2η Εργαστηριακή Άσκηση
Ελαχιστοποίηση με Χρήση Παραγώγων

Δημήτριος Σουρλαντζής

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Author Note

Αυτή η αναφορά είναι για την εργασία 2 από 3 για το μάθημα Τεχνικές Βελτιστοποίησης που διδάσκεται στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών, του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Το παρόν έγγραφο δεν αποτελεί κάποια επιστημονική έρευνα, αλλά μια ανάλυση των αλγορίθμων βελτιστοποίησης που ζητήθηκαν να αναλυθούν. Για οποιαδήποτε απορία στείλτε μήνυμα στην ηλεκτρονική διεύθυνση sourland@ece.auth.gr

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία έχουμε να αναλύσουμε 3 μεθόδους με χρήση παραγώγων. Αυτές οι μέθοδοι είναι η μέθοδος μέγιστης καθόδου, η μέθοδος Newton και η μέθοδος Levenberg-Maequardt που είναι μία τροποποιημένη υλοποίηση της μεθόδου Newton. Έχουμε κληθεί να βελτιστοποιήσουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$f(x, y) = x^3 e^{-x^2-y^4}$

2 Εικόνα της Συνάρτησης

Πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση θα πρέπει να δούμε της εικόνα της συνάρτησης και το διάνυσμα κλίσης της. Με την χρήση του εργαλίου MATLAB, στο αρχείο πηγαίου κώδικα TASK1.m μπορούμε να δούμε ακριβώς την μορφή της συνάρτησής μας, πως είναι το μέγιστο και το ελάχιστο και που δείχνει το διάνυσμα κλίσης. Αυτά φαίνονται στις παρακάτω εικόνες:

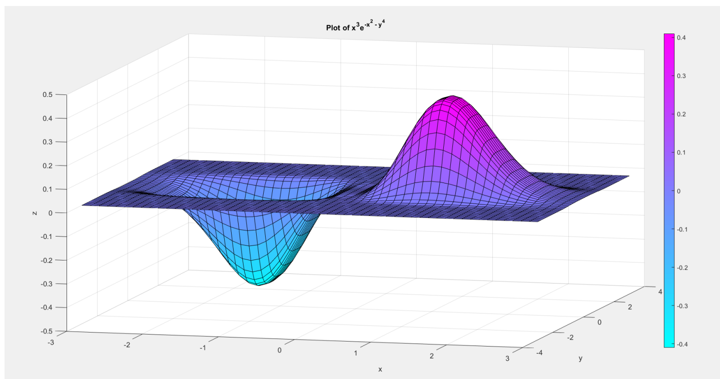

Figure 1: Η εικόνα της συνάρτησης

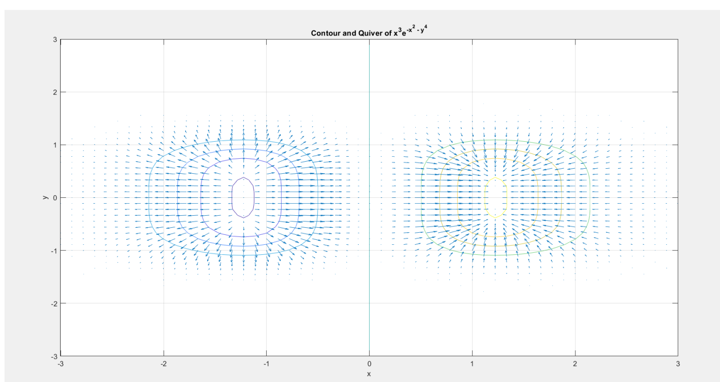

Figure 2: Το διάνυσμα κλίσης και οι μεταβολές της συνάρτησης

3 Ανάλυση Αλγορίθμων Βελτιστοποίησης

3.1 Αλγόριθμος Μέγιστης Καθόδου

2.1.1 Ανάλυση Αλγορίθμου και Αποτελέσματα

Εδώ πέρα αναλύουμε τον αλγόριθμο Μέγιστης Καθόδου. Έχουμε υλοποιήσει τον τον αλγόριθμο με τρείς παραλλαγές για το γ_κ. Στην πρώτη είναι σταθερό, στην δεύτερη επιλέγεται με βάση της ελαχιστοποίησης του $f(x_\kappa - \gamma_\kappa \nabla f(x_k))$ ενώ, τέλος χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Armijo.
Τα σημεία εκκίνησης μας είναι τα $(0,0), (1,1), (-1,-1)$. Για το σημείο $(0,0)$ η τιμή της συνάρτησης είναι 0 και παραμένει εκεί, αφού και το διάνυσμα κλίσης θα είναι 0. Αυτό συμβαίνει και για τις τρείς διαφορετικές επιλογές του γ_κ.
Για το σημείο $(1,1)$ η τιμή της συνάρτησης είναι πάνω στο βουναλάκι που κάνει η συνάρτηση και καταλήγει στο $(0,0)$ αφού και το διάνυσμα κλίσης οταν φτάσει στο 0 θα είναι για πάντα 0. Για σταθερό γ_κ βλέπουμε ότι τα βήματα είναι πολλά ενώ για τους άλλους 2 κανόνες το τοπικό ελάχιστο βρίσκεται σε 1-3 βήματα.
Τέλος, για το σημείο $(-1,-1)$ η τιμή της συνάρτησης είναι κοντά στην λακούβα που κάνει η συνάρτηση και καταλήγει στο ολικό ελάχιστο αφού το διάνυσμα κλίσης σε κάθε υπολογισμό θα κοιτάει το ελάχιστο. Για σταθερό γ_κ βλέπουμε ότι τα βήματα είναι πολλά ενώ για τους άλλους 2 κανόνες το τοπικό ελάχιστο βρίσκεται σε 1-3 βήματα. Όλη η ανάλυση βρίσκεται στο αρχείο πηγαίου κώδικα TASK2.m .

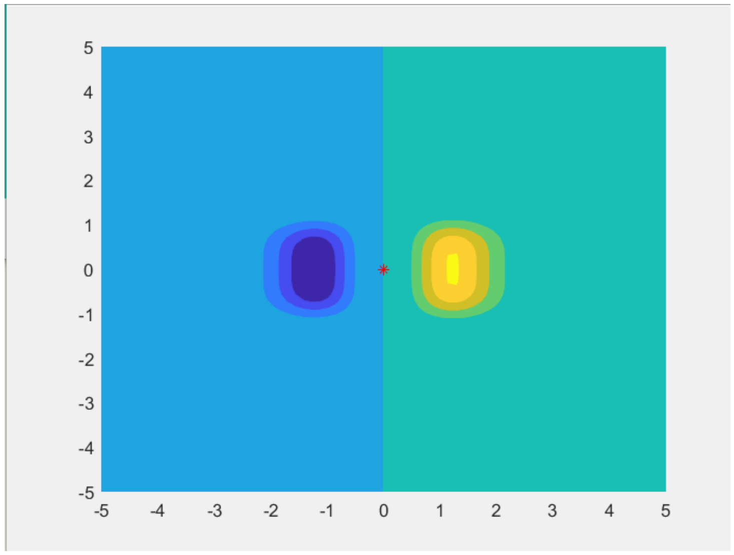

Figure 3: Το ελάχιστο για όλους τους κανόνες γ_κ από το σημείο (0,0)

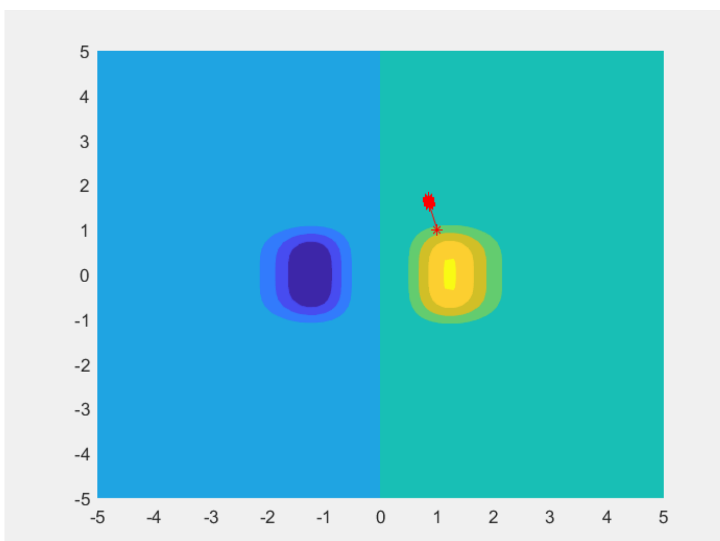

Figure 4: Το ελάχιστο για σταθερό γ_κ από το σημείο (1,1)

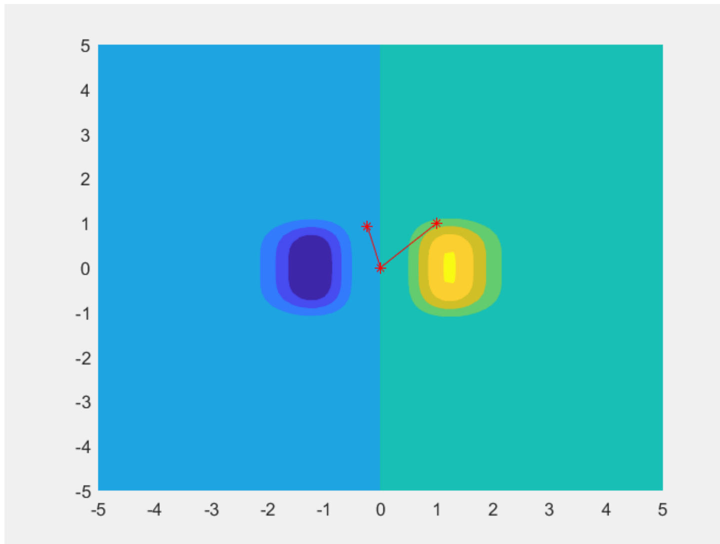

Figure 5: Το ελάχιστο για ελαχιστοποιητικό γ_κ από το σημείο (1,1)

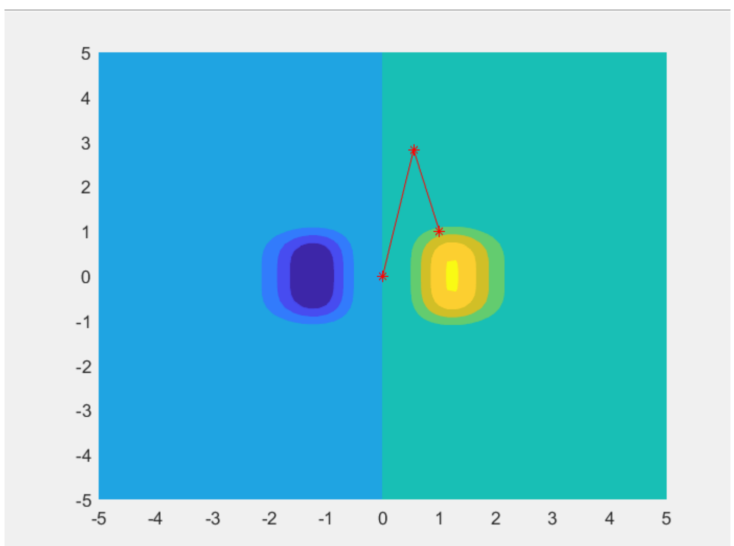

Figure 6: Το ελάχιστο για γ_κ με κανόνα Armijo από το σημείο (1,1)

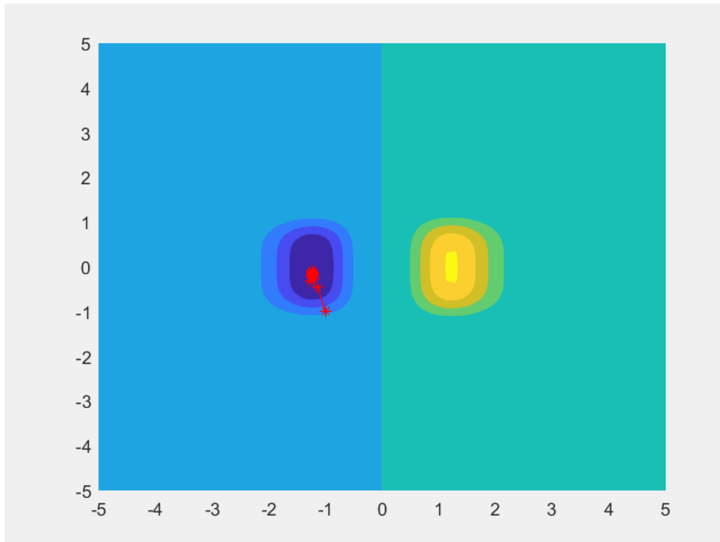

Figure 7: Το ελάχιστο για σταθερό γ_κ από το σημείο (1,1)

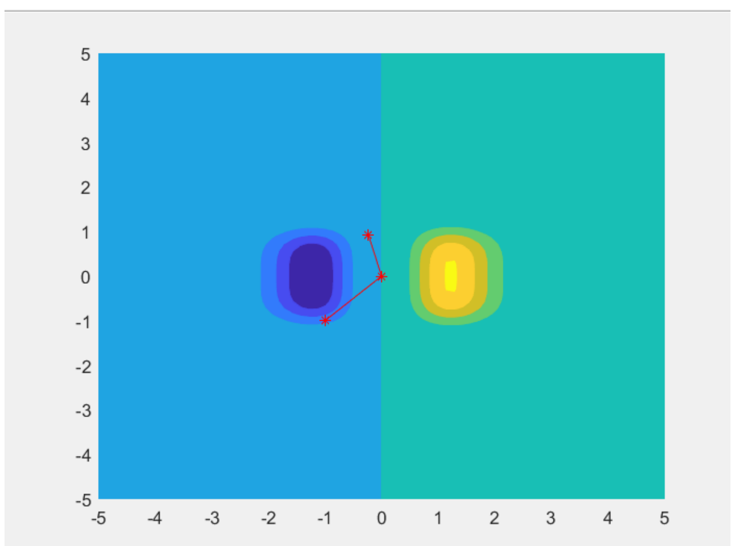

Figure 8: Το ελάχιστο για ελαχιστοποιητικό γ_κ από το σημείο (1,1)

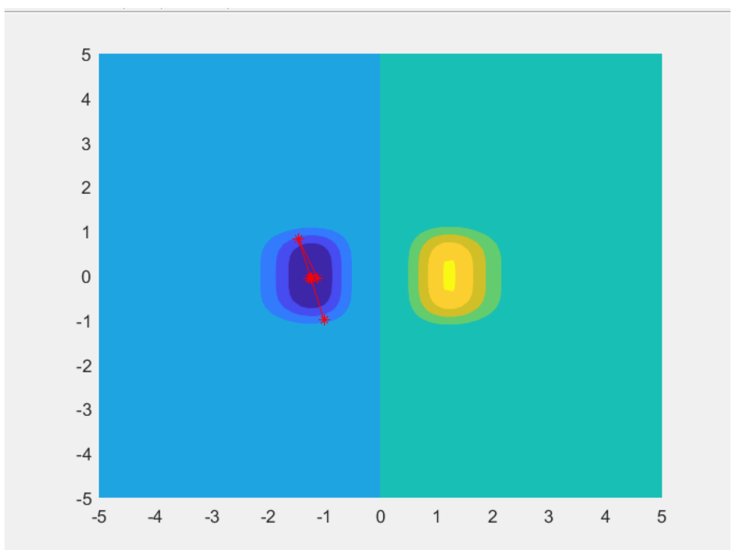

Figure 9: Το ελάχιστο για γ_κ με κανόνα Armijo από το σημείο (1,1)

4 Αλγόριθμος του Newton

Μία απο τις βασικές προϋποθέσεις της μεθόδου του νέυτωνα είναι ότι ο Εσσιανός πίνακας της $f(x_k)$ είναι θετικά ορισμένος. Αναλύοντας την συνάρτηση στο αρχείο πηγαίου κώδικα TASK3.m, βρίσκουμε ότι ο Εσσιανός πίνακας δεν είναι θετικά ορισμένος για κανένα σημείο εκκίνησης. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Levenberg-Marquardt

5 Η Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Αφού είδαμε ότι η μέθοδος Newton δεν δουλεύει για την συνάρτηση μας και για τα σημεία εκκίνησης που έχουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Levenberg-Marquardt που εγγυάται θετικά ορισμένο Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης. Έχει υλοποιηθεί ο κανόνας ελαχιστοποίησης και ο κανόνας Armijo καθώς αυτή η μέθοδος δεν επιτρέπει σταθερό γ_κ.

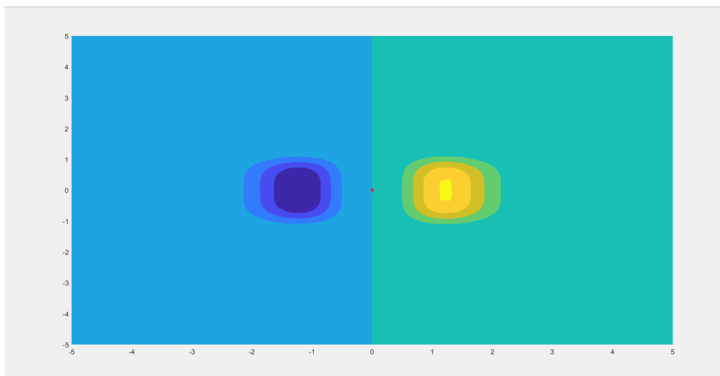

Figure 10: Το ελάχιστο για γ_κ ελαχιστοποίησης από το σημείο (0,0)

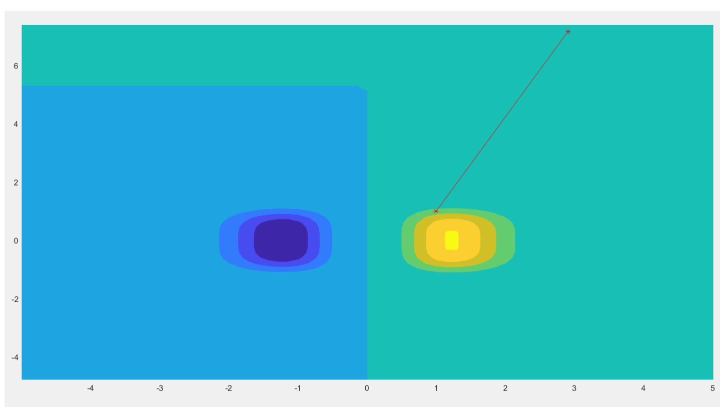

Figure 11: Το ελάχιστο για γ_κ ελαχιστοποίησης από το σημείο (0,0)

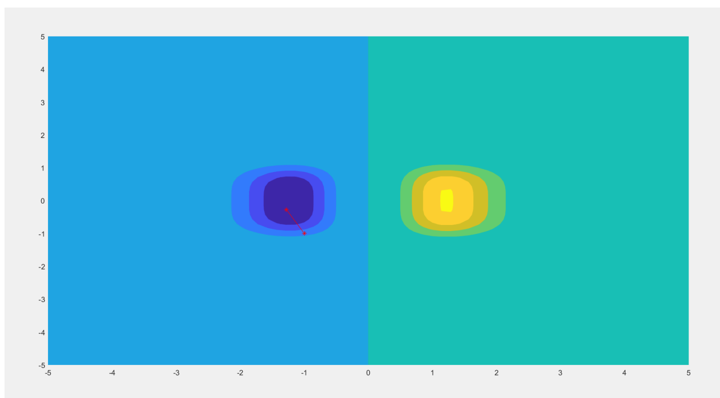

Figure 12: Το ελάχιστο για γ_κ ελαχιστοποίησης από το σημείο (0,0)

6 Αποτελέσματα και Σχόλια

Από την ανάλυση και τα αποτελέσματα των αλγορίθμων μπορούν να βγουν διάφορα συμπεράσματα. Αρχικά μπορούμε να δούμε ότι και οι τρεις μέθοδοι είναι πολύ γρήγοροι. Η εξαίρεση βρίσκεται στην επιλογή σταθερού γ_κ στην μέθοδο μέγιστης καθόδου, όπου και απαίτησε αρκετά παραπάνω βήματα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους και κανόνες. Από την άλλη μπορεί να επισημανθεί η σημασία του σημείου εκκίνησης αφού μπορεί να καταλήξει στο 0, που δεν είναι το καλύτερο ελάχιστο, μπορεί να μην ξεκινήσει καν αν ξεκινήσει από κάποιο ελάχιστο και θα παγιδευτεί εκεί η συνάρτηση, ενώ μπορούμε να πάμε στο ολικό ελάχιστο αν ξεκινήσουμε από άλλα σημεία.