Algorithmen und Datenstrukturen
Sommersemester 2022
Blatt 1

Kevin Angele, Tobias Dick, Oskar Neuhuber,
Andrea Portscher, Monika Steidl, Laurin Wischounig

Abgabe bis 15.3.2022 23:59
Besprechung im PS am 17.03.2022

Aufgabe 1 (3 Punkte): Asymptotisches Wachstum

Ordnen Sie die nachfolgenden Funktionen anhand ihres asymptotischen Wachstums. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$4n \log n + 2n, 2^{10}, 2^{\log_2 n}, 3n + 100 \log n, 4n, 2^n, n^2 + 10n, n^3, n \log n$$

Lösung:

$$2^{10}, 2^{\log_2 n}, 3n + 100 \log n, 4n, n \log n, 4n \log n + 2n, n^2 + 10n, n^3, 2^n$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Komplexität

(a) Beweisen Sie für die Funktion $f(n) = 5n^2 + 3n \log_2 n + 2n + 5$, dass $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

(b) Beweisen Sie für die Funktion $g(n) = 20n^3 + 10n \log_2 n + 5$, dass $g(n) \in \mathcal{O}(n^3)$.

(c) Beweisen Sie für die Funktion $h(n) = 3 \log_2 n + 2$, dass $h(n) \in \mathcal{O}(\log n)$.

(d) Beweisen Sie für die Funktion $k(n) = 2^{n+2}$, dass $k(n) \in \mathcal{O}(2^n)$.

(e) Beweisen Sie für die Funktion $l(n) = 2n + 100 \log_2 n$, dass $l(n) \in \mathcal{O}(n)$.

Lösung:

(a) $5n^2 + 3n \log_2 n + 2n + 5 \leq (5 + 3 + 2 + 5)n^2 = cn^2$ for $c = 15$, when $n \geq n_0 = 1$

(b) $20n^3 + 10n \log_2 n + 5 \leq 35n^3$ for $n \geq 1$

(c) $3 \log_2 n + 2 \leq 5 \log_2 n$ for $n \geq 2$

(d) $2^{n+2} = 2^n \times 2^2$, we take $c = 4$ and $n_0 = 1$

(e) $2n + 100 \log_2 n \leq 102n$, we take $c = 102$ and $n_0 = 1$, when $n \geq n_0 = 1$

Aufgabe 3 (3 Punkte): Komplexität von Polynomfunktionen

Sei $p(n)$ eine Polynomfunktion von Grad d mit positiven Koeffizienten $a_i > 0$:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

Beweisen Sie für jede Konstante $k \geq d$ und $n \geq n_0 = 1$, dass $p(n) \in O(n^k)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i \\
\Rightarrow & p(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \cdots + a_d n^d \\
\Rightarrow & p(n) \leq a_0 n^k + a_1 n^k + a_2 n^k + \cdots + a_d n^k \text{ where } k \geq d \\
\Rightarrow & p(n) \leq (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_d) n^k \\
\Rightarrow & p(n) \leq c \cdot n^k \text{ where } c = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_d > 0 \\
\Rightarrow & p(n) \in O(n^k)
\end{aligned}$$