1) *Lösung.* Die Algebra $\langle\Sigma^*; \cdot, \epsilon\rangle$ ist ein Monoid wenn $\langle\Sigma^*; \cdot\rangle$ eine Halbgruppe und ϵ das neutrale Element der Konkatenation ist.

Wir zeigen, dass für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

mit Hilfe von Induktion über die Länge von x.

Basis: $|x| = 0$.

Da $|x| = 0$ kommt für x nur das Leerwort ϵ in Frage.

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= (\epsilon \cdot y) \cdot z\\ &= y \cdot z\\ &= \epsilon \cdot (y \cdot z)\\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

Schritt: $|x| = n > 0$. Sei $x = aw$ mit $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^{n-1}$. Als Induktionshypothese verwenden wir

$$(w \cdot y) \cdot z = w \cdot (y \cdot z).$$

Das erlaubt uns wie folgt umzuformen:

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= (aw \cdot y) \cdot z && \text{Ersetzen von } x\\ &= a(w \cdot y) \cdot z && \text{Zweite Gleichung von der Definition } \cdot\\ &= a((w \cdot y) \cdot z) && \text{Zweite Gleichung von der Definition } \cdot\\ &= a(w \cdot (y \cdot z)) && \text{Induktionshypothese}\\ &= aw \cdot (y \cdot z) && \text{Zweite Gleichung von der Definition } \cdot\\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $\cdot$ assoziativ und $\langle\Sigma^*; \cdot\rangle$ eine Halbgruppe ist. Weiters ist ϵ das neutrale Element der Konkatenation: $\epsilon \cdot x = x$ ist eine direkte Konsequenz aus der Definition der Konkatenation, der Beweis von $x \cdot \epsilon = x$ verwendet dasselbe Induktionsargument wie der Beweis der Assoziativität. □

2) *Lösung.*

a)
- G_1 ist kontextfrei, kontextsensitiv und beschränkt.
- $L(G_1) = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \geqslant 1\}$.

- Da G_1 kontextfrei ist und es keine rechtslineare Grammatik für $L(G_1)$ gibt, ist $L(G_1)$ vom Typ 2.

b)
- G_2 ist rechtslinear, kontextfrei, kontextsensitiv und beschränkt.
- $L(G_2) = \{\mathsf{a}\mathsf{c}^i\mathsf{b} \mid i \geq 0\} \cup \{\epsilon\}$.
- Da G_2 rechtslinear ist, ist $L(G_2)$ vom Typ 3.

c)
- G_3 ist beschränkt.
- $L(G_3) = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid n \geq 0\}$.
- Da G_3 nur beschränkt ist, es aber keine kontextfreie oder rechtslineare Grammatik für $L(G_3)$ gibt, können wir nur daraus schließen, dass $L(G_3)$ vom Typ 0 ist. Jedoch gibt es eine kontextsensitive Grammatik (siehe Foliensatz 7 der Vorlesung), welche die Sprache $L(G_3)$ erzeugt, dadurch ist $L(G_3)$ vom Typ 1.

d)
- G_4 erfüllt keine der Eigenschaften (i)-(iv).
- $L(G_4) = \{a^n \mid n \geq 0\}$
- Da G_4 keine Eigenschaft auf (i)-(iv) erfüllt, können wir nur schließen, dass $L(G_4)$ vom Typ 0 ist. Wir können aber eine rechtslineare Grammatik für $L(G_4)$ angeben: $G'_4 := (\{S\}, \{\mathsf{a}\}, R, S)$ mit den Regeln R:

$$S \to \epsilon \mid \mathsf{a}S$$

Somit ist $L(G_4)$ vom Typ 3.

□

3) Die KFG $G = (\{P\}, \Sigma, R, P)$, wobei R wie folgt definiert ist, beschreibt die Sprache der Palindrome.

$$P \to \epsilon \mid \mathsf{0} \mid \mathsf{1}$$
$$P \to \mathsf{0}P\mathsf{0} \mid \mathsf{1}P\mathsf{1}$$

Diese Grammatik, und darum auch die Sprache der Palindrome, ist kontextfrei. Mittels dem sogenannten "Pumping Lemma"[1] kann gezeigt werden dass die Sprache nicht regulär ist.

[1] Siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Pumping_lemma_for_regular_languages`.