Einführung in die Theoretische Informatik — LVA 703062
Lösungen zum 5. SL-Blatt für den 19. November 2021 — IFI

---

1) *Lösung.*

```haskell
data B = Zero | One
  deriving (Show, Eq)

-- implementation of the operators for the binary algebra
bAdd :: B -> B -> B
bAdd Zero Zero = Zero
bAdd _    _    = One

bMul :: B -> B -> B
bMul One One = One
bMul _   _   = Zero

bNot :: B -> B
bNot Zero = One
bNot One  = Zero
```

Die vollständige Lösung finden Sie in der Datei boolA.hs.

□

2) Wir betrachten $\langle \mathbb{B}^n; +, (0,\ldots,0)\rangle$ und überprüfen folgende Eigenschaften, siehe Definition 3.5 des Skriptums. Da die binäre Algebra eine Boolsche Algebra darstellt gilt dass $\langle \mathbb{B}; +, 0\rangle$ ein kommutativer Monoid ist. Dies nützen wir hier implizit aus.

   1) *Assozativität.* Wir zeigen dass $+$ assozativ ist. Fixieren wir hierfür beliebige $a, b, c \in \mathbb{B}^n$, d.h. a, b und c haben die Gestalt $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ und $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) \\
&= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
&= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
&= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
&= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
&= (a + b) + c\ .
\end{aligned}$$

   2) *Neutrales Element.* Für beliebiges $a = (a_1, \ldots, a_n)$ gilt sowohl

$$a + (0, \ldots, 0) = (a_1 + 0, \ldots, a_n + 0) = (a_1, \ldots, a_n) = a\ ,$$

als auch

$$(0, \ldots, 0) + a = (0 + a_1, \ldots, 0 + a_n) = (a_1, \ldots, a_n) = a\ ,$$

d.h. $(0, \ldots, 0)$ ist das neutrale Element bez. $+$, wie gewünscht.

3) *Kommutativität.* Für beliebiges $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ gilt

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \ldots, b_n + a_n) = b + a \ ,$$

es gilt also dass $+$ kommutativ ist.

Der Beweis für $\langle \mathbb{B}^n; \cdot, (1, \ldots, 1) \rangle$ folgt durch idente Schlussfolgerungen.

3) Wir überprüfen hierfür folgende Eigenschaften, siehe Definition 3.7 des Skriptums.

   1) Dass $\langle \mathbb{B}^n; +, (0, \ldots, 0) \rangle$ und $\langle \mathbb{B}^n; \cdot, (1, \ldots, 1) \rangle$ kommutative Monoide darstellen wurde bereits gezeigt.

   2) Wir zeigen nun dass die Operationen $+$ und $\cdot$ distributieren. Fixieren wir hierfür beliebige $a, b, c \in \mathbb{B}^n$, d.h. a, b und c haben die Gestalt $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ und $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Da die Binäre Algebra eine Boolesche Algebra definiert wissen wir dass

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a_1 \cdot (b_1 + c_1), \ldots, a_n \cdot (b_n + c_n)) \\ &= ((a_1 \cdot b_1) + (a_1 \cdot c_1), \cdots, (a_n \cdot b_n) + (a_n \cdot c_n)) \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \ , \end{aligned}$$

   gilt. Orthogonal dazu wird $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ gezeigt.

   3) Schlussendlich zeigen wir die Eigenschaften bezüglich des Komplements. Fixieren wir $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Aufgrund der entsprechenden Eigenschaften der Binären Algebra erhalten wir

$$a + {\sim}(a) = (a_1 + {\sim}(a_1), \ldots, a_n + {\sim}(a_n)) = (1, \ldots, 1) \ ,$$

   und

$$a \cdot {\sim}(a) = (a_1 \cdot {\sim}(a_1), \ldots, a_n \cdot {\sim}(a_n)) = (0, \ldots, 0) \ ,$$

   wie gewünscht.