INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Caraguatatuba

BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

ANDRÉ LOPES DE OLIVEIRA
EVERTON SANTOS
GABRIEL DE SOUSA MATSUMURA
GUSTAVO MARCOS CAMPOS DOS SANTOS
LEANDRO DE MAGALHÃES

ESTUDO DIRIGIDO:

Funções Elementares – Função Tangente

CARAGUATATUBA
2018

ANDRÉ LOPES DE OLIVEIRA
EVERTON SANTOS
GABRIEL DE SOUSA MATSUMURA
GUSTAVO MARCOS CAMPOS DOS SANTOS
LEANDRO DE MAGALHÃES

ESTUDO DIRIGIDO:

Funções Elementares – Função Tangente

Estudo Dirigido apresentado à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, como exigência parcial à aprovação.

Orientadora: Profª. Ms. Cristina Meyer

CARAGUATATUBA
2018

SUMÁRIO

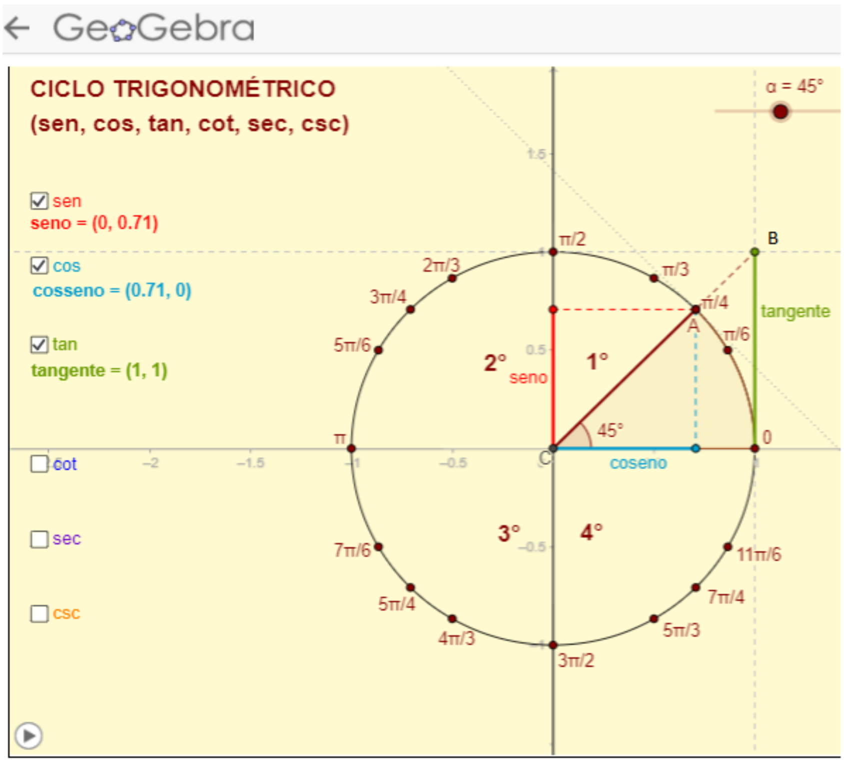
LISTA DE GRÁFICOS

1 FUNÇÃO ELEMENTAR

A seguir serão abordados os tópicos principais sobre a função elementar da tangente.

1.1 Representação Algébrica

Gráfico 1 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Gráfico plotado com GeoGebra (2018).

Dado um ponto A(cos(45), sen(45)), associado à um ângulo α = π/4 = 45°, estende-se uma reta $\overline{CAB}$ até o eixo das tangentes, aonde se encontra o ponto B. A medida de $\overline{CB}$ é a tangente do ângulo α, ou tg(α) (MEDEIROS et al, 2009).

Note que para a f(x) = y = tan(x), tal que:

- 0 < x < π/2 => valores de y positivos e crescentes;
- π/2 < x < π => valores de y negativos e crescentes;
- π < x < 3π/2 => valores de y positivos e crescentes;
- 3π/2 < x < 2π => valores de y positivos e crescentes;

Assim, verifica-se que:

Tabela 1 - Tangente de Ângulos de Eixo e Ângulos Notáveis

α rad	α°	tg(α)
0	0°	0
π/6	30°	√ 3/3
π/4	45°	1
π/3	60°	√ 3
π/2	90°	∄
π	180°	0
3 π/2	270°	∄
2 π	360°	0

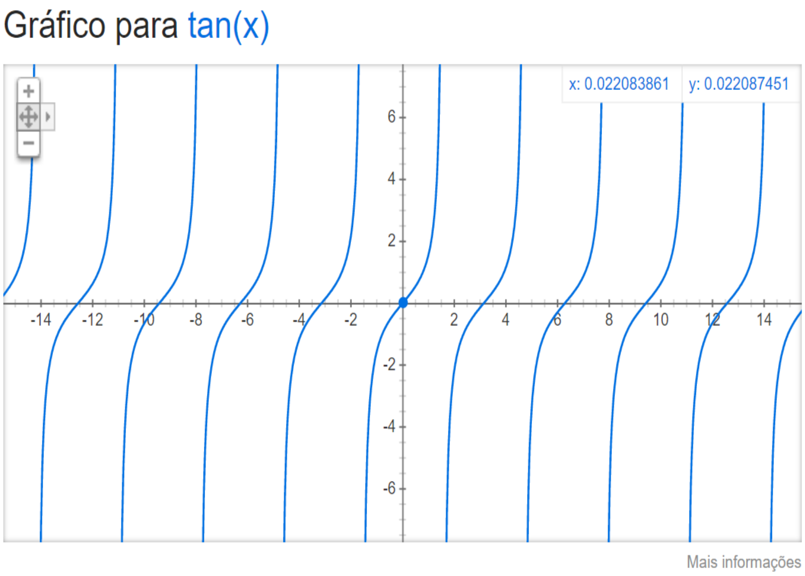
Fonte: adaptado de Medeiros et al(2009, p. 332) e Reges(2014, p.26).

O cálculo da tangente é entendido como: *tan(x) = sen(x)/cos(x)*. Por isso observa-se que nas situações em que x = π/2 ou x = 3π/2 ocorre que *cos(x) = 0*. Como *tan(x) = sen(x)/0*, logo *tan(π/2) = tan(3π/2) =* ∄.

Uma função f(x) = y = tan(x), assim como qualquer outra função, pode ser vista como: *f(x) = a + b * tan(c * x + d)*. Sendo *a* termo constante de y, *b* o coeficiente de y, *c* o coeficiente de x e *d* o termo constante de x. Para funções elementares temos *a = d = 0* e *b = c = 1* (PEREIRA, 2017).

1.2 Representação Gráfica

Gráfico 2 - Função Elementar da Tangente



Fonte: Plotado com Google (2018).

O Gráfico 2 expressa o gráfico da função elementar da tangente, também conhecido como *tangentóide* (MEDEIROS et al, 2009). Os "buracos" que ocorrem no período de π/2 são chamados de *assíntotas verticais*, pois percebe-se que há algo como uma "reta vertical vazia" que divide no meio o período da função (PEREIRA, 2017).

1.3 Domínio e Imagem

Domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k*\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Imagem: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$ *OU* $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

1.4 Período e Paridade

Período de tan(x): $\tan(x) = \tan(x+k*\pi) \mid k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \pi$.

Paridade: Ímpar, pois a função é simétrica em relação à origem.

2 EXEMPLO 1 - REFLEXÃO E COMPRESSÃO

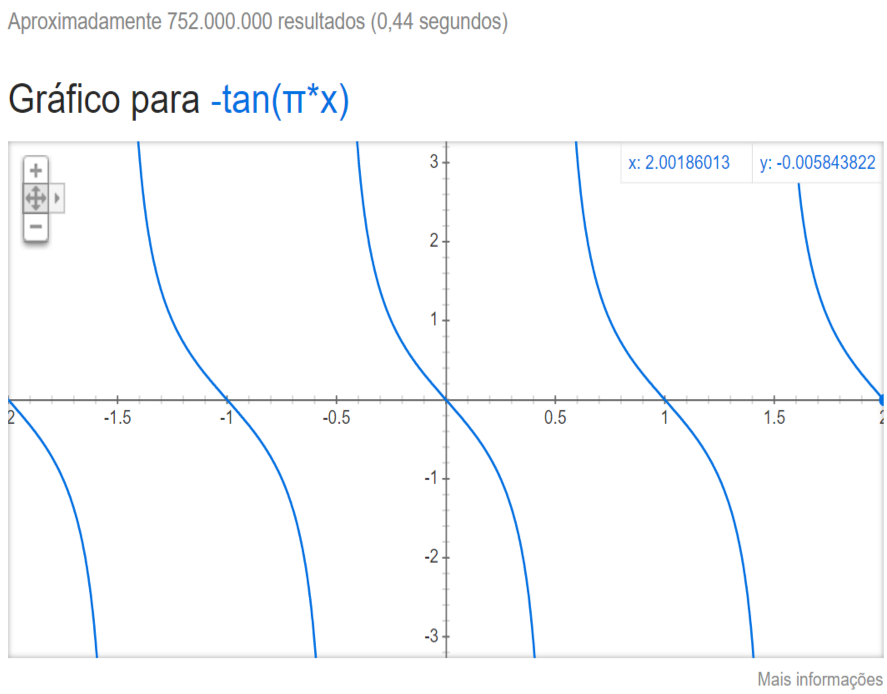
Segue um exemplo de aplicação de funções tangenciais aplicando as operações de reflexão e compressão de funções.

2.1 Problema e Representação Algébrica

tan(x)	(Função elementar)
tan(x) => -tan(x)	(Reflexão)
-tan(x) => -tan(π*x)	(Compressão por π)
f(x) = -tan(π*x)	**(Representação Algébrica)**

2.2 Representação Gráfica

Gráfico 3 - f(x) = -tan(π*x)



Fonte: Plotado com Google (2018).

O Gráfico 3 representa a função f(x) = -tan(π*x).

2.3 Domínio e Imagem

Domínio: D(f) = {x ∈ ℝ | x ≠ ½ + k; k ∈ ℤ}.

Observe que diferente do da função elementar, como o período é 1 e não π, por conta da compressão por π, a expressão é conforme acima.

Imagem: Im(f) = {y ∈ ℝ}.

Observe que isto não se altera, embora os valores de y tenham sido invertidos em relação a função elementar, por conta da operação de reflexão, os valores de y se mantém no intervalo de (-∞ ; +∞). Note que agora ela é uma função decrescente.

2.4 Período e Paridade

Período de f(x): f(x) = f(x+k) | k ∈ ℤ => 1.

Lembre-se que a função elementar *f(x) = a + b * tan(c * x + d)*, logo, por esta razão, sendo o coeficiente c = π, temos que os valores de x são comprimidos por π, como demonstra o Gráfico 3. Por isso, se na função elementar f(x) = tan(x) o período é igual a π, na função f(x) = tan(π*x), o período será π/π = 1. A reflexão de b = -1 não altera o período.

Paridade: Ímpar.

Neste caso, a função continua a ser simétrica em relação à origem. Note que se houvesse uma translação de qualquer espécie, a ≠ 0 OU d ≠ 0, a função não seria nem par nem ímpar, pois não seria nem simétrico em relação ao eixo das ordenadas (par) e nem em relação à origem (ímpar).

3 EXEMPLO 2 - VOLUME DE UM CONE DE REVOLUÇÃO

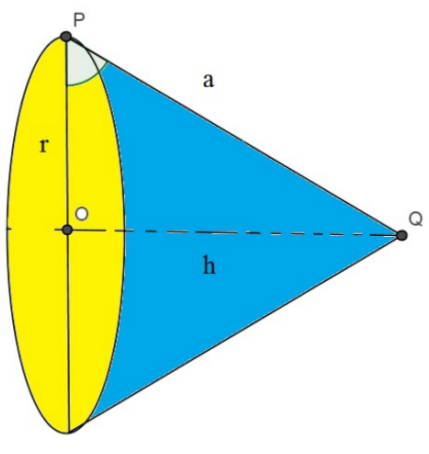
Segue um exemplo de aplicação de funções tangenciais proposto por Reges (2014), no qual ele demonstra como determinar o volume de um cone de revolução apenas conhecendo a medida de um cateto e o seu ângulo em relação com a hipotenusa. Desta forma, este é o exemplo de uma composição de funções, sendo uma delas a função tangencial.

3.1 Problema e Representação Algébrica

Segue o problema:

> *Rotacionando-se um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, obtemos um cone circular reto, chamado de cone de revolução. É possível determinar uma fórmula para o volume deste cone conhecendo-se apenas a medida de um cateto e o ângulo formado por tal cateto e a hipotenusa?* (REGES, 2014, p. 41, grifo do autor).

Gráfico 4 - Cone de Revolução



Fonte: adaptado de Reges(2014, p.41).

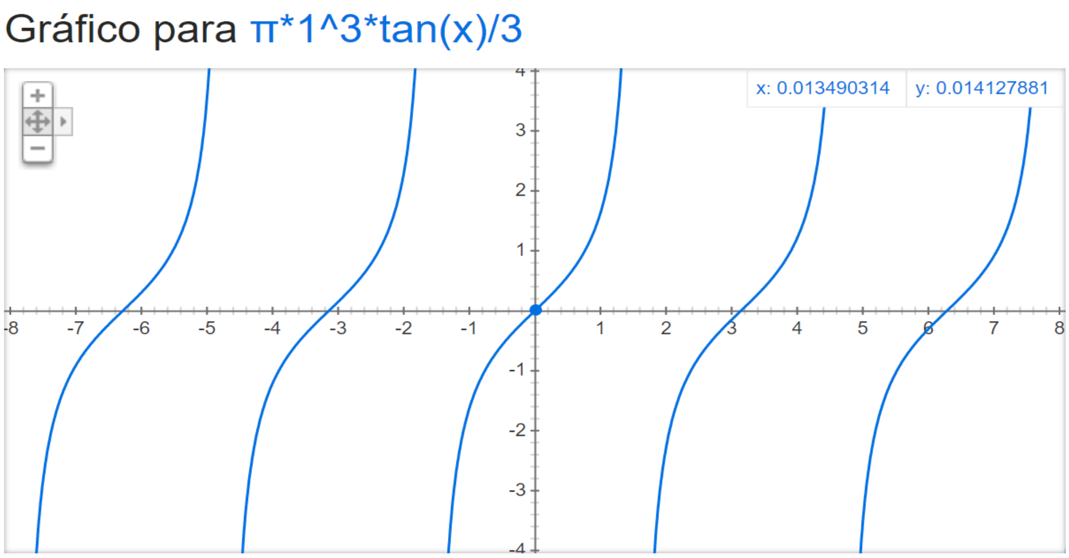
Conforme o Gráfico 4, sendo o ângulo $O\hat{P}Q = \theta$, tem-se:

Resolução: $V=(\pi*r^3*\tan(\theta))/3$ (Para detalhes da resolução veja Reges (2014)).

3.2 Representação Gráfica

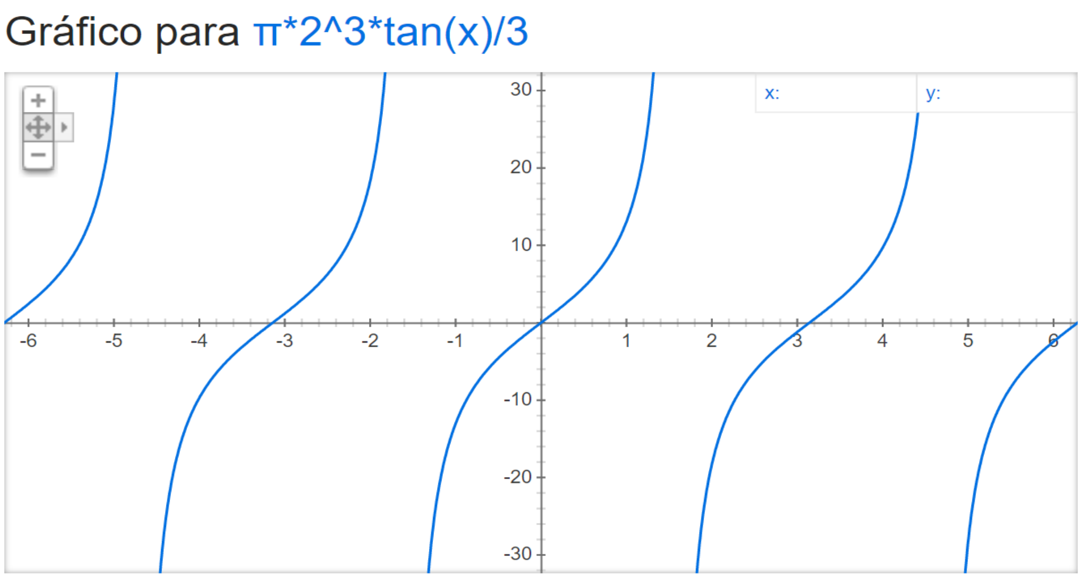
Considerando que V(x) = (π*r³*tan(x))/3, usa-se como exemplos as situações em que r = 1, Gráfico 5, e r = 2, Gráfico 6:

Gráfico 5 - V1(x) = (π*1³*tan(x))/3



Fonte: Plotado com Google (2018).

Gráfico 6 - V2(x) = (π*2³*tan(x))/3



Fonte: Plotado com Google (2018).

3.3 Domínio e Imagem

*Domínio: D(V1) = {x $\in \mathbb{R}$ | x ≠ π/2 + k*π; k $\in \mathbb{Z}$}.*

Observe que é o mesmo domínio da função elementar.

Imagem: Im(V1) = {y $\in \mathbb{R}$} OU (-∞ ; +∞).

Observe que -∞ < y < +∞, assim como na função elementar. No entanto, note que a proporção dos valores de y para cada x são ligeiramente diferentes. Lembrando-se de que a função elementar *f(x) = a + b * tan(c * x + d)*, temos que b = π*1³*1/3 => b = π/3 => b = 1,0471975512. Logo, em relação à função fundamental f(x), V1(x) é alongada verticalmente por 1,0471975512. Claro que esta variação é imperceptível ao se olhar para o Gráfico 5.

É interessante notar que, neste caso, os volumes do cone tem valores aproximadamente iguais aos obtidos por tan(x).

*Domínio: D(V2) = {x $\in \mathbb{R}$ | x ≠ π/2 + k*π; k $\in \mathbb{Z}$}.*

É o mesmo domínio da função elementar.

Imagem: Im(V2) = {y $\in \mathbb{R}$} OU (-∞ ; +∞).

Note que que no caso de V2(x) a proporção dos valores de y para cada x são explicitamente diferentes em relação à função fundamental. Agora temos que b = π*2³*1/3 => b = 8*π/3 => b = 8,37758040957. Logo, em relação à função fundamental f(x), V2(x) é alongada verticalmente por 8,37758040957. Neste caso a variação é bem explícita, como demonstra o Gráfico 6. Conforme o valor do raio aumentar essa diferença será cada vez mais perceptível.

3.4 Período e Paridade

O período e a paridade de V1(x), V2(x) e Vr(x) são iguais, por isso trataremos da função Vr(x).

*Período de Vr(x): Vr(x) = Vr(x+k*π) | k $\in \mathbb{Z}$) => π.*

Paridade: Ímpar.

Como com no capítulo **2 EXEMPLO 1 – REFLEXÃO E COMPRESSÃO**, aqui função continua a ser simétrica em relação à origem e caso houvesse uma translação de qualquer espécie a função não seria nem par nem ímpar.

REFERÊNCIAS

MEDEIROS, V.Z. et al. Capítulo 9 – **Trigonometria**. p. 319 – 335. In: MEDEIROS, V.Z. et al. **Pré-Cálculo**. 2ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009. 538 p.

MEYER, C. Aulas e Resumos: **Cálculo Diferencial e Integral.** Caraguatatuba: IFSP, 2018.

PEREIRA, P. C. A. **Trigonometria na Circunferência.** Youtube: Equaciona Matemática, 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLEfwqyY2ox86JU-fviQa08fMH67W6oAKo> Acesso em: 5 de março de 2018.

REGES, V. G. **Aplicações da Trigonometria.** p. 41-43. in REGES, V. G. **Trigonometria e Aplicações.** Maringá: UEM, 2014. 51 p. Disponível em: <http://www.sites.uem.br/profmat/reges_gaieski.pdf> Acesso em: 5 de março de 2018.