Rechnen mit komplexen Zahlen und Matrizen

Die folgenden Übungsaufgaben sind als Hilfe für diejenigen PS-Teilnehmer gedacht, die vor diesem Kurs wenig Kontakt mit Matrixrechnung oder mit komplexen Zahlen hatten. Als Vorbereitung für die Klausur sind diese Aufgaben *nicht* geeignet (jedenfalls nicht ausreichend).

Aufgabe 1
Man berechne die Zahl $z = \dfrac{1-13i}{2-i}$ und stelle z und $\overline{z}$ in der Ebene dar.

Aufgabe 2
Man stelle fest, welche der Zahlen 1, -2, $1+i$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ ist.

Aufgabe 3
Es sei $z = \sqrt{3} + i$. Man stelle in der Ebene dar: z, z^2, z^3.

Aufgabe 4
Man berechne $|z|$, wenn $z = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2+2\sqrt{3}i}$.

Aufgabe 5
Gegeben ist die komplexe Zahl $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
a) Man berechne z^2 und z^3;
b) Man stelle die Zahlen z, z^2, z^3 in der Ebene dar.

Aufgabe 6
Finden Sie die komplexen Zahlen $z = x + yi$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, für die $z^2 = 5 - 12i$ gilt.

Aufgabe 7
Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Bestimmen Sie x so, dass $\det(A) = 0$.
b) Prüfen Sie die Gleichung $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$.
c) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ so, dass $A^2 = 2A$.

Aufgabe 8
Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Zeigen Sie, dass $A^3 = 7A$.
c) Zeigen Sie, dass $A \cdot B = A$, wo $B = A^2 - 6I_2$.

Aufgabe 9

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
a) Berechnen Sie die Determinante von A.
b) Zeige Sie, dass $A^2 + A^3 = O_2$.

Aufgabe 10

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, X^2 = X\}$.
a) Zeigen Sie, dass $A \in G$.
b) Berechnen Sie $\det(A^3 - 2A^2 + A)$.
c) Beweisen Sie, dass $(2X - I_2)^2 = I_2$ für alle $X \in G$.

Aufgabe 11

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $M_3(\mathbb{R})$, wo $a \in \mathbb{R}$, und $G = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\}$.
a) Man berechne $\det(A)$.
b) Man zeige, dass $A^2X = XA^2$ für alle $X \in M_3(\mathbb{R})$.
c) Man zeige, dass $aI_3 + bA \in G$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12

Gegeben sind die Matrizen $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, wo $a > 0$.
a) Berechnen Sie $\det(H(a))$, $\forall a > 0$.
b) Zeigen Sie, dass $H(a) \cdot H(b) = H(a \cdot b), \forall a, b > 0$.

Aufgabe 13

Gegeben ist die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
a) Zeigen Sie, dass $I_2 \in M$.
b) Wenn $A, B \in M$, soll man zeigen, dass $A + B \in M$.
c) Beweisen Sie, dass $\det(AB - BA) \geq 0$ für alle $A, B \in M$.

Aufgabe 14

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wo $a \in \mathbb{R}$.
a) Für $a = 1$ soll man A^2 berechnen.
b) Berechnen Sie $\det\left(A^2\right)$, $a \in \mathbb{R}$..
c) Zeigen Sie, dass $A^2 \neq I_3$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Man berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$.
b) Wenn $C = A \cdot B$, soll man C^{50} berechnen.

Aufgabe 16

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} a & 3a \\ a & 3a \end{pmatrix}$, wo $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $6A - 3B$.
b) Berechnen Sie $A^2,\ A^3$.
c) Zeigen Sie, dass $A^4 = -4I_2$.
d) Berechnen Sie A^{2021}.
e) Zeigen Sie, dass $C^2 = \lambda C$, wo die Zahl λ zu finden ist.

Aufgabe 17

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \begin{pmatrix} n & n-1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ und für jedes $x \in \mathbb{R}$ sei $B(x) = \begin{pmatrix} x + \dfrac{1}{2} & x - \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{1}{2} & x + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Es gilt $B(x)B(y) = A_2$ genau dann, wenn:

(A) $xy = \dfrac{3}{4}$ (B) $xy = \dfrac{5}{4}$ (C) $xy = x + y$ (D) $xy = x + y + \dfrac{1}{4}$ (E) $x + y = 0$

Lösungen

Aufgabe 1

$z = 3 - 5i$

Aufgabe 4

$|z| = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 12

a) $\det(H(a)) = a$

Aufgabe 14

a) Für $a = 1$ ist $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A^2) = 0$

Aufgabe 15

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $C^{50} = \begin{pmatrix} 6^{50} & 0 \\ 0 & 6^{50} \end{pmatrix}$

Aufgabe 16

a) $6A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -15 & -21 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A^{2021} = A \cdot (A^4)^{505} = -4^{505} A$

e) $C^2 = \begin{pmatrix} 4a^2 & 12a^2 \\ 4a^2 & 12a^2 \end{pmatrix} = 4a \cdot C$. $\lambda = 4a$.

Aufgabe 17

A