1]})}_{- \nabla_{B_{[1]}} H(Q)_{[1]}, \mathcal{P}_{[1]} - 2\Gamma \mathcal{P}_{[1]}} \mathcal{A}T^+ \underbrace{\frac{0_3}{\Sigma(t) dW(t)}}_{\text{стохастический}}, \quad (14a)\end{aligned}$$

$$\frac{dK_{[2]}}{d\mathcal{P}_{[2]}} = \underbrace{\frac{0_3}{\Gamma(\tau, Q_{[2]})}}_{\text{нелин. пара}} \mathcal{A}T. \quad (14b)$$

Для обеих подсистем мы можем легко вывести явные представления точных решений, которые можно использовать непосредственно для численного моделирования. Подсистема (14а) — шестимерный процесс Орнштейна–Уленбека. Пусть $X_{[1]}(T_{Я}) = (B_{[1]}(T_{Я}), \Gamma_{[1]}(T_{Я}))^T$ обозначим решение уравнения (14а) в момент времени $T_{Я}$ для $Я \in \{0, \dots, H-1\}$, то точное решение в момент времени $T_{Я+1} > T_{Я}$ может быть представлено как

$$X_{[1]}(T_{Я+1}) = e^{M(T_{Я+1}-T_{Я})} X_{[1]}(T_{Я}) + \int_{T_{Я}}^{T_{Я+1}} \begin{pmatrix} \kappa(T_{Я+1}-s)\Sigma(s) dW(s) \\ \kappa(T_{Я+1}-s)\Sigma(s) dW(s) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где e^M определяется в уравнении (7). $X_{[1]}$ это гауссовский процесс с условным ожиданием

$$E[X_{[1]}(T_{Я+1}) | \Phi_{T_{Я}}] = e^{M(T_{Я+1}-T_{Я})} X_{[1]}(T_{Я})$$

и матрица условной ковариации (см. [29], Теорема 8.2.6)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_{Я+1}) &= \text{Cov}(X_{[1]}(T_{Я+1}), X_{[1]}(T_{Я+1}) | \Phi_{T_{Я}}) \\ &= E[(X_{[1]}(T_{Я+1}) - E[X_{[1]}(T_{Я+1}) | \Phi_{T_{Я}}])(X_{[1]}(T_{Я+1}) - E[X_{[1]}(T_{Я+1}) | \Phi_{T_{Я}}])^T | \Phi_{T_{Я}}] \\ &= \int_{T_{Я}}^{T_{Я+1}} e^{M(T_{Я+1}-c)} \Sigma(c) e^{M(T_{Я+1}-c)^T} dc. \end{aligned}$$

В частности, интегральный член в уравнении (15) можно точно смоделировать. Действительно, это гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $\text{Cov}(T_{Я+1})$, который предназначен для $T_{Я}$ задано как единственное решение матричнозначного ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Cov}(T)}{dT} &= M\text{Cov}(T) + \text{Cov}(T)M^T + \begin{pmatrix} O_3 & O_3 \\ O_3 & \Sigma(T) \end{pmatrix}, \\ \text{Cov}(T_{Я}) &= O_6. \end{aligned} \quad (16)$$

В частном случае постоянной матрицы диффузии $\Sigma(T) = \Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, точное решение уравнения (16) может быть явно рассчитано для $T \geq 0$ как

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_{Я+1} - T_{Я}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Gamma^{-3} \Sigma^2 (Я + 3 + \kappa(T) \vartheta(T) - \vartheta_2(T)) & \frac{1}{2} \Sigma^2 \kappa_2(T) \\ \frac{1}{2} \Sigma^2 \kappa_2(T) & \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Sigma^2 (Я + 3 + \kappa(T) \vartheta(T) - \kappa^2(T)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В общем случае уравнение (16) должно быть решено с помощью численного приближения, однако его необходимо предварительно вычислить только один раз для размера шага τ . В любом случае мы получаем

$$X_{[1]}(T_{Я+1}) = e^{M(T_{Я+1}-T_{Я})} X_{[1]}(T_{Я}) + \xi_{Я}(T), \quad (17)$$

где $\xi_{Я}(T)$ являются независимыми шестимерными гауссовыми случайными векторами с ожиданием $E[\xi_{Я}(T)] = 0$ и ковариационная матрица $\text{Cov}(T)$.

Подсистема (14б) является детерминированной системой и решение может быть получено путем интегрирования по времени. Как и прежде, пусть $X_{[2]}(T_{Я}) = (B_{[2]}(T_{Я}), \Gamma_{[2]}(T_{Я}))^T$ обозначают

решение уравнения (146) в момент времени t_j , тогда точное решение в момент времени $t_{j+1} > t_j$ дается

$$\begin{aligned} B_{[2]}(t_{j+1}) &= B_{[2]}(t_j), \\ \Pi_{[2]}(t_{j+1}) &= \Pi_{[2]}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Gamma(c, K_{[2]}(c)) dc \\ &= \Pi_{[2]}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Pi_{[2]} B_{[2]}(t_j) + \Gamma_{[2]}(c) dc, \end{aligned} \quad (18)$$

где мы предполагаем, что последний интеграл может быть вычислен точно.

Теперь, пусть $\phi_{t_j, [1]}$ и $\phi_{t_j, [2]}$ обозначают точные потоки уравнения. (14a) и (146) задано через уравнение (17) и (18) соответственно. Пусть $x \in \mathbb{R}^6$, то одношаговый интегратор определяется составом потоков

$$\psi_{t_j}(x) = \phi_{t_j, [1]} \circ \phi_{t_j, [2]}(x). \quad (19)$$

6.3 Интегратор Винера

Вторая возможность заключается во включении стохастических членов в нелинейный вклад, дающий подсистемы

$$\begin{pmatrix} dK_{[1]} \\ d\Pi_{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\Pi_{[1]}} H(Q, \Pi_{[1]}) \\ -\nabla_{K_{[1]}} H(Q, \Pi_{[1]}) - 2\Gamma \Pi_{[1]} \end{pmatrix} dt, \quad (20a)$$

$$\begin{pmatrix} dK_{[2]} \\ d\Pi_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma(t, Q_{[2]}) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \Sigma(t) dW(t) \end{pmatrix}. \quad (20b)$$

Подсистема (20a) — детерминированная система. Пусть $\chi_{[1]}(t_j) = (B_{[1]}(t_j), \Pi_{[1]}(t_j))$ обозначим решение уравнения (20a) в момент времени t_j , тогда точное решение в момент времени t_{j+1} дается

$$\chi_{[1]}(t_{j+1}) = e^{M \tau} \chi_{[1]}(t_j). \quad (21)$$

Решение подсистемы (20b) по определению задается выражением

$$\begin{aligned} B_{[2]}(t_{j+1}) &= B_{[2]}(t_j), \\ \Pi_{[2]}(t_{j+1}) &= \Pi_{[2]}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Pi_{[2]} B_{[2]}(t_j) + \Gamma_{[2]}(c) dc + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Sigma(c) dW(c), \end{aligned} \quad (22)$$

где последний член может быть смоделирован точно трехмерный гауссовский случайный вектор с нулевым средним значением и ковариационной матрицей $\Sigma_{[2]}(c)$ dc. В случае постоянного матрица диффузии $\Sigma(t) = \Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, ковариационная матрица задается как $t \Sigma$.

По аналогии с приведенными выше соображениями пусть $\phi_{x, [1]}$ и $\phi_{x, [2]}$ обозначают точные потоки уравнения. (20a) и (20b) задано через уравнение (21) и (22), соответственно. Тогда для $x \in \mathbb{R}^6$, а

одношаговый интегратор для уравнения (5) дается выражением

$$\psi_{JT}(X) = \phi_{J,[1]}^{\tau} \circ \phi_{J,[2]}^{\tau}(X). \quad (23)$$

6.4 Порядок сходимости и расщепления странга

Поскольку шум в уравнении (5) является аддитивным, стандартные интеграторы, такие как метод Эйлера–Маруямы, сходятся со среднеквадратичным порядком один. То же самое справедливо и для интеграторов расщепления, построенных выше.

Теорема 6.1 *Позволять $0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = T$ быть равноудаленным разделом $[0, T]$ с размером шага τ , и пусть $X_{\tau_j}(t_j)$ и $X_J(t_j)$ обозначают численные решения, определяемые уравнением. (19) и (23) в момент времени t_j начиная с начального значения $(B_0, \Gamma_0) \in P_6$. Тогда одношаговые методы, определенные в уравнении. (19) и (23) имеют среднеквадратический порядок один, т.е. существуют константы $C_1, C_2 > 0$ таким образом, что при достаточно малых τ неравенства*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| X(t_j) - X_{\tau_j}(t_j) \right\|_{P_6}^2 &\leq C_1 \tau, \\ \mathbb{E} \left\| X(t_j) - X_J(t_j) \right\|_{P_6}^2 &\leq C_2 \tau^{1/2}, \end{aligned}$$

удерживать для всех временных точек.

Доказательство Результат можно доказать так же, как в [50], Лемма 2.1..

Для детерминированных систем ОДУ порядок сходимости методов разбиения можно увеличить, используя композицию, основанную на дробных шагах (см., например, [49], Глава II). Мы проиллюстрируем этот подход для метода, основанного на подсистемах (20a) и (206), другой метод можно рассматривать аналогично. Используя расщепление Стрэнга, мы можем составить интегратор

$$\psi_{JT}(X) = \phi_{J,[1]}^{\tau/2} \circ \phi_{J,[2]}^{\tau} \circ \phi_{J,[1]}^{\tau/2}(X), \quad X \in P_6. \quad (24)$$

Для $\Sigma = O_3$, Ур. (24) — метод второго порядка для детерминированного уравнения. (2), однако, среднеквадратичный порядок уравнения (24) по-прежнему один. Для увеличения среднеквадратичного порядка необходимо включить стохастические интегралы более высокого порядка для воспроизведения взаимодействий Подсистем (20a) и (206) (видеть [50], Раздел 2, для подробностей). Обратите внимание, что даже без включения стохастических интегралов более высокого порядка интегратор расщепления Стрэнга, заданный уравнением (24) работает значительно лучше в наших численных симуляциях, чем методы Ли–Троттера, поэтому мы рекомендуем использовать этот тип интегратора. Мы еще не изучали причину этой улучшенной производительности, но ожидаем, что симметрия расщепления Стрэнга или слабый шум, действующий на систему, могут внести свой вклад.

Мы иллюстрируем среднеквадратичную сходимость наших предлагаемых методов на рис. 7 и сравните уравнение расщепления Стрэнга. (24) со стандартным методом Эйлера–Маруямы для параметров связи $C=68$ и $C=135$. Как и ожидалось, оба метода имеют среднеквадратический порядок один, однако для $C=135$ среднеквадратическая ошибка (MSE) метода расщепления значительно меньше, чем MSE метода Эйлера–Маруямы. Очевидно, что можно использовать меньшие размеры шагов для метода Эйлера–Маруямы; однако, это быстро становится крайне неэффективным, например, для JR-NMM для множественных популяций

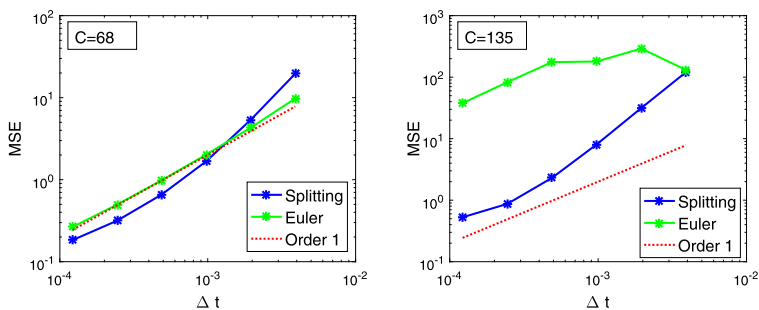
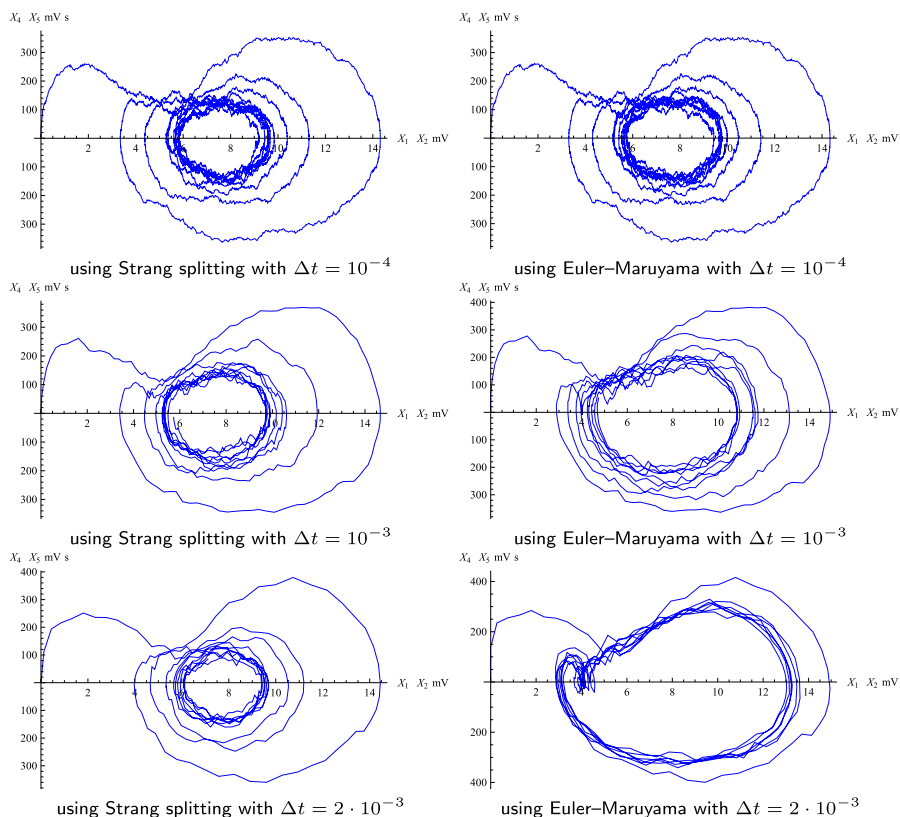


Рис. 7 Среднеквадратическая сходимость метода расщепления

Рис. 8 Фазовый портрет одного единственного пути \mathcal{I}

или когда метод Эйлера-Маруямы встроен в непрерывный во времени фильтр частиц.

Рис. 8 и 9 также демонстрируют эффективность схемы расщепления, так как *правильный* (как это не только наблюдалось в обоих методах с малыми размерами шага, но и основывалось на нашем анализе свойств метода) результаты все еще могут быть получены с гораздо большими размерами шага.

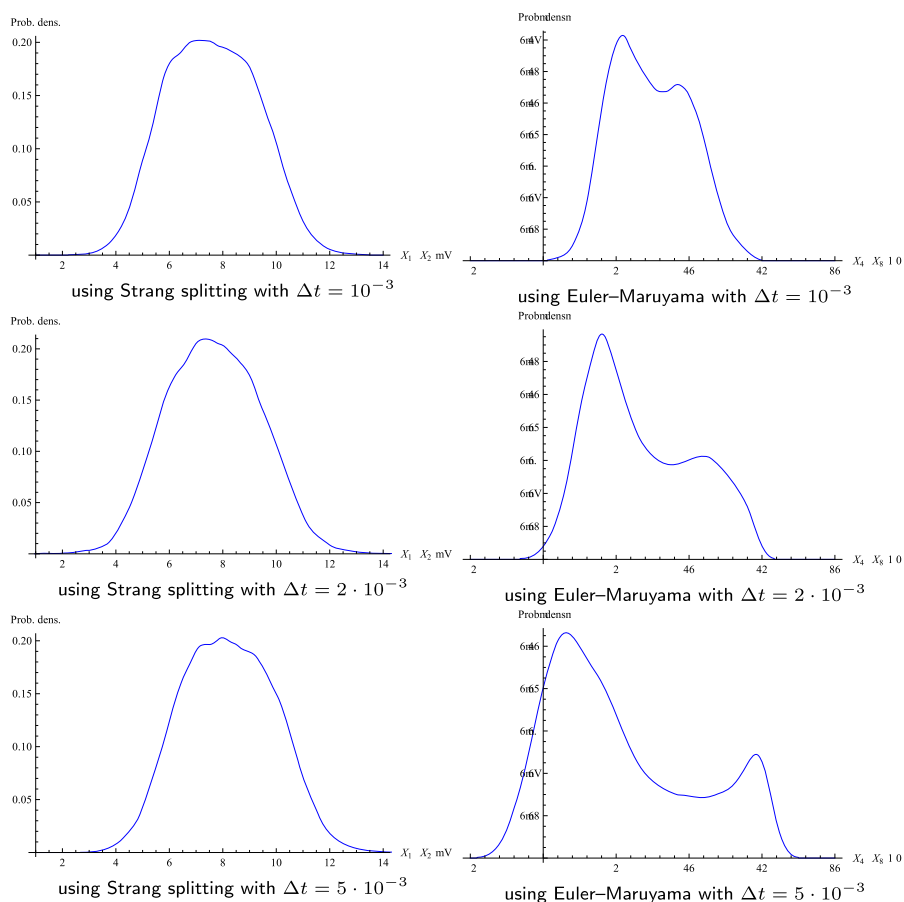


Рис. 9 Плотности инвариантной меры I

размеры шага, чем те, которые требуются для метода Эйлера-Маруямы. Другой важной особенностью предлагаемого метода является его надежность. Рисунок 8 показывает несколько графиков фазового портрета одного отдельного пути выхода I , с методом расщепления и методом Эйлера-Маруямы и разными размерами шага. Можно заметить, что фазовый портрет, полученный с помощью последнего метода, заметно меняется с увеличением размера шага. Эти фазовые портреты были рассчитаны для параметра связи $C=135$, начальное значение $X(0)=0.6$, $\sigma=0.5$, $\alpha=200$ и $t \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$. Фигура 9 соответствует верхнему правому графику на рис. 6, что само по себе может быть интерпретировано как вычислительное исследование феноменологической стохастической бифуркации для изменяющегося параметра связи C . Он показывает плотности инвариантной меры I для $C=135$, $\sigma=0.5$ и $\alpha=10$ и сравнивает схему расщепления Стэнга с методом Эйлера-Маруямы по размерам временного шага $t \in \{10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}\}$. Метод Эйлера-Маруямы с умеренно малыми размерами шага сообщит об изменении от унимодальной к бимодальной плотности для параметра $C=135$, тогда как правильное значение C чтобы это изменение произошло, оно должно быть гораздо масштабнее.

6.5 Границы моментов и геометрическая эргодичность

Следующие две леммы представляют свойства, представленные в разделе 4 для схем численного приближения, определяемых уравнением (19) и уравнение (23). Позволять $X_{\text{ты}} = (V_{\text{ты}}, \Gamma_{\text{ты}})$ и $X_{\text{ж}} = (B_{\text{ж}}, \Gamma_{\text{ж}})$ обозначают численные решения, определяемые уравнением (19) и уравнение (23), соответственно. Начнем с доказательства аналогичных границ, указанных в теореме 4.2 для ожидаемого значения $V_{\text{ты}}$ и $B_{\text{ж}}$. Хорошо известно, что в детерминированной постановке схема Эйлера не сохраняет такие свойства, см. [49], Глава 1, в стохастическом случае отрицательные результаты для метода Эйлера–Маруямы для (простых) стохастических осцилляторов наблюдались в [48]. Обратите внимание, что следующие две леммы также справедливы при коммутации композиций в уравнении (19) и уравнение (23).

Лемма 6.2 Пусть $\mu_{\text{дж}}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ для $\text{дж} \in \{3, 4, 5\}$ быть неотрицательными функциями, ограниченными $\mu_{\text{дж}, \text{макс}} \in \mathbb{R}^+$, соответственно. Тогда для $\varepsilon \in \{0, \dots, N\}$, $\varepsilon[B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})]$ (а также $\varepsilon[V_{\text{ты}}(T_{\varepsilon})]$) ограничено в каждом компоненте

$$\varepsilon(B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})\Gamma_0 + \kappa(T_{\varepsilon})\Gamma_0) \leq \varepsilon B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon}) \leq \varepsilon(B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})\Gamma_0 + \Gamma - 2C\Gamma).$$

Доказательство Докажем результат для численного метода $\psi_{\text{ж}}, \phi_{\text{ты}}$ можно рассматривать аналогично. Имея в виду обозначения в разделе 4, получаем из уравнения (23) что

$$\begin{aligned} \varepsilon[X_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})] &= e_M \quad T \varepsilon[X_{\text{ж}}(T_{\varepsilon-1})] + e_M \quad T \varepsilon[H \quad T \quad \left(\begin{array}{c} \varepsilon-1, X_{\text{ж}}^{\text{ж}}(T_{\varepsilon-1}) \end{array} \right)] \quad T \\ &= e_{M T_{\varepsilon}} X(0) + \sum_{k=1}^{\varepsilon} e_{M T_k} \varepsilon[H \quad T_{\varepsilon-k}, X_{\text{ж}}(T_{\varepsilon-k})] \quad T, \end{aligned}$$

и в частности его B -компонент читает

$$\varepsilon[B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})] = \varepsilon(B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})\Gamma_0 + \kappa(T_{\varepsilon})\Gamma_0) + \sum_{k=1}^{\varepsilon} \kappa(T_k) \varepsilon \left[\left(\begin{array}{c} T_{\varepsilon-k}, X_{\text{ж}}(T_{\varepsilon-k}) \end{array} \right) \right] \quad T. \quad (25)$$

Из доказательства теоремы 4.2 получаем $0 \leq \varepsilon[H(T_{\varepsilon-k}, X_{\text{ж}}(T_{\varepsilon-k}))] \leq C\Gamma$. Очевидно, что нижняя граница $\varepsilon[B_{\text{ж}}(T_{\varepsilon})]$ выполняется для любого размера шага по времени, докажете верхнюю границу, осталось показать, что

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon} \kappa(T_k) \quad T \leq \Gamma^{-2}.$$

Из разложения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\varepsilon} \kappa(T_k) \quad T &= \left(\varepsilon \Gamma - e^{-\Gamma} \right) \left(1 - e^{-\Gamma} \right) \kappa(T) - \kappa(T) \kappa(T) \\ &+ e^{-\Gamma} \sum_{k=1}^{\varepsilon} \kappa(T_k) \quad T \end{aligned}$$

выводим формулу

$$\sum_{k=1}^J K(\tau_k) \tau_k^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau_k} - e^{-\gamma \tau} \tau^{\alpha-1} K(\tau) = \int_0^{\tau} K(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds - \int_0^{\tau} K(s) s^{\alpha-1} e^{-\gamma s} ds + \int_0^{\tau} K(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds - \int_0^{\tau} K(s) s^{\alpha-1} e^{-\gamma s} ds$$

который в каждом компоненте меньше, чем $\tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau}$ для любого размера шага времени τ .

Замечание 5 Другая точка зрения на уравнение (23) заключается в применении метода прямоугольников (с использованием левой граничной точки интеграла) для аппроксимации формулы, основанной на свертке, уравнения (8) в форме

$$Q(\tau) = \vartheta \left(\int_0^{\tau} Q(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds + \int_0^{\tau} K(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds \right) + \int_0^{\tau} K(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds + \int_0^{\tau} K(s) s^{\alpha-1} e^{-\gamma s} ds$$

Более того, уравнение (25) позволяет лучше понять различие числовых схем: Сумма в уравнении (25) соответствует методу прямоугольников для аппроксимации интеграла свертки $\int_0^{\tau} Q(s) \tau^{\alpha-1} e^{-\gamma \tau} ds$ определено в доказательстве теоремы 4.2, где правая граничная точка используется в каждом интервале аппроксимации. Аналогично, при коммутации композиции в уравнении (23) получаем метод прямоугольника, оценивающий левые граничные точки. В случае схемы расщепления Стрэнга, заданной уравнением (24), функция оценивается в средних точках $(\tau_k + \tau_{k+1})/2$.

Замечание 6 Аналогично можно показать, что второй момент $E[(B_{\tau}(\tau))^2]$ (и также $E[(B_{\tau}(\tau))^2]$) ограничено

$$E[(B_{\tau}(\tau))^2] \leq \tau^2 E[(B_1(1))^2] + 2\tau E[B_1(1)] + \tau^2 E[(B_1(1))^2] + \tau^2 E[(B_1(1))^2] + \tau^2 E[(B_1(1))^2] + \tau^2 E[(B_1(1))^2]$$

Последний пункт, который мы обсуждаем в этой статье, — это геометрическая эргодичность дискретных марковских процессов. X_n определяется уравнением (19) и (23). По аналогии с разделом 5 мы предполагаем, что предположение (10) выполняется. Ввиду глобальной непрерывности Липшица коэффициентов уравнения (5), можно было бы ожидать, что стандартные численные методы, такие как метод Эйлера–Маруямы, снова геометрически эргодичны для достаточно малых размеров шага τ (видеть [34], Теорема 7.3). Преимущество предлагаемых нами разделяющих интеграторов состоит в том, что мы можем напрямую доказать дискретный аналог Леммы 5.1, т.е. дискретное условие Ляпунова для той же функции Ляпунова при очень мягких ограничениях на τ . Сформулируем результат для интегратора Винера, интегратор Орнштейна–Уленбека можно трактовать аналогично.

Лемма 6.3 Пусть $0 < \tau < \tau_h$ быть равноудаленным разделом $[0, T]$ с размером шага $\tau < 1/(2\|\Gamma\|_{L^\infty})$ и пусть X_k обозначают численные решения, определяемые уравнением (23). Тогда функционал $V(X) = V_1(K, \Pi)$ определено в лемме 5.1 является функцией Ляпунова для X_k , я.е. существуют константы $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta \geq 0$ такой что

$$\mathbb{E} [V(X_{k(T_{j+1})}) | \mathcal{F}_{T_j}] \leq \alpha V(X_k(T_j)) + \beta.$$

Доказательство Для простоты мы устанавливаем $a = b$, что подразумевает $e^{-\tau} X = e^{-a} X$ для любого $X \in \mathbb{R}^3$. Кроме того, мы обозначаем $B = Q(T_j)$, $\Pi = \Pi(T_j)$ для сокращения записи. Одношаговые приближения $Q(T_{j+1})$ и $\Pi(T_{j+1})$ можно записать как

$$\begin{aligned} \Gamma Q(T_{j+1}) &= \Gamma e^{-\tau} B + \tau \Gamma Q + \Gamma e^{-\tau} \Pi + \tau \Gamma(Q + \Sigma \xi), \\ \Pi(T_{j+1}) &= e^{-a} \tau (\Gamma Q + \Pi) + e^{-a} \tau \Gamma(Q) + e^{-a} \tau \Sigma \xi - \Gamma Q(T_{j+1}), \end{aligned}$$

где $\xi \sim N(0, \Sigma)$ представляет собой трехмерный гауссовский вектор, независимый от \mathcal{F}_{T_j} . Путем элементарных вычислений и применения неравенства Юнга получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Pi(T_{j+1}) + \Gamma Q(T_{j+1})\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} e^{-2a} \tau \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{\varepsilon}{2} e^{-4a} \tau^2 \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Gamma(K)\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{1}{2} e^{-a} \tau \|\tau \Gamma(Q) + \Sigma \xi\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \quad + e^{-2a} \tau \langle \Gamma Q + \Pi, \Sigma \xi \rangle_{\mathbb{P}_3}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ — это параметр, который можно свободно выбирать. Таким образом, можно найти $C_1 > 0$ достаточно большой, такой что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E} [\|\Pi(T_{j+1}) + \Gamma Q(T_{j+1})\|_{\mathbb{P}_3}^2 | \mathcal{F}_{T_j}] \\ & \leq \frac{1}{2} e^{-2a} \tau \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Gamma(K)\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \quad + \frac{\varepsilon}{2} e^{-4a} \tau^2 \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + C_1. \end{aligned}$$

В том же духе мы можем найти $C_2 > 0$ такой, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\|\Gamma Q(T_{j+1})\|_{\mathbb{P}_3}^2 | \mathcal{F}_{T_j}] \\ & \leq e^{-2a} \|\Gamma Q\|_{\mathbb{P}_3}^2 + a_2 e^{-2a} \tau^2 \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \quad + \tilde{\varepsilon} e^{-2a} \tau \|\Gamma Q\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} a_2 e^{-2a} \tau \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \|\Gamma(K)\|_{\mathbb{P}_3}^2 \\ & \quad + \varepsilon a_2 e^{-4a} \tau^2 \|\Gamma Q\|_{\mathbb{P}_3}^2 + a_2 \tau^2 \|\Gamma Q + \Pi\|_{\mathbb{P}_3}^2 + C_2 \end{aligned}$$

со свободными параметрами $\tilde{\varepsilon}, \varepsilon^* > 0$. Объединяя приведенные выше границы, мы можем найти подходящее $\alpha \in (0, 1)$ если для любого данного τ существует выбор $\tilde{\varepsilon}$ такой что

$$e^{-2\beta_1} + \varepsilon \tau_2 + 2a_2 \tau_2 + \frac{2}{\tilde{\varepsilon}^*} a_2 \tau + \varepsilon a_4 e^{-2\beta} \tau_6 < 1, \quad (26a)$$

$$e^{-2a} \left(\tau_1 + \tilde{\varepsilon}^* \tau + \varepsilon a_2 e^{-2\beta} \tau_2 \right) < 1. \quad (26b)$$

Обратите внимание, что α и $\tilde{\varepsilon}$ можно выбрать произвольно малым, поэтому соответствующими членами можно пренебречь. Теперь пусть $\tau < 1/(2a)$, то уравнение (26a) и (26b) выполняются для

$$\frac{2a_2 - 4a_3\tau}{2a - 4a_2\tau + 4a_3} \tau < \tilde{\varepsilon}^* < \frac{2a}{1 - 2\beta},$$

что подразумевает результат. -

По аналогии с разделом 5, геометрическая эргодичность (дискретных) марковских процессов X_k и $X_{\tau k}$ можно установить, доказав гладкость вероятностей перехода и неприводимость процессов. Оба свойства можно доказать точно так же, как в [34], Следствие 7.4, поэтому мы только набросаем доказательство для X_k :

- (i) Гладкость плотностей вероятности перехода: в силу предположения (10) вероятность перехода двух (или более) последовательных шагов $\psi_{jk} \circ \tau \circ \psi_{jk}$ нашего интергатора имеет равномерную плотность.
- (ii) Неприводимость: как и в случае непрерывности во времени в разделе 5 мы должны установить условие достижимости, т.е. численный метод, начинающийся с $x \in \mathbb{R}^6$ может достичь любого $y \in \mathbb{R}^6$ после фиксированного количества шагов. Для нашего метода расщепления достаточно двух последовательных шагов, чтобы достичь любой точки путем соответствующего выбора векторов $\xi(\tau)$ такой что

$$y = \psi_{jk} \circ \tau \circ \psi_{jk}(\xi(\tau)). \quad (27)$$

На самом деле, ур. (27) представляет собой шестимерную систему уравнений с шестью степенями свобода (три гауссовских случайных величины для каждого шага) $\psi_{jk} \circ \tau \circ \psi_{jk}$ который всегда может быть решено в соответствии с предположением 10.

Подводя итог, численные приближения $X_{\tau k}$ и X_k геометрически эргодичны относительно единственной инвариантной меры $\mu_{\tau k}$ и μ_k под мягкими ограничениями размер временного шага τ . Кроме того, как $X_{\tau k}$ и X_k сходятся к X в среднем-квадратный смысл, $\mu_{\tau k}$ и μ_k являются сходящимися приближениями исходного инварианта меры (видеть [53], теорема 3.3, для подробностей). Таким образом, наши численные аппроксимации предельных плотностей в разделе 5 (см. рис. 6) подтверждаются теорией.

7. Резюме и выводы

Мы предложили версию оригинальной модели JR-NMM, включающую случайные входные данные, как стохастическую гамильтонову систему с нелинейным смещением, и обсудили диапазон

свойств, основанных на результатах, доступных в рамках стохастического анализа, в частности, таких свойств, как границы моментов и существование инвариантных мер. Последние представляют собой шаг к анализу динамических свойств стохастической формулировки JR-NMM. Кроме того, мы представили эффективную численную схему, основанную на подходе расщепления, который сохраняет качественное поведение решения системы. Мы также обсудили преимущества применения такой схемы, разработанной в соответствии с полученными особенностями стохастического JR-NMM для будущих вычислительных исследований в отличие от применения других численных методов, таких как схема Эйлера–Маруямы. С помощью подходящего введения шума наши результаты могут быть обобщены как на расширение JR-NMM на множественные популяции [37, 54–57] и расширение на несколько областей, например, модель с 2 столбцами в [13] или многозонная модель нейронной массы в [56].

Конкурирующие интересы

Авторы заявляют об отсутствии у них конфликта интересов.

Вклад авторов

Все авторы внесли равный вклад.

Благодарности Данная работа была поддержана Австрийским научным фондом (FWF) P26314.

Приложение

Для полноты изложения приведем вспомогательные результаты, устанавливающие необходимые свойства гладкости плотностей вероятностей перехода, а также неприводимость процесса решения. Уравнения (5). Доказательства в принципе такие же, как в [34]. Хотя уравнение Ланжевена, рассмотренное там, не включало нелинейного смещения, такого как сигмоидальная функция, гладкость и ограниченность сигмоидальной функции позволяют нам использовать те же аргументы. Следующая лемма устанавливает свойства гладкости плотностей вероятности перехода, доказывая гипозллиптичность генератора L . Для получения более подробной информации см. [34, 36].

Лемма А.1 *Генератор L , его формальное сопряжение $L^*, \partial/\partial t$ – L и $\partial/\partial t$ – L^* являются гипозллиптическими.*

Доказательство Чтобы применить теорему Хермандера, мы должны показать, что алгебры Ли, основанные на рассматриваемых операторах, имеют максимальный ранг 6 и 7 (см. [36] и для более общего обсуждения [58], Глава 2). Мы показываем это для генератора L , остальные операторы можно рассматривать аналогично. Используя обозначения из раздела 4.1, мы рассматриваем следующие шестимерные векторные поля:

$$\phi_0(X) = MX + N(X), \quad \Gamma_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \Sigma_{(j, \cdot)} \end{pmatrix} \quad \text{для } j \in \{1, 2, 3\},$$

где $\Sigma_{i,j}$ обозначает j -й столбец Σ . Для шестимерных векторных полей $U, V: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ якобианцами $\partial U, \partial V$ мы определяем скобку Ли $[U, V] := (\partial U)V - (\partial V)U$. В соответствии с [34] достаточно показать, что

$$\left(\left\{ \begin{array}{c} \text{тесный диапазон } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, [\phi_0, \Gamma_1], [\phi_0, \Gamma_2], [\phi_0, \Gamma_3] \end{array} \right\} \right) = 6.$$

Как

$$(\partial \Gamma_0) \Gamma_j = \left(\begin{array}{c} \Sigma_{i,j} \\ -2\Gamma \Sigma_{i,j} \end{array} \right) \quad \text{и} \quad (\partial \Gamma_j) \phi_0 = 0,$$

утверждение непосредственно следует из Предположения (10) и $\sigma_j > 0$ для $j \in \{3, 4, 5\}$. Обратите внимание, что нелинейный член H не играет никакой роли в вычислениях, поскольку его якобиан отличен от нуля только в производных, соответствующих V -компонента, которая умножается на первые три компонента векторов Γ_j . Однако эти три компонента всегда равны нулю.

Неприводимость может быть установлена через аргумент типа управления. Для этого пусть $\Pi_\tau(A, x)$ обозначают переходные вероятности марковского процесса X .

Лемма A.2 Процесс решения $X = (K, P)$ уравнения (5) неприводим, т.е. для произвольных открытых множеств $A \in \mathbb{R}^6$, начальные значения $x \in \mathbb{R}^6$ и $t \in [0, T]$

$$\Pi_\tau(A, x) > 0. \quad (28)$$

Доказательство Достаточно рассмотреть открытые кварталы $A = B_\varepsilon(x)$ произвольных конечных значений $x \in \mathbb{R}^6$ в какой-то момент времени $t \in [0, T]$. Теперь, Собственность (28) можно установить следующим образом: Пусть $X(t)$ быть решением контролируемого JR-NMM

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = X(t) + \begin{pmatrix} Q(t) \\ \Sigma \dot{Q}(t) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\dot{X}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^6$ является непрерывно дифференцируемой функцией. Если

$$\bigcap_{0 \leq t \leq T} \text{Как } \|\dot{X}(t) - \dot{X}(t)\| < \varepsilon > 0, \quad (30)$$

затем Свойство (28) держится до тех пор, пока $X(t) = x$. Теперь, пусть $Q(t)$ быть гладкой кривой, такой что

$$\begin{pmatrix} Q(0) \\ \frac{dQ}{dt}(0) \end{pmatrix} = x \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} Q(t) \\ \frac{dQ}{dt}(t) \end{pmatrix} = X(t).$$

Контроль $\dot{W}(t)$ задается через дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\hat{d}B}{dt} = \Sigma^{-1} \Gamma \left(2Q \frac{dQ}{dt^2} + 2\Gamma \frac{dQ}{dt} + \Gamma_2 Q^2 G(Q) \right),$$

которая имеет единственное решение как Глобально липшицева. Следовательно, точка X_t достижимо для решений управляемой системы (29). Состояние (30) (и, следовательно, неприводимость) теперь является непосредственным следствием теоремы Струка–Варадхана о носителе (см. [59]).

Примечание издателя

Springer Nature сохраняет нейтралитет в отношении юрисдикционных претензий на опубликованные карты и институциональную принадлежность.

Ссылки

1. Wilson HR, Cowan JD. Возбуждающие и тормозные взаимодействия в локализованных популяциях модельных нейронов. *Biophys J*. 1972;12(1):1–24.
2. Уилсон Х.Р., Коуэн Дж.Д. Математическая теория функциональной динамики корковой и таламической нервной ткани. *Кибернетика*. 1973;13(2):55–80.
3. Лопес да Силва Ф. Х., Хукс А., Смитс Х., Зеттерберг Л. Х. Модель ритмической активности мозга. *Кибернетика*. 1974;15(1):27–37.
4. Фримен У. Дж. Массовое действие в нервной системе. Нью-Йорк: Academic Press; 1975.
5. Лопес да Силва ФХ, Ван Роттердам А, Бартс П, Ван Хойсден Э, Берр В. Модели нейронных популяций: основные механизмы ритмичности. *Prog Brain Res*. 1976;45:281–308.
6. Фримен В. Модели динамики нейронных популяций. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol, Suppl*. 1977;34:9–18.
7. Зеттерберг Л.Х., Кристианссон Л., Моссберг К. Эффективность модели локальной популяции нейронов. *Биол Киберн*. 1978;31(1):15–26.
8. Sotero RC, Trujillo-Barreto NJ, Iturria-Medina Y, Carbonell FF, Jimenez JC. Реалистично связанные модели нейронной массы могут генерировать ритмы ЭЭГ. *Neural Comput*. 2007;19(2):478–512.
9. Вендлинг Ф., Бенкет П., Бартоломей Ф., Джирса В. Вычислительные модели эпилептиформной активности. *J Neurosci Methods*. 2016;260:233–51.
10. Санс-Леон П., Нок С.А., Шпиглер А., Йирса В.К. Математическая структура для моделирования крупномасштабных мозговых сетей в виртуальном мозге. *NeuroImage*. 2015;111:385–430.
11. Кумбс С., Бирн А. Модели нейронной массы следующего поколения. [arXiv:1607.06251](https://arxiv.org/abs/1607.06251) (2016).
12. Faugeras O, Touboul J, Cessac B. Конструктивный анализ среднего поля многопопуляционных нейронных сетей со случайными синаптическими весами и стохастическими входами. *Front Comput Neurosci*. 2009;3(1):1–28.
13. Янсен Б. Х., Рит В. Г. Электроэнцефалограмма и генерация зрительных вызванных потенциалов в математической модели связанных корковых колонок. *Biol Cybern*. 1995;73(4):357–66.
14. Янсен Б. Х., Зуридакис Г., Брандт М. Э. Нейрофизиологическая математическая модель вызванных зрительных потенциалов. *Biol Cybern*. 1993;68(3):275–83.
15. ван Роттердам А., Лопес да Силва Ф. Х., Ван ден Энде Дж., Виргевеер М. А., Херманс А. Дж. Модель пространственно-временных характеристик альфа-ритма. *Bull Math Biol*. 1982;44(2):283–305.
16. Leimkuhler B, Matthews C. Молекулярная динамика. Междисциплинарная прикладная математика, т. 39. Cham: Springer; 2015. стр. 443. С детерминированными и стохастическими численными методами.
17. Коффи В.Т., Калмыков Ю.Т., Уолдрон Дж.Т. Уравнение Ланжевена. С приложениями к стохастическим задачам физики, химии и электротехники. 3-е изд. Hackensack: World Scientific; 2012. стр. 827.
18. Гримберт Ф., Фогерас О. Бифуркационный анализ модели нейронной массы Янсена. *Neural Comput*. 2006;18(12):3052–68.
19. Touboul J, Wendling F, Chauvel P, Faugeras O. Активность нейронной массы, бифуркации и эпилепсия. *Neural Comput*. 2011;23(12):3232–86.
20. Модель Кнеше Т. Янсена-Рита (2013).
21. Кандел Э. Р., Шварц Дж. Х., Джесселл Т. М. Принципы нейронауки. Т. 4. Нью-Йорк: McGraw-Hill; 2000.
22. Даян П., Эбботт Л. Ф. Теоретическая нейронаука. т. 806. Кембридж: MIT Press; 2001.

23. Герстнер В., Кистлер В.М., Науд Р., Панински Л. Нейронная динамика: от отдельных нейронов к сетям и моделям познания. Кембридж: Издательство Кембриджского университета; 2014.
24. Шпиглер А., Кибель С.Дж., Атай Ф.М., Кнеше Т.Р. Бифуркационный анализ моделей нейронной массы: влияние внешних входов и дендритных постоянных времени. *NeuroImage*. 2010;52(3):1041–58.
25. Шпиглер А., Кнеше Т.Р., Шваб К., Хауэizen Дж., Атай Ф.М. Моделирование явлений резонанса мозга с использованием модели нейронной массы. *PLoS Comput Biol*. 2011;7(12):1002298.
26. Хасьминский Р. Стохастическая устойчивость дифференциальных уравнений. Стохастическое моделирование и прикладная вероятность, т. 66. Гейдельберг: Springer; 2012.
27. Арнольд Л. Случайные динамические системы. Берлин-Гейдельберг: Springer; 1998.
28. Асаи Й., Клоден П. Э. Многошаговые методы для случайных одов, управляемых диффузиями Ито. *J Comput Appl Math*. 2016;294:210–24.
29. Арнольд Л. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и приложения. Нью-Йорк: Wiley; 1974. С. 228. Перевод с немецкого.
30. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Englewood Cliffs: Prentice Hall International; 1962.
31. Мильштейн Г.Н., Третьяков МВ. Стохастические числа для математической физики. Научные вычисления. Берлин: Springer; 2004.
32. Мао С. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Амстердам: Elsevier; 2007.
33. Клебанер ФК. Введение в стохастическое исчисление с приложениями. т. 57. Сингапур: World Scientific; 2005.
34. Mattingly JC, Stuart AM, Higham DJ. Эргодичность для SDE и приближений: локально липщицевы векторные поля и вырожденный шум. *Stoch Process Appl*. 2002;101(2):185–232. doi:[10.1016/S0304-4149\(02\)00150-3](https://doi.org/10.1016/S0304-4149(02)00150-3).
35. Леймкулер Б., Мэтьюз К., Штольц Г. Вычисление средних значений из равновесной и неравновесной молекулярной динамики Ланжевена. *IMA J Numer Anal*. 2016;36(1):13–79.
36. Рей-Беллет Л. Эргодические свойства марковских процессов. В: Открытые квантовые системы. II. Конспект лекций по математике. т. 1881. Берлин: Springer; 2006. стр. 1–39.
37. Дэвид О., Фристон К. Дж. Модель нейронной массы для мега- и электроэнцефалографии: связь и нейронная динамика. *NeuroImage*. 2003;20(3):1743–55.
38. Freestone DR, Kuhlmann L, Chong M, Nesic D, Grayden DB, Aram P, Postoyan R, Cook MJ. Моделирование нейронной массы пациента: стохастические и детерминированные методы. В: Последние достижения в прогнозировании и профилактике эпилептических приступов. 2013. стр. 63–82.
39. Хорн РА, Джонсон СР. Матричный анализ. 2-е изд. Кембридж: Cambridge University Press; 2013. стр. 643.
40. Люткеполь Х. Справочник матриц. Чичестер: Wiley; 1996. С. 304.
41. Da Prato G, Zabczyk J. Ergodicity for infinite-dimensional systems. Серия лекций Лондонского математического общества. т. 229. Кембридж: Cambridge University Press; 1996. стр. 339.
42. Санс-Серна Дж. М., Стюарт А. М. Эргодичность диссипативных дифференциальных уравнений, подверженных случайным импульсам. *J Differ Equ*. 1999;155(2):262–84. doi:[10.1006/jdeq.1998.3594](https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3594).
43. Баняс Л., Бжезняк Э., Неклюдов М., Проль А. Стохастический ферромагнетизм: анализ и численные методы. т. 58. Берлин: de Gruyter; 2014.
44. Хохатсу-Хига А., Петтерссон Р. Методы уменьшения дисперсии для моделирования плотностей в пространстве Винера. *SIAM J Numer Anal*. 2002;40(2):431–50. doi:[10.1137/S0036142901385507](https://doi.org/10.1137/S0036142901385507).
45. Понс О. Функциональная оценка плотности, регрессионные модели и процессы. Хакенсак: World Scientific; 2011. стр. 199. doi:[10.1142/9789814343749](https://doi.org/10.1142/9789814343749).
46. Татено Т., Пакдаман К. Случайная динамика нейронной модели Морриса–Лекара. Хаос, *Interdiscip J Nonlinear Sci*. 2004;14(3):511–30.
47. Хорстхемке В., Лефеве Р. Переходы, вызванные шумом в физике, химии и биологии. В: Переходы, вызванные шумом: теория и приложения в физике, химии и биологии. 1984. С. 164–200.
48. Strømme Melbø AH, Higham DJ. Численное моделирование линейного стохастического осциллятора с аддитивным шумом. *Appl Numer Math*. 2004;51(1):89–99.
49. Хайрер Э., Любич К., Ваннер Г. Геометрическое численное интегрирование. Гейдельберг: Springer; 2006.
50. Мильштейн Г. Н., Третьяков М. В. Квазисимплектические методы для уравнений типа Ланжевена. *IMA J Numer Anal*. 2003;23(4):593–626.
51. Бу-Раби Н., Овади Х. Долгосрочная точность вариационных интеграторов в стохастическом контексте. *SIAM J Numer Anal*. 2010;48(1):278–97.
52. Мисава Т. Алгебраический подход Ли к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений. *SIAM J Sci Comput*. 2001;23(3):866–90. doi:[10.1137/S106482750037024X](https://doi.org/10.1137/S106482750037024X).

53. Шардлоу Т., Стюарт А. М. Теория возмущений для эргодических цепей Маркова и ее применение к численным приближениям. *SIAM J Numer Anal.* 2000;37(4):1120–37. doi:[10.1137/S0036142998337235](https://doi.org/10.1137/S0036142998337235).
54. Вендлинг Ф., Белланжер Дж., Бартоломей Ф., Шовель П. Значимость нелинейных моделей с сосредоточенными параметрами в анализе глубинных эпилептических сигналов ЭЭГ. *Biol Cybern.* 2000;83(4):367–78.
55. Вендлинг Ф., Бартоломей Ф., Белланжер Дж., Шовель П. Эпилептическая быстрая активность может быть объяснена моделью нарушенного ГАМКергического дендритного торможения. *Eur J Neurosci.* 2002;15(9):1499–508.
56. Бабаджани-Фереми А., Солтанян-Заде Х. Многозонное моделирование нейронной массы сигналов ЭЭГ и МЭГ. *NeuroImage.* 2010;52(3):793–811.
57. Ван П., Кнеше ТР. Реалистичная модель нейронной массы коры с ламинарно-специфическими связями и синаптической пластичностью — оценка с помощью слухового привыкания. *PLoS ONE.* 2013;8(10):77876.
58. Нуаларт Д. Исчисление Маллиавэна и смежные темы. 2-е изд. Вероятность и ее приложения (Нью-Йорк). Берлин: Springer; 2006. стр. 382.
59. Струк Д. В. Лекции по темам стохастических дифференциальных уравнений. Институт фундаментальных исследований Тата, лекции по математике и физике. т. 68. Бомбей: Тата; 1982. стр. 93. Springer-Verlag, Берлин-Нью-Йорк. С примечаниями Сатьяджита Кармакара.