1) Gegeben sei die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{die Anzahl der } \mathsf{a}\text{'s in } w \text{ ist ein Vielfaches von } 4\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$.

   a) Finden Sie eine Grammatik, welche diese Sprache erzeugt.

   b) Konstruieren Sie einen Automaten, der diese Sprache akzeptiert.

2) Definieren Sie eine kontextfreie Grammatik G welche die Sprache $A = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \mid n > m \geq 0\}$ generiert und zeigen Sie dass $L(G) = A$ gilt.

   Hinweis: Betrachten Sie die Richtungen (i) $L(G) \subseteq A$ und (ii) $A \subseteq L(G)$ getrennt. Um so eine Inklusion $A \subseteq B$ zu zeigen, wird gezeigt dass für ein beliebiges $x \in A$ auch $x \in B$ gilt. Für (i) bietet sich dann Induktion über die Ableitungslänge von Wörtern $w \in L(G)$ an. Für (ii) kann etwa Induktion in Bezug auf n oder m verwendet werden.

3) Definition 5.7 des Skriptums definiert eine einfache Programmiersprache zur Steuerung von Registermaschinen. Definieren Sie die Grammatik solcher Programme, wobei Variablen x_i durch Alpha-Numerische Wörter, dessen erster Buchstabe keine Zahl ist, designiert werden.

   Klassifizieren Sie die Sprache der Programme in der Chomsky Hierarchie.

Zusatzübung. – Gegeben sei eine beliebige kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$. Gilt die Gleichung

$$\{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x\} = \{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x\}$$

für alle $A \in V$?

Formulieren Sie entweder einen Beweis, ansonsten geben Sie ein Gegenbeispiel.