1) *Lösung.* Die maximale Anzahl von Schritten wird durch wohlgeformte Klammerausdrücke erreicht da die TM bei einem gefundenen Fehler im Eingabewort direkt in den verwerfenden Zustand wechselt. In einem wohlgeformten Klammerausdruck der Länge n müssen $\frac{n}{2}$ geschlossene Klammern und die dazugehörigen offenen Klammern gefunden werden. Dafür wird das Eingabewort abwechselnd nach rechts und nach links durchlaufen, wobei wir hier keine konstante Obergrenze geben können, im schlimmsten Fall (das äußerste Klammernpaar) dauert dies $2n$ Schritte. Wir können die Laufzeit der TM M damit mit $\frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n \in O(n^2)$ nach oben abschätzen. □

2) *Lösung.* In Abbildung 1 finden Sie die Beweisbäume für die Hoare-Tripel (Q_1, P_1, R_1) und (Q_3, P_3, R_3). Beim Hoare-Tripel (Q_2, P_2, R_2) betrachten wir die Vorbedingung $\{\mathsf{false}\}$, aus welcher wir alles schließen können. D.h. das Programm P_2 ist korrekt bezüglich der Vorbedingung Q_2 und Nachbedingung R_2.

□

3) *Lösung.*

$$
\dfrac{
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{
   \dfrac{
    \dfrac{}{\{\Phi\}\ r := r-b\ \{I'\}}\,[\mathrm{z}]
   }{\{I' \wedge r > b-1\}\ r := r-b\ \{I'\}}\,[\mathrm{a}]^{4}
  }{\{I'\}\ \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}\ \{I' \wedge \neg(r>b-1)\}}\,[\mathrm{w}]
 }{\{A\}\ \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}\ \{B\}}\,[\mathrm{a}]^{3}
 \quad
 \dfrac{
  \dfrac{}{\{B\}\ a:=b\ \{C\}}\,[\mathrm{z}]
  \quad
  \dfrac{}{\{C\}\ b:=r\ \{\Delta\}}\,[\mathrm{z}]
 }{\{B\}\ a:=b; b:=r\ \{\Delta\}}\,[\mathrm{s}]
}{\{A\}\ \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}; a:=b; b:=r\ \{\Delta\}}\,[\mathrm{s}]
}{\bigstar}
$$

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{
   \dfrac{
    \dfrac{}{\{\Delta\}\ r:=a\ \{A\}}\,[\mathrm{z}]
   }{\{\Delta \wedge b>0\}\ r:=a\ \{A\}}\,[\mathrm{a}]^{2}
   \quad \bigstar
  }{\{\Delta \wedge b>0\}\ r:=a; \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}; a:=b; b:=r\ \{\Delta\}}\,[\mathrm{s}]
 }{\{\Delta\}\ \mathsf{while}\ b>0\ \mathsf{do}\ r:=a; \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}; a:=b; b:=r\ \mathsf{end}\ \{\Delta \wedge \neg(b>0)\}}\,[\mathrm{w}]
}{\{Q\}\ \mathsf{while}\ b>0\ \mathsf{do}\ r:=a; \mathsf{while}\ r>b-1\ \mathsf{do}\ r:=r-b\ \mathsf{end}; a:=b; b:=r\ \mathsf{end}\ \{a = \mathsf{ggT}(x,y)\}}\,[\mathrm{a}]^{1}
$$

[1] mit $Q \models \Delta$
und $\Delta \wedge \neg(b > 0) \models a = \mathsf{ggT}(x, y)$

[2] mit $\Delta \wedge b > 0 \models \Delta$

[3] mit $A \models I'$
und $I' \wedge \neg(r > b - 1) \models B$, denn laut Definition von I' gilt $I' \models r \geq 0$ und außerdem gilt $\neg(r > b - 1) \equiv b \geq r$ somit folgt $b \geq 0$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{z}]
  }{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{a}]^1
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\{x_1-1=0\}\ x_1 := x_1-1\ \{x_1=0\}}\,[\mathrm{z}]
    }{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1-1\ \{x_1=0\}}\,[\mathrm{a}]^2
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\{\mathsf{odd}(x_1+1)\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{odd}(x_1)\}}\,[\mathrm{z}]
    }{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{odd}(x_1)\}}\,[\mathrm{a}]^3
  }{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1-1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{odd}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1-1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{odd}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

[1] mit $(x_1=0) \models (x_1+1=1)$
[2] mit $(x_1=1) \models (x_1-1=0)$
[3] mit $(x_1=0) \models (\mathsf{odd}(x_1+1))$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{z}]
  }{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{a}]^1
  \quad \Phi
}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\{x_1+1=2\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[\mathrm{z}]
  }{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[\mathrm{a}]^2
  \quad \Psi
}{\Phi := \{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\{\mathsf{ist\_prim}(x_1+1)\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{z}]
}{\Psi := \{x_1=2\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{a}]^3
$$

[1] mit $(x_1=0) \models (x_1+1=1)$
[2] mit $(x_1=1) \models (x_1+1=2)$
[3] mit $(x_1=2) \models (\mathsf{ist\_prim}(x_1+1))$

Abbildung 1: Beweisbäume für Aufgabe 3

4 mit $I' \wedge r > b - 1 \models \Phi$

- $\Delta := \mathsf{ggT}(a, b) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge b \geq 0 \wedge a \geq 0$
- $\Phi := \mathsf{ggT}(r - b, b) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge r - b \geq 0$
- $I' := \mathsf{ggT}(r, b) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge r \geq 0$
- $A := \mathsf{ggT}(r, b) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge b \geq 0 \wedge r \geq 0$
- $B := \mathsf{ggT}(b, r) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge r \geq 0 \wedge b \geq 0$
- $C := \mathsf{ggT}(a, r) = \mathsf{ggT}(x, y) \wedge r \geq 0 \wedge a \geq 0$
- $Q := x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge a = x \wedge b = y$

$\square$