universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 29

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda, \gamma \in K, v \in V$ gilt:

(i) $0 \cdot v = 0$.
(ii) $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.
(iii) Aus $v \neq 0$ und $\lambda \neq \gamma$ folgt $\lambda \cdot v \neq \gamma \cdot v$.

Lösung.

(i) Es gilt $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$, also $0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Wir addieren $-(0 \cdot v)$ auf beiden Seiten und erhalten $0 = 0 \cdot v$.

(ii) $(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0$ und es gilt auch $\lambda \cdot v + (-\lambda) \cdot v = 0$, da $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist. Das additiv inverse Element in einer Gruppe ist eindeutig bestimmt, also folgt $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

(iii) Nehmen wir an, es gelte $v \neq 0$, $\lambda \neq \gamma$ und $\lambda \cdot v = \gamma \cdot v$. Wir addieren $-\gamma \cdot v$ auf beiden Seiten und erhalten: $\lambda \cdot v + (-\gamma \cdot v) = 0$, also $\lambda \cdot v + (-\gamma) \cdot v = 0 \iff (\lambda - \gamma) \cdot v = 0$ (wobei wir auf der linken Seite auch (ii) angewendet haben). Da $\lambda \neq \gamma$, gilt $\lambda - \gamma \neq 0$, also gibt es $(\lambda - \gamma)^{-1} \in K$ (denn K ist ein Körper). Wir multiplizieren nun beide Seiten von $(\lambda - \gamma) \cdot v = 0$ mit dem Skalar $(\lambda - \gamma)^{-1}$:

$$\begin{aligned} &(\lambda - \gamma)^{-1} \cdot ((\lambda - \gamma) \cdot v) = (\lambda - \gamma)^{-1} \cdot 0 \\ \iff &((\lambda - \gamma)^{-1}(\lambda - \gamma)) \cdot v = 0 \iff 1 \cdot v = 0 \iff v = 0. \end{aligned}$$

Letztere Gleichung steht aber im Widerspruch zu der Annahme $v \neq 0$. Der Widerspruch zeigt, dass die drei Aussagen $v \neq 0$, $\lambda \neq \gamma$ und $\lambda \cdot v = \gamma \cdot v$ nicht alle drei gelten können. Wenn wir also $v \neq 0$, $\lambda \neq \gamma$ haben, folgt $\lambda \cdot v \neq \gamma \cdot v$

$\square$

Aufgabe 30 (*partiell*)

Sei $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von V? (begründen Sie Ihre Aussage)

(a) $U_1 = \{f \in V \mid f(0) = 2\}$
(d) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 1\}$
(e) $U_5 = \{f \in V \mid \exists C \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq C\}$.

Lösung.

(b) $U_2 = \{f \in V \mid f(0) = 2\}$
Seien $f_1(x) = f_2(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_1 + f_2 \notin U_2$, denn $(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 2 + 2 = 4$. Also ist U_1 kein Untervektorraum von V.

(d) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 1\}$
Wenn wir $f_1 = f_2 = 1$ wählen, folgt sofort, dass U_4 kein Untervektorraum ist (denn z.B. $|(f_1 + f_2)(1)| = 2$, also > 1).

(e) $U_5 = \{f \in V \mid \exists C \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq C\}$.
Die Elemente von U_5 sind genau die *beschränkten* reellen Funktionen. Seien $f_1, f_2 \in U_5$. Sei $C_1 \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit der Eigenschaft, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $|f_1(r)| \leq C_1$. Ähnlich sei C_2 eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $|f_2(r)| \leq C_2$. Dann haben wir für $C = C_1 + C_2$, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $|(f_1 + f_2)(r)| = |f_1(r) + f_2(r)| \leq |f_1(r)| + |f_2(r)| \leq C_1 + C_2 = C$.
Zusätzlich gilt für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ und für alle $r \in \mathbb{R}$: $|(c \cdot f_1)(r)| = |c \cdot f_1(r)| = |c| \cdot |f_1(r)| \leq |c| \cdot C_1$, also ist $|c| \cdot C_1$ eine obere Schranke für $c \cdot f_1$ (im Betrag).
Es folgt, dass U_5 ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V ist.

□

Aufgabe 31 (*ähnlich, partiell*)

Sei R ein Ring und $m \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathrm{Mat}_m(R)$ hat **obere Dreiecksgestalt**, wenn für $j < i$ stets $m_{ij} = 0$ gilt.
Zeigen Sie: Haben $M, N \in \mathrm{Mat}_m(R)$ obere Dreiecksgestalt, so auch $M \cdot N$.

Lösung. Seien $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, mit $j < i$.

$$\begin{aligned}(M \cdot N)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{m} M_{i,k} N_{k,j} = \sum_{k=1}^{j} M_{i,k} N_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{m} M_{i,k} N_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{j} 0 \cdot N_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{m} M_{i,k} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache angewendet haben, dass M und N obere Dreiecksgestalt haben. Für $j < i$ gilt also $(M \cdot N)_{i,j} = 0$, woraus folgt, dass $M \cdot N$ obere Dreiecksgestalt hat. □

Aufgabe 32

Bestimmen Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{C}$, wobei Sie $\mathbb{C}$ einmal als $\mathbb{C}$- und einmal als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen (die Skalarmultiplikation ist einfach die bekannte Multiplikation von Zahlen).

Lösung. Als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet wird $\mathbb{C}$ von jedem Vektor $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erzeugt, denn es gibt für jedes $w \in \mathbb{C}$ ein $\alpha \in \mathbb{C}$ so dass $w = \alpha \cdot v$ gilt. Also hat $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum nur zwei Untervektorräume: $\mathbb{C}$ und $\{0\}$.

Wenn wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten, hilft uns die geometrische Intuition, die Untervektorräume zu bestimmen. Wenn wir komplexe Zahlen mit Vektoren (mit der Zahl als Endpunkt und 0 als Anfangspunkt) in der Ebene gleichsetzen, sehen wir sofort, dass jede Menge bestehend aus zwei nicht-kollinearen Vektoren v_1 und v_2 die gesamte Ebene erzeugt (weil sich jeder Vektor als Linearkombination von v_1 und v_2 mit reellen Koeffizienten schreiben lässt). Ein einziger Vektor erzeugt hingegen nur die Gerade, die diesen Vektor enthält (also die Menge aller Vektoren, die zu dem gegeben Vektor kollinear sind). Die Untervektorräume von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum sind also, geometrisch gesehen: die gesamte Ebene, die Geraden, die den Ursprungspunkt enthalten, und die Menge, die nur den Ursprungspunkt enthält, oder, als Teilmengen von $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ selbst, für jedes $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Menge $\{\alpha \cdot v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, und $\{0\}$. □