PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 14 (*ähnlich*)

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende Gleichungssystem eine reelle Lösung? Wieviele Lösungen gibt es dann jeweils?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 10x_1 & - & 10x_2 & + & 13x_3 & = & 0. \end{array}$$

Lösung. Eine wichtige Bemerkung ist, dass man den Algorithmus von Gauß auch formal ausführen kann, nicht nur für Gleichungssysteme mit konkreten Zahlen. Allerdings muss man beachten, dass man z.B. nicht ohne weiteres eine Zeile mit $\frac{1}{\lambda}$ multiplizieren darf, denn $\lambda = 0$ ist auch erlaubt. Außerdem können bei der Berechnung der Lösungsmenge solcher Systeme oft Fallunterscheidungen für den Wert des Parameters notwendig sein, wie wir es gleich sehen werden.

Für das gegebene System ziehen wir 5-mal G1 von G3 ab und zweimal G1 von G2. Damit erhalten wir das System:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 3 \\ & & 10x_2 & - & (3+2\lambda)x_3 & = & -8 \\ & & & & (13-5\lambda)x_3 & = & -15. \end{array}$$

Wenn nun $\lambda = \frac{13}{5}$ gilt, ist die dritte Gleichung $0 = -15$, also hat das System in diesem Fall keine Lösungen. Ansonsten hat es genau eine Lösung, denn es gibt keine freien Variablen. Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{13}{5}\right\}$ hat das System also genau eine Lösung. □

Aufgabe 15 (*ähnlich*)

Finden Sie ein reelles Polynom vom Grad höchstens 4, also einen Ausdruck der Gestalt

$$p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

mit $c_0, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}$, für das gilt:

$$p(-2) = 1,\ p(-1) = -1,\ p(0) = -1,\ p(1) = 1,\ p(2) = 1.$$

Lösung. Auf den ersten Blick mag der Bezug zu linearen Gleichungssystemen nicht offensichtlich sein, da ja das Polynom auch Monome wie t^3 enthält. Setzen wir aber für t die Werte ein, für die der Wert, den das Polynom annimt, bekannt ist, so erhalten wir folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} c_0 & - & 2c_1 & + & 4c_2 & - & 8c_3 & + & 16c_4 & = & 1 \\ c_0 & - & c_1 & + & c_2 & - & c_3 & + & c_4 & = & -1 \\ c_0 & & & & & & & & & = & -1 \\ c_0 & + & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & = & 1 \\ c_0 & + & 2c_1 & + & 4c_2 & + & 8c_3 & + & 16c_4 & = & 1 \end{array}$$

Nun könnten wir den Algorithmus von Gauß anwenden. Andererseits können wir auch die günstige Form des Systems nützen um dieses direkt zu lösen: Addieren wir die zweite und vierte, bzw. die erste und fünfte Gleichung, und setzen $c_0 = -1$ ein, erhalten wir $2c_2 + 8c_4 = 1$ und $c_2 + c_4 = 1$. Daraus lässt sich durch Einsetzen leicht berechnen: $c_4 = -\frac{1}{6}$ und $c_2 = \frac{7}{6}$. Setzen wir nun die drei bekannten Werte in Gleichungen 4 und 5 ein, erhalten wir $c_1 + c_3 = 1$ und $2c_1 + 8c_3 = 0$. Daraus berechnen wir leicht $c_3 = -\frac{1}{3}$ und $c_1 = \frac{4}{3}$. $\square$

Aufgabe 16

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Das zu $a \in G$ inverse Element bezeichnen wir mit a^{-1}. Zeigen Sie, dass für $a, b, c \in G$ stets gilt

(*i*) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
(*ii*) $(a^{-1})^{-1} = a$.
(*ii*) $a * c = b * c \;\Rightarrow\; a = b$.

Lösung. (*i*) Es gilt $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = e$, wobei wir mit e das neutrale Element bezeichnet haben. (In der vorigen Rechnung haben wir die Assoziativität von $*$ mehrmals verwendet.) Ähnlich zeigt man auch $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$. Da das inverse Element eindeutig bestimmet ist, folgt, dass $b^{-1} * a^{-1}$ das (einzige) inverse Element zu $a * b$ ist.

(*ii*) Wir zeigen, dass $(a^{-1})^{-1}$ das inverse Element zu a^{-1} ist. Da aber auch a das inverse Element zu a^{-1} ist und wir wissen, dass das inverse Element einzig ist, wird folgen, dass a und $(a^{-1})^{-1}$ identisch sein müssen. Es gilt also $(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = (a * a^{-1})^{-1} = e^{-1} = e$, wobei wir für das erste Gleichheitszeichen (*i*) verwendet haben. Ähnlich zeigt man $a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e$. Also ist $(a^{-1})^{-1}$ das inverse Element zu a^{-1} (und stimmt deshalb mit a überein).

Ein anderer Beweis: Sei $b = a^{-1}$. Aus der Definition des inversen Elements folgt $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$, also $a * b = e = b * a$. Dann ist aber auch a das inverse Element zu b, also folgt $a = b^{-1} = (a^{-1})^{-1}$.

(*iii*) Seien $a, b, c \in G$ beliebige Elemente, für die $a * c = b * c$ gilt. Es folgt

$$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1} \iff a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1}) \iff a = b.$$

$\square$