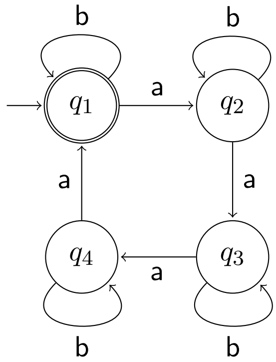
1) *Lösung.* – Wir konstruieren den Automaten A sodass $L = L(A)$:



– Grammatik: Die Grammatik können Sie mit Hilfe der Lösung von Aufgabe 3 auf Blatt 8 konstruieren.

□

2) Wir defineren $G = (\{S, A\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, S)$ wobei R wie folgt definiert ist.

$$S \to \mathsf{a}S\mathsf{b} \mid \mathsf{a}A \qquad\qquad A \to \mathsf{a}A \mid \epsilon$$

Beweis. Wir zeigen für $L(G) = A$ die zwei Richtungen:

$A \subseteq L(G)$: Sei $x \in A$, also gilt $x = \mathsf{a}^{m+i}\mathsf{b}^m$ für ein $m \geq 0$ und $i \geq 1$.

Wir zeigen mit Induktion über m, dass für alle m gilt $\mathsf{a}^{m+i}\mathsf{b}^m \in L(G)$.

Für $m = 0$ ist $x = \mathsf{a}^i \in L(G)$ aufgrund folgender Ableitung:

$$S \Rightarrow \mathsf{a}A \Rightarrow^* \mathsf{a}^i$$

Für $m > 0$ ist $x = \mathsf{a}^{m+i}\mathsf{b}^m = \mathsf{a}\mathsf{a}^{(m-1)+i}\mathsf{b}^{(m-1)}\mathsf{b}$. Aus der Induktionshypothese folgt, dass $a^{(m-1)+i}b^{(m-1)} \in L(G)$ und dass es daher eine Ableitung $S \Rightarrow^* \mathsf{a}^{(m-1)+i}\mathsf{b}^{(m-1)}$ gibt. Dann ist leicht zu sehen, dass

$$S \Rightarrow \mathsf{a}S\mathsf{b} \Rightarrow^* \mathsf{a}\mathsf{a}^{(m-1)+i}\mathsf{b}^{(m-1)}\mathsf{b} = x \in L(G)$$

gilt.

$L(G) \subseteq A$ mit Induktion über die Länge der Ableitung ($\Rightarrow^n$). Als Basis verwenden wir die kürzest möglichen Ableitungen mit $n = 2$.

$$S \Rightarrow \mathsf{a}A \Rightarrow \mathsf{a} \in A$$

Die Induktionshypothese ist dann

$$S \Rightarrow^{n-1} y \in A.$$

Für $n > 2$ betrachten wir die 2 Regeln für die Variable S getrennt.

Fall 1: $S \Rightarrow \mathsf{a}A \Rightarrow^{n-1} \mathsf{a}^{n-1} \in A.$

Fall 2:

$$S \Rightarrow \mathsf{a}S\mathsf{b} \Rightarrow^{n-1} \mathsf{a}y\mathsf{b}$$

wobei aus der Induktionshypothese folgt, dass $y \in A$. Es gibt daher natürliche Zahlen n und m für die gilt, dass $n > m$ und $y = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^m$. Daraus folgt:

$$\mathsf{a}y\mathsf{b} = \mathsf{a}^{n+1}\mathsf{b}^{m+1} \in A$$

$\square$

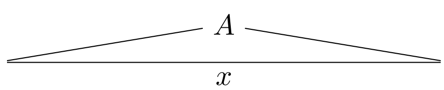
3)

$$\begin{aligned}
\mathit{Alpha} &\to \mathbf{a} \mid \cdots \mid \mathbf{z} \mid \mathbf{A} \mid \cdots \mid \mathbf{Z} \\
\mathit{Num} &\to \mathbf{0} \mid \cdots \mid \mathbf{9} \\
\mathit{AlphaNum} &\to \mathit{Alpha} \mid \mathit{Num} \\
\mathit{Var} &\to \mathit{Alpha} \mid \mathit{Var}\, \mathit{AlphaNum} \\
\mathit{Exp} &\to \mathit{Var} + \mathbf{1} \mid \mathit{Var} - \mathbf{1} \\
\mathit{Prog} &\to \mathit{Var}{:=}\mathit{Exp} \mid \mathit{Prog}; \mathit{Prog} \mid \textbf{while } \mathit{Var} \neq 0 \textbf{ do } \mathit{Prog} \textbf{ end}
\end{aligned}$$

Zusatzübung. – *Lösung.* Als Erstes zeigen wir folgenden Hilfssatz. Sei S ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis $x \in \Sigma^*$, dann gibt es eine Rechtsableitung von x aus A

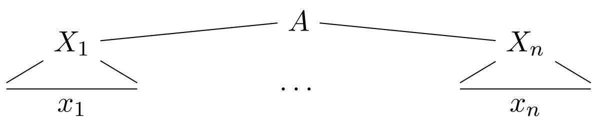
Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

1. Basis: Habe S die Gestalt:



   dann existiert $A \to x \in R$, also $A \underset{r}{\Rightarrow} x$

2. Schritt: Habe S die Gestalt:



dann $\exists\ A \to X_1 \cdots X_n \in R$ und Induktionshypothese $X_i \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x_i$, also:

$$A \underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow} X_1 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} X_1 X_2 \cdots X_{n-1} x_n \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$$

Beginnen wir damit zu zeigen dass $\{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x\} \subseteq \{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x\}$ gilt. Wenn $x \in \{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x\}$, dann gilt per Definition dass $A \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x$. Also $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ und mithilfe der Sätze der Vorlesung (Folien der Woche 9) schließen wir auf die Existenz eines Syntaxbaumes S mit Wurzel A und Ergebnis x. Daher folgt das $A \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x$ mit der Verwendung unseres Hilfssatzes. Der Beweis der Gegenrichtung $\{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\mathrm{r}}{\Rightarrow}} x\} \subseteq \{x \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x\}$ ist analog. $\square$