

- 1) *Lösung.* Alle verwendeten Regeln im Kalkül \mathcal{NK} sind korrekt und gemeinsam vollständig. Das heißt, sämtliche in \mathcal{NK} ableitbaren Formeln sind tatsächlich Tautologien („Korrektheit“) und andererseits sind sämtliche Tautologien auch wirklich ableitbar („Vollständigkeit“).

1	$a \wedge b$	Prämisse
2	$b \rightarrow c$	Prämisse
3	b	$\wedge:e$ 1
4	c	$\rightarrow:e$ 2,3
5	$c \vee d$	$\vee:i$ 4

□

- 2) *Lösung.* Die Axiome lauten:

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 (2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 (3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

1	p	Annahme
2	q	Annahme
3	p	Kopieren
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow:i$ 2,3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow:i$ 1-4

□

- 3) *Lösung.*

a)

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Annahme
2	$p \rightarrow q$	Annahme
3	p	Annahme
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow:e$ 3,1
5	q	$\rightarrow:e$ 3,2
6	r	$\rightarrow:e$ 5,4
7	$p \rightarrow r$	$\rightarrow:i$ 3-6
8	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow:i$ 2-7
9	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow:i$ 1-8

b)

1	$\neg p \rightarrow \neg q$	Annahme
2	q	Annahme
3	$\neg p$	Annahme
4	$\neg q$	$\rightarrow: e\ 3,1$
5	False	$\neg: e\ 2,4$
6	$\neg\neg p$	$\neg: i\ 3-5$
7	p	$\neg\neg: e\ 6$
8	$q \rightarrow p$	$\rightarrow: i\ 2-7$
9	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow: i\ 1-8$

□