universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 17

Sei M eine nichtleere Menge. Für $A, B \subseteq M$ definieren wir $A \Delta B$ wie in Aufgabe 4.

(b) Sind $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ und/oder $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cup)$ Ringe?

Lösung.

(b) Dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine abelsche Gruppe ist, wurde schon bewiesen.

Das Assoziativgesetz für den Mengenschnitt lässt sich leicht zeigen, z.B. mit einer Wahrheitstabelle.

Es gibt ein neutrales Element bzgl. $\cap$, nämlich die Menge M selbst, denn für alle $A \subseteq M$ gilt: $M \cap A = A \cap M = A$. Falls $M \neq \emptyset$, ist das neutrale Element bzgl. $\cap$ verschieden von dem bzgl. Δ.

Wir zeigen, dass das Distributivgesetz für Δ und $\cap$ gilt: Seien A, B, C Teilmengen von M. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & x \in (A \Delta B) \cap C \\ \Longleftrightarrow & x \text{ ist in genau einer von den Mengen } A \text{ und } B \textit{ und } x \text{ ist in } C \\ \Longleftrightarrow & x \text{ ist in genau einer von den Mengen } A \cap C \text{ und } B \cap C \\ \Longleftrightarrow & x \in (A \Delta C) \cap (B \Delta C), \end{aligned}$$

also gilt $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$. Weil beide Operationen kommutativ sind, folgt dann auch $A \cap (B \Delta C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ folgt dann.

Es folgt, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein Ring ist.

Hingegen ist $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cup)$ kein Ring. Das neutrale Element bzgl. $\cup$ ist $\emptyset$, also gleich mit dem neutralen Element bzgl. Δ. Hier ist also $0 = 1$.

□

Aufgabe 18

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in R$ gilt:

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
(ii) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.
(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Gilt für $a \neq 0$ auch immer $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$?

Lösung.

(i) Sei $a \in R$. Es gilt $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, also $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Durch Addieren von $-(0 \cdot a)$ auf beiden Seiten der letzten Gleichung, erhalten wir $0 = 0 \cdot a$. Analog zeigt man $a \cdot 0 = 0$.

(ii) Seien $a, b \in R$. Es gilt $(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$ und, da $(R, +)$ kommutativ ist, auch $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Also ist $(-a) \cdot b$ das additive Inverse zu $a \cdot b$, nämlich $-(a \cdot b)$.

Analog zeigt man, dass $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ gilt.

(iii) Seien $a, b \in R$. Wir verwenden (ii) zweimal und erhalten: $(-a) \cdot (-b) = -((-a) \cdot b) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$.

Gilt auch immer $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$?

Es kann auch für $a \neq 0$ der Fall sein, dass $ab = ac$ gilt, $b = c$ aber nicht. Z.B.: $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $a = b = \hat{2}$ und $c = \hat{0}$. In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$, obwohl $\hat{2} \neq \hat{0}$. Wenn es in einem Ring Elemente $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ gibt, für die $\alpha \cdot \beta = 0$ gilt, dann nennt man α und β *Nullteiler*. $\square$