universität innsbruck
Institut für Mathematik

# PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 2

**Aufgabe 5**

Zeigen Sie die de Morgan'sche Formeln:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left(\bigcap_{i\in I} A_i^c\right)^c \quad \text{und} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c$$

*Lösung.* Wir beweisen die Gleichheit zweier Mengen indem wir zeigen, dass ein beliebiges $x$ *genau dann* ein Element der einen Menge ist, wenn es ein Element der anderen ist. Anders: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn ihre Elemente übereinstimmen.

Es gilt:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0} \Longleftrightarrow \exists i_0 \in I : x \notin A_{i_0}^c$$
$$\Longleftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i^c \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i^c\right)^c,$$

also sind die beiden Mengen gleich.

Ähnlich zeigen wir die Gültigkeit der zweiten Formel.

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I : x \notin A_i^c$$
$$\Longleftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i^c \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c.$$

□

**Aufgabe 6**

(*ii*) Geben Sie für jede der drei Eigenschaften *reflexiv, symmetisch, transitiv* eine Relation auf einer Menge an, die diese Eigenschaft hat, die anderen beiden jedoch nicht.

*Lösung.* (*ii*) Zur Erinnerung: Eine Relation $R$ auf einer Menge $M$ ist genau dann reflexiv wenn *für alle* $x \in M$ gilt: $(x,x) \in R$. Sie ist symmetrisch, wenn *für alle* $x, y \in M$ mit $(x,y) \in R$ gilt: $(y,x) \in R$ (anders geschrieben: $\forall x, y \in M : (x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$). $R$ auf $M$ ist genau dann transitiv, wenn *für alle* $x, y, z \in M$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ gilt: $(x,z) \in R$. Nun zu der Aufgabe:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$ auf $\{1,2,3\}$ ist offensichtlich reflexiv, aber nicht symmetrisch (denn $(1,2) \in S$, aber $(2,1) \notin R$) und nicht transitiv (denn $(1,2) \in R$ und $(2,3) \in R$, aber $(1,3) \notin R$).

$S = \{(1,2),(2,1)\}$ auf $\{1,2\}$ ist symmetrisch: Für alle $x, y \in \{1,2\}$, für die $(x,y) \in S$ gilt, haben wir auch $(y,x) \in S$ (leicht zu sehen). $S$ ist aber weder reflexiv ($(1,1) \notin S$) noch transitiv (denn $(1,2),(2,1) \in S$, aber $(1,1) \notin S$).

$T = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ auf $\{1,2,3\}$ ist transitiv: Nur für $x = 1, y = 2, z = 3$ haben wir sowohl $(x,y) \in T$ als auch $(y,z) \in T$, und in dem Fall ist in der Tat auch

$(x, z) \in T$. $T$ ist aber weder reflexiv (denn $(1,1) \notin S$) noch symmetrisch (denn $(1,2) \in S$, aber $(2,1) \notin S$). □

**Aufgabe 8**

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir folgende Relation:

$$M_n := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : nc = b - a\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $M_n$ um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

*Lösung.* Falls $n = 0$ gilt, ist $(a,b)$ genau dann in $M_n$, wenn $0 = b - a$, also $a = b$ gilt. Also gilt $M_0 = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Man sieht leicht, dass $M_0$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine Äquivalenzrelation. In diesem Fall besteht jede Äquivalenzklasse aus genau einer ganzen Zahl, also hat $M_0$ unendlich viele Äquivalenzklassen.

Nehmen wir weiter an, $n$ sei nicht Null. Wir müssen zeigen, dass $M_n$ als Relation auf $\mathbb{Z}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Reflexivität und Symmetrie lassen sich leicht zeigen.

Um die Transitivität zu zeigen, seien $(a,b)$ und $(b,a')$ in $M_n$. Sei $c \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $nc = b - a$, und sei $c' \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $nc' = a' - b$. Dann gilt $a' - a = a' - b + b - a = nc' + nc = n(c' + c)$, also gibt es eine ganze Zahl $d = c' + c$, so dass $nd = a' - a$ gilt. Es folgt $(a, a') \in M_n$. Damit haben wir bewiesen, dass $M_n$ transitiv ist.

Es lässt sich jedes $a \in \mathbb{Z}$ *eindeutig* schreiben als $a = qn + r$, wobei $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und $q \in \mathbb{Z}$. Es gibt also für jede ganze Zahl genau ein $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, das sich in derselben Äquivalenzklasse von $M_n$ befindet. Folglich hat $M_n$ genau $n$ Äquivalenzklassen. □