Gruppe 1

(1) Welche der folgenden Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem:

a)

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ z &= 2 \\ x - \frac{1}{2}z &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4i - j^2 &= -3 \\ i + 9j + 2 &= 30 \\ \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}j &= 0.5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 - \sin\frac{\pi}{2} &= 6 \\ \sqrt{9}x_1 - 10x_2 &= -7 \\ 3x_1 - 18 &= -15 \end{aligned}$$

(2) Ist die Matrix **B** die Inverse von **A**?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1/2 & 6/4 & 1/4 \\ 1 & -2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Gruppe 2

(1) Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform um, d.h. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 + 4x_2 &= -1 \\ 5x_2 - 2x_3 &= -9 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(2) Welche der folgenden Vektoren ist eine Lösung des obigen Gleichungssystem?

$$\mathbf{x_a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x_b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gruppe 3

(1) Wir wollen das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

a) $\mathbf{A_i}$ ist die Matrix welche durch Ersetzen der i-ten Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Vektor $\mathbf{b}$ gewonnen wird.
Definieren Sie die Matrizen $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$, und berechnen Sie deren Determinante.

b) Finden Sie die Lösung $\mathbf{x}$ mit Hilfe der Cramerscher Regel:

$$x_i = \frac{det(\mathbf{A_i})}{det(\mathbf{A})}.$$

Gruppe 4

(1) Beschreiben Sie den in der Vorlesung besprochenen Algorithmus zur Berechnung der LU-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(2) Berechnen Sie die ersten zwei temporären Matrizen $\mathbf{L_{(0)}}$ und $\mathbf{A_{(1)}}$ ausgehend von der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gruppe 5

(1) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Jacobi-Verfahrens für eine einzelne Unbekannte an. Berechnen Sie anschließend die erste Iteration, d.h. $\mathbf{x^{(1)}}$, für das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Einträge des initialen Lösungsvektors $\mathbf{x^{(0)}}$ sind alle null.

(2) Berechnen sie das Residuum und dessen Euklidische Norm für $\mathbf{x^{(0)}}$ und $\mathbf{x^{(1)}}$.

Gruppe 6

(1) Gegeben ist die diskretisierte 1D Laplace Gleichung:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = 0, \qquad n \in [0, .., N]$$

Wir betrachten die räumliche Diskretisierung mit $N = 4$ und den Randwerten $u_0 = u_4 = 1$.
Definieren sie das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ für den Lösungsvektor $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$.

(2) Werden die *Jacobi*- und *Gauß-Seidel*-Verfahren garantiert konvergieren für diese System Matrix $\mathbf{A}$?