

1η Εργαστηριακή Άσκηση  
Ελαχιστοποίηση Κυρτής Συνάρτησης μιας Μεταβλητής σε Δοσμένο  
Διάστημα

Δημήτριος Σουρλαντζής  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

**Author Note**

Αυτή η αναφορά είναι για την εργασία 1 απο 3 για το μάθημα Τεχνικές Βελτιστοποίησης που διδάσκεται στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών, του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Το παρόν έγγραφο δεν αποτελεί κάποια επιστημονική έρευνα, αλλά μια ανάλυση των αλγορίθμων βελτιστοποίησης που ζητήθηκαν να αναλυθούν. Για οποιαδήποτε απορία στείλτε μήνυμα στην ηλεκτρονική διεύθυνση [sourland@ece.auth.gr](mailto:sourland@ece.auth.gr)

# 1 Εισαγωγή

Πολλές φορές θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε ένα πρόβλημα, και υπάρχουν πολλές τεχνικές και αλγόριθμοι για τα επιτευχθεί αυτό. Στην παρούσα αναφορά θα αναλυθεί ο αλγόριθμος της Διχοτόμου με και χωρίς χρήση παραγώγων, ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα και η μέθοδος Fibonacci. Οι παραπάνω αλγόριθμοι ανήκουν σε ένα ευρύτερο σύνολο αλγορίθμων που ονομάζονται αλγόριθμοι βελτιστοποίησης με απουσία περιορισμών. Έχουμε κληθεί να βελτιστοποιήσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

1.  $f_1(x) = (x - 3)^2 + \sin(x + 3)^2$

2.  $f_2(x) = (x - 1)\cos(\frac{1}{2} x) + x^2$

3.  $f_3(x) = (x + 2)^2 + e^{x-2}\sin(x + 3)$

## 2 Ανάλυση Αλγορίθμων Βελτιστοποίησης

### 2.1 Αλγόριθμος Διχοτόμου

#### 2.1.1 Ανάλυση Αλγορίθμου και Αποτελέσματα

Έχοντας επιλέξει  $l = 0.01$  έχουμε μελετήσει τον αλγόριθμο για τα διάφορα  $\varepsilon$  για τα οποία ισχύει  $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$ . Παρακάτω παρουσιάζεται ένας πίνακας με τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα για κάθε  $\varepsilon$  και για κάθε συνάρτηση ενώ ο επόμενος πίνακας δείχνει τα διαστήματα στα οποία βρέθηκαν τα ελάχιστα. Ο αλγόριθμος και η διαδικασία εκτέλεσης μπορεί να βρεθεί στα αρχεία πηγαίου κώδικα Task1.m και bisetrix.m.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ πέρα ότι για  $\varepsilon = 0.1$  και  $\varepsilon = 0.01$  δεν βρέθηκε κάποιο αποτέλεσμα, ενώ όσο μικραίνει το  $\varepsilon$ , το διάστημα που βρίσκεται το ελάχιστον γίνεται όλο και πιο στενό, αφού με μικρότερο  $\varepsilon$  έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στο διάστημα. Όσο αφορά τον χρόνο εκτέλεσης, παρατηρείται μία ασυνέπεια, δηλαδή ο χρόνος δεν εξαρτάται από το  $\varepsilon$  που είναι λάθος. Τέτοια σφάλματα οφείλονται στον υπολογιστή που έτρεξε το πρόγραμμα και στην παλαιότερη έκδοση MATLAB που είναι εγκατεστημένη.

Στο επόμενο βήμα, κρατάμε το  $\varepsilon$  σταθερό με την τιμή  $\varepsilon = 0.001$  και μελετάμε την μεταβολή του διαστήματος  $[\alpha_k, \beta_k]$  και των συναρτήσεων. Έχοντας απεικονίσει την μεταβολή του διαστήματος  $[\alpha_k, \beta_k]$  με την χρήση του εργαλείου MATLAB, μπορούμε να δούμε στις παρακάτω εικόνες πως μεταβάλλεται το κάτω όριο του διαστήματος  $\alpha_k$  και το άνω όριο  $\beta_k$ . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όσο πιο μικρό είναι το  $\varepsilon$  τόσο πιο πολλά βήματα απαιτεί ο αλγόριθμος (κάτι που περιμένουμε) και τα  $\alpha_k, \beta_k$  μεταβάλλονται περισσότερες φορές, με την μεταβολή και των δύο να είναι παρόμοια για κάθε  $\varepsilon$ . Παράλληλα θα μπορέσουμε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές των συναρτήσεων ανάλογα τα  $x_k$ . Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα και πάνω της είναι όλα τα σημεία των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκ-

$\varepsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$f_1(x)$	1.2329	1.1802	0.0065884	0.0004822	0.0036328	0.026467
$f_2(x)$	1.1352	1.0617	0.006849	0.0003179	0.0030706	0.032166
$f_3(x)$	1.3263	1.2459	0.0061552	0.0003548	0.0033985	0.032626

Table 1: Runtime of bisetrix search

$\epsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$f_1(x)$	Not Found	Not Found	[3.1388, 3.1487]	[3.1404, 3.1485]	[3.1406, 3.1484]	[3.1406, 3.1484]
$f_2(x)$	Not Found	Not Found	[-0.5165, -0.50669]	[-0.51571, -0.5077]	[-0.51563, -0.5078]	[-0.51563, -0.50781]
$f_3(x)$	Not Found	Not Found	[-2.0161, -2.0063]	[-2.0157, -2.0077]	[-2.0156, -2.0078]	[-2.0156, -2.0078]

Table 2: Intervals

τέλεση του αλγορίθμου. Για αυτό το βήμα έχουμε επιλέξει  $l = [0.1 \ 0.01 \ 0.005 \ 0.0025]$ . Πρέπει να ισχύει πάντα ότι  $l > 2\epsilon$ .

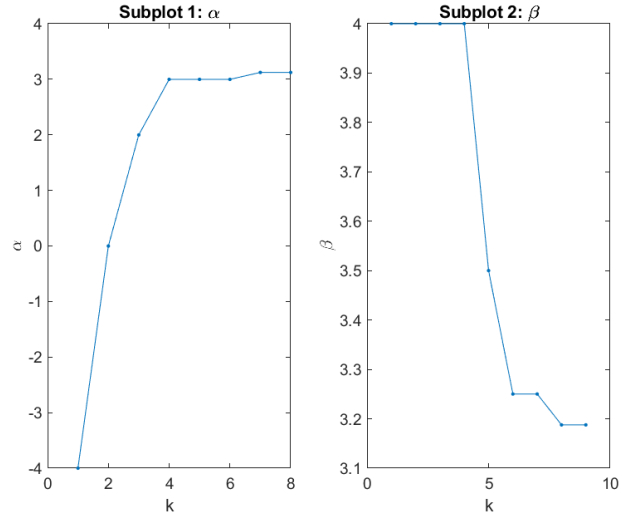


Figure 1: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

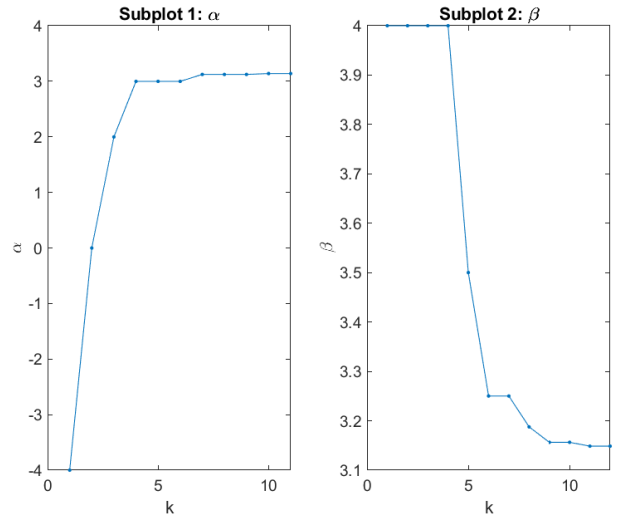


Figure 2: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

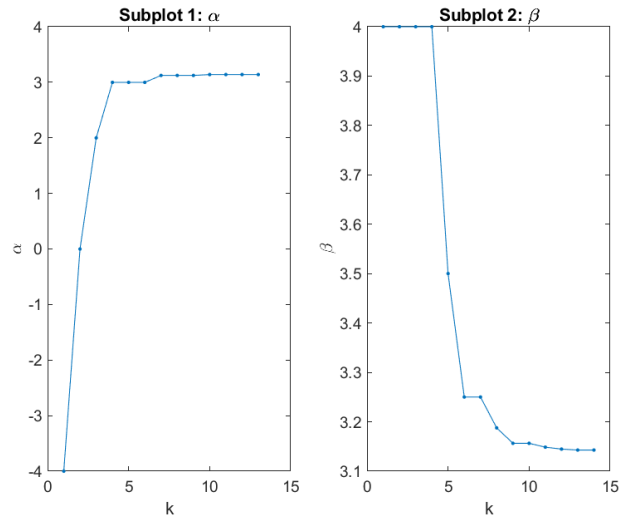


Figure 3: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

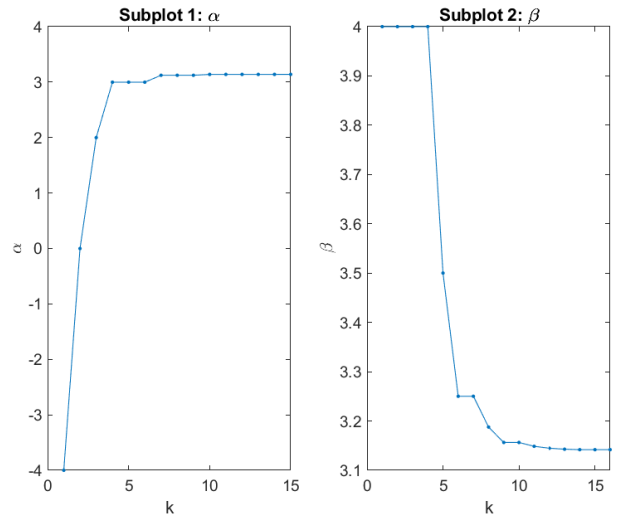


Figure 4: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

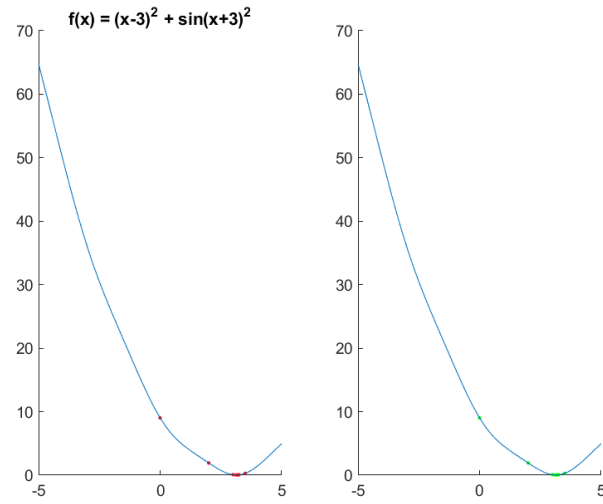


Figure 5: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

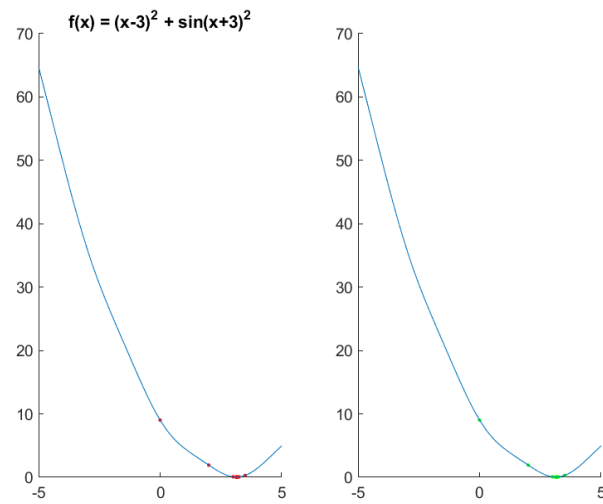


Figure 6: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

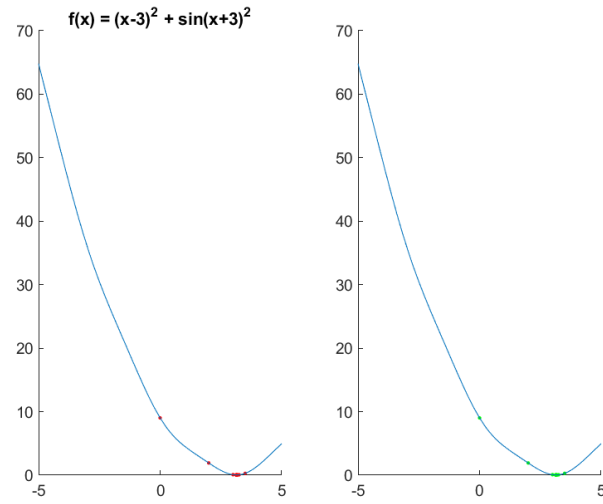


Figure 7: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

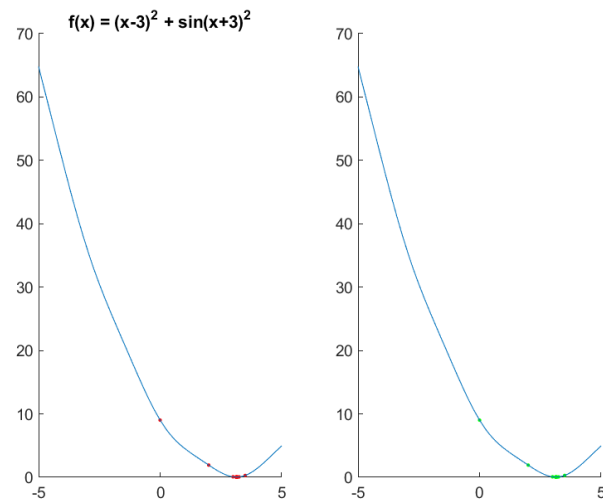


Figure 8: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$



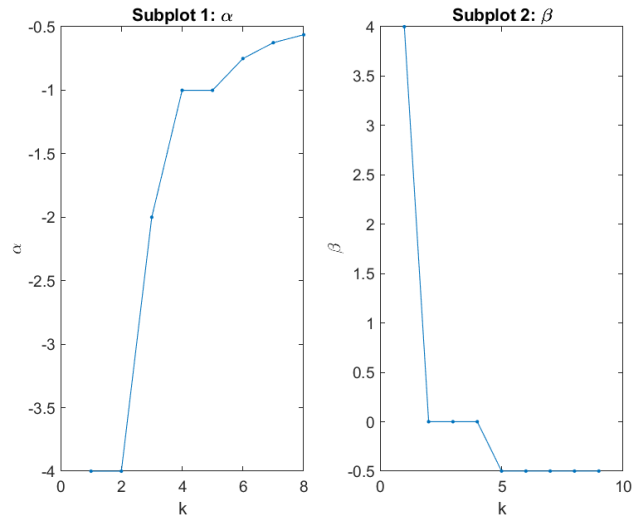


Figure 9: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

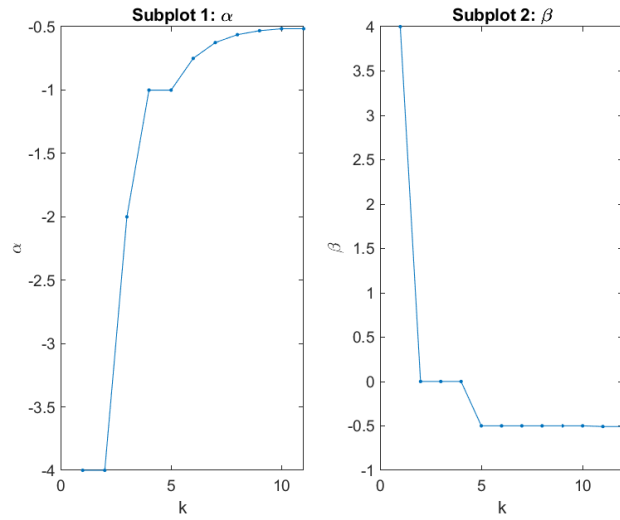


Figure 10: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

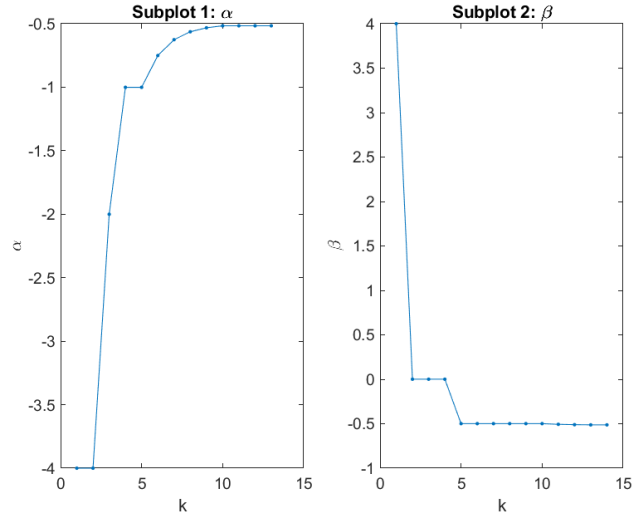


Figure 11: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

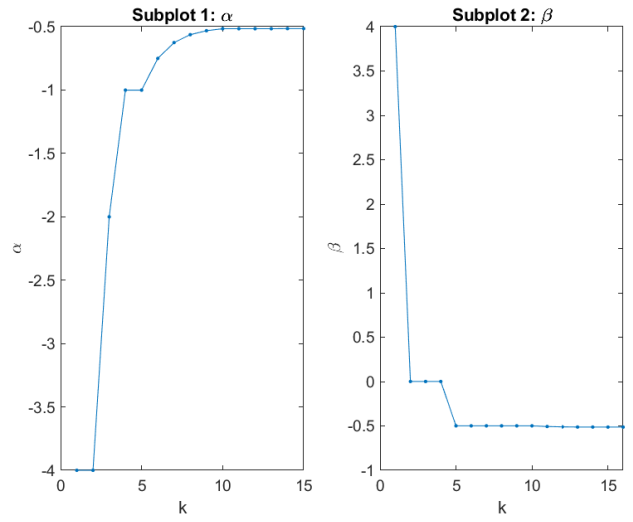


Figure 12: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

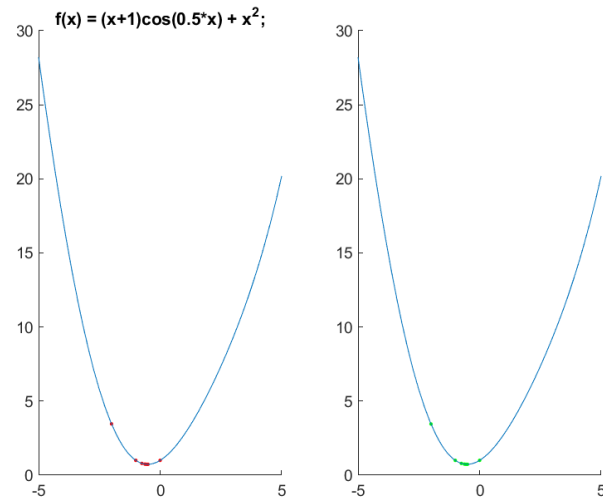


Figure 13: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

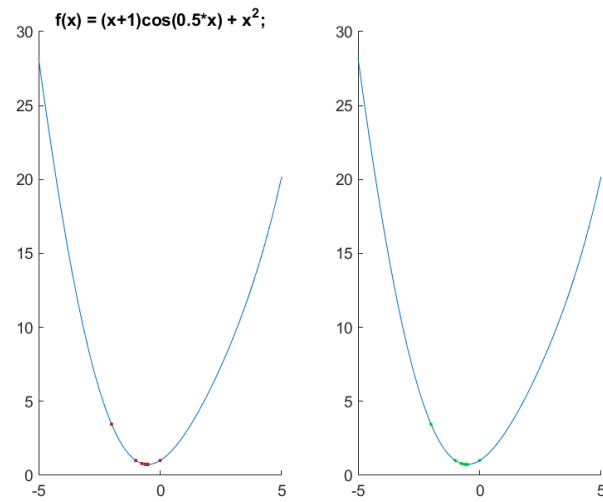


Figure 14: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

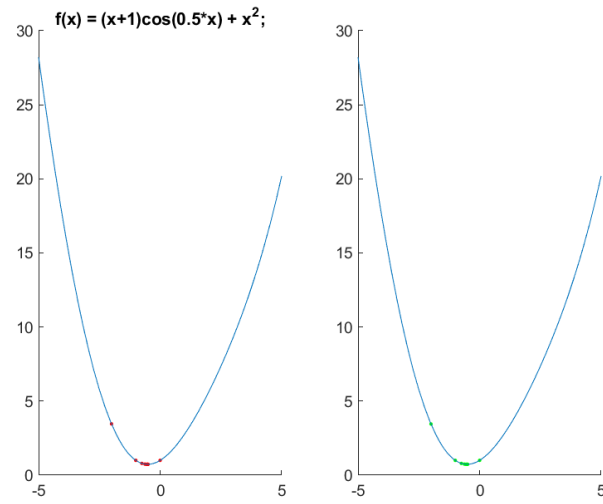


Figure 15: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

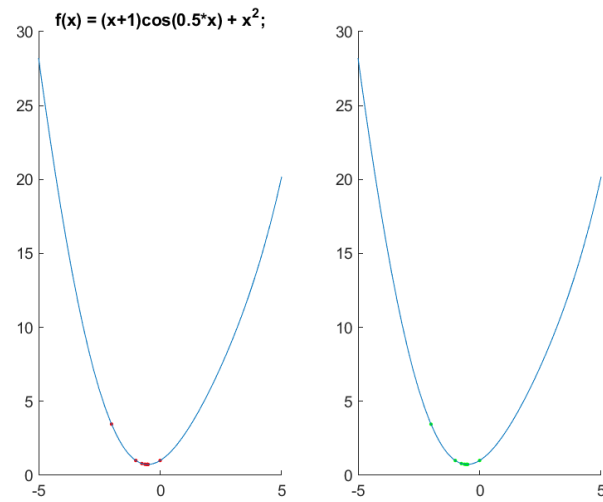


Figure 16: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

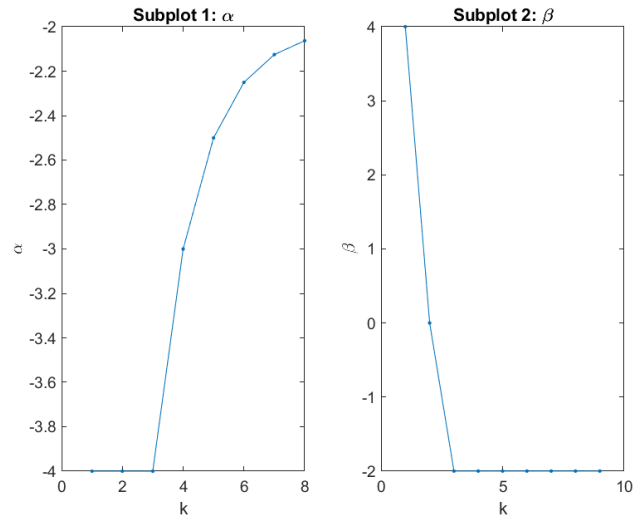


Figure 17: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

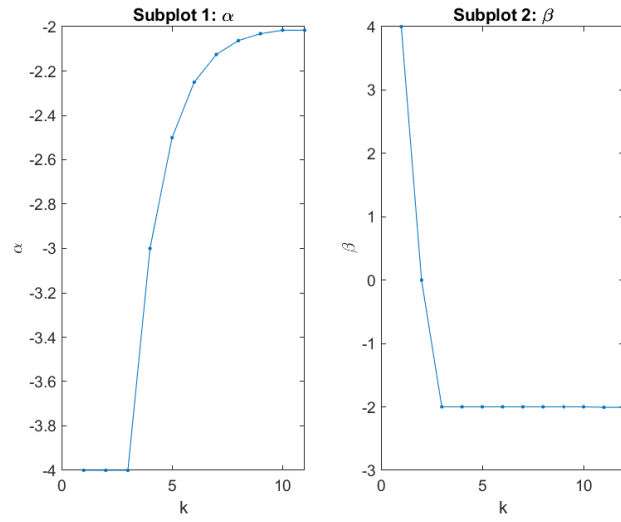


Figure 18: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

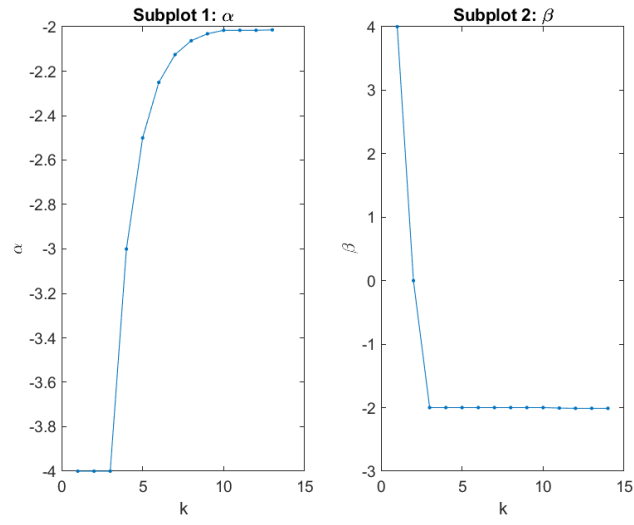


Figure 19: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

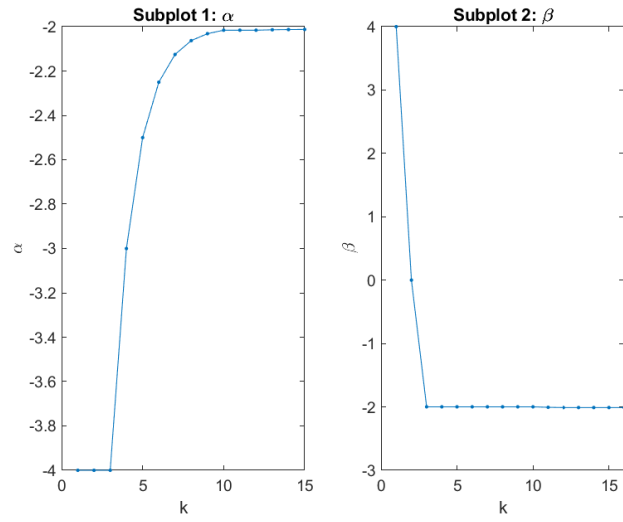


Figure 20: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

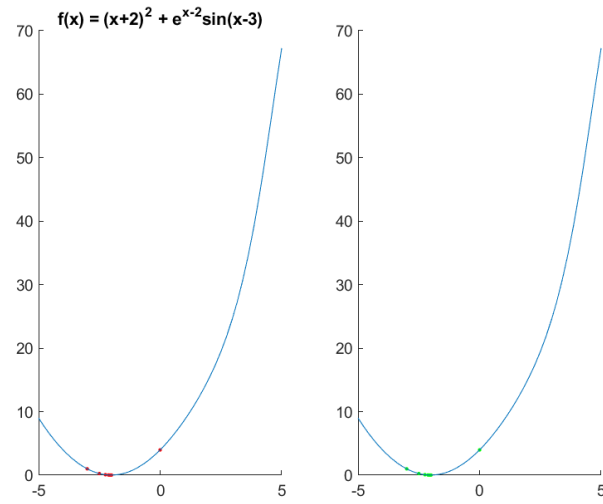


Figure 21: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

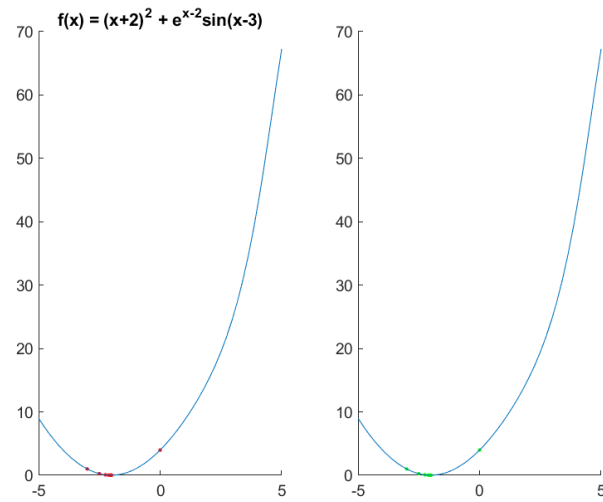


Figure 22: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

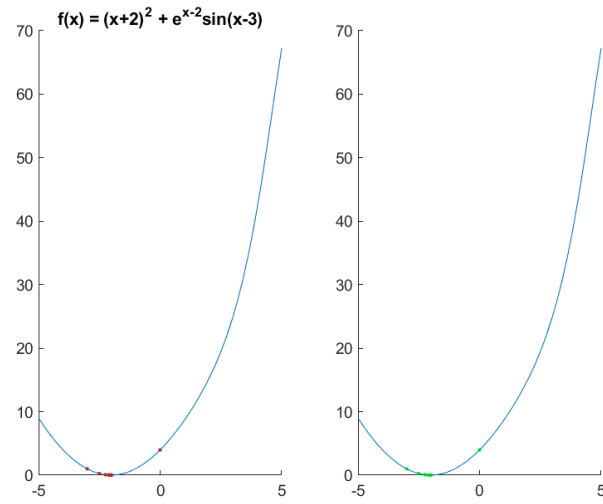


Figure 23: Για  $l = 0.005$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

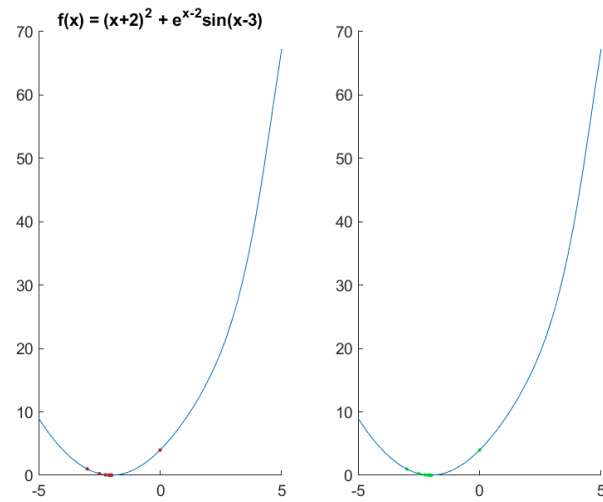


Figure 24: Για  $l = 0.0025$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$



### 3 Αλγόριθμος του Χρυσού Τομέα Χωρίς Χρήση Παραγώγων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα χωρίς χρήση παραγώγων. Για την ανάλυση έχει επιλεχτεί ένα πλήθος από  $l \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ . και έχουμε βρει τα διαστήματα που βρίσκεται το ελάχιστο για κάθε τιμή του  $l$  ενώ και τον χρόνο εκτέλεσης. Σύμφωνα με την θεωρητική ανάλυση του αλγορίθμου, το βέλτιστο  $\gamma$  είναι 0.618. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους δύο επόμενους πίνακες ενώ παρακάτω βρίσκονται τα γραφήματα για τις μεταβολές των  $\alpha_k, \beta_k$  και για τα σημεία που επιλέχτηκαν από τον αλγόριθμο. Για την ανάλυση έχει χρησιμοποιηθεί το εργαλείο MATLAB, ενώ όλη η διαδικασία μπορεί να βρεθεί στα αρχεία πηγαίου κώδικα Task2.m και GoldenSection.m.

$l$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	0.012709	0.0086501	0.0070965	0.0039617	0.0038557
$f_2(x)$	0.0087592	0.0040953	0.0038468	0.006494	0.0047079
$f_3(x)$	0.0058007	0.0045827	0.0034679	0.0033929	0.0032207

Table 3: Runtime of golden section search

l	0.1	0.01	0.001	
$f_1(x)$	[3.1331, 3.1426]	[3.1403, 3.1412]	[3.1406, 3.1407]	
$f_2(x)$	[-0.5174, -0.50785]	[-0.51514, -0.51424]	[-0.51448, -0.51441]	
$f_3(x)$	[-2.0156, -2.0061]	[-2.0119, -2.0111]	[-2.0113, -2.0113]	

Table 4: Intervals where min is part 1

l	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	[3.1406, 3.1406]	[3.1406, 3.1406]
$f_2(x)$	[-0.51442, -0.51442]	[-0.51442, -0.51442]
$f_3(x)$	[-2.0113, -2.0113]	[-2.0113, -2.0113]

Table 5: Intervals where min is part 2

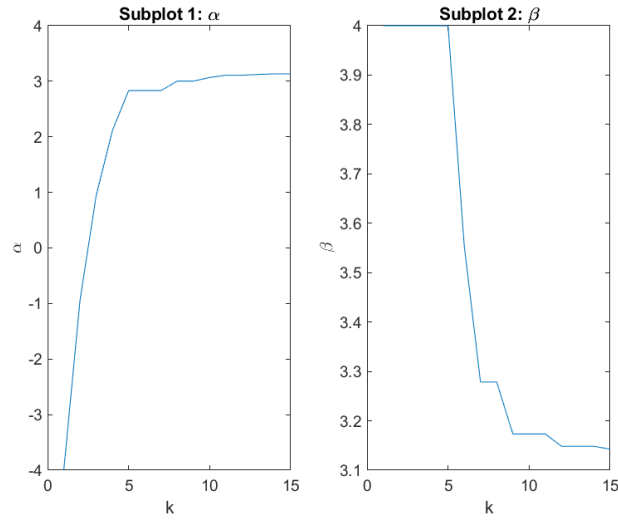


Figure 25: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

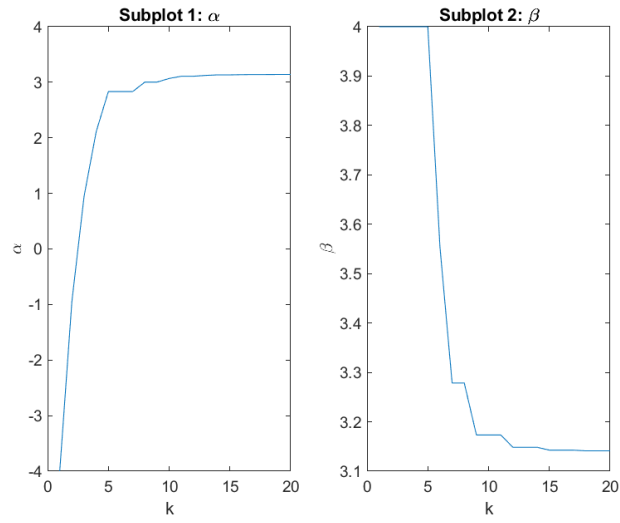


Figure 26: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

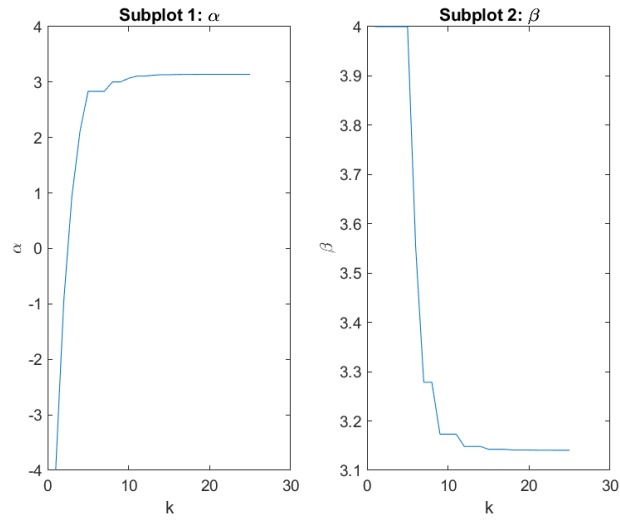


Figure 27: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

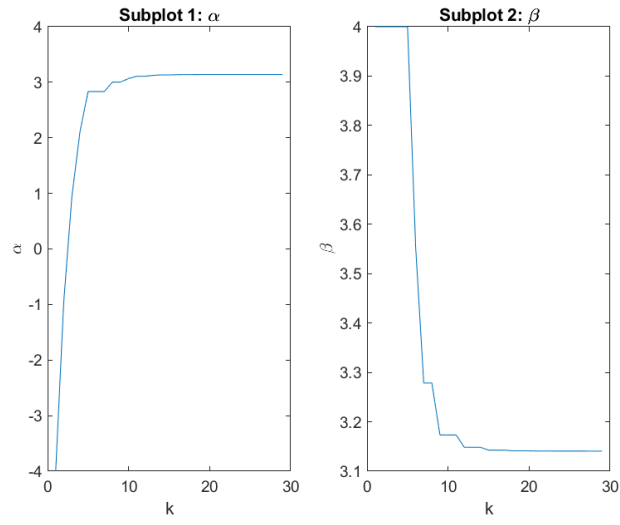


Figure 28: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

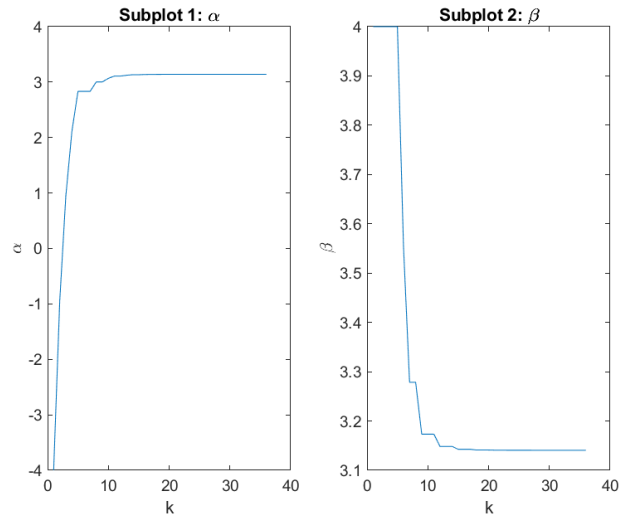


Figure 29: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

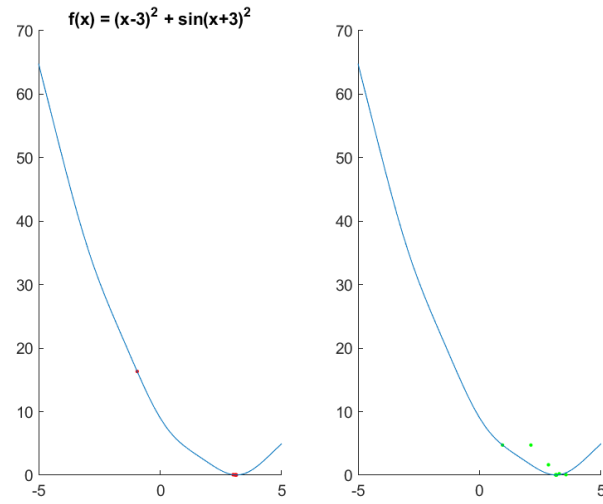


Figure 30: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

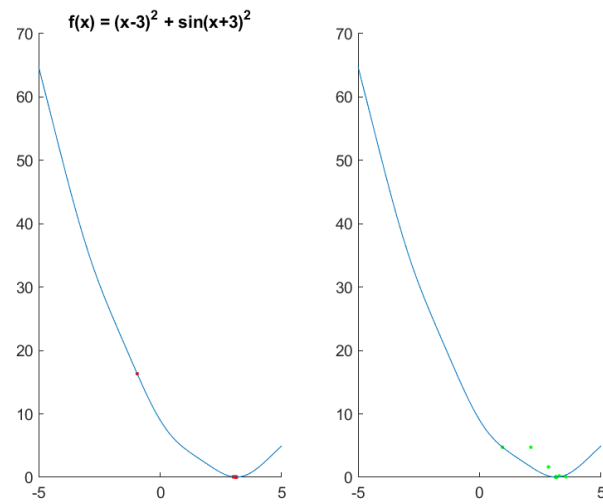


Figure 31: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

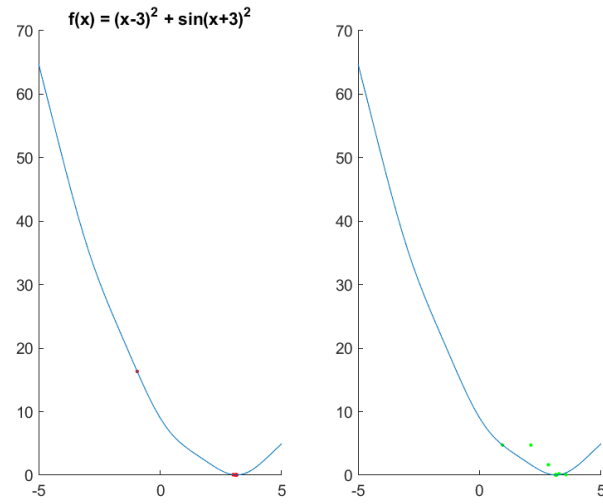


Figure 32: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

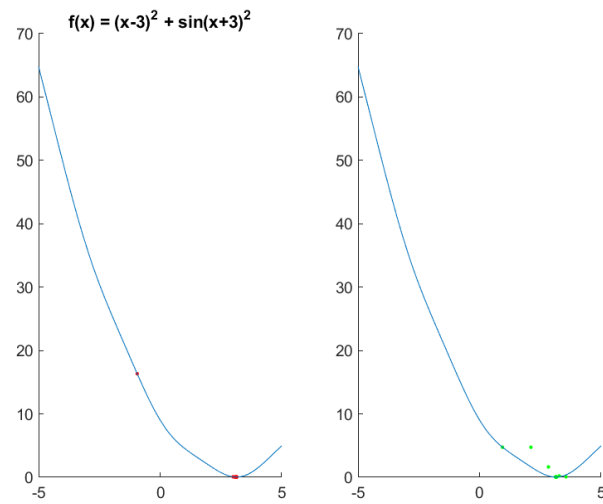


Figure 33: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

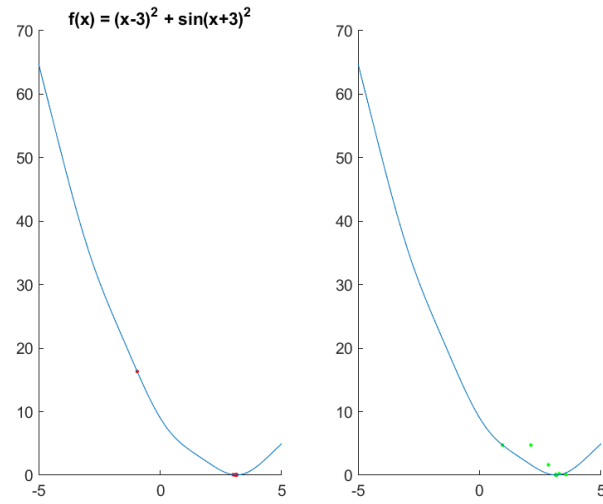


Figure 34: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

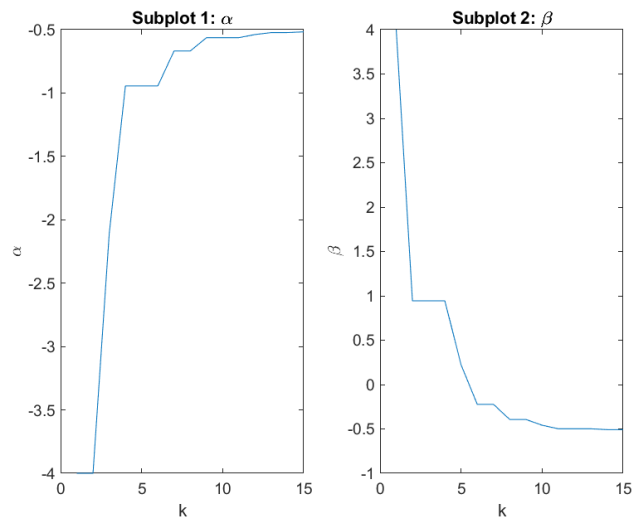


Figure 35: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

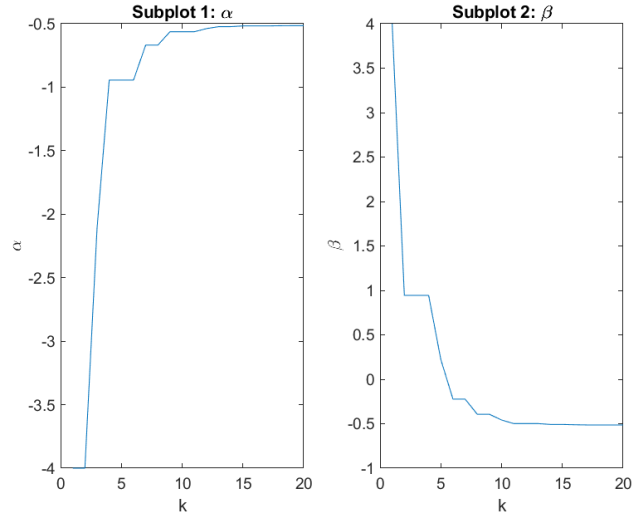


Figure 36: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

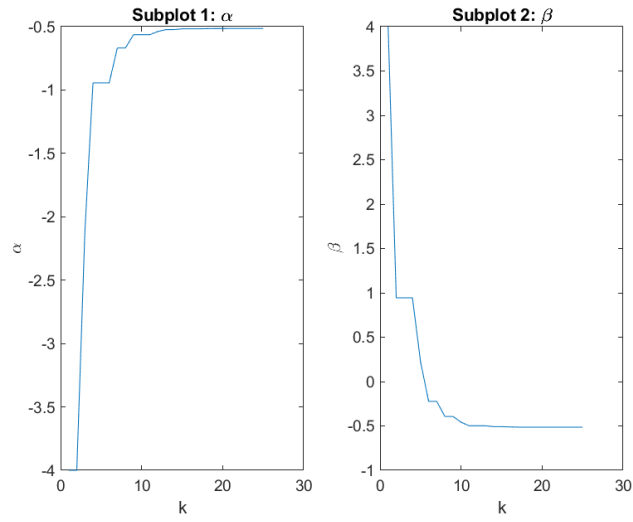


Figure 37: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$



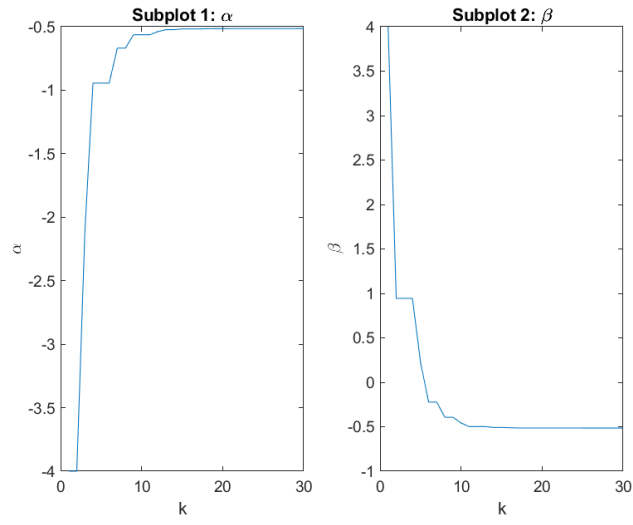


Figure 38: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

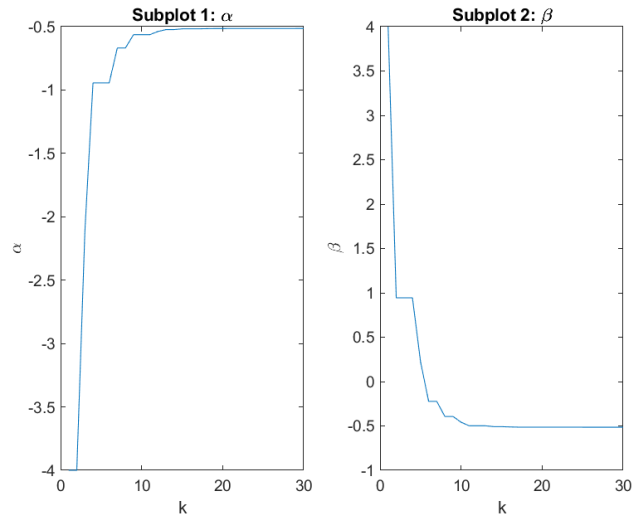


Figure 39: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

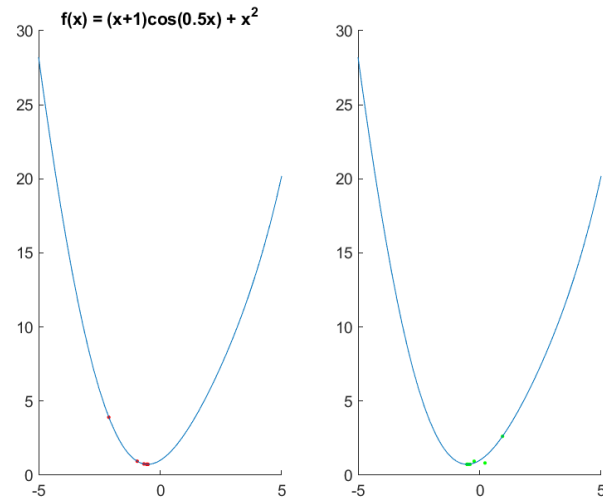


Figure 40: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

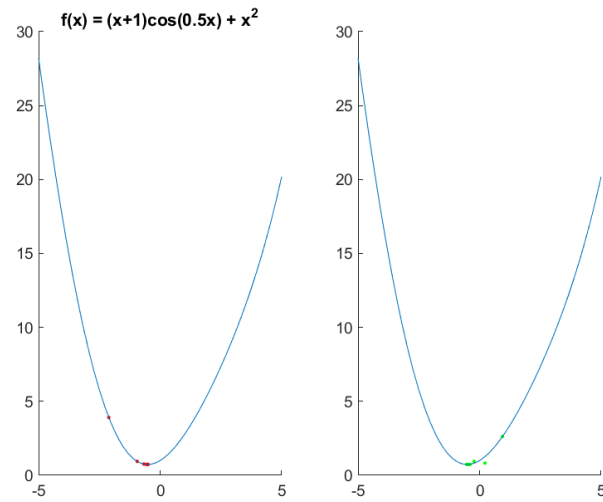


Figure 41: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

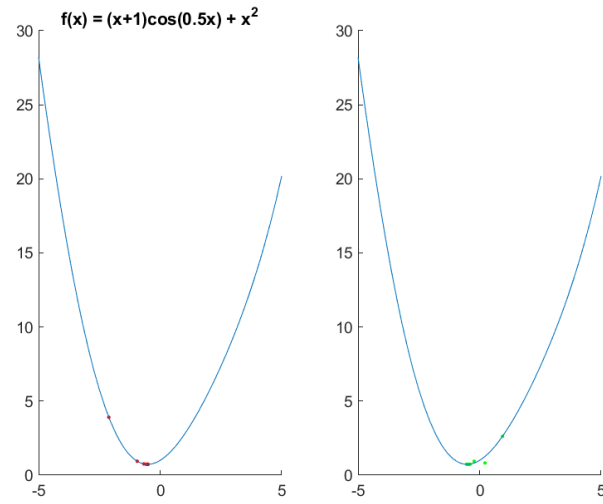


Figure 42: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

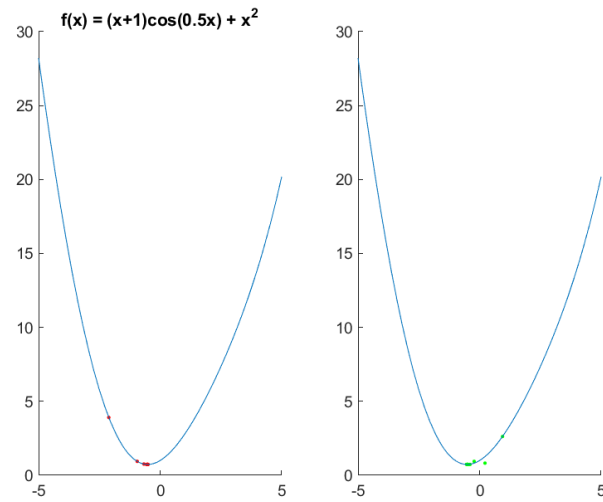


Figure 43: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

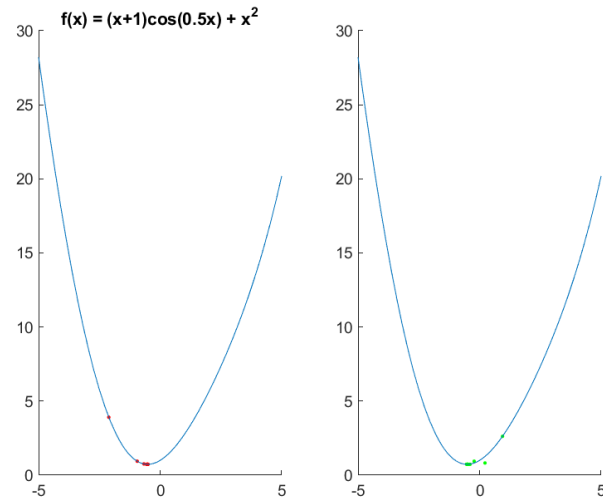


Figure 44: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

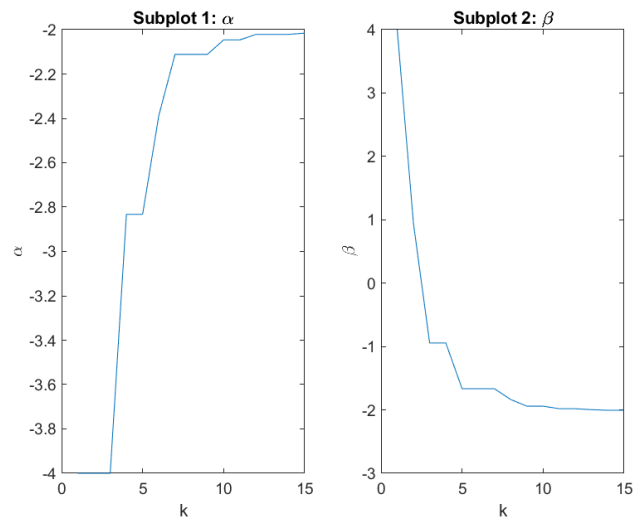


Figure 45: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

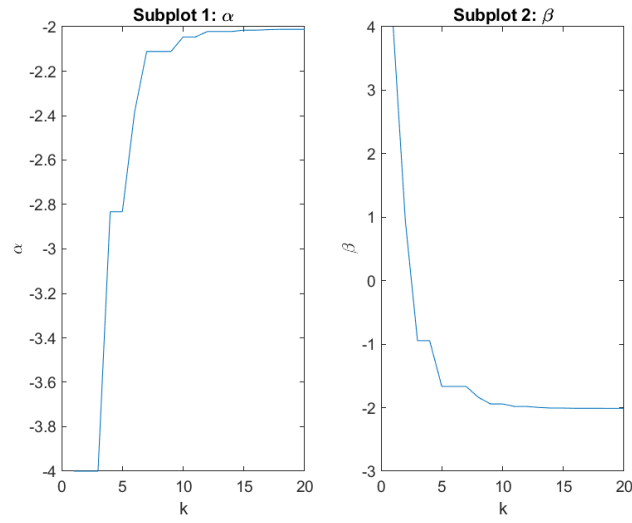


Figure 46: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

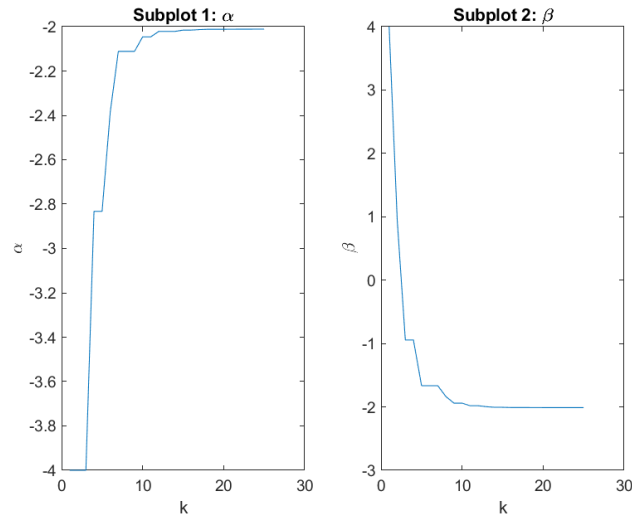


Figure 47: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

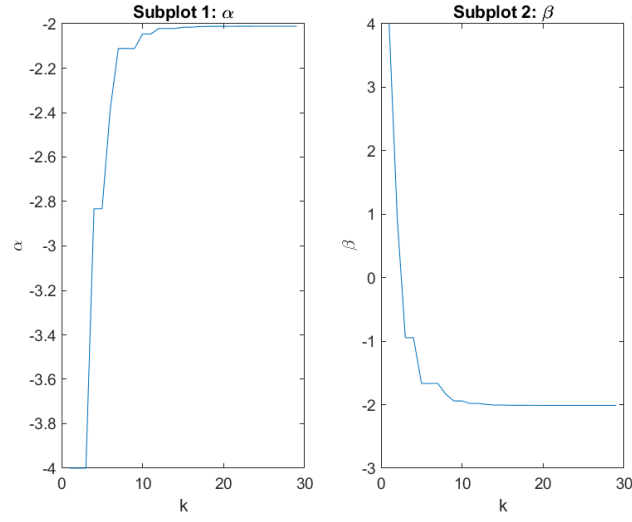


Figure 48: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

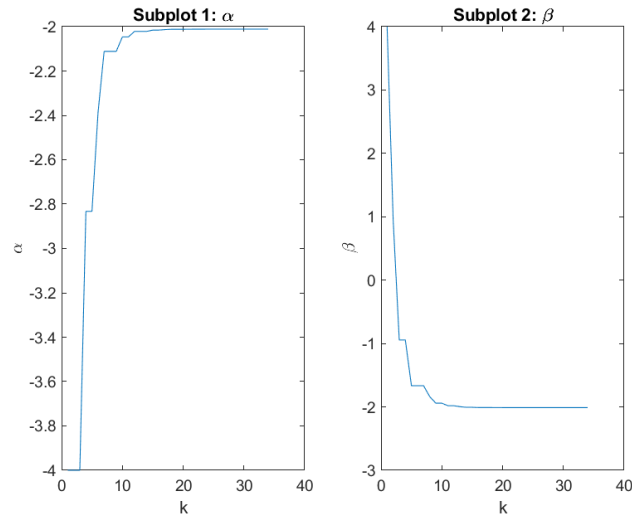


Figure 49: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

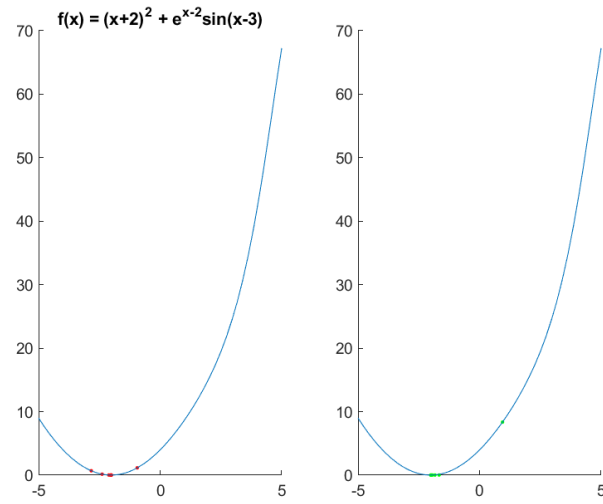


Figure 50: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

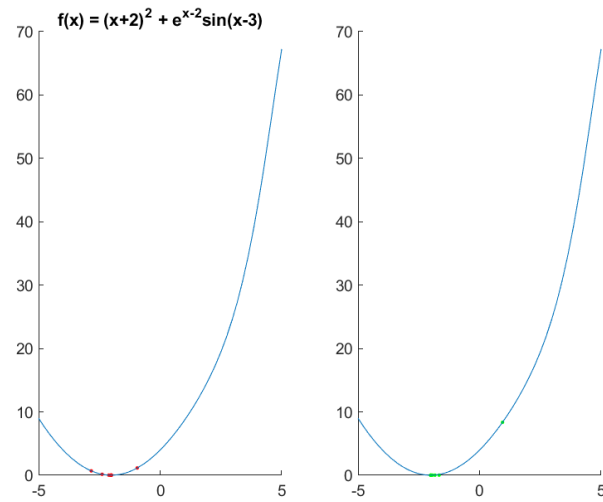


Figure 51: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

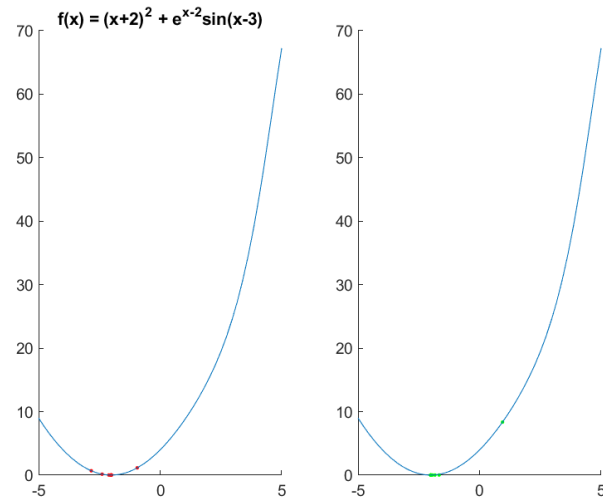


Figure 52: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

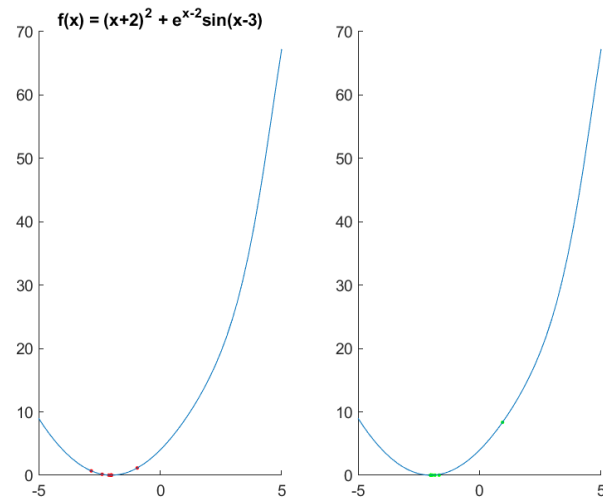


Figure 53: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$



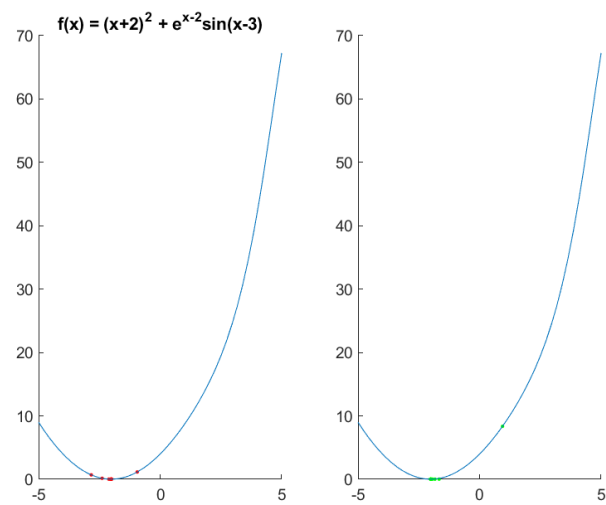


Figure 54: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

## 4 Η Μέθοδος Fibonacci

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε την μέθοδο Fibonacci. Αυτός ο αλγόριθμος είναι μία βελτιωμένη έκδοση το αλγορίθμου χρυσού τομέα αφού χρησιμοποιεί τον λόγο διαδοχικών αριθμών Fibonacci. Για την παραγωγή αριθμών Fibonacci έχει χρησιμοποιηθεί ο γνωστός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού με πολυπλοκότητα  $O(n)$ . Η υλοποίησή του βρίσκεται στο αρχείο πηγαίου κώδικα *fib.m* ενώ η υπόλοιπη διαδικασία βρίσκεται στα αρχεία πηγαίου κώδικα *fibopt.m* και *Task3.m*. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι όμοια με την προηγούμενη.

l	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	0.0048404	0.0004862	0.000206	0.0001749	0.0001606
$f_2(x)$	0.0006947	0.0001628	0.0001659	0.0001997	0.0002042
$f_3(x)$	0.0005502	0.0002213	0.0002398	0.0003871	0.0002219

Table 6: Runtime of Fibonacci method search

l	0.1	0.01	0.001	
$f_1(x)$	[3.1327 3.1489]	[3.1398, 3.1412]	[3.1406, 3.1407]	
$f_2(x)$	[-0.5228, -0.50659]	[-0.51526, -0.51379]	[-0.51453, -0.5144]	
$f_3(x)$	[-2.0223, -2.0061]	[-2.0121, -2.0106]	[-2.0114, -2.0113]	

Table 7: Intervals where min is part 1

l	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	[3.1406, 3.1406]	[3.1406, 3.1406]
$f_2(x)$	[-0.51444, -0.51442]	[-0.51443, -0.51443]
$f_3(x)$	[-2.0113, -2.0113]	[-2.0113, -2.0113]

Table 8: Intervals where min is part 2

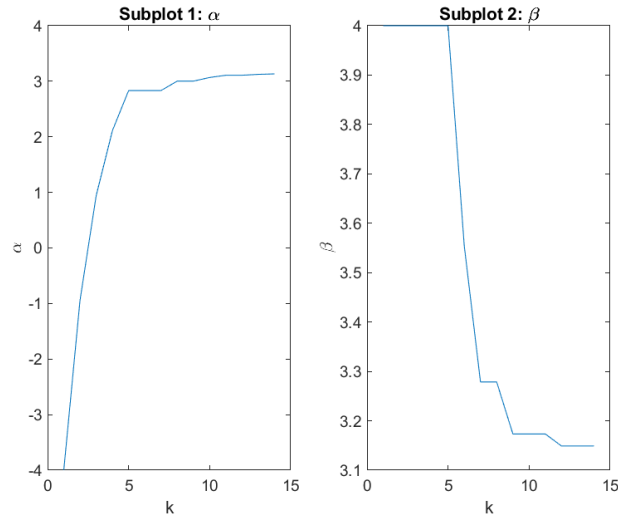


Figure 55: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

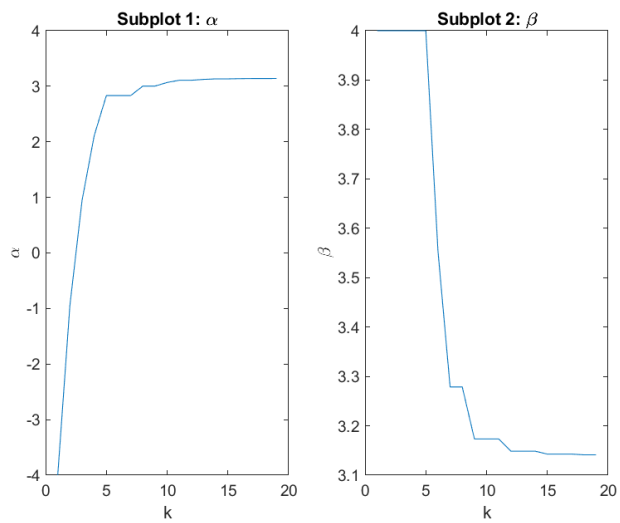


Figure 56: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

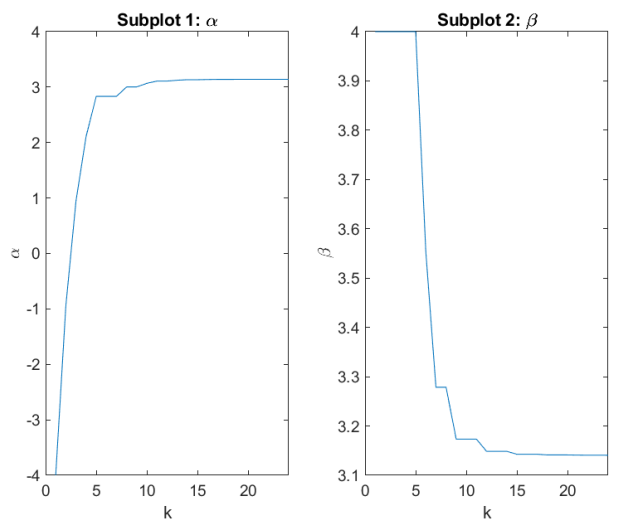


Figure 57: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

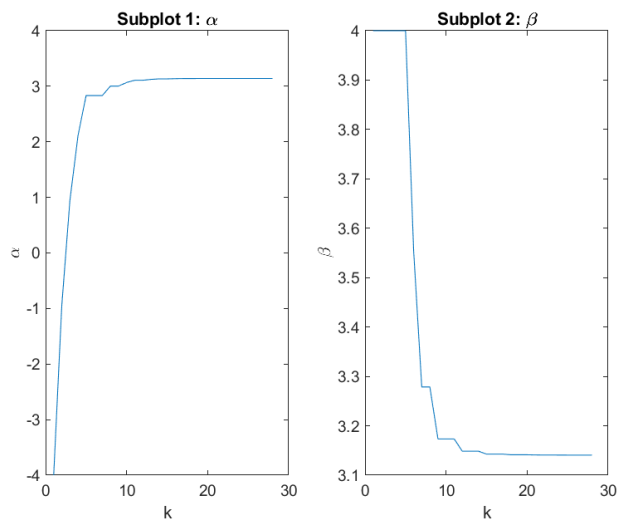


Figure 58: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

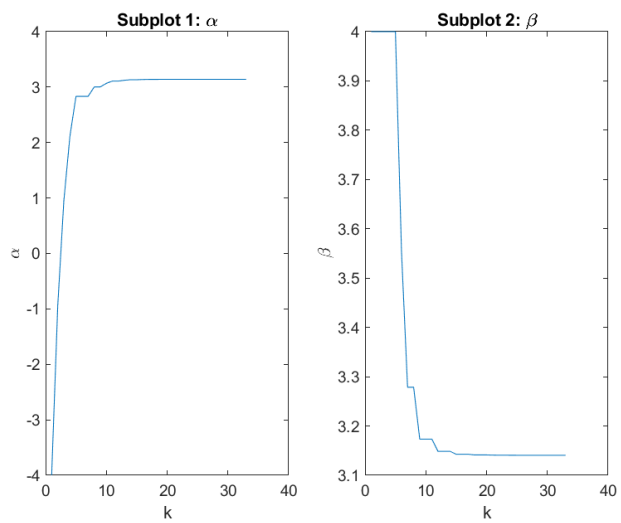


Figure 59: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

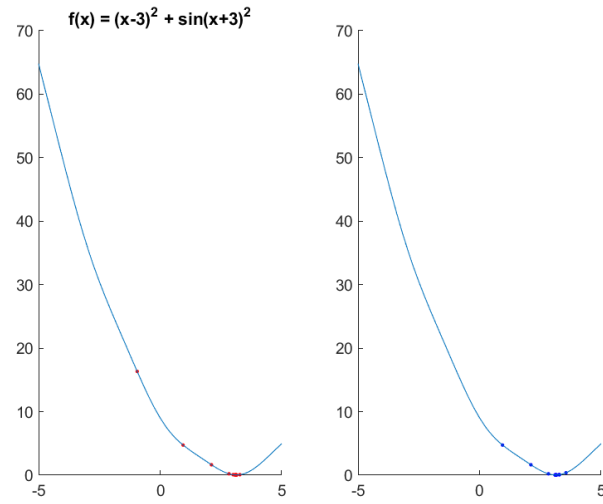


Figure 60: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

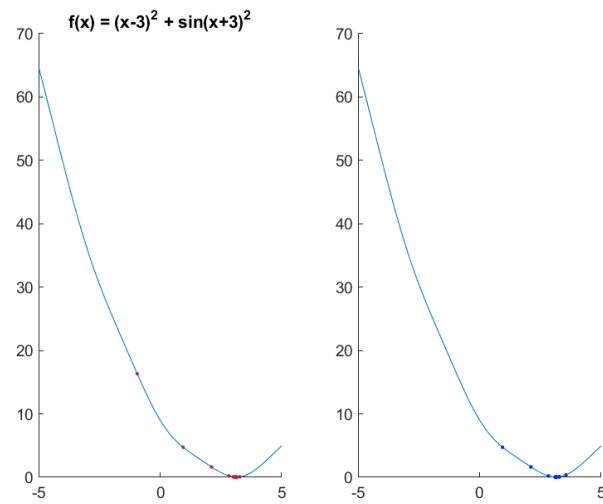


Figure 61: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

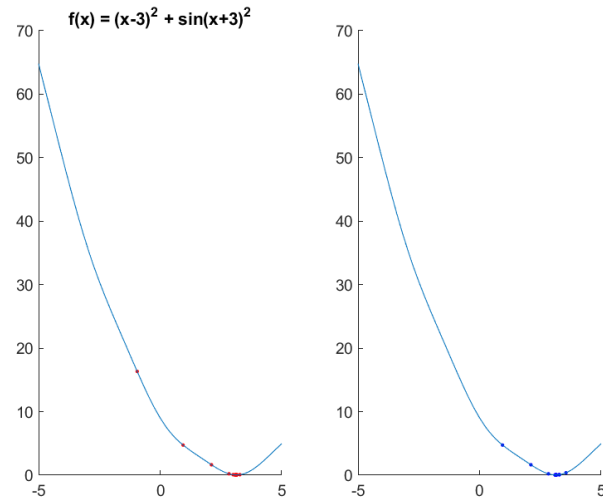


Figure 62: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

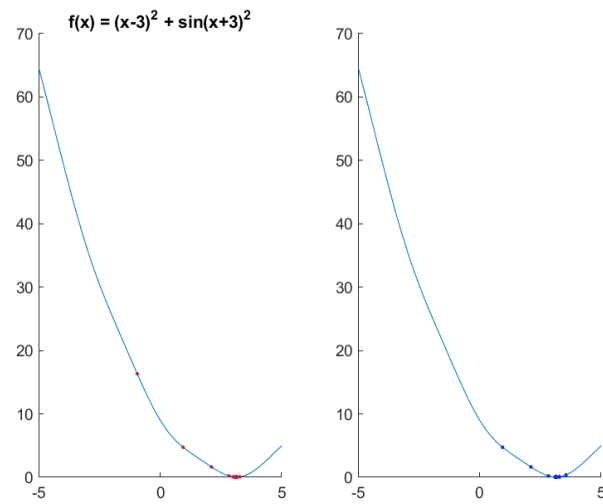


Figure 63: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

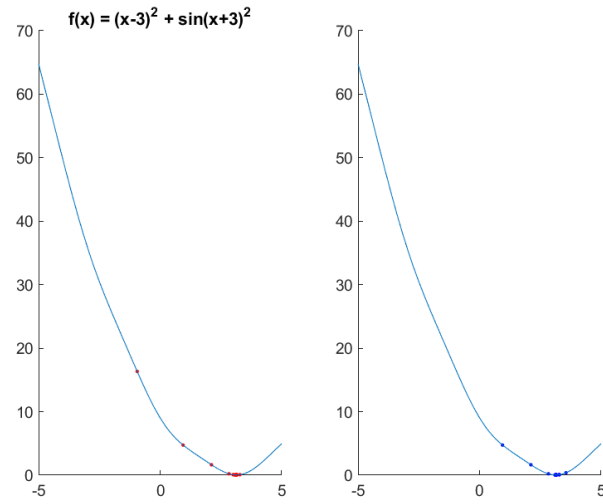


Figure 64: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

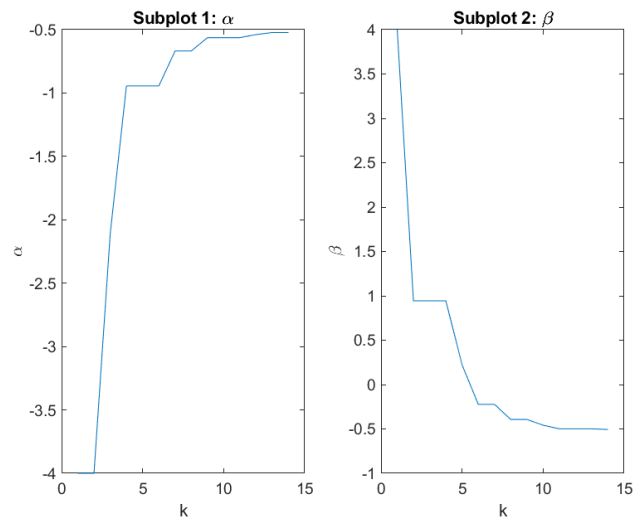


Figure 65: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$



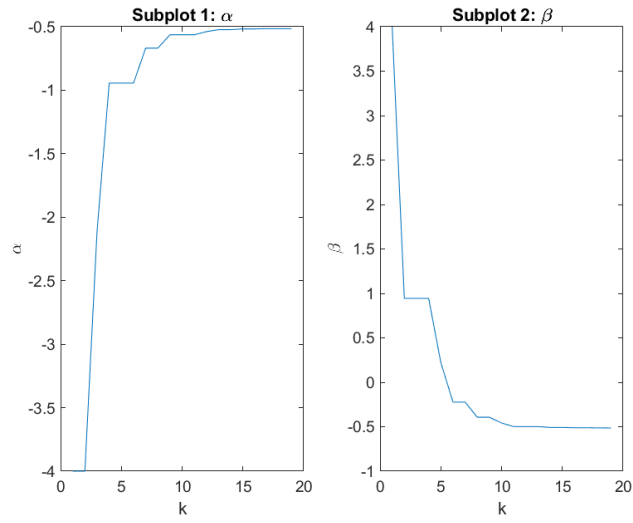


Figure 66: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

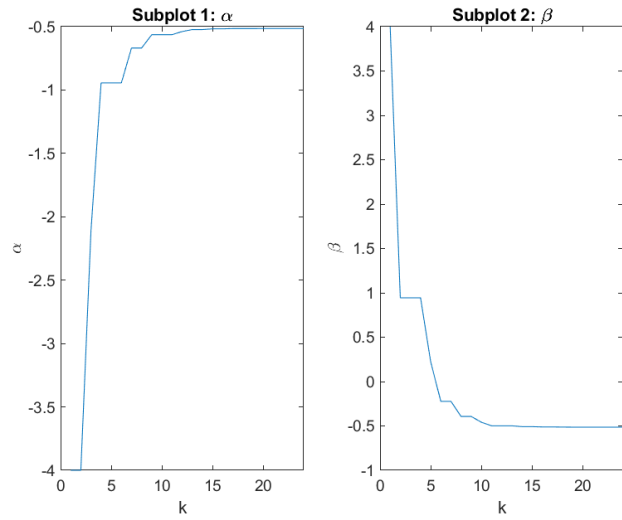


Figure 67: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

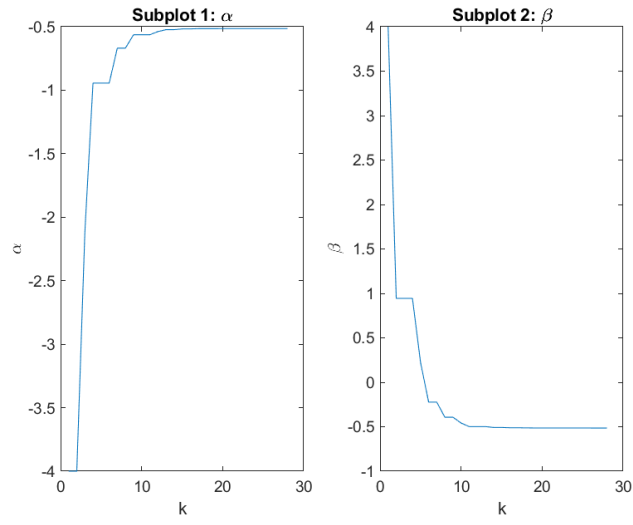


Figure 68: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

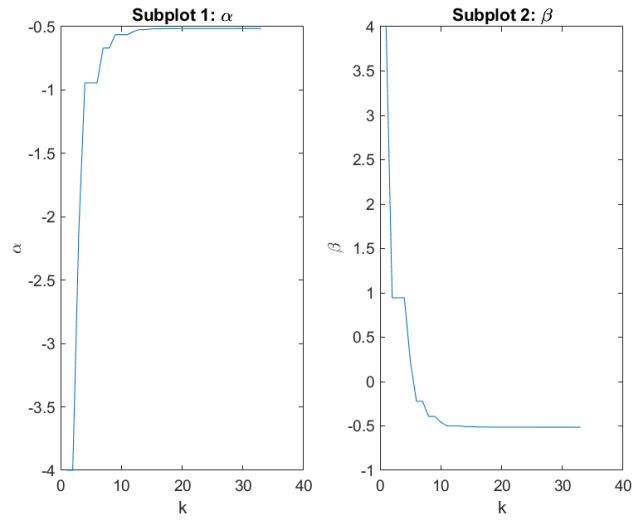


Figure 69: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

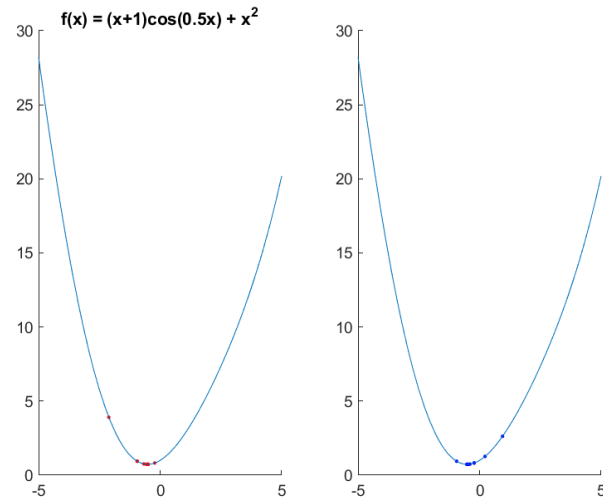


Figure 70: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

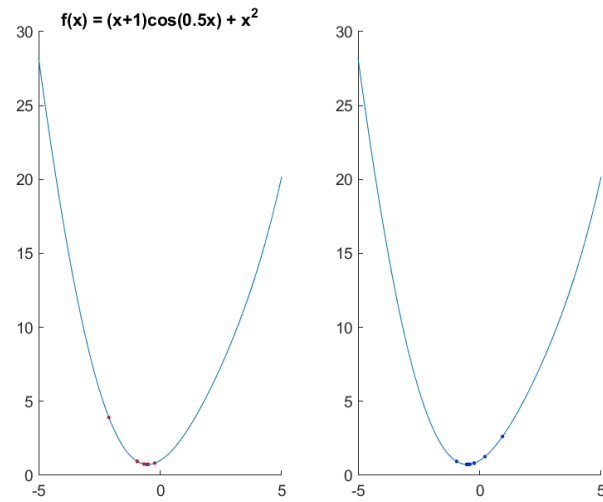


Figure 71: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

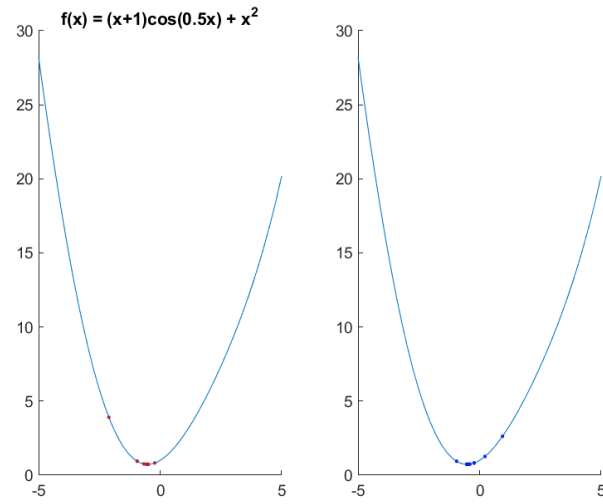


Figure 72: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

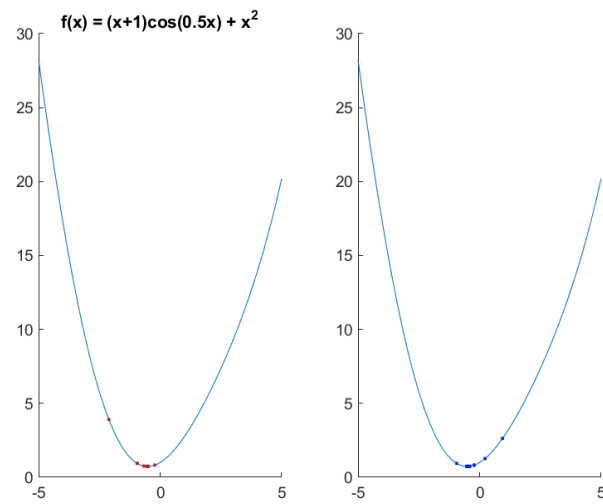


Figure 73: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

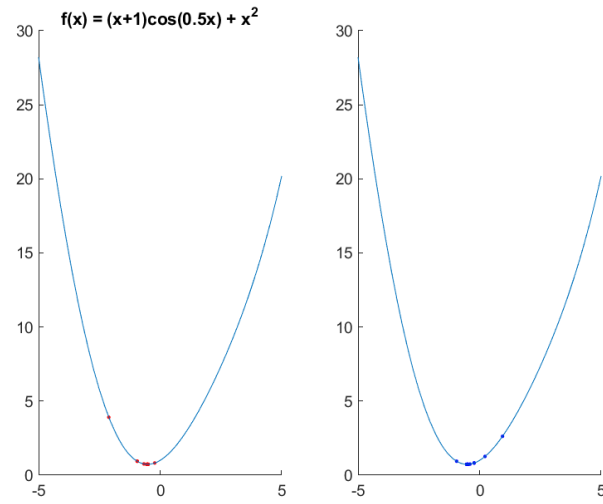


Figure 74: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

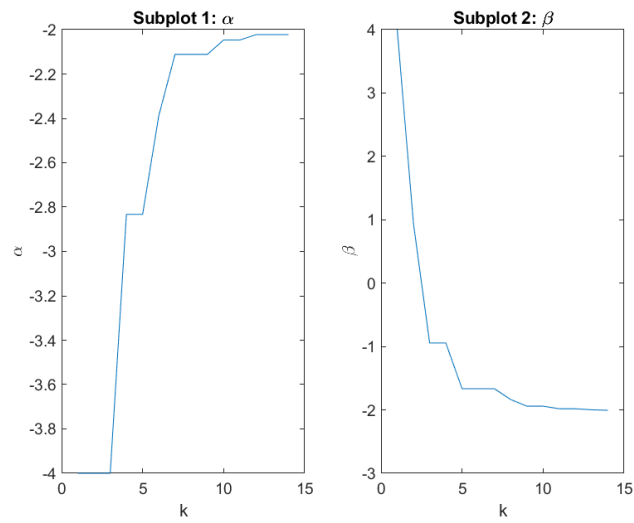


Figure 75: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

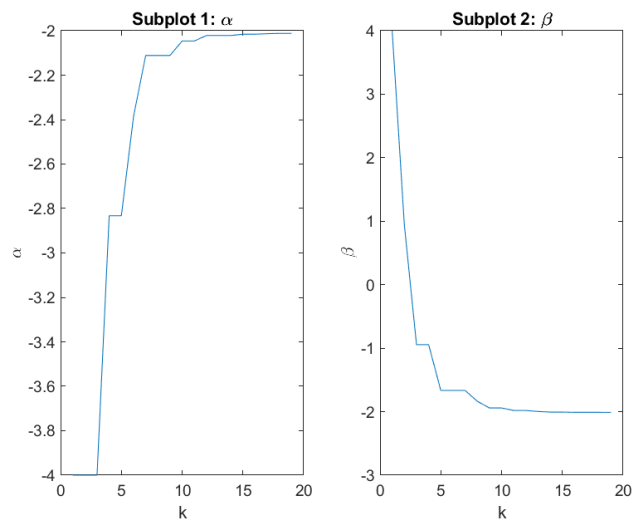


Figure 76: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

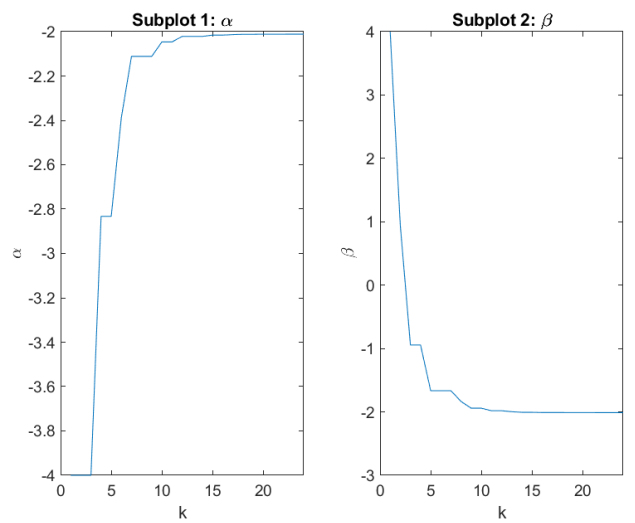


Figure 77: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

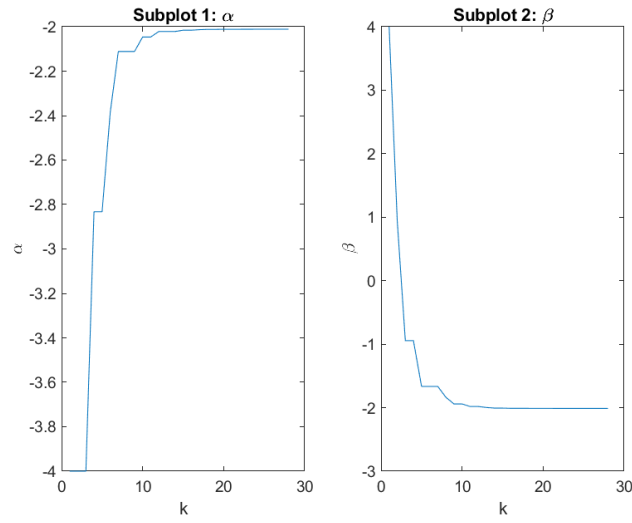


Figure 78: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

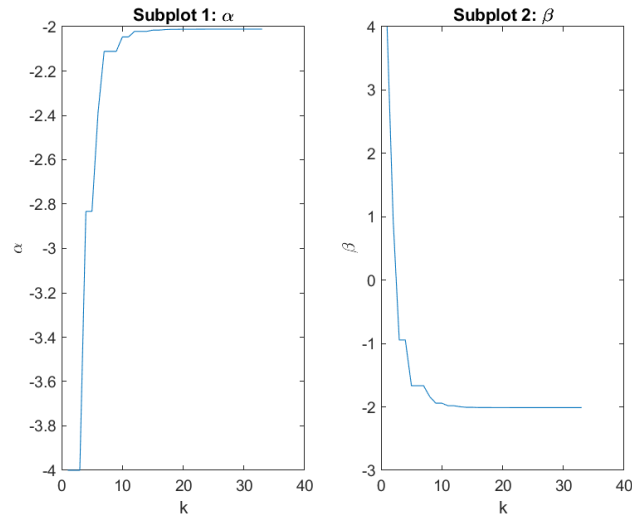


Figure 79: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

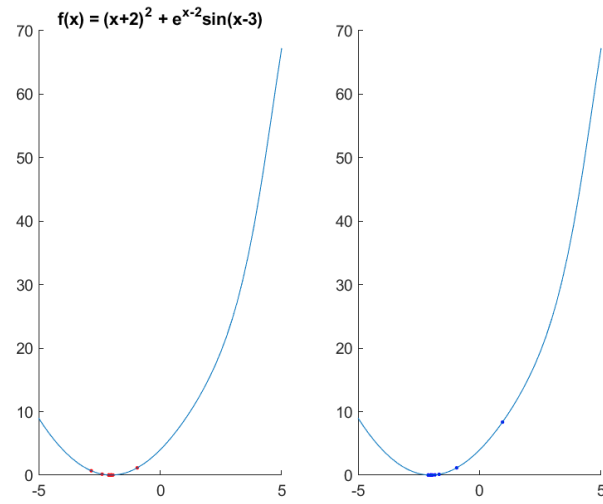


Figure 80: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

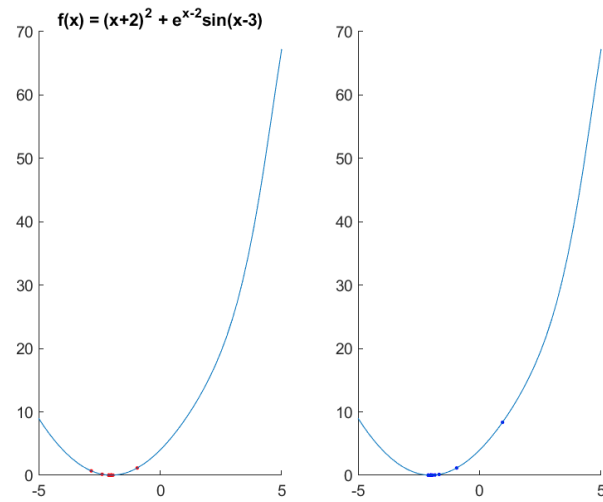


Figure 81: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$



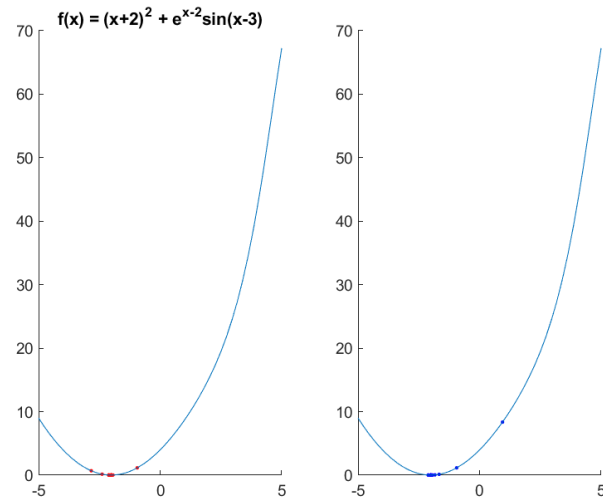


Figure 82: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

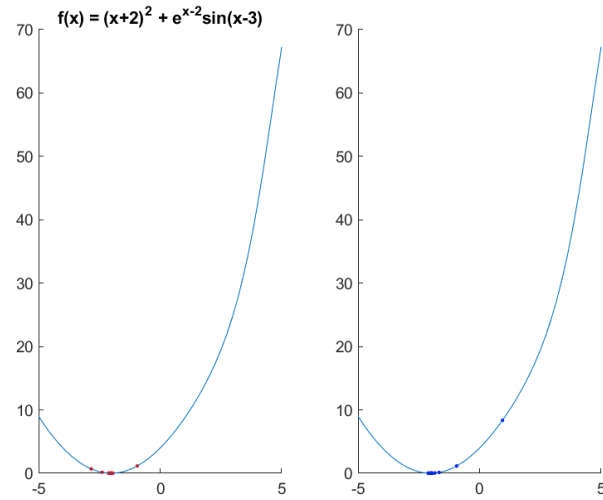


Figure 83: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

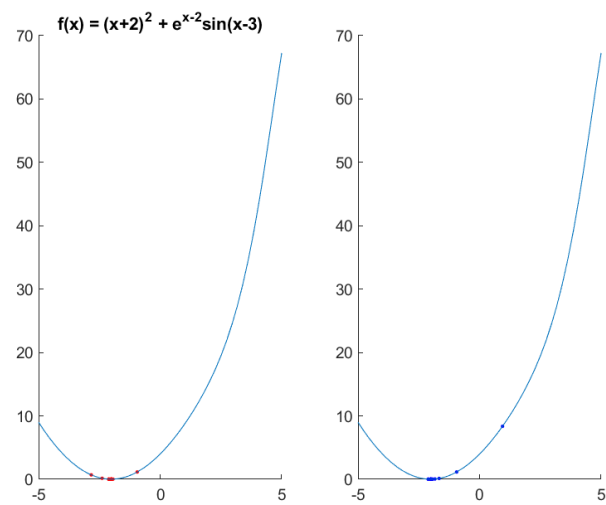


Figure 84: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

## 5 Η Μέθοδος Χρυσού Τομέα με χρήση Παραγώγων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο του Χρυσού Τομέα με χρήση παραγώγων. Αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την παράγωγο της  $f$  για να εντοπίσει την παράγωγο. Θα ακολουθήσουμε την ίδια ανάλυση για να δούμε τις μεταβολές του διαστήματος αναζήτησης και τα σημεία της  $f$  που επέλεξε ο αλγόριθμος

$l$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	0.4026	0.097693	0.093029	0.081186	0.11959
$f_2(x)$	0.11328	0.076842	0.08379	0.082851	0.077935
$f_3(x)$	0.084539	0.077015	0.074237	0.076592	0.075623

Table 9: Runtime of Golden Section search using derivatives

l	0.1	0.01	0.001	
$f_1(x)$	[3.1406, 3.1484]	[3.1406, 3.1416]	[3.1406, 3.1407]	
$f_2(x)$	[-0.51563, -0.50781]	[-0.51465, -0.51367]	[-0.51447, -0.5144]	
$f_3(x)$	[-2.0156, -2.0078]	[-2.0117, -2.0107]	[-2.0114, -2.0113]	

Table 10: Intervals where min is part 1

l	0.0001	0.00001
$f_1(x)$	[3.1406, 3.1406]	[3.1406, 3.1406]
$f_2(x)$	[-0.51443, -0.51443]	[-0.51443, -0.51443]
$f_3(x)$	[-2.0113, -2.0113]	[-2.0113, -2.0113]

Table 11: Intervals where min is part 2

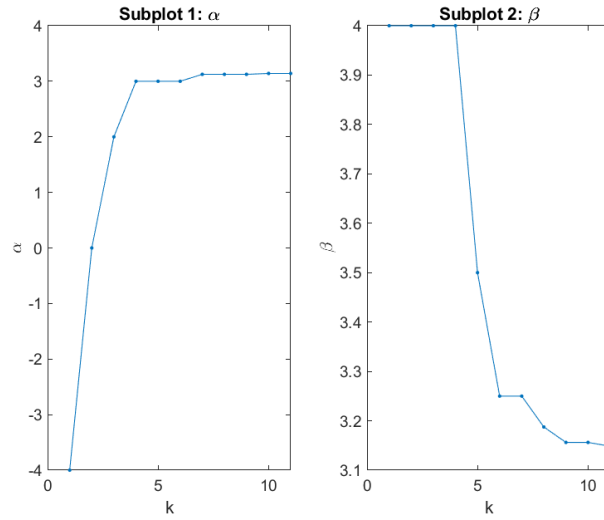


Figure 85: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

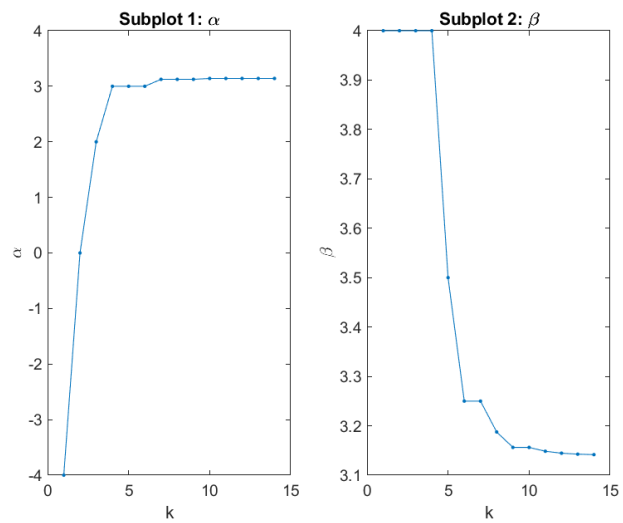


Figure 86: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

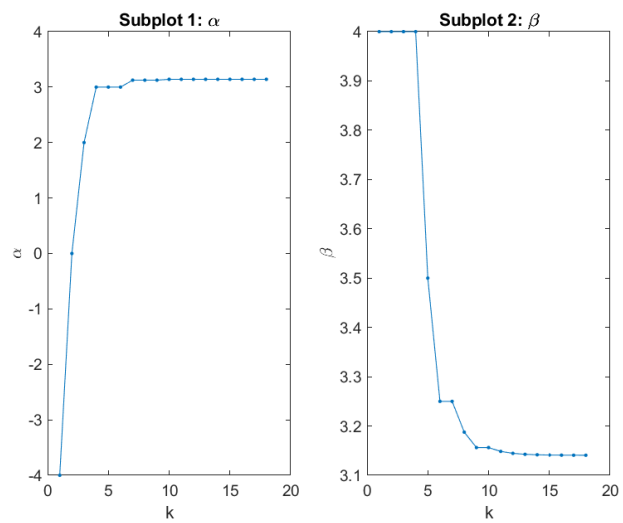


Figure 87: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

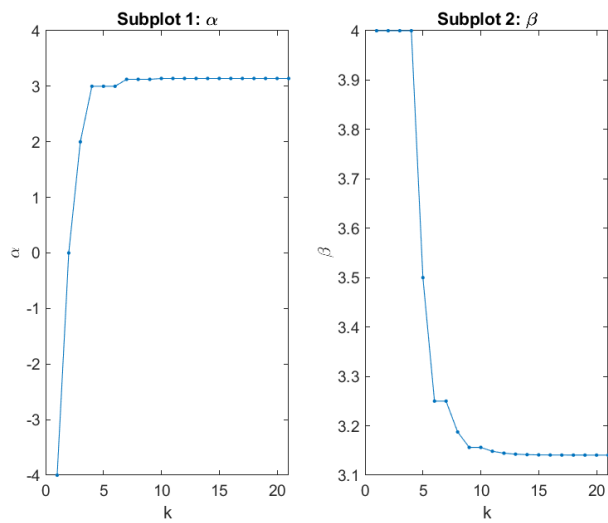


Figure 88: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

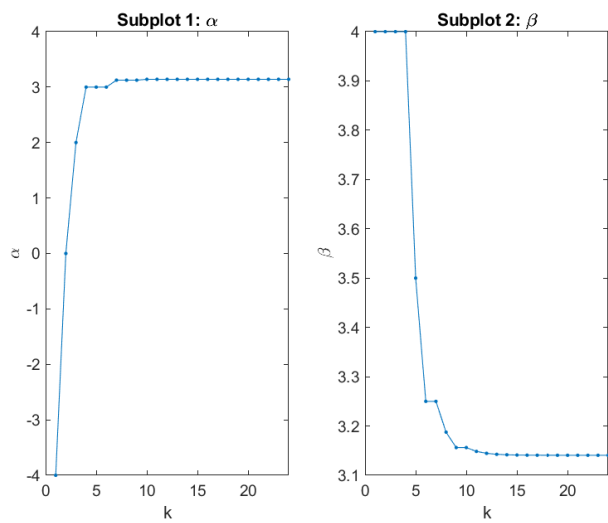


Figure 89: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_1$

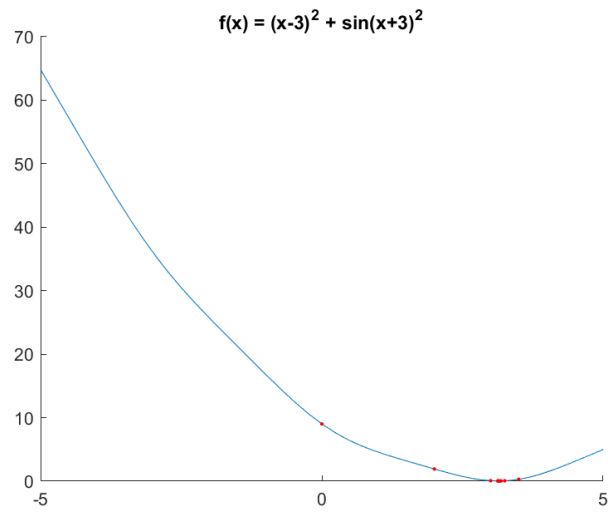


Figure 90: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

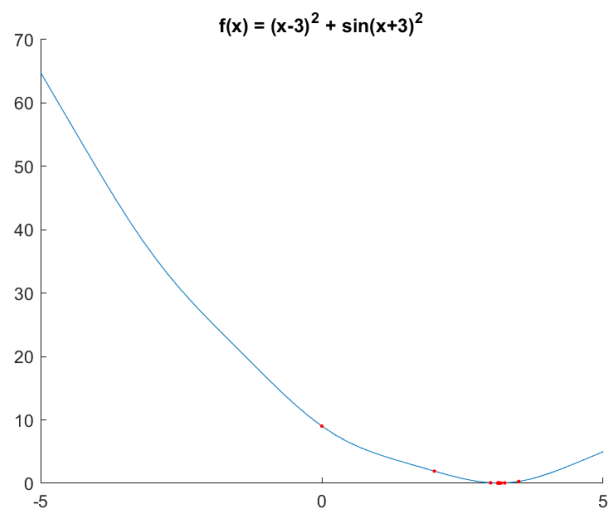


Figure 91: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

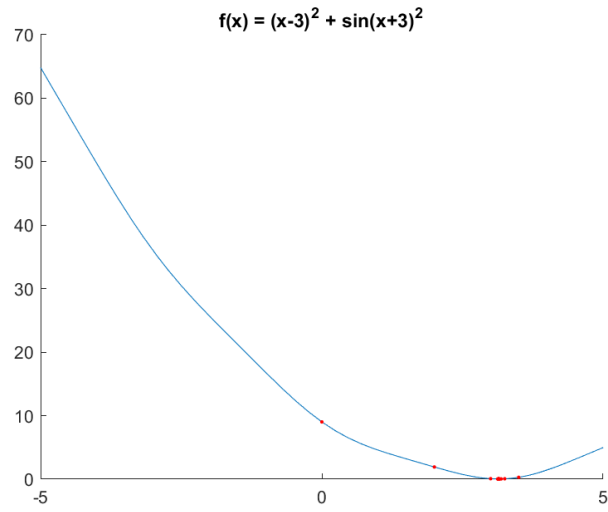


Figure 92: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

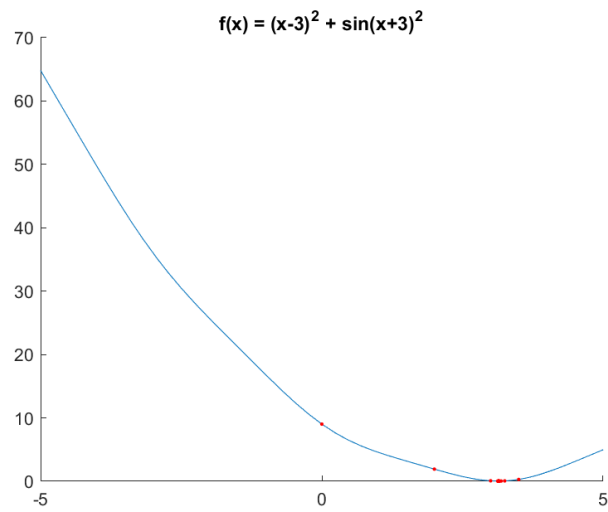


Figure 93: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$



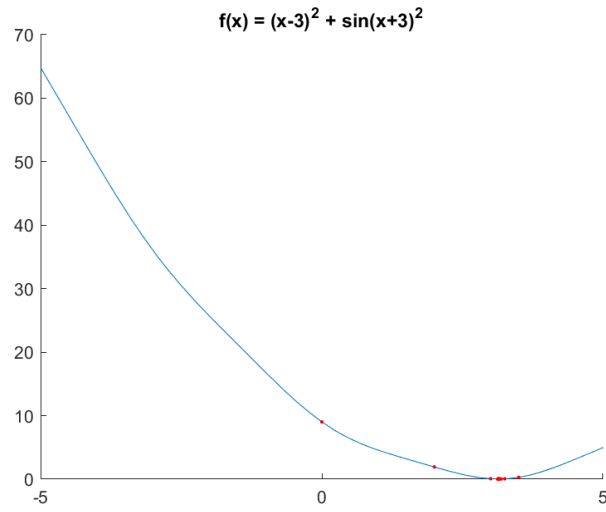


Figure 94: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_1$

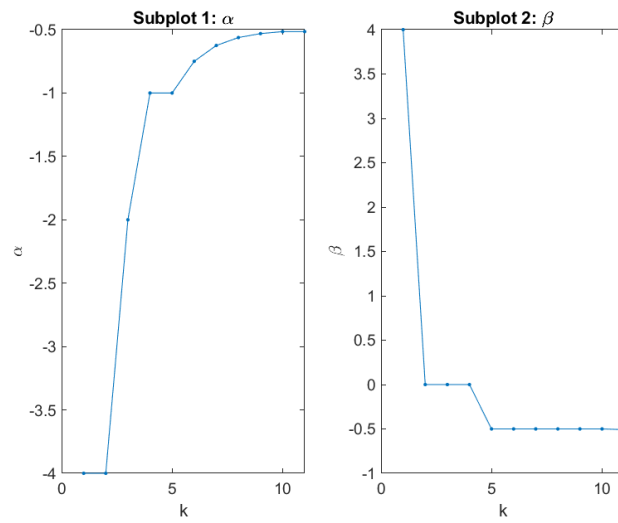


Figure 95: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

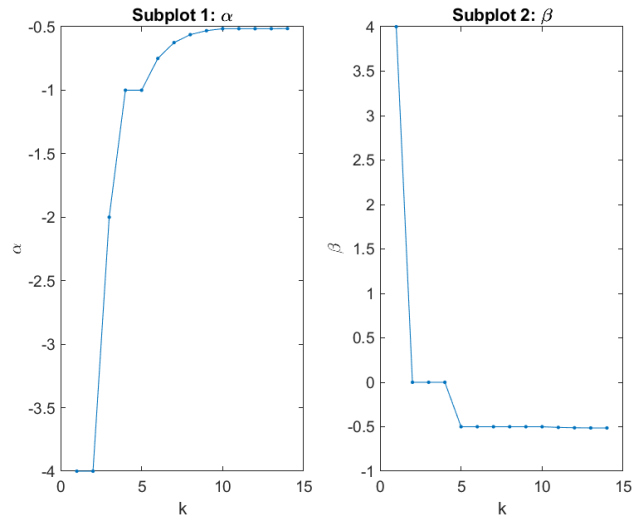


Figure 96: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

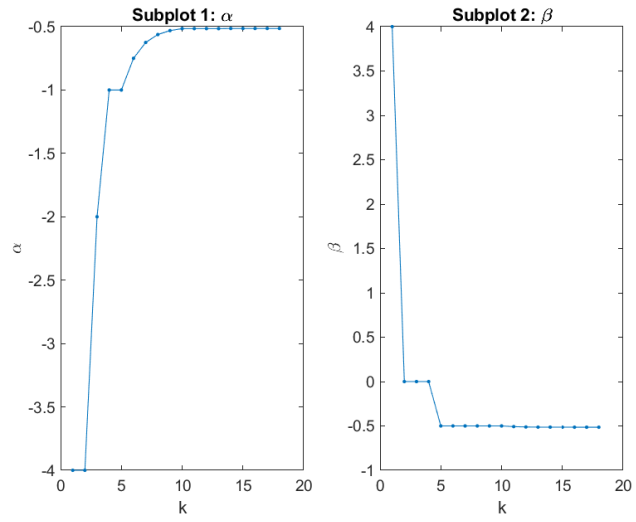


Figure 97: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

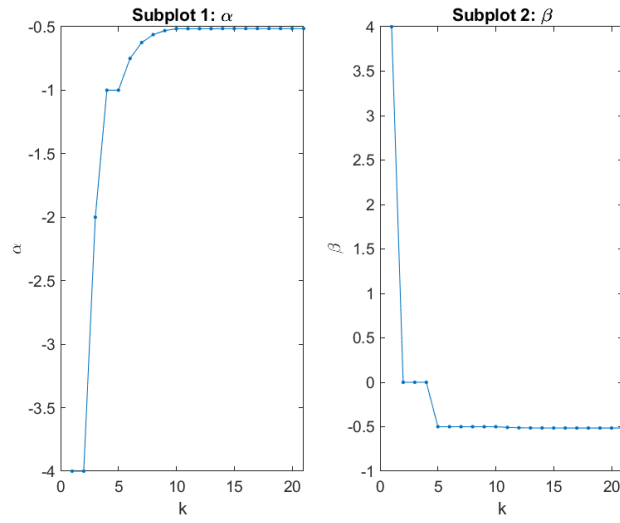


Figure 98: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

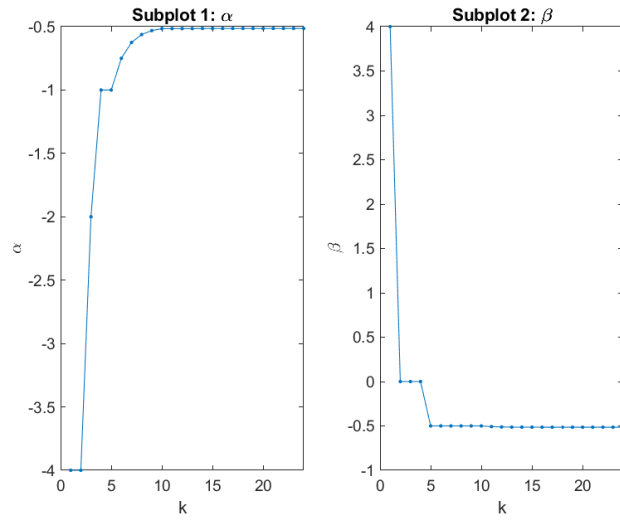


Figure 99: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_2$

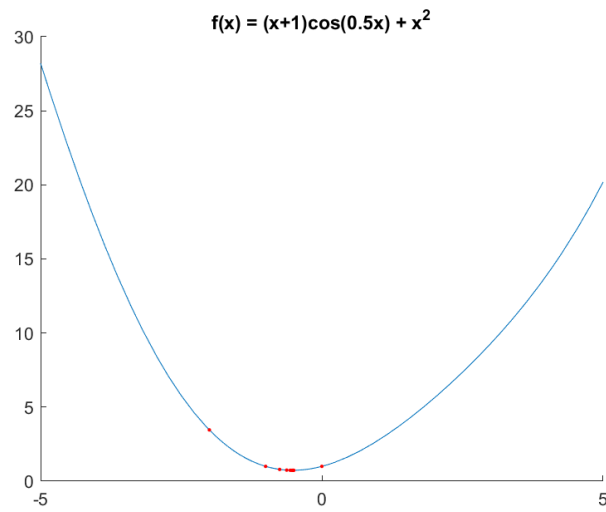


Figure 100: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

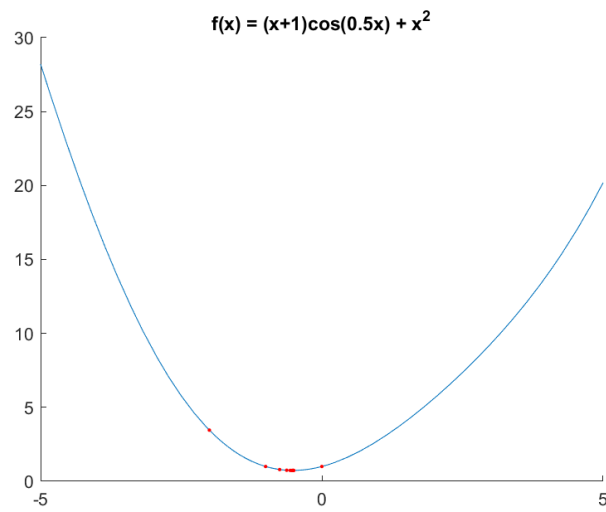


Figure 101: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

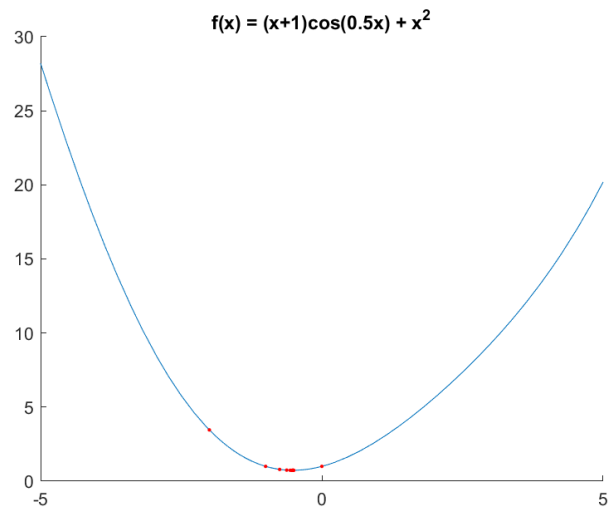


Figure 102: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

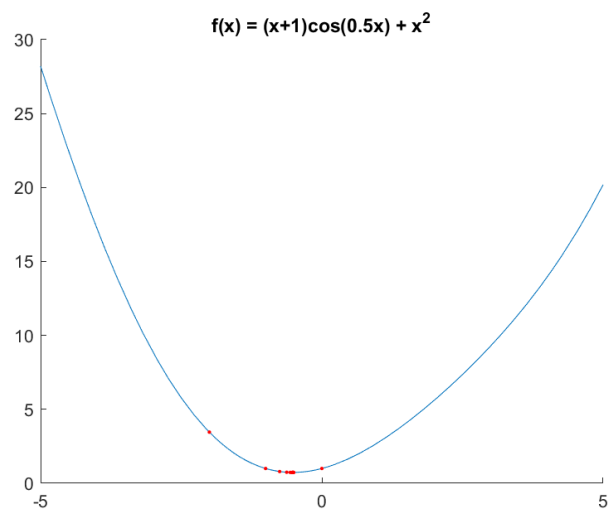


Figure 103: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

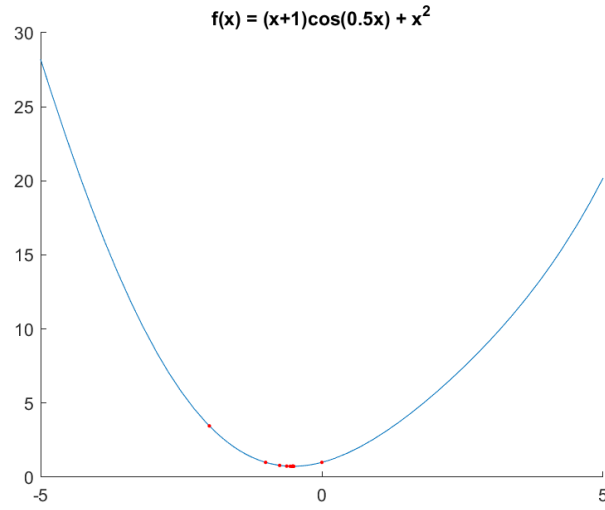


Figure 104: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_2$

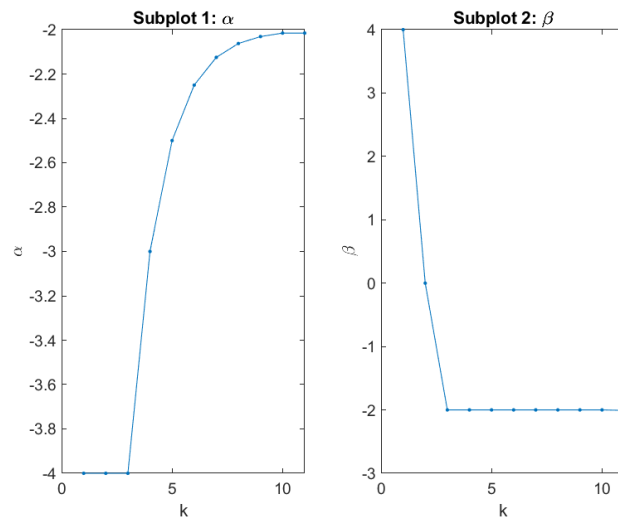


Figure 105: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

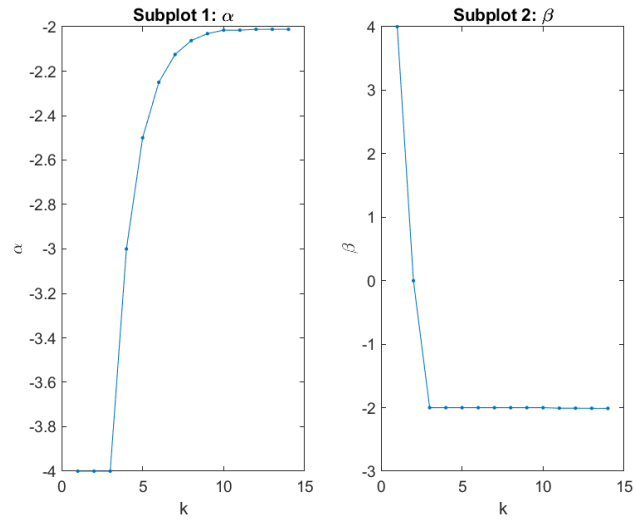


Figure 106: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

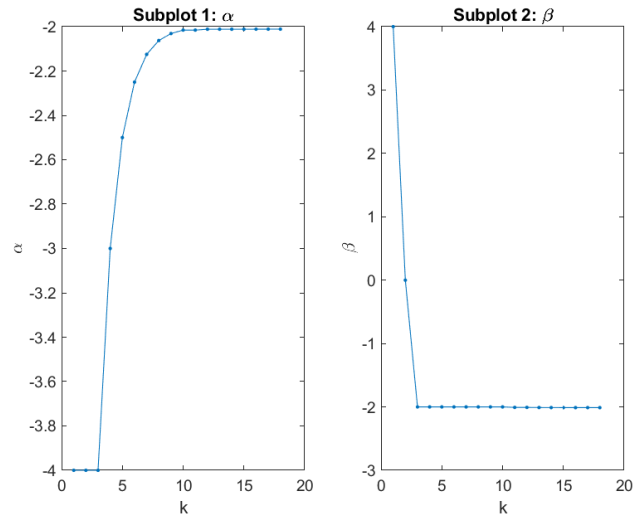


Figure 107: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

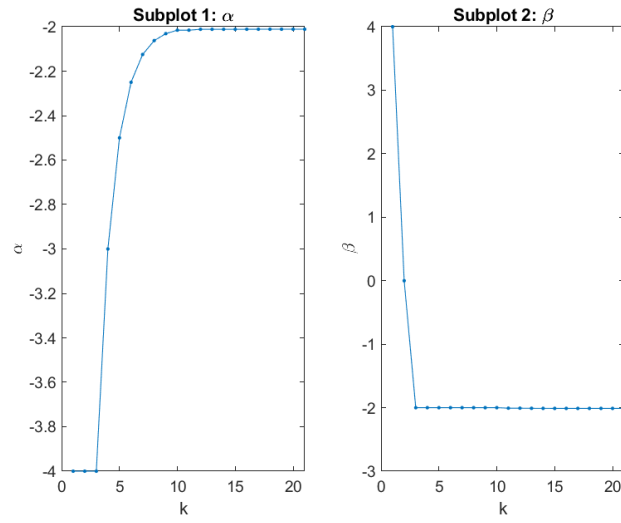


Figure 108: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$

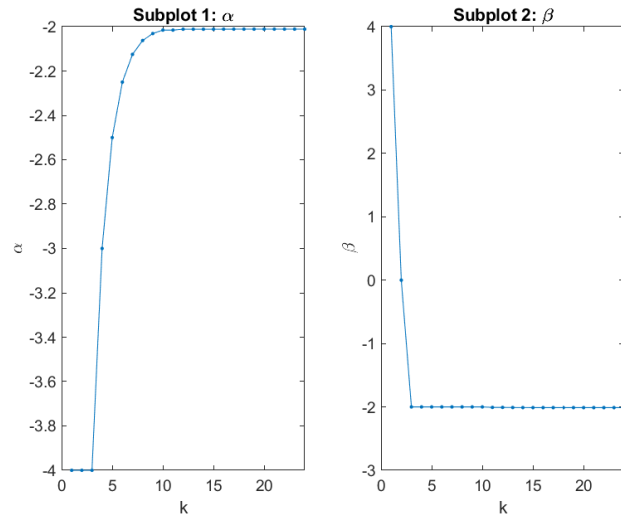


Figure 109: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $\alpha_k, \beta_k$  για την  $f_3$



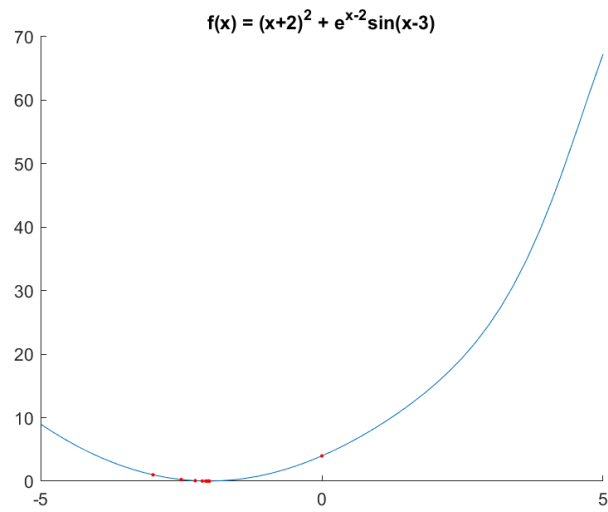


Figure 110: Για  $l = 0.1$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

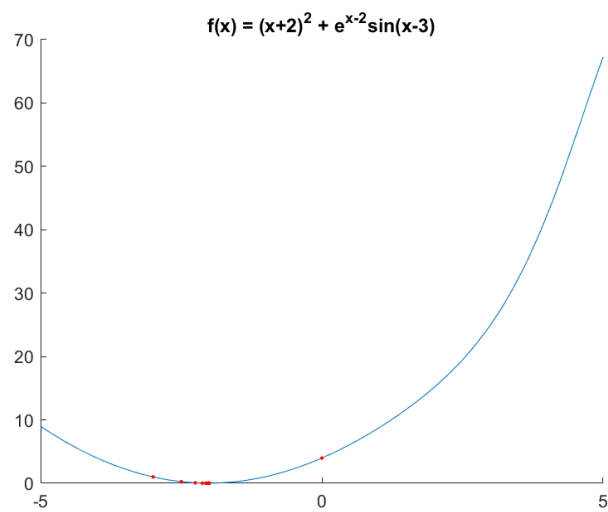


Figure 111: Για  $l = 0.01$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

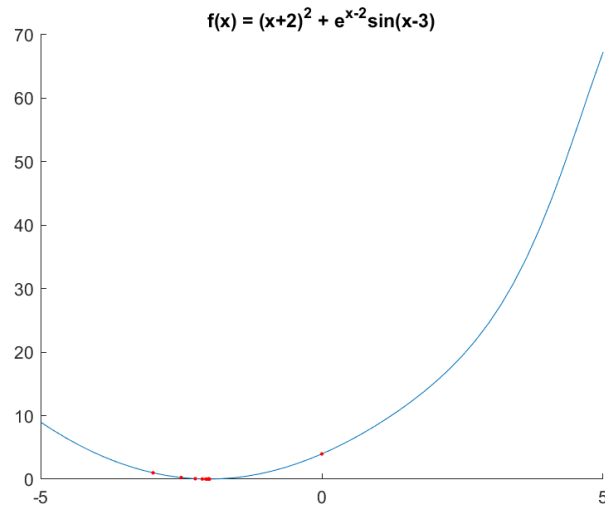


Figure 112: Για  $l = 0.001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

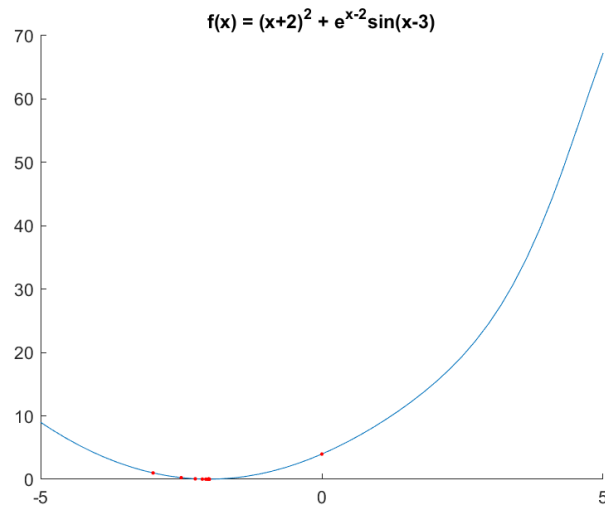


Figure 113: Για  $l = 0.0001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

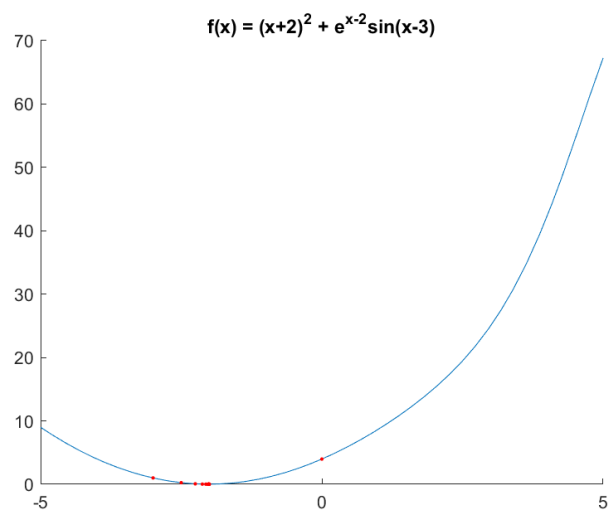


Figure 114: Για  $l = 0.00001$ , η μεταβολή των  $x_1, x_2$  για την  $f_3$

## 6 Αποτελέσματα και Σχόλια

Από την ανάλυση και τα αποτελέσματα των αλγορίθμων μπορούν να βγουν διάφορα συμπεράσματα. Αρχικά μπορούμε να δούμε ότι ο πιο γρήγορος αλγόριθμος είναι η μέθοδος Fibonacci, μετά είναι ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα, μετά είναι ο αλγόριθμος Διχοτόμου με χρήση παραγώγων και, τέλος, ο αλγόριθμος διχοτόμου χωρίς παραγώγων. Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι αλλάζοντας την συνθήκη τερματισμού σε όλους τους αλγορίθμους, οι αλγόριθμοι απαιτούν περισσότερα ή λιγότερα βήματα και οι μεταβολές του διαστήματος αυξάνονται αντιστρόφως ανάλογα με την συνθήκη τερματισμού. Μπορούμε επίσης να δούμε, στις γραφικές παραστάσεις, πού, πάνω στις συναρτήσεις  $f$ , έχει πατήσει ο κάθε αλγόριθμος για την εύρεση του ελαχίστου. Τέλος, ο χρόνος είναι διαφορετικός ανάλογα πόσο κυρτή είναι η συνάρτηση. Μπορούμε να δούμε ότι όσο πιο κυρτή είναι η συνάρτηση (δηλαδή κατεβαίνει πιο απότομα στο ελάχιστο) τόσο λιγότερο χρόνο και βήματα απαιτεί. Οι συναρτήσεις από την πιο αργή στην πιο γρήγορη είναι  $f_1, f_2, f_3$ .