Linearna regresija

Predstavljajmo si, da izvajamo fizikalni poskus. Imamo vzmet, na kateri merimo raztezek v odvisnosti od sile, s katero napenjamo vzmet (na vzmet obešamo uteži z znano težo in merimo raztezek).

[1]

F [N]	1	2	3	4	5
x [cm]	10	20	35	55	80

Velja Hookov zakon, $F = kx$, torej sta x in F med seboj linearno odvisna. Poskušali bomo najti premico, ki se bo najbolje prilegala danim točkam v ravnini.

Če imamo 2 točki $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$, lahko brez težav najdemo premico, ki gre točno skozi niju. Če pa je točk več, ni nujno, da obstaja premica, ki gre skozi vse točke. Iščemo taka a in b, da se bo premica kar najbolje prilegala danim točkam. Če gre premica skozi neko točko $T_i(x_i, y_i)$, potem velja:

$$0 = ax_i + b - y_i$$

Ker pa naša premica ne poteka direktno skozi vse točke pride do napake, ki jo bomo v točki T_i označili z ε_i.

$$\varepsilon_i = ax_i + b - y_i$$

Napaka je lahko pozitivna ali negativna, odvisno ali točka leži pod ali nad premico. Želimo zmanjšati velikost vseh napak, ne glede na to, ali so pozitivne ali negativne. (Lahko bi preprosto sešteli absolutne vrednosti napak, ampak pozneje funkcije ne bi mogli odvajati.) Zato seštejemo kvadrate vseh napak.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$$

[1]Podatki pridobljeni iz: `http://www.clemson.edu/ces/phoenix/labs/124/shm/`

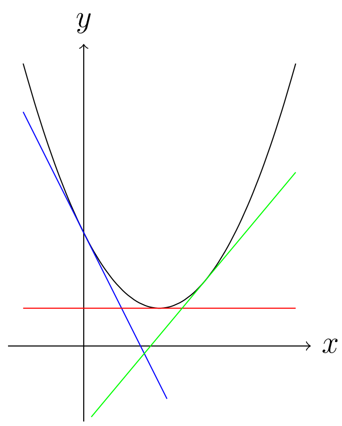
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} (ax_i - b - y_i)^2$$

Naš cilj je, da minimiziramo to napako. Minimum funkcije pa najdemo tako, da izračunamo, kdaj je odvod funkcije enak 0.

Odvodi

Odvod (označimo ga z $f'(x)$) funkcije $f(x)$ nam pove, kakšen je koeficient tangente na graf fukncije $f(x)$ v točki x. Za lažjo predstavo si oglejmo nekaj primerov:

- če funkcija na intervalu (a, b) raste, bo odvod v točki $x \in (a, b)$ večji od nič (zelena tangenta),
- če funkcija na intervalu (a, b) pada, bo odvod v točki $x \in (a, b)$ manjši od nič (modra tangenta),
- če je odvod enak nič, pa ima funkcija v tisti točki lokalni ekstrem (minimum, maksimum ali sedlo).



Delni odvodi

Funkcija je odvisna od večih spremenljivk, zato jo moramo odvajati za vsako spremenljivko posebej. Ker nam odvod ene spremenljivke pove kako se funkcija obnaša samo po tej spremenljivki, temu rečemu delni odvod.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2\frac{\partial (ax_i - b - y_i)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{N}(ax_i - b - y_i)x_i$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2\frac{\partial (ax_i - b - y_i)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{N}(ax_i - b - y_i)(-1) = -2\sum_{i=1}^{N}(ax_i - b - y_i)$$

Rešitev najdemo tako, da ugotovimo, pri katerih a in b sta odvoda enaka 0. To lahko rešimo z uporabmo matrik, vendar tega ne znamo, zato se bomo tega lotili s primitvno metodo gradientnega spusta.

Gradientni spust

Gradient nam pove smer največjega naraščanja funkcije. Gradient funkcije f(x) je vektor definiran kot:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

V našem primeru linearne regresije je gradientni spust:

$$\nabla \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} \end{pmatrix}$$

Ker iščemo minimum funckije se bomo premikali v nasprotno smer gradienta. Spremembo spremenljivke a lahko zapišemo kot:

$$\Delta a = -(\nabla \varepsilon)_1 \cdot \lambda$$

kjer λ predstavlja velikost premika.

Naše nove spremenljivke so:

$$a = a + \Delta a$$

$$b = b + \Delta b$$

S tem smo se premaknili za en korak bližje minimumu funkcije, to pomeni parametroma a in b pri katerih se bo premica najbolje prilegala našim točkam. Ta postopek ponovimo še n-krat. Večkrat ko ga ponovimo, bolj natančen bo naš rezultat.

Natančnost našega rezultata je odvisna tudi od λ (velikost premika) in začetnih vrednost spremenljivk a in b. Z manjšo velikostjo premika bo rezultat bolj natančen, vendar bomo morali postopek večkrat ponoviti. Ker s postopkom iščemo samo lokalne minimume, nam začetna vrednost spremenljivk določi kateri minimum bomo našli.

Linerana regresija elipse

Imamo N točk krožnice nekega planeta $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \ldots, T_n(x_n, y_n)$. Podobno kot pri prejšnjem primeru, bomo tudi tokrat iskali funkcijo, ki se točkam najbolj prilega. Tokrat bomo namesto premice iskali elipso, saj se elipsa seveda bolj prilega krožnici planeta kot pa premica.

Elipsa je stožnica, zato zapišemo splošno enačbo za stožnice:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Tako kot prej se nam bo pojavila napaka, ki jo označimo z ε.

$$\varepsilon_i = Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F$$

Za razliko od premice, je oblika stožnice odvisna od šestih parametrov namesto dveh. To so: A, B, C, D, E in F. Zato bomo torej spreminjali teh šest parametrov.

Podobno kot pri premici najprej definiramo skupno napako kot vsoto kvadratov vseh napak:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} (Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)^2$$

Enako kot pri premici moramo našo napako delno odvajati po spremenjivkah od katerih je naša napaka odvisna, da bomo znali te spremenljivke spreminjati pravilno. To pomeni da potrebujemo izračunati delni odvod napake po A, B, C, D, E in F. Delni odvodi za enačbo stožnic so:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)(x_i^2)$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial B} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)(x_iy_i)$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)(y_i^2)$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial D} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)(x_i)$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)(y_i)$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial F} = \sum_{i=1}^{N} 2(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)$$

Da najdemo najboljše parametre, pri katerih bo funkcija imela najmanjšo napako, bomo ponovno uporabili gradientni spust. Za razliko od gradientnega spusti pri eni premici, bomo tokrat spreminjali šest parametrov. Naš gradient je torej:

$$\nabla \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial B} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial D} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial F} \end{pmatrix}$$

To pomeni da so naše spremembe parametrov:

$$\Delta A = -(\nabla \varepsilon)_1 \cdot \lambda$$
$$\Delta B = -(\nabla \varepsilon)_2 \cdot \lambda$$
$$\Delta C = -(\nabla \varepsilon)_3 \cdot \lambda$$
$$\Delta D = -(\nabla \varepsilon)_4 \cdot \lambda$$

$$\Delta E = -(\nabla\varepsilon)_5 \cdot \lambda$$
$$\Delta F = -(\nabla\varepsilon)_6 \cdot \lambda$$

Iz česar sledi, da so naši novi parametri podobno kot pri premici:

$$A = A + \Delta A$$
$$B = B + \Delta B$$
$$C = C + \Delta C$$
$$D = D + \Delta D$$
$$E = E + \Delta E$$
$$F = F + \Delta F$$

Pravilnost našega rezultata je seveda odvisna od tega koliko ponovitev bomo naredili, kolikšna bo naša λ in kakšne začetne vrednosti A, B, C, D, E in F smo si izbrali.

Logistična regresija

Glavna razlika med logistično in linearno regesijo je, da pri linearni regresiji določamo zvezno spremenljivko (y je odvisen od x), medtem ko nam pri logistični regresiji model vrne kakšna je verjetnost, da vhodni podatki sodijo v določeno kategorijo. Zato se logistična regresija uporablja za klasifikacijo (npr. prepoznavanje števk idr.).

Dodatno

Ekliptični koordinatni sistem

Eden izmed koordinatnih sistemov za določanje lege nebesnih teles. Lokacijo določimo s tremi podatki. Ker so koordinate definirane glede na ravnino zemljine orbite, je z koordinata za Zemljo vedno enaka 0.

l longtituda, ekliptična dolžina, od $0°$ do $360°$.

b latituda, ekliptična širina od $-90°$ do $90°$.

r razdalja

V kartezične koordinate podatke pretvorimo po formulah:

$$x = r \cos b \cos l$$

$$y = r \cos b \sin l$$

$$z = r \sin b$$

Ker tiri vseh planetov ležijo v (skoraj) isti ravnini, bomo z koordianto zanemarili.