Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 23 (*ähnlich*)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung. Indem wir die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren, wird die zweite Gleichung zu $x_2 + 4x_4 = -2$. Indem wir zweimal diese Gleichung von der dritten subtrahieren, wird die dritte zu $x_3 - x_4 = 0$ (wir rechnen hier über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, also ist $-6 = -1$ und $4 + 1 = 0$). Damit ist das System in Zeilenstufenform und die Lösungsmenge ist leicht abzulesen: Für $x_4 = \alpha \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (α beliebig) folgt aus der dritten Gleichung $x_3 = \alpha$, dann aus der zweiten $x_2 = \alpha - 2$ und schließlich aus der ersten $x_1 = 2 - 2\alpha$. Die Lösungsmenge des Systems ist also $L = \{(2 - 2\alpha, \alpha - 2, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ (es gibt fünf Lösungen über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$). ☐

Aufgabe 24 (*ähnlich*)

Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{C})$ mit

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Bezeichnen wir die Elemente der ersten Spalte von X mit x_1, x_2, x_3 und die der zweiten mit x_4, x_5 und x_6.

Erstens ist es wichtig zu erkennen, dass wir, um Werte für die sechs Unbekannten zu bestimmen, zwei nicht-homogene Gleichungssysteme, jeweils mit drei Unbekannten, lösen müssen, nicht ein Gleichungssystem mit 6 Unbekannten. Es muss nämlich gelten:

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Gleichungssysteme haben dieselbe Koeffizientenmatrix. Durch eine genaue Betrachtung des Gauß-Algorithmus stellen wir fest, dass die Operationen, die wir ausführen, immer nur von der Koeffizientenmatrix selbst, nie aber von der rechten Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix, abhängen. Wir können die Koeffizientenmatrix also gleich um zwei Spaltenvektoren wie folgt erweitern,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} i & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 & i \\ 0 & 2 & 1 & -i & 1 \end{array}\right),$$

und den Gauß-Algorithmus ein einziges Mal ausführen, um beide Gleichungssysteme gleichzeitig zu lösen. Dabei erhalten wir die folgende Matrix in reduzierter

Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(5+i) & 3(1+i) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-1+i) & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i & 3-2i \end{array}\right),$$

Da die reduzierte Zeilenstufenform genau I_3 ist, können wir die einzige Lösung für jedes der beiden Gleichungssysteme direkt ablesen:

$$x_1 = \frac{1}{2}(5+i) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(-1+i) \qquad x_3 = 1-2i$$
$$x_4 = 3(1+i) \qquad x_5 = -1+i \qquad x_6 = 3-2i.$$

Rechts von dem vertikalen Strich haben wir also genau die einzig mögliche Matrix X erhalten. $\square$