universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 12

Aufgabe 46

Sei K ein Körper und $x_1, \ldots, x_m \in K$ paarweise verschiedene Elemente. Zeigen Sie, dass es dann für jede Wahl von $y_1, \ldots, y_m \in K$ genau ein Polynom $p \in K[t]$ vom Grad höchstens $m-1$ gibt, mit

$$p(x_i) = y_i$$

für alle $i = 1, \ldots, m$.

Proof. Seien $p_0, \ldots, p_{m-1} \in K$ und sei $p \in K[t]$ das Polynom

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_{m-1} t^{m-1}.$$

Dann bilden die m Gleichungen $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, m$, ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1 \cdot p_0 + x_1 p_1 + x_1^2 p_2 + \ldots + x_1^{m-1} p_{m-1} &= y_1 \\
1 \cdot p_0 + x_2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_2^{m-1} p_{m-1} &= y_2 \\
&\vdots \\
1 \cdot p_0 + x_m p_1 + x_m^2 p_2 + \ldots + x_m^{m-1} p_{m-1} &= y_m,
\end{aligned}$$

wobei $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ die Variablen sind, für die wir Werte bestimmen wollen. Nun erkennen wir aber die Vandermonde-Matrix $V(x_1, \ldots, x_m)$ als die Koeffizientenmatrix dieses inhomogenen Gleichungssystems. Da $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschieden sind, folgt aus der Aussage von Aufgabe 45, dass die Koeffizientenmatrix des Systems invertierbar ist. Also besitzt das System (für jede Wahl von $y_1, \ldots, y_m \in K$) genau eine einzige Lösung (Bemerkung 2.3.8(iii) im Skript). Die $p_0, \ldots, p_{m-1}$ bestimmen aber das Polynom p, also folgt die Aussage, dass es genau ein Polynom gibt, das die m gegebenen Gleichungen erfüllt. $\square$

Aufgabe 48

Sei $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie

$$\det(\lambda I_m - AB) = \det(\lambda I_m - BA).$$

Proof. Da $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$, gilt $1 = \det(I_m) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)$ (also $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$). Nun folgt:

$$\begin{aligned}
&\det(\lambda I_m - AB) \\
=&\det(\lambda I_m - AB)\det(A^{-1})\det(A) \\
=&\det(A^{-1})\det(\lambda I_m - AB)\det(A) \\
=&\det(A^{-1}(\lambda I_m - AB)A) \\
=&\det(\lambda A^{-1} I_m A - A^{-1}ABA) \\
=&\det(\lambda(A^{-1}A)I_m - (A^{-1}A)BA) \\
=&\det(\lambda I_m - BA)
\end{aligned}$$

$\square$