universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 51

Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ paarweise verschiedene Elemente und dazu $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ mit

$$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$$

für alle $i = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_m$ dann linear unabhängig sind.

Lösung. Nehmen wir an, $v_1, \ldots, v_m$ seien linear abhängig. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, so dass die kleinst-mögliche Anzahl der α_i von 0 verschieden ist, und gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0.$$

Da die v_i alle von dem Nullvektor verschieden sind, müssen mindestens zwei der α_i von 0 verschieden sein. O.b.d.A. dürfen wir annehmen: $\alpha_m \neq 0$. Dann haben wir einerseits

$$\lambda_m \alpha_1 v_1 + \ldots + \lambda_m \alpha_{m-1} v_{m-1} = -\lambda_m \alpha_m v_m$$

(indem wir alles mit λ_m multiplizieren), aber andererseits

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \ldots + \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} v_{m-1} = -\lambda_m \alpha_m v_m$$

(indem wir die lineare Abbildung φ auf beiden Seiten anwenden). Indem wir die zweite Gleichung von der ersten subtrahieren, erhalten wir

$$(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + \ldots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} v_{m-1} = 0.$$

Die $\lambda_m - \lambda_i$, $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, sind nun alle von 0 verschieden (wegen der Annahme, dass die λ_i ($i \in \{1, \ldots, m\}$) alle paarweise verschieden sind). Also haben wir eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$, die den Nullvektor ergibt, wo nicht alle Koeffizienten gleich null sind, wo aber die Anzahl der von null verschiedenen Koeffizienten um eins kleiner ist als bei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (weil α_m jetzt fehlt). Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme, die v_i seien linear abhängig, falsch sein muss. □

Aufgabe 52

Gibt es eine $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}$, sodass die skalare Multiplikation

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

eingeschänkt auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist?

Proof. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Vektorraumstruktur. Die Menge der Skalare ist also $\mathbb{C}$, während $\mathbb{R}$ die Menge der Vektoren ist. Dann muss $i \cdot 1$ ein Vektor, also eine reelle Zahl sein – bezeichnen wir sie mit a. Da i ungleich 0 ist und 1 nicht der Nullvektor ist, folgt $a \neq 0$ (siehe Blatt 8, Aufgabe 29.c). Nun können wir aber $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch als Skalar betrachten. Es gilt dann

$$(-a + i) \cdot 1 = (-a) \cdot 1 + i \cdot 1 = (-a) + a = 0,$$

wobei wir bei $(-a) \cdot 1 = -a$ die Annahme verwendet haben, dass die skalare Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eingeschränkt die übliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist. Ein von 0 verschiedener Skalar mal einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor kann aber nicht den Nullvektor ergeben. Der Widerspruch zeigt, dass es eine Vektorraumstruktur mit diesen Eigenschaften nicht geben kann. $\square$