Lineare Algebra
Wintersemester 21/22

universität innsbruck
Institut für Mathematik

PS Lineare Algebra, Lösungshinweise zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 37 (*ähnlich*)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils eine Basis für Kern und Bild:

(i) $\varphi_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 + 2x_1)$
(ii) $\varphi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)$
(iii) $\varphi_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (5x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, 2x_3 - 8x_1)$

Lösung.

(i) Wir bestimmen zuerst den Kern von φ_1: $\varphi_1(x_1, x_2) = (0, 0) \implies x_1 = x_2 \implies 3x_1 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$, also gilt $\ker \varphi_1 = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_1) = \mathbb{R}^2$. Eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi_1) = \mathbb{R}^2$ ist also die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, die einzige Basis von $\ker \varphi_1$ ist die leere Menge.

(ii) $\varphi_2(x_1, x_2) = (0, 0, 0) \implies x_1 = -x_2 \wedge x_1 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$, also gilt $\ker \varphi_2 = \{0\}$ und dass φ_2 injektiv ist. Eine Basis von $\ker \varphi_2 = \{0\}$ ist also die leere Menge. Aus der Injektivität von φ_2 folgt, dass wir eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi_2)$ erhalten, wenn wir das Bild der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch φ_2 berechnen: $\varphi_2(1, 0) = (1, 1, 1)$ und $\varphi_2(0, 1) = (1, -2, 0)$.

(iii) Für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ können wir x_2 und x_3 so bestimmen, dass $5x_1 + x_2 = 2x_3 - 8x_1 = 0$ gilt und man sieht leicht, dass für diese Werte auch $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ gilt. Also hat der Kern von φ_3 Dimension 1 und wird z.B. von dem Vektor $(1, -5, 4)$ erzeugt.

Da $\ker \varphi_3$ ein-dimensional ist, folgt, dass das Bild von φ_3 zwei-dimensional ist. Um eine Basis dieses Untervektorraums zu erhalten, berechnen wir $\varphi_3(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ und $\varphi_3(0, 0, 1) = (0, 1, 2)$ und bemerken, dass die Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(0, 1, 2)$ linear unabhängig sind, also einen zwei-dimensionalen Raum aufspannen. Dieser kann nur $\mathrm{Bild}(\varphi_3)$ sein, also bilden die beiden Vektoren eine Basis davon.

□

Aufgabe 38 (*ähnlich*)

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\varphi \colon V \to V$ linear sind:

(a) $p \mapsto p(0)$ (Auswertung in 0)
(b) $p \mapsto p(1)$ (Auswertung in 1)
(c) $p \mapsto p'$ (Ableitung nach t)
(d) $p \mapsto p + 1$.

Lösung.

(a) Analog zu (b).

(b) Sei $f(p) = p(1)$, $\forall p \in V$. f hat also den Definitionsbereich V und den Zielbereich $\mathbb{R}$. Seien p_1 und p_2 Elemente von V, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha p_1 + \beta p_2) &= (\alpha p_1 + \beta p_2)(1) = (\alpha p_1)(1) + (\beta p_2)(1) \\ &= \alpha p_1(1) + \beta p_2(1) = \alpha f(p_1) + \beta f(p_2), \end{aligned}$$

also ist f linear.

(c) Aus den bekannten Regeln für das Berechnen der Ableitung eines Polynoms folgt sofort, dass diese Abbildung linear ist.

(d) Sei $g(p) = p + 1$, $\forall p \in V$. Dann ist $g(t + 1) = t + 2$ aber $g(t) + g(1) = t + 1 + 2 = t + 3$. Also ist diese Abbildung nicht linear. Alternativ kann man feststellen, dass $g(0) = 1 \neq 0$, was zur selben Schlussfolgerung führt.

□

Aufgabe 39 (a, b, c)

Sei $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Sind $v_1, \ldots, v_n$ in V linear unabhängig, so sind $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ in W linear unabhängig.

(b) Sind $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ in W linear unabhängig, so sind $v_1, \ldots, v_n$ in V linear unabhängig.

(c) Wenn φ bijektiv ist, dann ist $\varphi^{-1} \colon W \to V$ ebenfalls linear.

Lösung.

(a) Die Abbildung φ, definiert durch $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in V$, ist offensichtlich linear. Die Aussage ist also im Allgemeinen falsch, denn eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist nie linear unabhängig. (Aussage (a) ist stets wahr, wenn $\ker \varphi = \{0\}$ gilt.)

(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ gilt. Da φ eine lineare Abbildung ist, haben wir $0 = \varphi(0) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_v \varphi(v_n)$. Nun folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ in W, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ gelten muss. Also sind $v_1, \ldots, v_n$ in V linear unabhängig.

(c) Seien $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Da φ bijektiv ist, gibt es $v_1, v_2 \in V$, so dass $w_1 = \varphi(v_1)$ und $w_2 = \varphi(v_2)$ gelten. Nun haben wir

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) &= \varphi^{-1}(\lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \varphi^{-1}(w_1) + \lambda_2 \varphi^{-1}(w_2), \end{aligned}$$

also ist φ^{-1} eine lineare Abbildung.

□

Aufgabe 40 (*ähnlich*)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Rang, wenn wir A als Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auffassen? Finden Sie jeweils eine invertierbare Untermatrix von maximaler Größe.

Lösung. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an, um die Matrix A in Zeilenstufenform zu bringen. Wir erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 11/5 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, das A als Koeffizientenmatrix hat, existiert und ist einzig, also ist A invertierbar und hat vollen Rang. A selbst ist dann die invertierbare Untermatrix von maximaler Größe.

Wenn wir die Einträge von A als Elemente aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auffassen, erhalten wir folgende Matrix in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass das homogene Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix auch über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ keine freien Variable hat, also hat A auch über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ den Rang gleich 4 und ist invertierbar. $\square$