universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 26 (*ähnlich*)

Berechnen Sie die inverse Matrix der beiden folgenden Matrizen, jeweils im gegebenen Matrixring:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 1 \\ -2i & -i & -2i \\ 0 & -3 & 1+2i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}) \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}).$$

Lösung. Die inversen Matrizen können mit dem Gauß-Algorithmus berechnet werden: Wenn A eine $(m \times m)$-Matrix ist, wir den Gauß-Algorithmus für die Matrix $(A \mid I)$ ausführen und am Ende links I_m erhalten, dann steht rechts die inverse Matrix von A. Ich möchte hier eine alternative Erklärung dafür geben, warum dies der Fall ist.

Man kann, ähnlich wie bei Aufgabe 24, $(A \mid I)$ als die Zusammenfügung der erweiterten Koeffizientenmatrizen von m nicht-homogenen Gleichungssystemen auffassen, die alle die Matrix A als Koeffizientenmatrix haben:

$$\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & \vdots \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 1 \\ & \vdots \end{array} \right), \quad \dots, \quad \left(\begin{array}{c|c} & \vdots \\ A & 1 \\ & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} & \vdots \\ A & 0 \\ & 1 \end{array} \right)$$

(die vertikalen Punkte stehen hier für Nullen). Nun wird der Gauß-Algorithmus ausgeführt: Die elementaren Zeilenumformungen werden immer für ganze Zeilen der $(m \times (2m))$-Matrix durchgeführt. Welche Zeilenumformungen verwendet werden, hängt aber nur von der Matrix links von dem vertikalen Strich ab, also von A. Wenn die reduzierte Zeilenstufenform von A genau I_m ist, können wir für jedes der m Gleichungssysteme den einzigen Lösungsvektor aus der entsprechenden Spalte der rechten Seite ablesen. Genauer, wenn $s_1, s_2, \dots, s_m$ die Spalten der rechten Seite nach der Ausführung des Gauß-Algorithmus bezeichnen, dann gilt:

$$As_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, As_m = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also sind $s_1, \dots, s_m$ genau die Spalten einer Matrix B mit der Eigenschaft, dass $AB = I_m$ gilt.

Damit haben wir nur gezeigt, dass $AB = I_m$ gelten muss. Mit dieser Interpretation der Spalten der Matrix B ist noch nicht klar, wieso auch $BA = I_m$ gelten sollte. Dies folgt erst aus der Aussage von Aufgabe 28 (weiter unten). $\square$

Aufgabe 27

Für eine (reelle oder komplexe) 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird die Zahl

$$\det(A) = ad - bc$$

die *Determinante* von A genannt. Zeigen Sie, dass für je zwei solcher Matrizen A und B stets gilt

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dann zeigen Sie: eine 2×2-Matrix A ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Lösung. Den ersten Teil dieser Aufgabe löst man durch direktes Rechnen. Hier möchte ich nur erwähnen, dass dabei die Kommutativität der Multiplikation in einem Körper eine wesentliche Rolle spielt. Wären die Elemente der Matrizen aus einem nicht-kommutativen Ring gewählt, würde $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ nicht unbedingt gelten.

Im zweiten Teil der Aufgabe ist die Äquivalenz zweier Aussagen zu zeigen. Wir tun dies, indem wir Implikationen in beide Richtungen beweisen.

"$\Longleftarrow$". Wir suchen also eine Matrix X, so dass die $AX = I_2$ und $XA = I_2$ gelten, unter der Annahme $ad - bc \neq 0$.

Sei also

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Aus der Bedingung $AX = I_2$ erhalten wir die vier Gleichungen:

$$ax + bz = 1 \tag{1}$$

$$ay + bt = 0 \tag{2}$$

$$cx + dz = 0 \tag{3}$$

$$cy + dt = 1. \tag{4}$$

Wenn wir nun Gleichung (2) mit d multiplizieren, (4) mit $-b$, und beides addieren, erhalten wir $(ad - bc)y = -b$. Auf dieselbe Weise drücken wir auch t aus:

$$y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

erfüllen somit die Gleichungen (2) und (4). Ähnlich geht man bei x und z vor und erhält

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc},$$

also

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Durch direktes Rechnen prüft man, dass nicht nur $AX = I_2$, sondern auch $XA = I_2$ gilt. Also ist A invertierbar.

"$\Longrightarrow$". Nehmen wir an, es gelte $\det(A) = 0$. Wenn nun A auch invertierbar ist, dann gibt es eine Matrix X mit $AX = I_2$. Wir wenden nun den ersten Teil der Aufgabe an: $\det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(I_2) = 1$. Aber $\det(A) = 0$, laut Annahme, also ist auch $\det(A)\det(X) = 0 \neq 1$. Der Widerspruch zeigt, dass A nicht invertierbar sein kann, wenn $\det(A) = 0$ gilt. Also impliziert die Invertierbarkeit von A, dass $\det(A)$ ungleich 0 ist. □

Aufgabe 28

Sei K ein Körper und $A, B \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Es gelte $AB = I_m$. Zeigen Sie, dass dann auch $BA = I_m$ gilt.

Hinweis: Wenn Sie die Invertierbarkeit von A oder B verwenden wollen, müssen Sie sie zuerst zeigen.

Lösung. Mit dem Gauß-Algorithmus können wir nicht nur konkrete Gleichungssysteme lösen, sondern wir können ihn auch im Abstrakten "ausführen", um eine Matrix, die nicht gegeben ist, auf Zeilenstufenform zu bringen.

Sei also T das Produkt der elementaren Zeilenumformungen, die die Matrix A in die Matrix Z umwandeln, wobei letztere die reduzierte Zeilenstufenform hat. Es gilt also $TA = Z$, wobei T eine invertierbare $(m \times m)$-Matrix ist. Nun multiplizieren wir die Gleichung $AB = I_m$ von links mit T und erhalten

$$T(AB) = T \iff ZB = T.$$

Hätte Z eine Nullzeile, so würde dies auch auf T zutreffen, was aber der Invertierbarkeit von T widersprechen würde. Z kann also keine Nullzeile haben. Da Z also quadtratisch ist, keine Nullzeilen hat, aber die reduzierte Zeilenstufenform hat, folgt, dass Z die Einheitsmatrix I_m sein muss. Also gilt $B = T$, woraus folgt, dass B invertierbar ist.

Wenn wir jetzt die Gleichung $AB = I_m$ von rechts mit B und von links mit B^{-1} multiplizieren, erhalten wir die gesuchte Gleichung: $BA = I_m$. $\square$