universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 2

Schreiben Sie für die folgenden Mengen M jeweils die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ explizit durch Angabe aller Elemente auf:

(b) $M = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Lösung.

(b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\square$

Aufgabe 3

Lösung. (c)

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in (B \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C))\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C))\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4

Für Mengen M, N definieren wir

$$M \Delta N := (M \cup N) \setminus (M \cap N).$$

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen M, N, O stets gilt:

(1) $(M \Delta N) \Delta O = M \Delta (N \Delta O)$
(2) $M \Delta N = N \Delta M$
(3) $M \Delta N = \emptyset \Leftrightarrow M = N$.

Lösung. (1) Am leichtesten lässt sich die Gleichheit der beiden Mengen beweisen, indem man alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten für die Aussagen $x \in M$, $x \in N$ und $x \in O$ in einer Tabelle auffasst, und daraus jeweils die entsprechenden Wahrheitswerte der Aussagen $x \in (M \Delta N) \Delta O$ und $x \in M \Delta (N \Delta O)$ berechnet. (Zur Hilfe beim Rechnen könnte man auch Spalten für die Aussagen $x \in M \Delta N$ und $x \in N \Delta O$ hinzufügen.) Man sieht, dass die Wahrheitswerte der Aussagen $x \in (M \Delta N) \Delta O$ und $x \in M \Delta (N \Delta O)$ immer übereinstimmen.

(2) $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ.

$x \in M$	$x \in N$	$x \in O$	$x \in M\Delta N$	$x \in N\Delta O$	$x \in (M\Delta N)\Delta O$	$x \in M\Delta(N\Delta O)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
			...	...		

(3) Unter Anwendung der Tatsache, dass $(M \cap N) \subseteq (M \cup N)$ immer gilt, können wir die Äquivalenz der beiden Aussagen direkt beweisen:

$$\begin{aligned} &(M \cup N) \setminus (M \cap N) = \emptyset \\ \iff &(M \cup N) \subseteq (M \cap N) \\ \iff &(M \cup N) = (M \cap N) \\ \iff &M = N, \end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Äquivalenzzeichen $(M \cap N) \subseteq (M \cup N)$ verwendet haben, und die dritte Äquivalenz leicht zu zeigen ist.

$\square$