2) a) Die Sprache ist durch $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists y, z \in \{0,1\}^*.\ x = y1z\}$ gegeben.

b) Wir zeigen $x \in L$ gdw. $x \in \mathsf{L}(\mathsf{A}) = \{x \in \{0,1\}^* \mid \hat{\delta}(a,x) = b\}$ mittels Induktion über die Wortlänge n von x.

- *Basisfall:* $n = 0 \iff x = \epsilon$. Da $\epsilon \notin L$ und $\hat{\delta}(a,\epsilon) = a \neq b$ (der einzig akzeptierte Zustand), also $\epsilon \notin \mathsf{L}(\mathsf{A})$, gilt die Behauptung.
- *Schritt:* Sei x ein Wort der Länge $n+1$. Wir betrachten zwei Fälle, wobei der letzte Schritt jeweils aus dem Resultat der Zusatzübung folgt:

  - $x = 0w$: Es gilt

$$
\begin{aligned}
0w \in L &\iff w \in L \\
&\overset{\text{IH}}{\iff} \hat{\delta}(a,w) = b \\
&\iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(a,0),w) = b \\
&\iff \hat{\delta}(a,0w) = b
\end{aligned}
$$

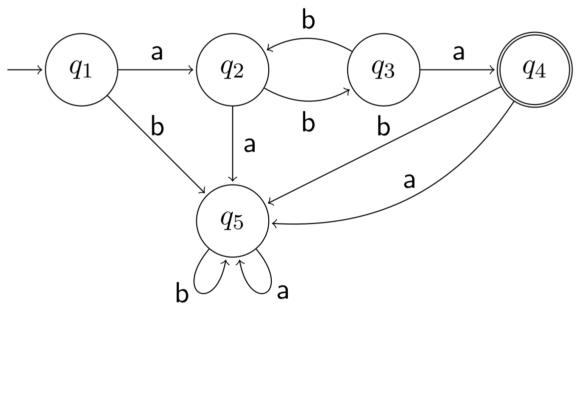
.

  - $x = 1w$: Es gilt

$$
\begin{aligned}
1w \in L &\iff w \in \{0,1\}^* \\
&\iff \hat{\delta}(b,w) = b \\
&\iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(a,1),w) = b \\
&\iff \hat{\delta}(a,1w) = b\ .
\end{aligned}
$$

  Dass $\hat{\delta}(b,w) = b$ für ein beliebiges Wort über $\{0,1\}$ gilt ist leicht ersichtlich. Dies kann auch formell mittels Induktion üeber die Wortlänge von w überprüft werden.

3) *Lösung.* Wir konstruieren den Automaten A, sodass $L = \mathsf{L}(A)$.



Einen DEA können wir im Allgemeinen in eine rechtslineare Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ transformieren, indem wir für jede Kante (p, a, q) des Automaten A eine Regel $P \to aQ$ in der Grammatik erzeugen, wobei $P, Q \in V$ und $a \in \Sigma$. Dabei ist folgendes zu beachten:

- Wenn p oder q ein Startzustand ist, so ist P oder Q das Startsymbol von G.
- Wenn q ein akzeptierender Zustand ist, fügen wir $Q \to \epsilon$ zu unseren Regeln hinzu.
- Das Eingabealphabet Σ von A ist das Alphabet Σ von G.
- Alle Kanten, die zu Zustände führen, von denen nie ein akzeptierender Zustand erreicht werden kann, können weggelassen werden.

Umgekehrt können wir auch aus einer rechtslinearen Grammatik G (unter gewissen Voraussetzungen) einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ generieren, indem wir für jede Regel $P \to axQ$, wobei $P, Q \in V$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$ die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}(p, xa) = q$ definieren. Dabei ist folgendes zu beachten:

- Wenn P das Startsymbol ist, so ist p der Startzustand von A.
- Wenn Q leer ist, so ist q ein akzeptierender Zustand.
- Das Alphabet Σ von G ist das Eingabealphabet Σ von A.
- Für jedes unbekannte $\delta(q_1, a)$ generieren wir einen neuen Zustand $q_2 \in Q$ sodass $\delta(q_1, a) = q_2$ gilt.
- Alle nicht definierten kannten gehen zu einem neuen Zustand $r \in Q$.

Hinweis: Beachten Sie, dass im Allgemeinen die Konstruktion des Automaten aus einer (rechtslinearen) Grammatik einen sogenannten *nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA)*[1] generiert. Wir schränken uns aber auf solche Grammatiken ein, bei denen die resultierende Übergangsfunktion δ wohldefiniert ist. □

Zusatzübung. *Lösung.* Im Basisfall ist $z = \epsilon$ und somit

$$\hat{\delta}(q, y\epsilon) = \hat{\delta}(q, y) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), \epsilon)\,.$$

Im Induktionsschritt müssen wir

$$\hat{\delta}(q, yza) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), za)$$

zeigen. Es gilt die Induktionshypothese

$$\hat{\delta}(q, yz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), z)\,.$$

[1] Siehe `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nichtdeterministischer_endlicher_Automat&oldid=213285292`.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\text{(Definition 4.15)} & \hat{\delta}(q, yza) &= \delta(\hat{\delta}(q, yz), a) \\
&\text{(IH)} & &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), z), a) \\
&\text{(Definition 4.15)} & &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), za)\,.
\end{aligned}$$

$\square$