universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 11

Aufgabe 41 (b)

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\sigma \in S_m$ (und jeden Körper K) genau eine Matrix $A_\sigma \in \mathrm{Mat}_m(K)$ existiert mit

$$A_\sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ c_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$$

für alle $(c_1, \ldots, c_m)^t \in K^m$.

Lösung. Die Matrix A_σ definieren wir wie folgt: Für $i \in \{1, \ldots, \}$ gilt $(A_\sigma)_{i,\sigma(i)} = 1$, ansonsten sind alle Einträge gleich null. So definiert, hat A_σ offensichtlich die gewünschte Eigenschaft.

Um zu beweisen, dass diese Matrix einzig ist, nehmen wir an, eine Matrix B habe dieselbe Eigenschaft. Es gilt:

$$(A_\sigma - B)(c_1, \ldots, c_m)^t = (c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(m)})^t - (c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(m)})^t = 0,$$

für alle $(c_1, \ldots, c_m)^t \in K^m$. $A_\sigma - B$ muss also die Nullmatrix sein und es folgt, dass $A_\sigma = B$ gilt. □

Aufgabe 42 (b)

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ genau dann wenn $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p.

Lösung. "$\Longleftarrow$" $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ gilt genau dann, wenn $\det(A)$, über $\mathbb{Q}$ berechnet, von 0 verschieden ist. Da A ganzzahlige Einträge hat, ist auch die Determinante dieser Matrix eine ganze Zahl.

Ist $\det(A) = 0$, so gilt dies auch modulo p, für jede Primzahl p. Also impliziert $A \notin \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$, dass für *alle* Primzahlen p gilt: $A \notin \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

"$\Longrightarrow$" Umgekehrt, nehmen wir an, $\det(A)$ sei (über $\mathbb{Q}$ berechnet) von null verschieden. Dann kann diese Zahl modulo einer Primzahl p dennoch null sein, wenn p ein Teiler von $\det(A)$ ist. Jede ganze Zahl hat aber höchstens endlich viele Teiler. Also ist $\det(A)$ für alle Primzahlen p, bis auf endlich viele Ausnahmen, auch modulo p von null verschieden. □