1) *Lösung.*

- $\langle \text{Abb}; +, (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})\rangle$ und $\langle \text{Abb}; \cdot, (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})\rangle$ sind kommutative Monoide: Aus der Definition der Operatoren und der Tatsache, dass die Algebra des n-fachen kartesischen Produkts $\langle \mathbb{B}^n; +, (0, \dots, 0)\rangle$ und $\langle \mathbb{B}^n; \cdot, (1, \dots, 1)\rangle$ als kommutative Monoide hat, ist leicht ersichtlich, dass $+$ und $\cdot$ assoziativ und kommutativ sind. Das neutrale Element von $+$ ist dabei $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, während $(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$ das neutrale Element von $\cdot$ darstellt.
- Die Operatoren $+$ und $\cdot$ distribuieren übereinander, d.h. für $f, g, h \in \text{Abb}$ gilt

$$f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h), \text{ und} \tag{1}$$
$$f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h) \ . \tag{2}$$

Diese Gleichungen gelten, da die Operatoren punktweise definiert sind. Außerdem verwenden wir Lemma 2.6. Demnach distribuieren die Operatoren $+$ und $\cdot$ in der Algebra des n-fachen kartesischen Produkts übereinander. Das bedeutet es gilt:

$$\begin{aligned}
(f \cdot (g + h))(a_1, \dots, a_n) &= f(a_1, \dots, a_n) \cdot (g + h)(a_1, \dots, a_n) \\
&= f(a_1, \dots, a_n) \cdot (g(a_1, \dots, a_n) + h(a_1, \dots, a_n)) \\
&= (f(a_1, \dots, a_n) \cdot g(a_1, \dots, a_n)) + \\
&\quad + (f(a_1, \dots, a_n) \cdot h(a_1, \dots, a_n)) \\
&= (f \cdot g)(a_1, \dots, a_n) + (f \cdot h)(a_1, \dots, a_n) \\
&= ((f \cdot g) + (f \cdot h))(a_1, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

Die Argumentation für (2) ist analog.

- Für alle $f \in \text{Abb}$ gilt $f + \overline{f} = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$ und $f \cdot \overline{f} = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$.
Diese Gleichungen gelten, da die Operatoren punktweise definiert sind. Das bedeutet es gilt:

$$\begin{aligned}
(f + \overline{f})(a_1, \dots, a_n) &= f(a_1, \dots, a_n) + \overline{f}(a_1, \dots, a_n) \\
&= f(a_1, \dots, a_n) + \overline{f(a_1, \dots, a_n)} \\
&= (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wird Lemma 2.6 verwendet. Da $f(a_1, \dots, a_n)$ und $\overline{f(a_1, \dots, a_n)}$ m-Tupel sind, können wir verwenden, dass die Regeln des Inversen Elements

$$\begin{aligned}
(b_1, \dots, b_m) + \overline{(b_1, \dots, b_m)} &= (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}) \quad \text{und} \\
(b_1, \dots, b_m) \cdot \overline{(b_1, \dots, b_m)} &= (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})
\end{aligned}$$

in der Algebra des n-fachen kartesischen Produkts gelten. Für die Multiplikation geht es analog.

$\square$

2) *Lösung.*

1	$p \to q$	Prämisse
2	$p \to \neg q$	Prämisse
3	p	Annahme
4	q	$\to$: e 1,3
5	$\neg q$	$\to$: e 2,3
6	False	$\neg$: e 4,5
7	$\neg p$	$\neg$: i 3–6

$\square$

3) *Lösung.* a) $(L_1 \cup L_2) \cap L_1^2 = \emptyset$

b) $L_2 L_1 \cap L_4^* = \{aa, aab, aabb, bba, bbab, bbabb\}$

c) $L_3 L_3 \cap L_3 = \{ab\}$

d) $(L_3 \cup L_4)^2 \cap L_3 L_2 = \{aa, ba, aba, abb\}$

$\square$