

Gruppe 1

- (1) Geben Sie die Formel für partielle Integration für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ an.
- (2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^1 \ln x \, dx .$$

Gruppe 2

- (1) Geben Sie die Stammfunktionen für die folgenden Funktionen an.
- $\alpha f'(x) + g'(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
 - $\sin(x)$
 - $\cos(x)$
 - x^n
 - e^x
 - K für $K \in \mathbb{R}$
- (2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \sin(x) + 2\pi \cos(x) \, dx .$$

Gruppe 3

- (1) Gegeben sei ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit Nullstellen $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$. Wie kann man das Polynom $p(x)$ als Produkt darstellen?

- (2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2+3x+2} \, dx .$$

Gruppe 4

- (1) Geben Sie die Substitutionsregel für Integrale an.
- (2) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(x^2 + \pi) \, dx .$$

Gruppe 5

Ein Kreis in 2D mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Polarkoordinaten ermöglichen die Darstellung

$$S = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

welche (nach einigen Rechenschritten) zu einem einfachen Integral führt

$$A := \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\varphi.$$

Bestimmen Sie dieses Integral und leiten Sie folglich die bekannte Formel für die Kreisfläche mit Radius R her.

Gruppe 6

Monte Carlo Integration ist ein numerischer Ansatz zur Approximation von Integralen mittels Zufallszahlen. Ein klassisches Beispiel ist die Bestimmung der Fläche eines Kreises mit Radius $R > 0$. Der Algorithmus sieht wie folgt aus.

- (i) Generiere zwei gleichverteilte Zufallszahlen x und y über das Intervall $[0, R]$.
- (ii) Berechne die Distanz r zum entsprechenden Punkt $r^2 = x^2 + y^2$.
- (iii) Teste ob r innerhalb oder außerhalb des Kreises mit Radius R liegt.
- (iv) Falls $r \leq R$ ist der Test ein Treffer. Wenn $r > R$ ist der Test als verfehlt zu werten.
- (v) Nach N Gesamttests kann die Kreisfläche approximiert werden mittels $\frac{N_{\text{hit}}}{N} 4R^2$.

Hier ist $4R^2$ die Fläche der Box mit Seitenlänge $D = 2R$ das den Kreis umschreibt. Laden Sie die Vorlage `monte_carlo.jl` von

<https://fileshare.uibk.ac.at/f/abbb1e4ccc0a475b81b1/?dl=1>

herunter und füllen Sie die Lücken aus. Führen Sie das Skript aus, um zu sehen, wie der obige Algorithmus funktioniert.

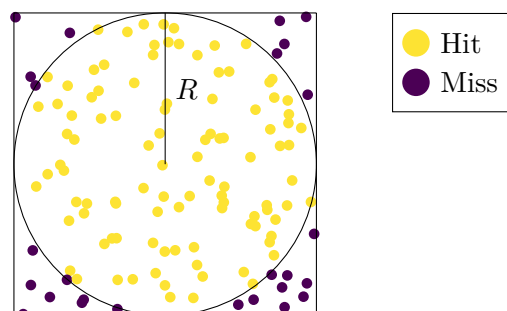


Figure 1: Monte Carlo Integration für einen Kreis mit Radius $R > 0$.