

Tutorial

Mathematica v5.0 para Windows



Filipe Antônio Marques Falcetta – RA 043576 – Cálculo 1 – MA111C
Professor Márcio Antônio de Faria Rosa
Universidade Estadual de Campinas – Unicamp
2º Semestre/2005
Segunda revisão realizada em outubro/2006

Índice

Introdução ao Mathematica	4
Histórico e Características	4
Obtenção do Software	6
Primeiros contatos	6
Manipulação de funções	8
Funções do Mathematica	11
Gráficos Simples em 2D	11
Gráficos parametrizados	12
Gráficos polares e de funções implícitas	13
Resolução de equações	15
Opções dos comandos	16

Gráficos em 3D:

Gráficos em 3D Simples	17
Pontos de vista	18
Curvas de nível	20
Gráficos em 3D paramétricos	21
Superfícies de revolução	22
O comando Show	23

Mathematica no Cálculo 1:

Limites	24
Derivadas	25
Integrais	27

Mathematica no Cálculo 2:

Funções vetoriais	28
Derivadas parciais	29
Máximos e mínimos - Vetor Gradiente e Matriz Hessiana	30
Integrais duplas e triplas	31
Rotacional e divergente	31

Mathematica no Cálculo 3:

Equações diferenciais e sistemas	32
Seqüências e séries	34

Manipulando listas:

Criando listas	36
Operações importantes	37
O básico sobre matrizes	37
Para aprender mais	38

Apêndices :

1) Escrevendo em linguagem matemática	40
Teclas de Atalho	41
2) Funções internas para avaliação de certas integrais	42
3) Resolvendo Exercícios	
-Reta tangente à curva	43
-Taxas relacionadas	45
-Máximos e mínimos	45
-Área entre curvas	47
-Volumes de sólidos	48
-Comprimento de arcos	49
-Planos tangentes	50
-Aplicações de equações diferenciais	51
Conclusão	54
Referências Bibliográficas	54

Introdução

O software Mathematica, ao lado de outros softwares também conhecidos (Maple, Máxima, Octave, MatLab, Mupad etc) é um CAS (Computer Algebraic System - algo como Sistema Algébrico Computacional).

Um CAS é um programa que busca facilitar o cálculo em matemática simbólica, ou seja, através de um CAS, é possível calcular com a mesma formalidade do cálculo no papel, seguindo-se as mesmas regras, e, nos CASs mais modernos, utilizando-se das mesmas notações.

Este tutorial foi desenvolvido para mostrar alguns conceitos do Mathematica, bem como aproveitar seus recursos para o estudo de Cálculo.

A versão utilizada no tutorial é a **5.0**.

Histórico e Características Técnicas

O Mathematica começou a ser desenvolvido em 1986 por Stephen Wolfram, o qual lançou a primeira versão em 1988.

Mathematica é uma linguagem de programação que suporta criação de novas funções e procedimentos - abrindo espaço para a completa edição do software, para que ele seja modificado de modo a suprir as necessidades do usuário. É implementada em uma variante do C (orientada a objetos).

Neste software, a linguagem é interpretada por uma kernel (núcleo) que realiza todos os cálculos, tornando o sistema independente da plataforma que se deseja operar (de fato, existem versões para Windows, Macintosh e Linux - no mesmo disco de instalação).

O Mathematica também suporta variadas interfaces (JMash, por exemplo), embora a mais comum seja a interface padrão, já bem completa e com boa receptividade do usuário (servindo tanto para usuários comuns, como para usuários que realizam cálculos avançados).

Este software é ainda um poderoso editor de textos, de páginas da Web e importantíssimo para o estudo das mais variadas ciências.

A versão mais recente é a **5.2**, de **Julho/2005**. Abaixo são listadas as mais importantes modificações do Mathematica versão a versão.

1988:

Mathematica 1.0

Versão inicial lançada.

1989:

Mathematica 1.2

Lançada interface para Macintosh.

1991:

Mathematica 2.0

Interface para Windows;
Protocolo Mathlink para comunicação em rede;
Detecção/correção de erros;
Suporte a sons;
Utilização de gráficos paramétricos em 3D.

1992:

Mathematica 2.1

Suporte ao Windows 3.1;
Melhoria do Mathlink, tanto para Unix, como para Mac.

1993:

Mathematica 2.2

Novas interfaces separadas entre si;
Mathlink para Windows;
Serviço de auxílio aprimorado.

1996:

Mathematica 3.0

Melhoria na interface e no método de cálculo;
Suporte ao Windows 95.

1999:

Mathematica 4.0

Melhoria na velocidade dos cálculos, no uso de memória;
Licenças em rede para corporações.

2000:

Mathematica 4.1

Versão para MacOS X (4.1.5 - lançada em 2001);
Suporte a XML;
Integração com Java.

2002:

Mathematica 4.2

Plataforma Java integrada;
Melhoria na programação de funções.

2003:

Mathematica 5.0

Melhoria na utilização das extensões dos processadores;
Início do suporte a 64-bits;
Inclusão de um tutorial interativo.

2004:

Mathematica 5.1

Criação da ferramenta de análise MathematicaMark, esta ferramenta possibilitou a abertura de um novo campo para o Mathematica, que passou a atuar na análise de

processamento, importante em uma era da informática em que os processadores ficam cada vez mais poderosos.

2005:

Mathematica 5.2

Avanço no suporte a hardware 64-bits.

Obtenção do Software:

O Mathematica é um software comercial que deve ser adquirido no site da produtora (<http://store.wolfram.com>) ou em autorizadas em variados países do mundo, incluindo o Brasil. A loja autorizada a vender o produto em nosso país é a **Advanced Technology Solutions Ltda.**, com sede na Barra da Tijuca, Rio de Janeiro.

Existem licenças especiais para pessoas físicas, estudantes, governos e universidades, cada qual com seus recursos e limitações. O preço varia de acordo com a licença escolhida, a versão profissional padrão custa aproximadamente US\$ 2.000.

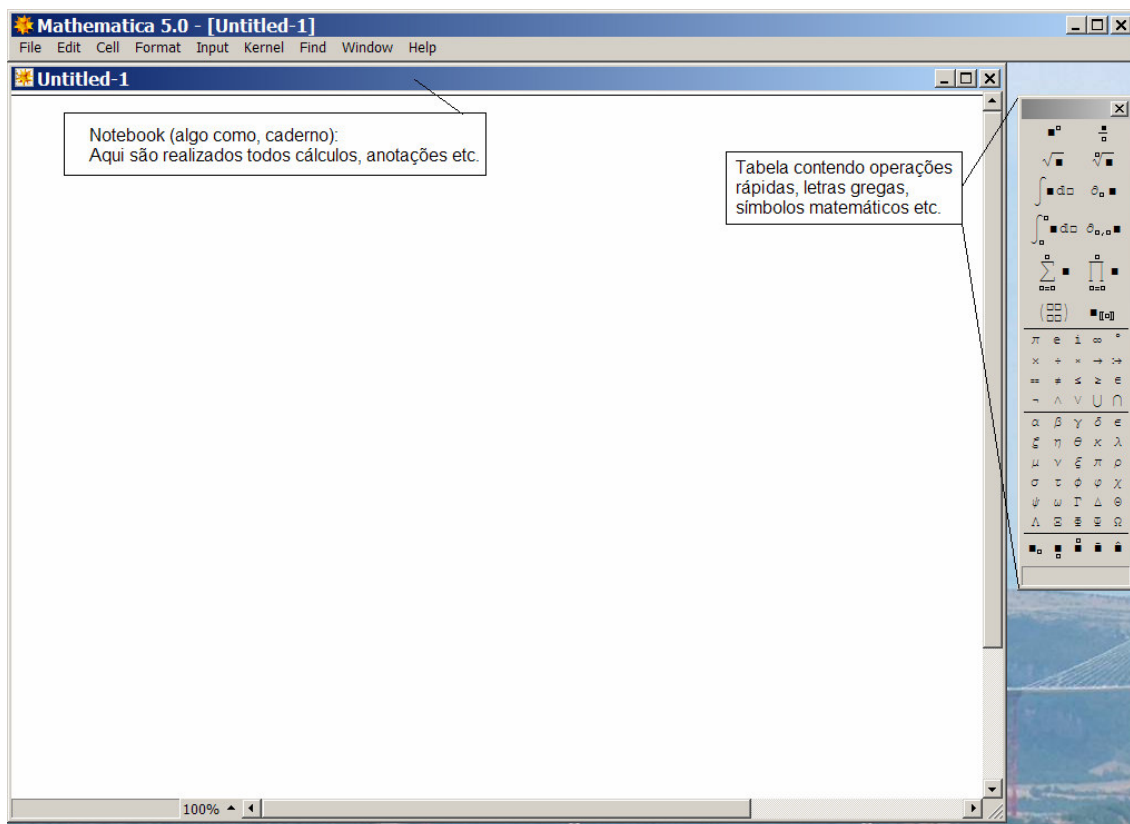
Para os que desejam apenas testar o programa e os recursos, a Wolfram Research Inc. oferece uma versão **shareware** (do tipo "teste antes de comprar"), que funciona por 15 dias e possui todas as funções da versão completa, não podendo salvar os cálculos efetuados.

Para isso, basta acessar o site <http://www.wolfram.com/products/mathematica/trial.cgi>, fazer o cadastro, escolher a plataforma e aguardar o término do download. A versão **5.2** para Windows representa um download de 153mb aproximadamente.

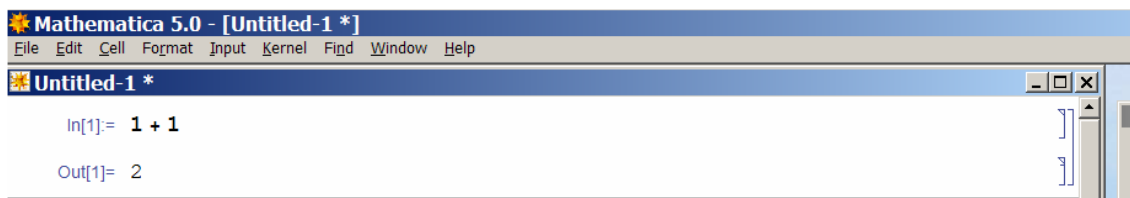
Primeiros contatos com o programa

Assim que você abre o programa, desconsiderando a tela de tutorial, esta é a interface padrão da versão **5.0**:

(pequenas alterações poderão ocorrer se você estiver usando uma versão mais recente).



Para se fazer qualquer tipo de operação, basta digitá-la na seção notebook (da mesma forma que se faria utilizando-se um papel) seguida de **<shift> + <enter>**, comando que executa as operações no Mathematica. Observe:



As operações aritméticas simples são similares a todos os programas de cálculos no computador (incluindo-se a própria calculadora do Windows, por exemplo):

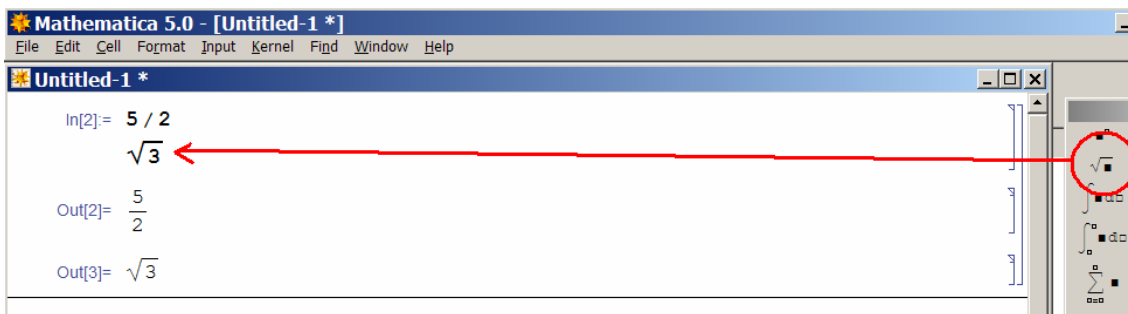
- + para adição;
- para subtração;
- * para multiplicação;
- / para divisão;
- ^ para potência.

O Mathematica sempre procura fazer a melhor aproximação para o resultado obtido. Por exemplo, iremos calcular a divisão 5 por 2 e a raiz de 3.

Para se obter o símbolo de raiz, basta clicar no botão correspondente na barra de ferramentas.

Maneiras alternativas de se obter a raiz de um número (vistas com detalhe nas próximas seções deste tutorial):

- 1) Escrever a função **Sqrt[x]**, onde x é o número que se deseja a raiz quadrada;
- 2) Utilizar a tecla de atalho **Ctrl+2**;



Observe que os resultados retornados não foram nem um pouco amigáveis. Para se obter o resultado numérico, basta digitarmos **N[expressão, num_casas]**. O comando **%** retorna o resultado anteriormente obtido. Assim:



Note que não foi determinado o número de casas desejado para a divisão. Quando isso ocorre o Mathematica utiliza o padrão de 5 casas, ou até o último algarismo significativo.

Já para a raiz quadrada, foi obtida com o valor numérico, na precisão esperada, de 20 casas decimais.

O Mathematica também é, por excelência, um manipulador de funções numérico-algébricas, e possui vários comandos integrados para este tipo de operação numérica.

Factor[expressão] - fatora expressões;

Expand[expressão] - realiza a distributiva nos produtos;

Together[expressão] - calcula a soma de frações;
Simplify[expressão] - obtém a forma mais simplificada.

Veja:

```

File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help
Untitled-1 *

In[1]:= Factor[x^2 - x - 6]
Out[1]= (-3 + x) (2 + x)

In[2]:= Expand[(1 - x) (4 - x) (3 + x)]
Out[2]= 12 - 11 x - 2 x^2 + x^3

In[5]:= Together[3/x - 5 x/(x + 2) + 2/(x - 1)]
Out[5]= (-6 + 7 x + 10 x^2 - 5 x^3) / ((-1 + x) x (2 + x))

In[6]:= Simplify[%]
Out[6]= (-6 + 7 x + 10 x^2 - 5 x^3) / (x (-2 + x + x^2))

```

Outros comandos úteis do Mathematica possibilitam a **Composição de Funções**:

Nest[f[x],x,n] - compõe uma função de x, n vezes.

Composition[f1,f2,f3,...fN][x] - Compõe as n funções colocadas no comando.

Observação:

F[g[x]] tem o mesmo efeito que **Composition[F,g][x]**.

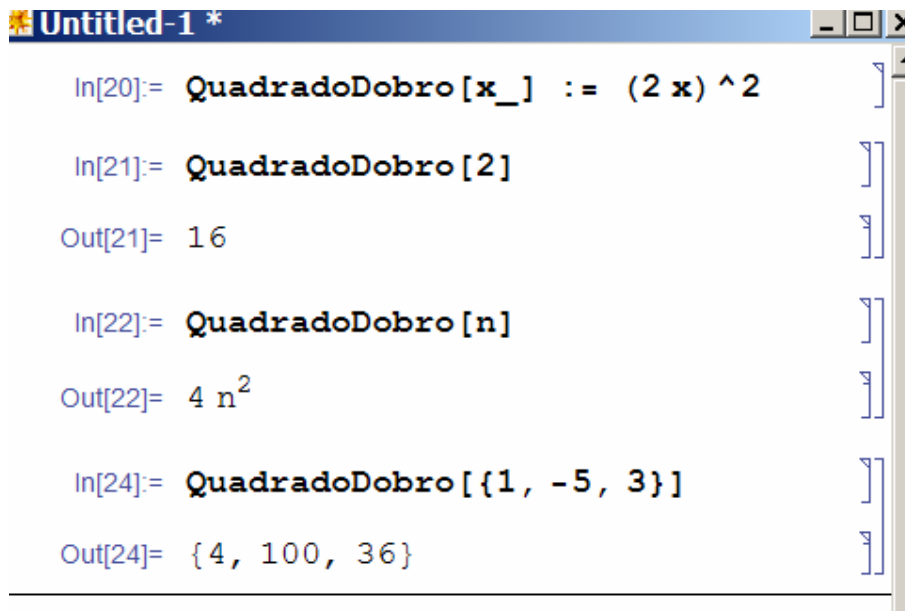
O Mathematica é extremamente versátil e permite que você defina suas próprias funções, facilitando os cálculos, impedindo que você digite várias vezes, por exemplo.

Para definir uma função no Mathematica, utilize-se da sintaxe:

Nome_funcao[var1,var2,...,varN_] := expressao

Para excluir uma definição, seja de funções ou de variáveis, use o comando **Clear[nome_funcao]**

Observe:



```

In[20]:= QuadradoDobro[x_] := (2 x)^2

In[21]:= QuadradoDobro[2]

Out[21]= 16

In[22]:= QuadradoDobro[n]

Out[22]= 4 n^2

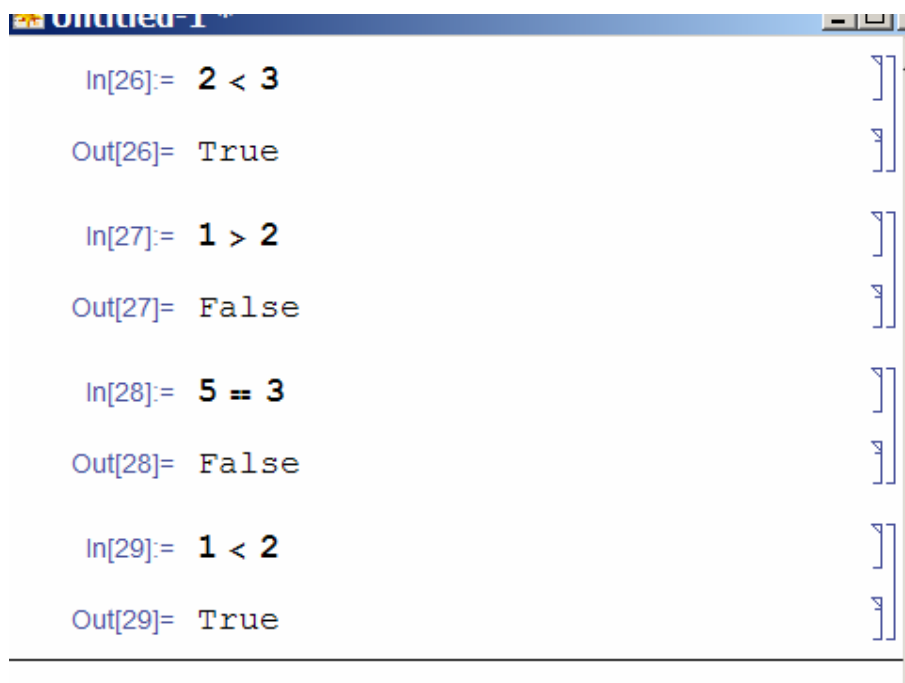
In[24]:= QuadradoDobro[{1, -5, 3}]

Out[24]= {4, 100, 36}

```

O Mathematica testa sentenças lógicas, bastando digitá-las da forma que se faria no papel. Para elas, ele retorna **True** (verdadeiro) ou **False** (falso).

No software, tudo é muito simples:



```

In[26]:= 2 < 3

Out[26]= True

In[27]:= 1 > 2

Out[27]= False

In[28]:= 5 == 3

Out[28]= False

In[29]:= 1 < 2

Out[29]= True

```

O Mathematica apresenta uma vasta biblioteca de **funções matemáticas pré-definidas**, abaixo são **listadas as mais utilizadas** e seu significado:

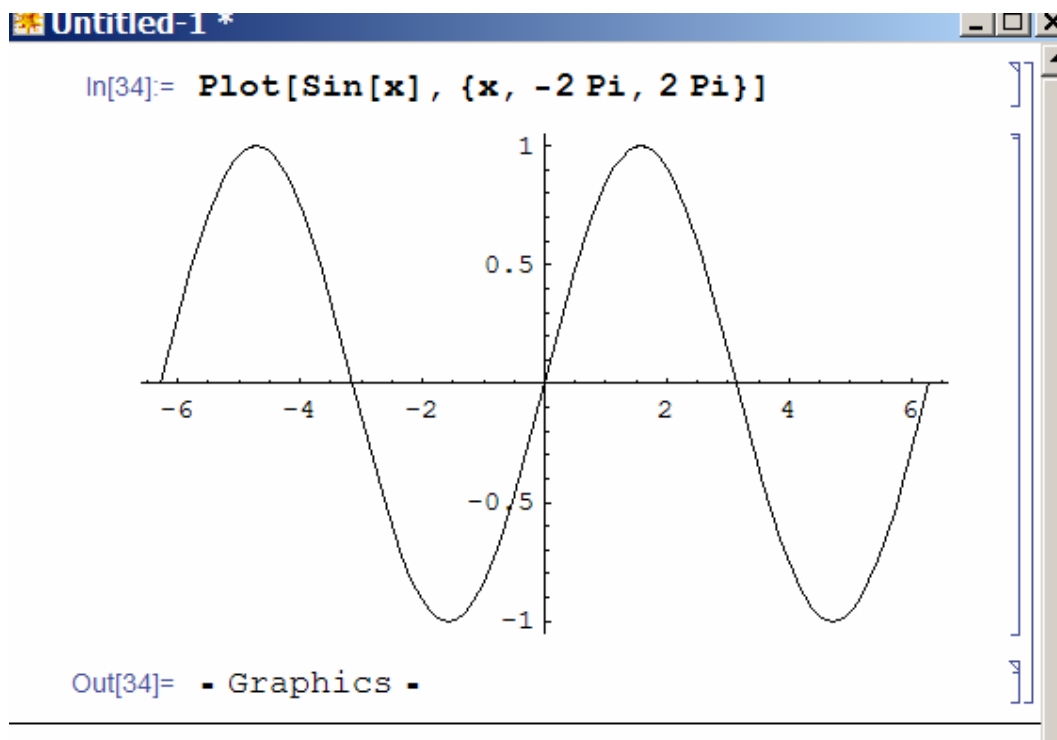
Abs[x]	Módulo (valor absoluto) de um número/expressão.	
Exp[x]	Exponencial. Equivale ao número e, elevado a x.	
Log[x]	Função logaritmo natural.	
Log[b, x]	Logaritmo de x, na base b.	
Sin[x]	Seno	Funções Trigonométricas
Cos[x]	Cosseno	
Tan[x]	Tangente	
Sec[x]	Secante	
Csc[x]	Cossecante	
Cot[x]	Cotangente	
ArcSin[x]	Arco Seno	Funções Trigonométricas Inversas
ArcCos[x]	Arco Cosseno	
ArcTan[x]	Arco Tangente	
ArcSec[x]	Arco Secante	
ArcCsc[x]	Arco Cossecante	
ArcCot[x]	Arco Cotangente	
Sinh[x]	<p>O Mathematica também possui uma gama de funções hiperbólicas correspondentes à cada uma das funções trigonométricas clássicas.</p>	
Cosh[x]		
Tanh[x]		
Sech[x]		
Csch[x]		
Coth[x]		
ArcSinh[x]		
ArcCosh[x]		
ArcTanh[x]		
ArcSech[x]		
ArcCsch[x]		
ArcCoth[x]		

Trabalhando com as funções do Mathematica

Plotando Gráficos Simples em 2D

Muitas vezes deseja-se fazer um gráfico de uma função, neste software isso é feito diretamente, digitando-se basicamente **Plot[f[x], {x, x_{mín}, x_{máx}}]**.

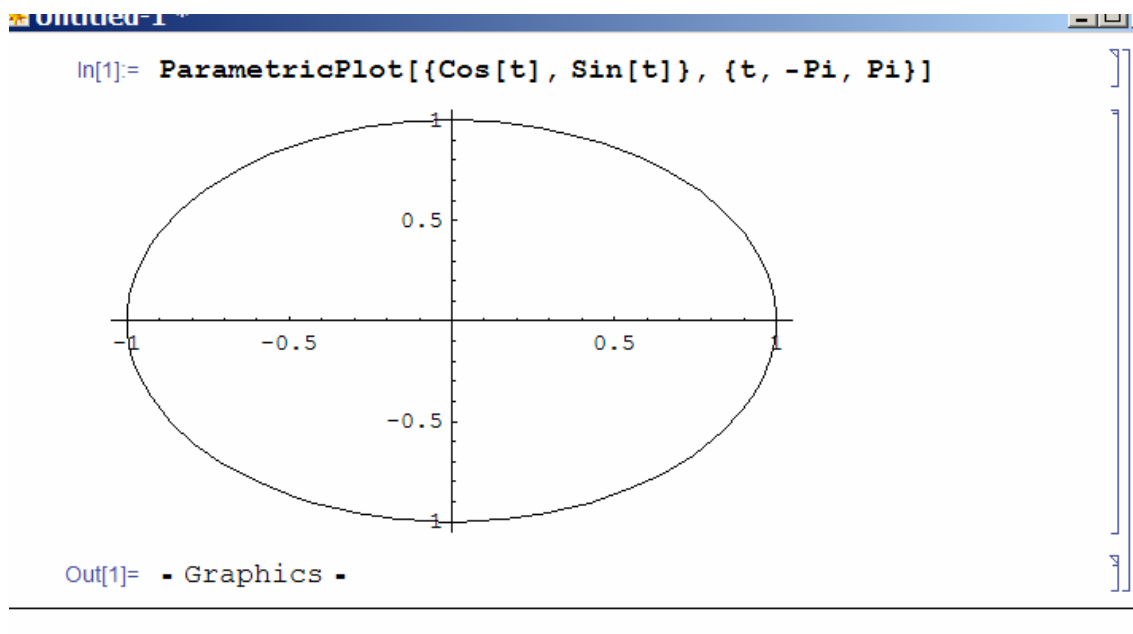
Por exemplo:



Gráficos parametrizados no plano

Pode-se fazer facilmente o gráfico de uma circunferência utilizando-se o comando **ParametricPlot** (Sintaxe: **ParametricPlot[{x(t), y(t)}, {x, x_{mín}, x_{máx}}, {y, y_{mín}, y_{máx}}]**)

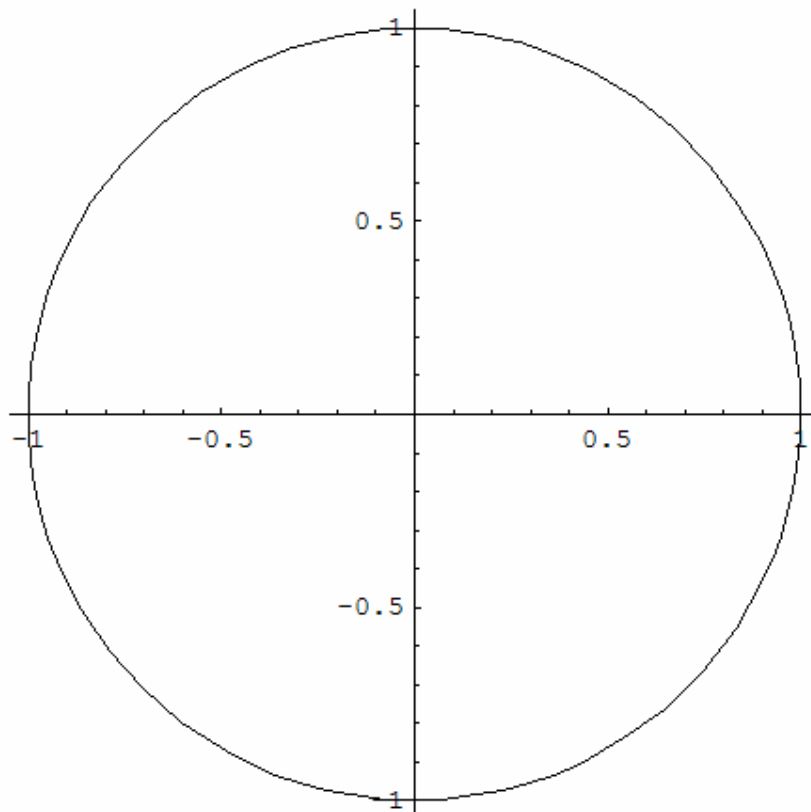
Observe:



Note que o gráfico não assumiu a forma de uma circunferência, isso acontece pois os eixos não estão pré-

definidos com a mesma escala. Para que o gráfico seja mostrado da maneira como esperávamos devemos incluir a opção **AspectRatio ->n**, para que x e y tenham a mesma escala, $n=1$.

```
In[2]:= ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, -Pi, Pi},
      AspectRatio -> 1]
```



```
Out[2]= - Graphics -
```

Gráficos polares e de funções implícitas

O Mathematica apresenta vários pacotes separados (conjuntos de instruções que não são carregados na inicialização do software, mas que podem ser utilizadas quando necessário, bastando-se que sejam previamente “chamadas”).

As funções gráficas apresentam inúmeros pacotes. No plano, destacaremos dois conjuntos de instruções:

ImplicitPlot - permite que o programa faça curvas no plano, sem parametrizá-las (como elipses, hipérboles etc.)

Graphics - permite ao Mathematica realizar facilmente gráficos em coordenadas polares (de rosáceas, cardióides, espiral de Arquimedes etc.), histogramas, gráficos de barra,

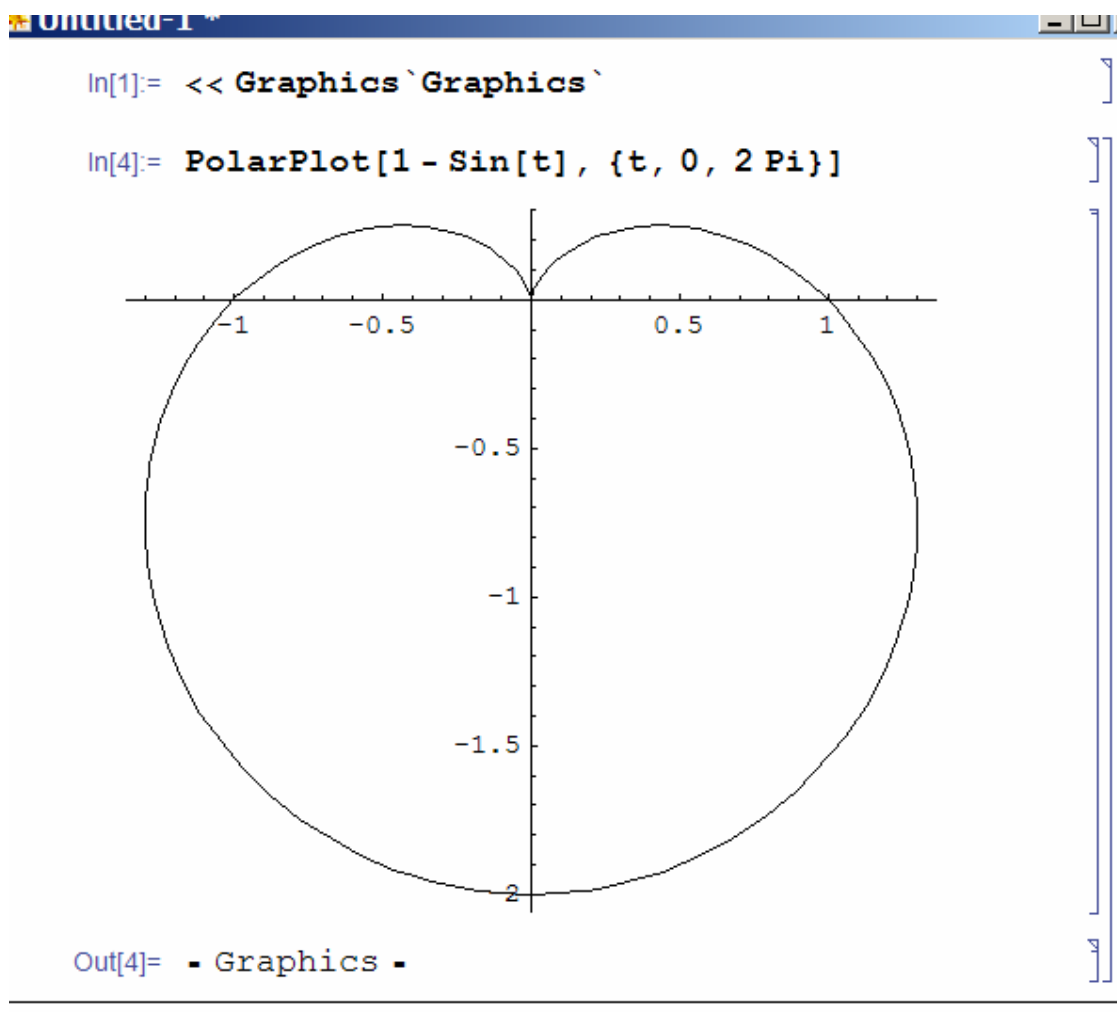
logarítmicos, gráficos de setor, uma grande implementação aos tipos de gráficos-padrão que o software por si já realiza.

Para inicializar um pacote, deve-se utilizar a sintaxe: `<<Graphics`nome_pacote`` (para pacotes gráficos, o nome entre crases).

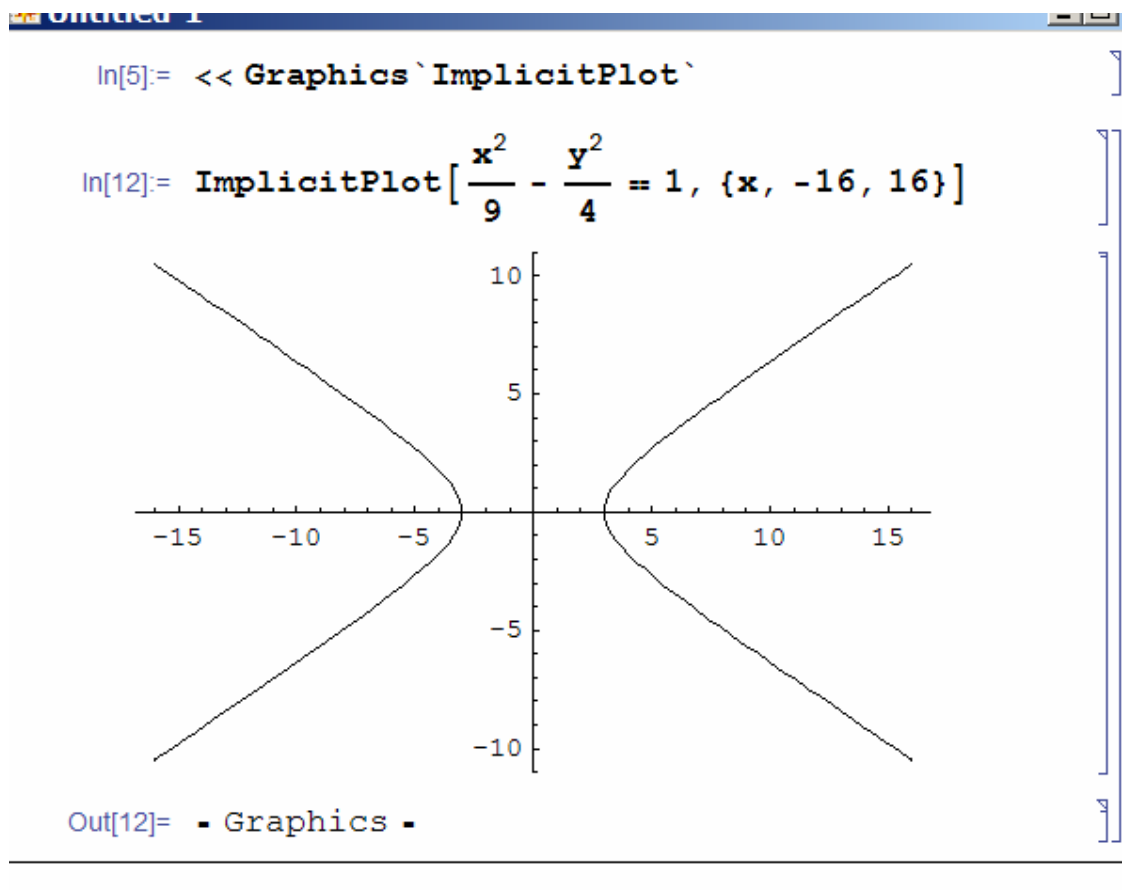
Sintaxe dos comandos:

- `PolarPlot[F[t], {t, tmín, tmáx}]`
- `ImplicitPlot[F[x,y], {x, xmín, xmáx}]`

Observe:



Um cardióide, ou...



...uma hipérbole.

Resolvendo equações

Basta utilizar o comando **Solve**[(lado direito da equação) == (lado esquerdo da equação), incógnita].

Sistemas de equação tem sintaxe semelhante: **Solve**[{eq1,eq2,...,eqN},incógnitas].

Este comando é capaz de resolver equações (e sistemas de equações) literais, numéricas, trigonométricas, entre todos os tipos de funções (com uma restrição: não devem ultrapassar grau 4).

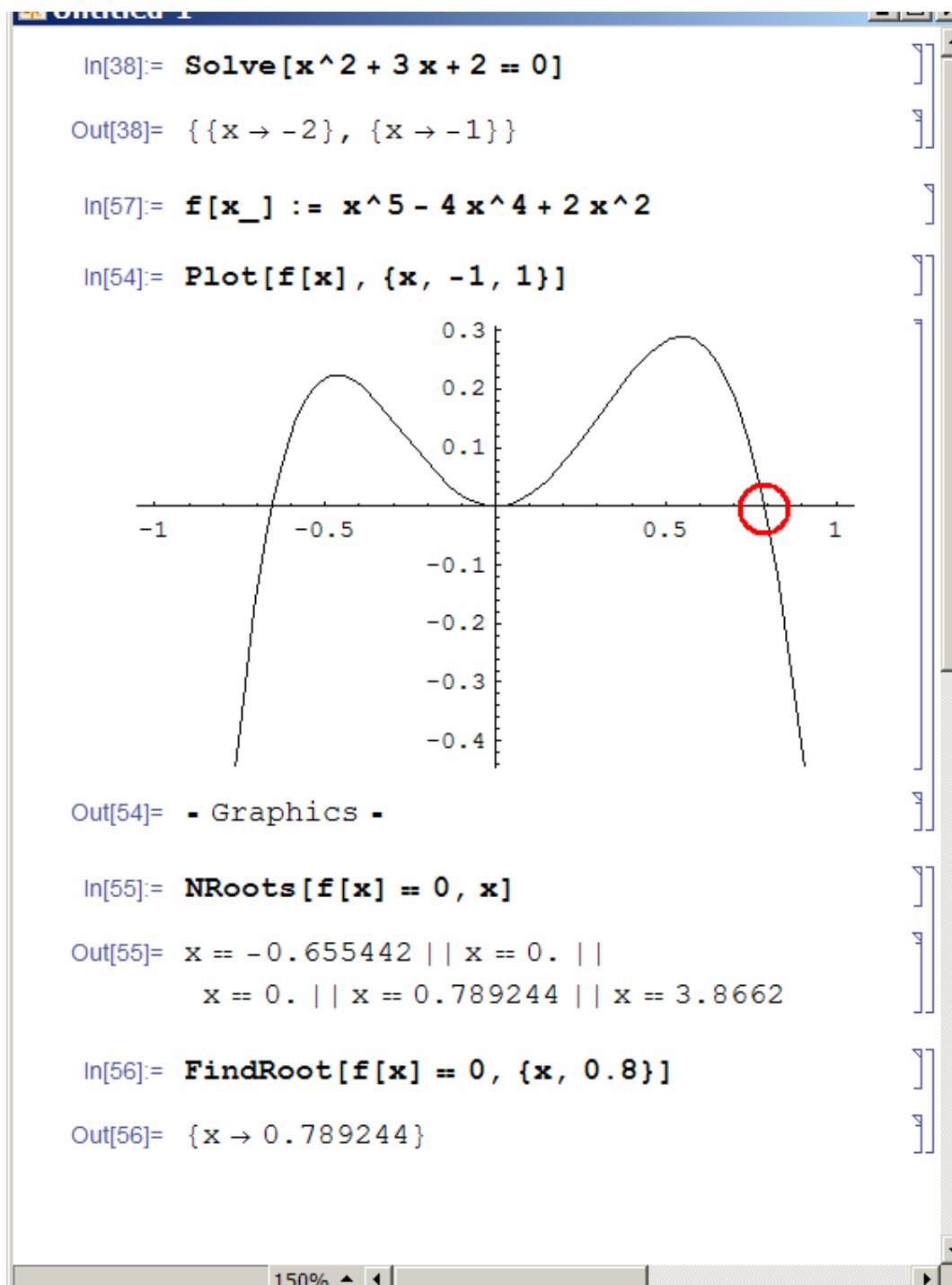
Para as funções com grau maior que 4, temos funções alternativas como:

NRoots[polinômio1==polinômio2,x]

FindRoot[polinômio1==polinômio2,{x,ponto}]

Enquanto que **NRoots** não necessita de mais nenhum argumento, no caso do **FindRoot**, é necessário que o usuário saiba algum ponto próximo da raiz em questão. Estes pontos podem ser obtidos por meio de um gráfico, onde há o cruzamento com o eixo da variável independente.

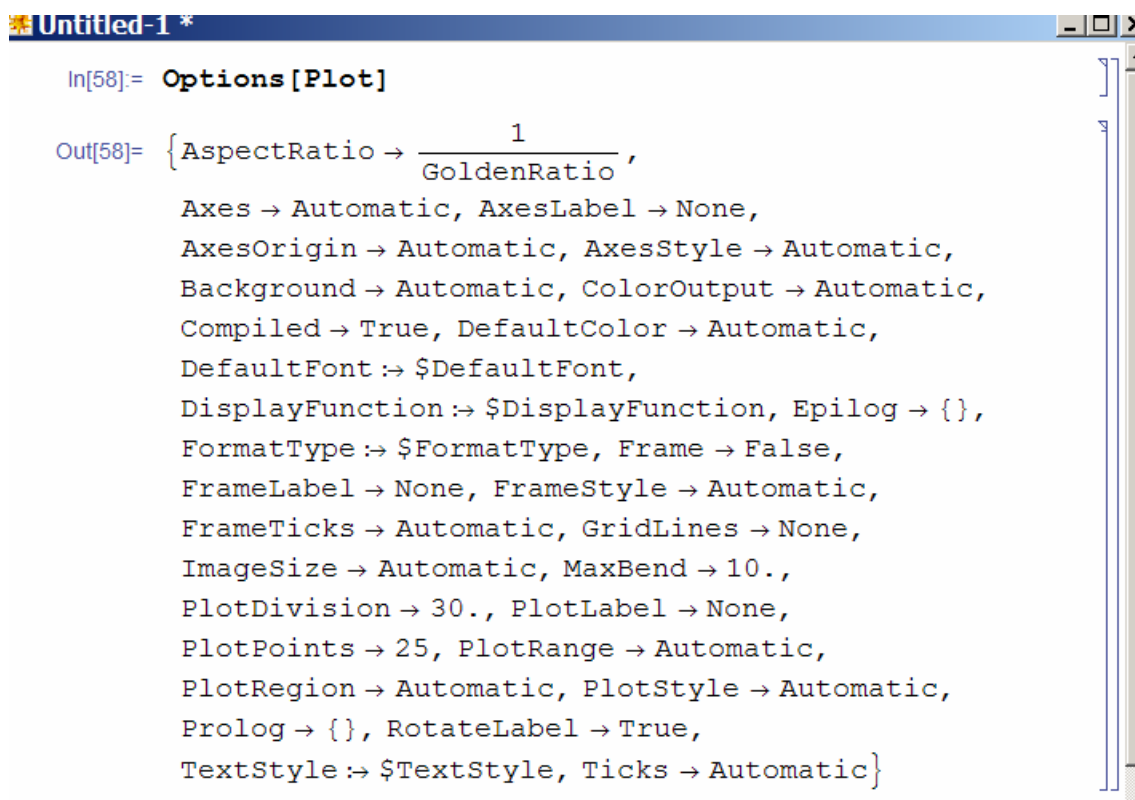
Assim:



Descobrimos opções para os comandos

Como o Mathematica apresenta inúmeras opções e configurações distintas para cada comando, a linguagem apresenta um método simplificado de obter uma lista das opções que podem ser utilizadas e a sintaxe das mesmas. Basta digitar **Options[comando]**.

Observe no software:



```

In[58]:= Options[Plot]

Out[58]= {AspectRatio ->  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ ,
  Axes -> Automatic, AxesLabel -> None,
  AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic,
  Background -> Automatic, ColorOutput -> Automatic,
  Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic,
  DefaultFont -> $DefaultFont,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, Epilog -> {},
  FormatType -> $FormatType, Frame -> False,
  FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic,
  FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None,
  ImageSize -> Automatic, MaxBend -> 10.,
  PlotDivision -> 30., PlotLabel -> None,
  PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic,
  PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic,
  Prolog -> {}, RotateLabel -> True,
  TextStyle -> $TextStyle, Ticks -> Automatic}

```

Plotando Gráficos em 3D

Esta seção do tutorial foi inteiramente revista, com novas instruções e opções, bem como uma explicação mais aprofundada dos comandos em 3D do Mathematica.

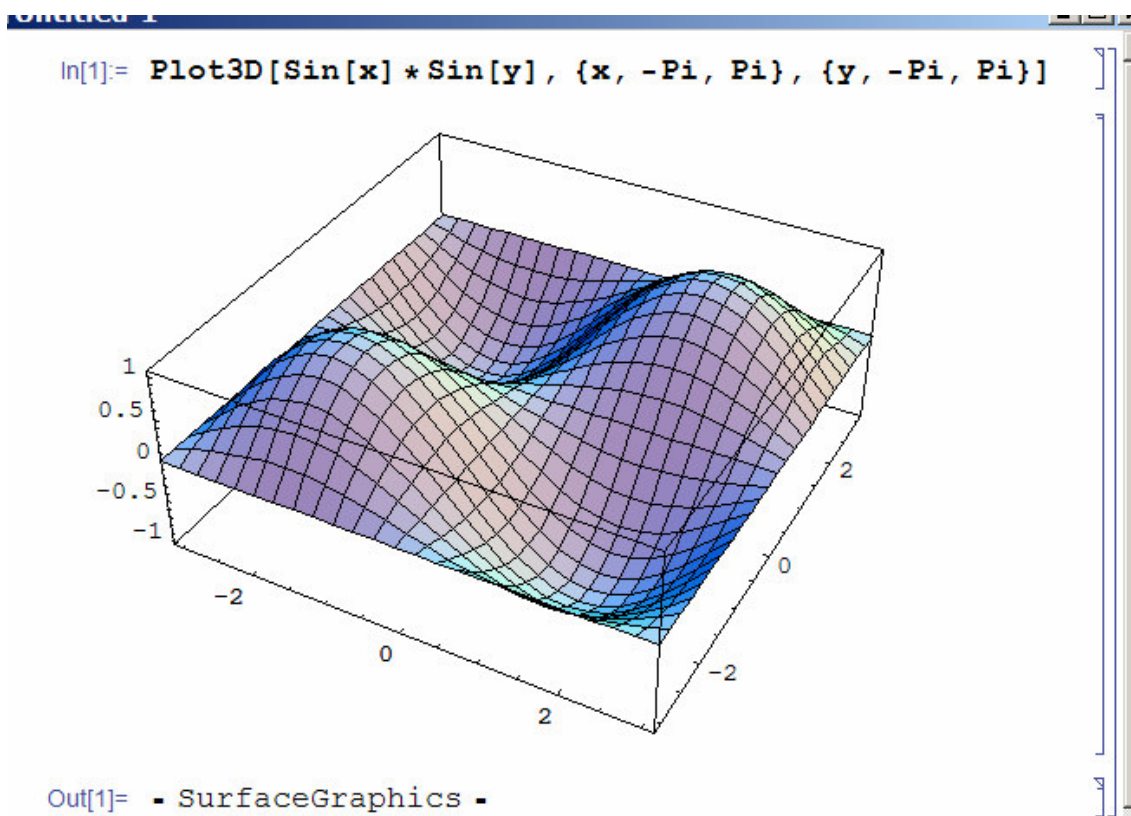
Gráficos em 3D simples

Primeiramente será mostrada a sintaxe e o comando básico de plotar em 3D: **Plot3D**, comando indispensável para o estudo de Cálculo 2, mostra gráficos de 2 variáveis em 3D.

Sintaxe:

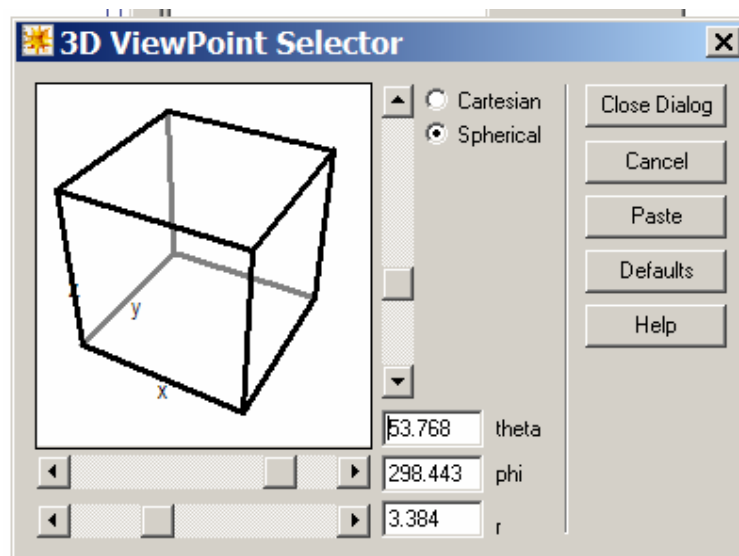
Plot3D[f[x,y], {x, x_{mín}, x_{máx}}, {y, y_{mín}, y_{máx}}]

Por exemplo:

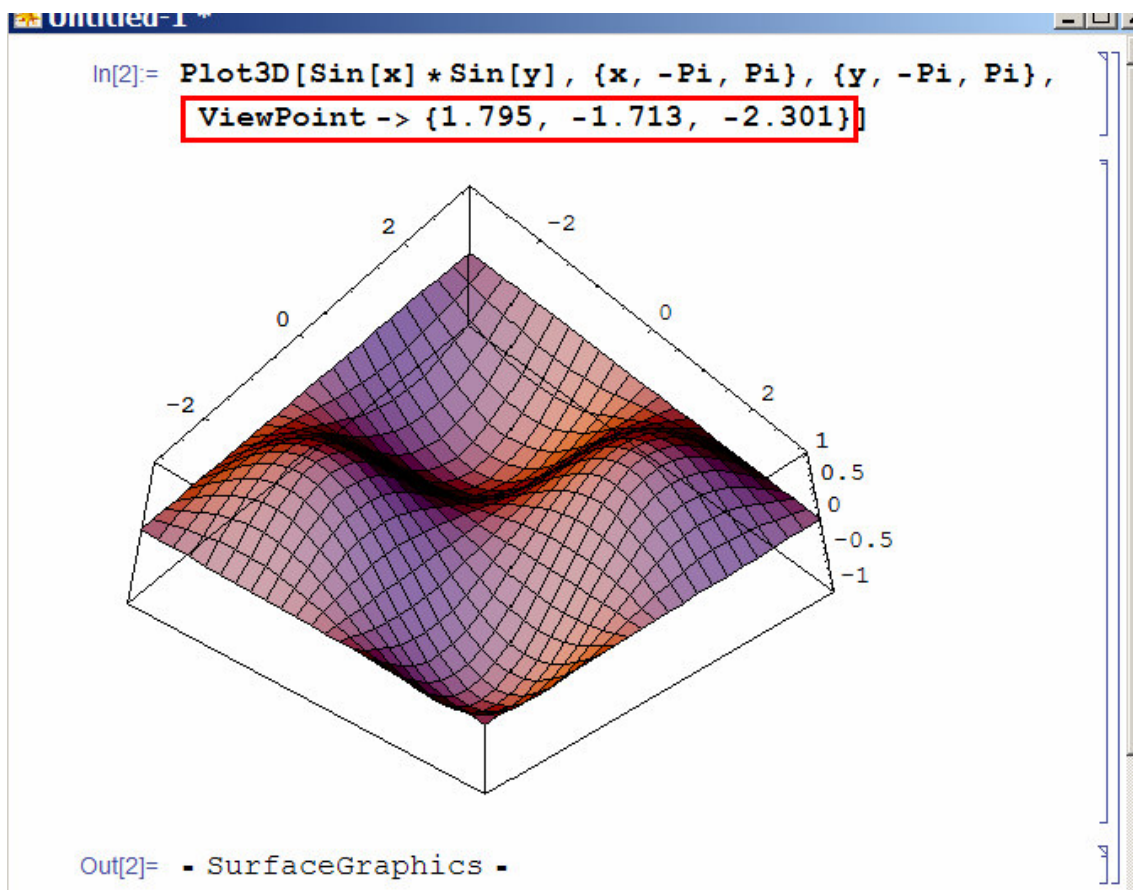


Para obter toda a funcionalidade da ferramenta, o Mathematica conta com um criador de pontos de vista (chamado em inglês de **3D Viewpoint Selector** - acionado pelo menu Input). Ele permite que o usuário escolha o ponto de vista que mais interessa.

Basta colocar uma vírgula após o último fechamento de chave e deixar o teclado posicionado ali, escolher o ângulo de visão digitando ou diretamente no cubo, e clicando em **Paste**.



A janela 3D ViewPoint Selector



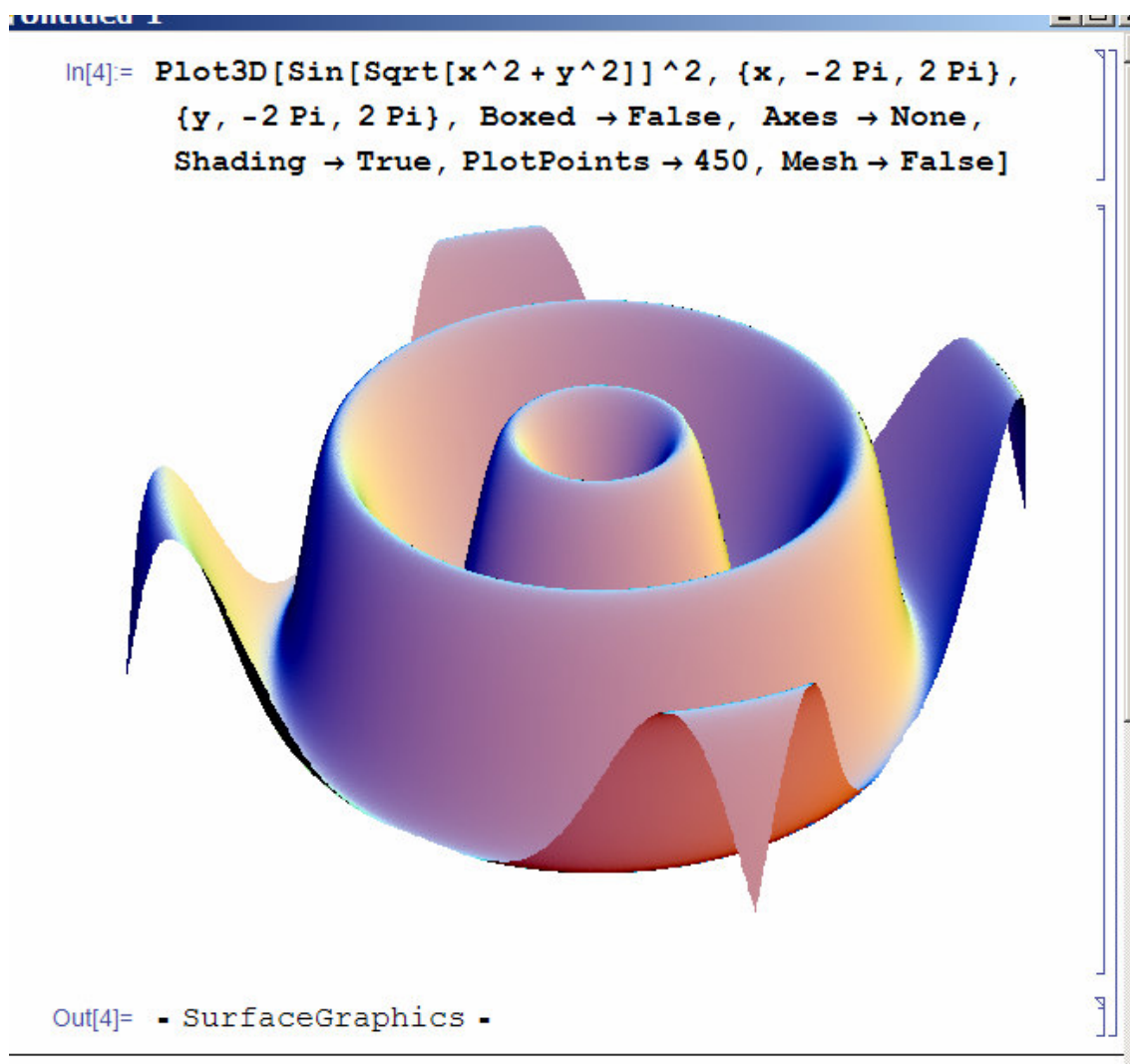
Assim fica o gráfico em um outro ângulo de visão. A parte destacada mostra a propriedade adicionada pela ferramenta.

Existem, assim como no comando **Plot**, várias propriedades que podem ser adicionadas para tornarem o gráfico mais limpo. Por exemplo:

- Boxed** : Escolhe se o gráfico terá ou não bordas;
- Axes** : Escolhe se o gráfico terá ou não os eixos;
- Shading**: Escolhe se o gráfico será "pintado" ou não;
- PlotPoints**: Determina o número de pontos de uma figura;
- Mesh**: Retira ou coloca linhas de construção.

E muitas outras opções. Cabe ao leitor dar uma procurada nelas e utilizá-las conforme o interesse.

Observe mais um gráfico interessante:



Curvas de nível

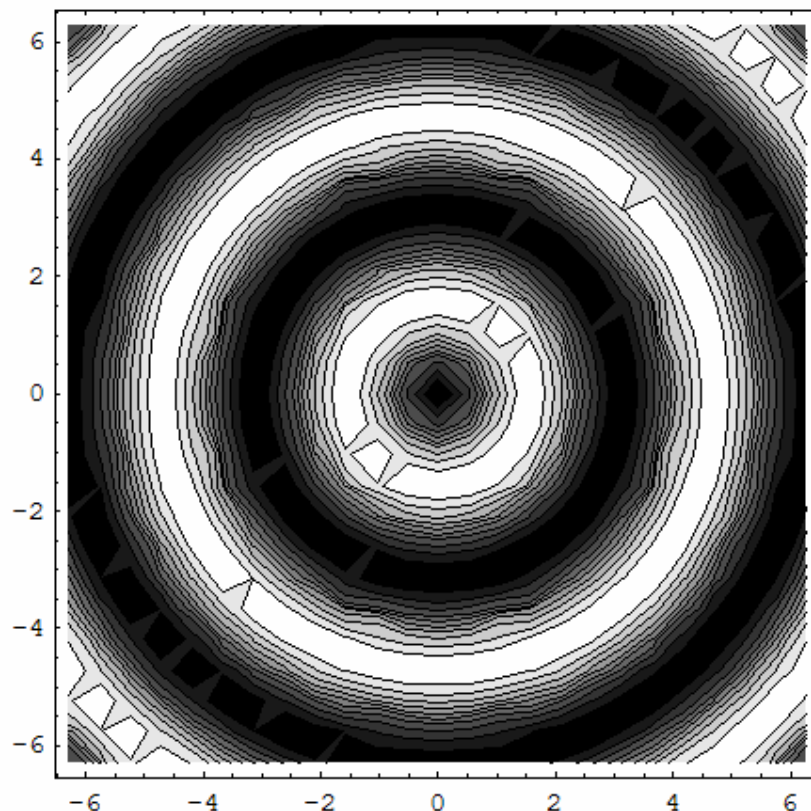
No Cálculo 2, curvas de nível possibilitam estudar os gráficos em 3D, encontrando intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, no plano do papel. O Mathematica possibilita a construção de tais curvas utilizando-se para isso o comando **ContourPlot**, de sintaxe:

ContourPlot[f(x,y), {x, x_{mín}, x_{máx}}, {y, y_{mín}, y_{máx}}]

Observe as curvas do gráfico acima:

Untitled-1

```
In[7]:= ContourPlot[Sin[Sqrt[x^2 + y^2]]^2,
                  {x, -2 Pi, 2 Pi}, {y, -2 Pi, 2 Pi}]
```



```
Out[7]= - ContourGraphics -
```

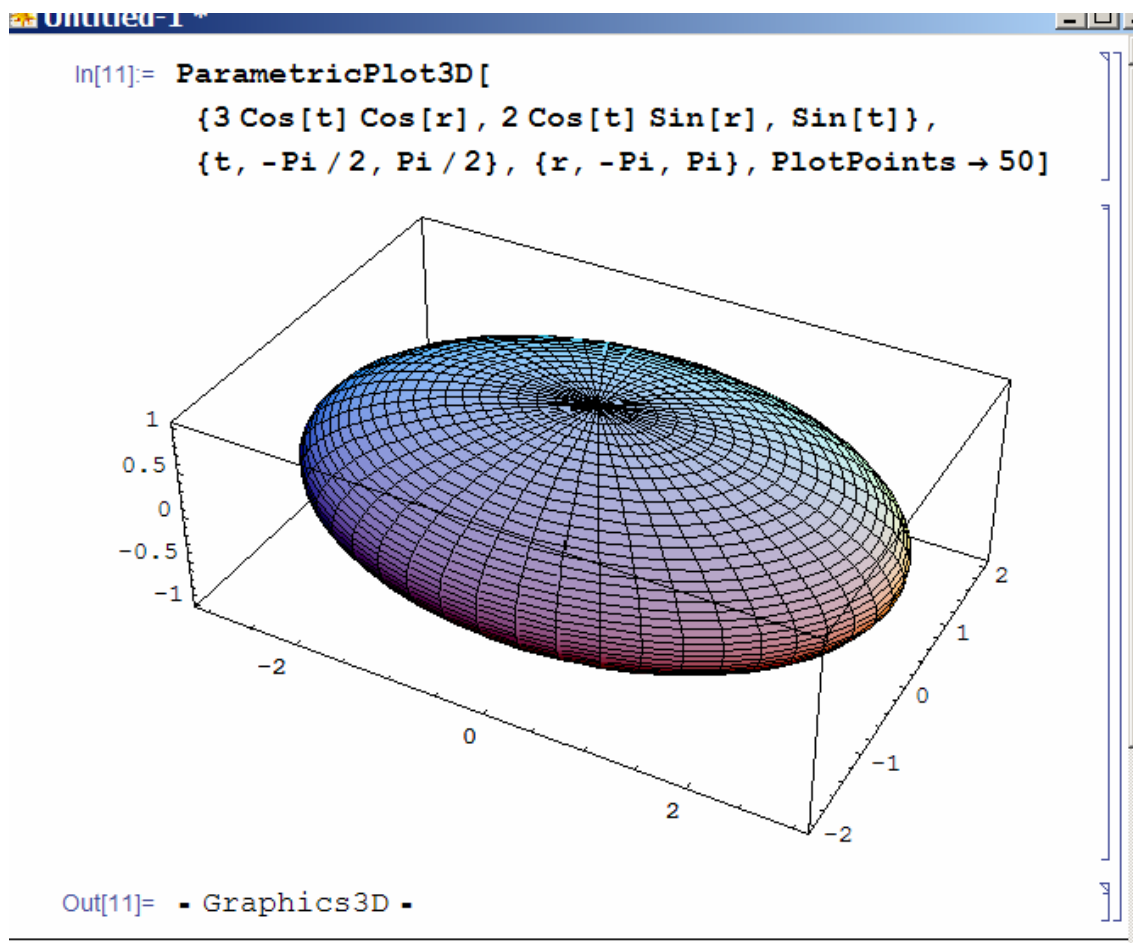
Gráficos em 3D paramétricos

No Mathematica, é possível, além de parametrizar gráficos em 2D, proceder da mesma forma no espaço. Bastando-se para isso, observar a sintaxe, idêntica à em 2D, porém, com uma variável a mais. Observe:

```
ParametricPlot3D[{x(t), y(t), z(t)}, {t, tmín, tmáx}]
```

Assim fica o gráfico do elipsóide, descrito pela equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \text{ feito pelo Mathematica.}$$



Gráficos de superfícies de revolução

Com o auxílio de mais um pacote do Mathematica, o **SurfaceOfRevolution**, como o nome sugere, permite a criação de superfícies de revolução.

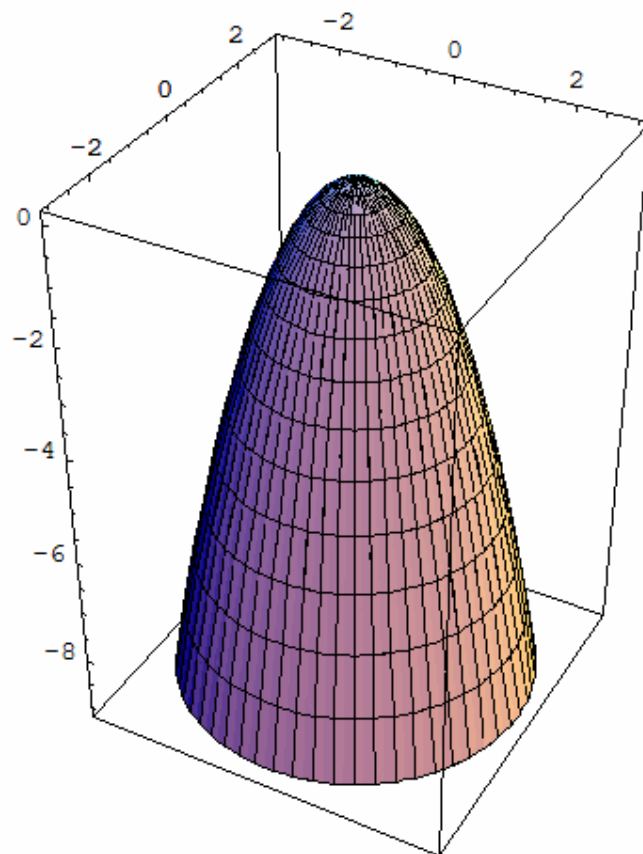
Lembre-se que antes de chamar o comando em si, é necessário utilizar a sintaxe `<<Graphics`Nome_Pacote`` (que chama qualquer pacote externo relacionado a gráficos).

Veja abaixo:

Untitled-1 *

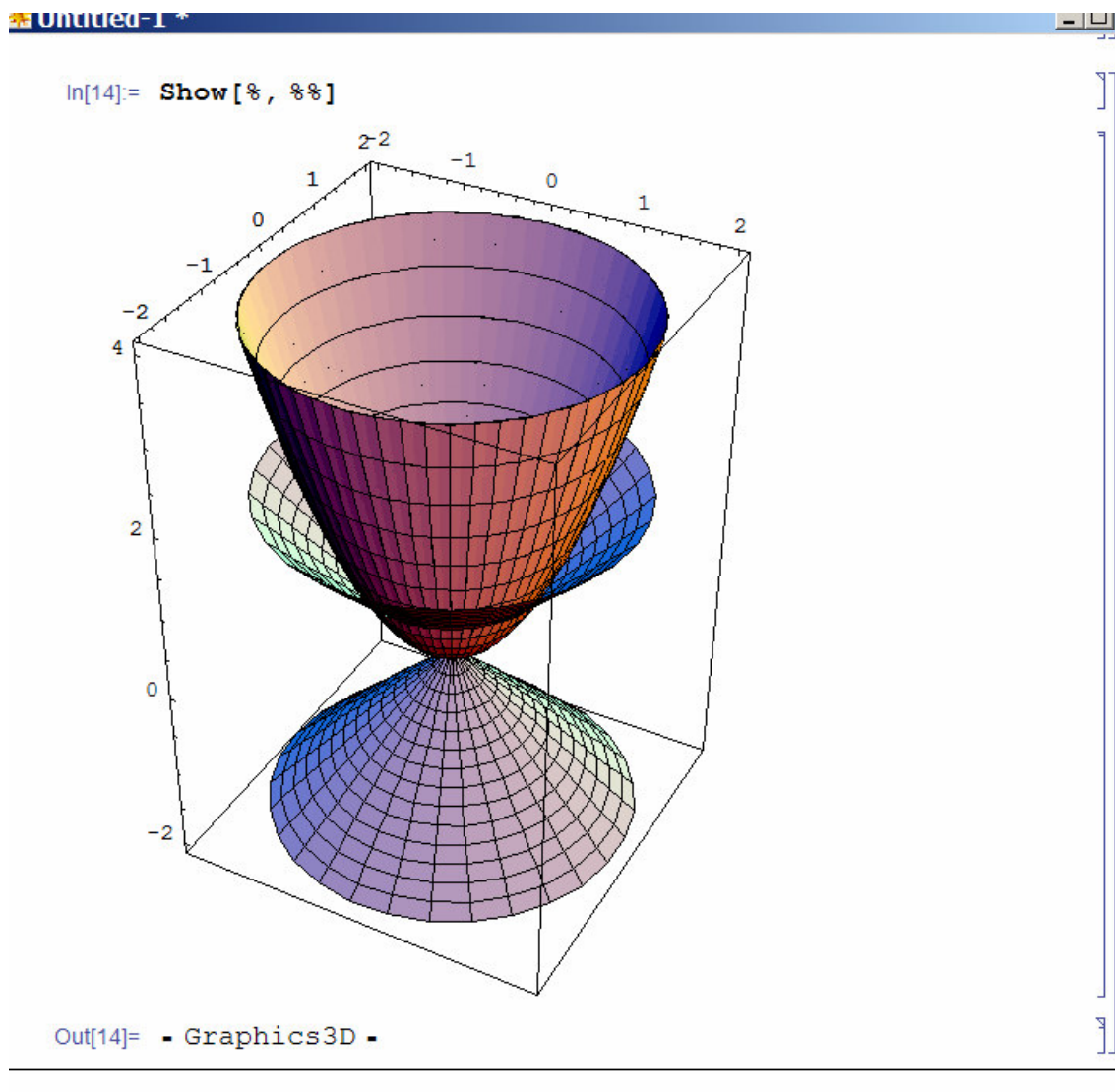
```
In[1]:= << Graphics`SurfaceOfRevolution`
```

```
In[4]:= SurfaceOfRevolution[-x^2, {x, -3, 3}]
```



```
Out[4]= - Graphics3D -
```

O comando **Show** combina gráficos e pode resultar em formas interessantes se utilizamos a memória do programa (% para o último resultado, %% para o penúltimo etc). Ele combina gráficos em 2 e 3 dimensões. Sendo útil para cortes em superfícies, veja:



Um cone interceptando um parabolóide.

O Mathematica para o Cálculo 1

Inúmeras funções do Mathematica podem ser implementadas no estudo do Cálculo 1. Iremos estudar neste tutorial as mais básicas e necessárias para o desenvolvimento dos exercícios propostos no livro-texto.

Cálculo de Limites

Para que o Mathematica calcule limites, basta entrar com o comando **Limit[expressão,x->ponto]**, onde ponto pode ser um número real, uma expressão, ou o termo **infinity** (infinito) - observação: **->** é feito utilizando-se os sinais de menos seguido do de maior.

Por exemplo, para calcular:

$$\lim_{s \rightarrow 4} \frac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$$

```

In[13]:= Limit[(3 s^2 - 8 s - 16) / (2 s^2 - 9 s + 4), s -> 4]

Out[13]= 16/7

```

Limites laterais também podem ser calculados, bastando utilizar a opção **direction**, seguida do valor -1 (para limites laterais à direita) ou +1 (para limites laterais à esquerda).

Assim, a sintaxe fica:

Limit[expressão, x->ponto, Direction-> ±1]

Observe:

```

In[14]:= Plot[1 / x, {x, -5, 5}]

Out[14]= Graphics -

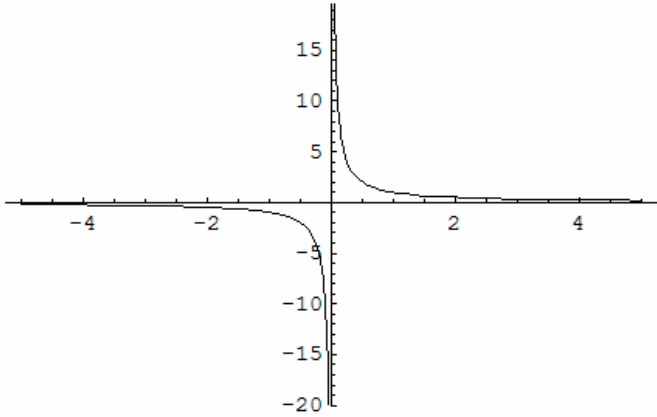
In[20]:= Limit[1 / x, x -> 0, Direction -> -1]

Out[20]= ∞

In[19]:= Limit[1 / x, x -> 0, Direction -> 1]

Out[19]= -∞

```



Cálculo de Derivadas

Existem várias formas de se calcular uma derivada no Mathematica:

F'[x] - que calcula a derivada de f em relação a x (se quiser calcular a n -ésima derivada, basta por F , seguida de n aspas simples);

D[F[x],x] - realiza o mesmo procedimento acima;

D[F[x],{x,n}] - calcula a n -ésima derivada de $f(x)$ com relação a x

D[expressão, variável] - calcula a derivada de uma expressão em função de uma variável.

D[expressão, {variável,n}] - calcula a n -ésima derivada de uma expressão em função de uma variável.

```

In[21]:= f[k_] = Cos 3 k - (Sin 2 k)^2 + 16 k
Out[21]= 16 k + 3 Cos k - 4 k^2 Sin^2

In[22]:= f'[k]
Out[22]= 16 + 3 Cos - 8 k Sin^2

In[23]:= D[f[k], k]
Out[23]= 16 + 3 Cos - 8 k Sin^2

In[30]:= D[f[k], {k, 2}]
Out[30]= -8 Sin^2

In[32]:= f''[k]
Out[32]= -8 Sin^2

```

O comando **Dt[expressão,variável]**, faz a derivada total de uma expressão, podendo ser utilizado em conjunto com o comando **Solve** para obter a diferenciação implícita de uma dada função. Veja:

```

In[45]:= f[x_] := x^2 + y^2 == 16

In[46]:= f[x]

Out[46]= x^2 + y^2 == 16

In[47]:= Dt[f[x], x]

Out[47]= 2 x + 2 y Dt[y, x] == 0

In[48]:= Solve[%, Dt[y, x]]

Out[48]= {{Dt[y, x] -> -x/y}}

```

Cálculo de Integrais

Somatórias simples são calculadas no Mathematica utilizando-se o comando **Sum[f(i), {i, i_{mín}, i_{máx}}]**.

Já para o cálculo de integrais simples, dois comandos necessitam ser guardados, veja:

Integrate[expressão, variável] : Calcula a integral indefinida.

Integrate[expressão, {var, a, b}] : calcula a integral definida, onde a e b são os extremos de integração.

Para facilitar, pode-se clicar também na barra de comandos rápidos, e no símbolo de integração.

No programa, fica:

```

Untitled-1 *

In[49]:= Integrate[x^3 + 3 x, x]

Out[49]= 3 x^2 / 2 + x^4 / 4

In[50]:= Integrate[%, {x, c, d}]

Out[50]= 1 / 20 (-10 c^3 - c^5 + 10 d^3 + d^5)

In[55]:= Sum[1 / (n - 1), {n, 5, 50}]

Out[55]= 8199675096021474398231 / 3099044504245996706400

```

O Mathematica para o Cálculo 2

De maneira semelhante ao Cálculo 1, o Mathematica pode ser utilizado no estudo das disciplinas subsequentes. Veja abaixo algumas das mais utilizadas funções que englobam conceitos de Cálculo 2.

Funções Vetoriais

Funções vetoriais (ou curvas) são definidas de modo a serem formadas por vetores parametrizados (todas as componentes do **vetor** dependem de um dado **parâmetro**, digamos, **t**).

Veja abaixo um passo a passo de como obter as equações paramétricas de uma reta tangente a uma curva dada.

```

Definindo a função vetorial r (t) :
r[t_] := {Sin[π t], Sqrt[t], Cos[π t]}

In[4]:= r[t]
Out[4]= {Sin[π t], √t, Cos[π t]}

Encontrando um valor possível do parâmetro
a fim de que se obtenha o vetor (0, 1, -1)
Solve[r[t] == {0, 1, -1}]

Out[5]= {{t → 1}}

Calculando a derivada da função aplicada em t = 1 :

In[6]:= r'[1]
Out[6]= {-π, 1/2, 0}

Para chegar nas equações paramétricas da
reta tangente à esta função vetorial, fazemos :
r[1] + r'[1] * s

In[8]:= retatangente[s_] := r[1] + r'[1] * s

In[9]:= retatangente[s]
Out[9]= {-π s, 1 + s/2, -1}

```

Derivadas parciais

O comando `D[f[x,y,z],var]` deriva uma função `f` parcialmente em função da variável `var` definida.

Da mesma forma que em derivadas convencionais, é possível calcular a derivada n -ésima fazendo-se `[f[x,y,z],{var,n}]`.

Observe:

```

In[17]:= f[x_, y_, z_] := y*x^4 + x*y^3 + z^2

In[18]:= D[f[x, y, z], x]

Out[18]= 4 x^3 y + y^3

In[19]:= D[f[x, y, z], y]

Out[19]= x^4 + 3 x y^2

In[20]:= D[f[x, y, z], z]

Out[20]= 2 z

In[22]:= D[f[x, y, z], {x, 2}]

Out[22]= 12 x^2 y

In[23]:= D[f[x, y, z], {y, 3}]

Out[23]= 6 x

```

Máximos e Mínimos

Vetor Gradiente

Para esta função, faz-se necessário carregar o pacote **VectorAnalysis**. Para tal, digite `<<Calculus`VectorAnalysis`` na linha de comando do Mathematica.

O vetor **gradiente** de uma função permite obter a **taxa de crescimento** de uma função de duas ou mais variáveis (atua de maneira semelhante à derivada, no Cálculo 1). Também vale zero quando em um **ponto crítico**.

É definido por: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.

Untitled-1

```
In[27]:= << Calculus`VectorAnalysis`
```

```
In[32]:= Grad[f[x, y, z], Cartesian[x, y, z]]
```

```
Out[32]= {4 x^3 y + y^3, x^4 + 3 x y^2, 2 z}
```

A função **Cartesian** descreve o sistema de coordenadas utilizado e seus respectivos eixos.

Hessiana

A matriz hessiana fornece algumas informações sobre um ponto crítico de uma função $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e é definida por:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, \text{ as derivadas parciais são avaliadas no}$$

ponto que se deseja analisar. Basta analisar as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } f_{xx} > 0 \text{ e } \det H > 0, \text{ temos um ponto de mínimo local.} \\ \text{Se } f_{xx} < 0 \text{ e } \det H > 0, \text{ temos um ponto de máximo local.} \\ \text{Se } \det H < 0, \text{ temos um ponto de sela (inflexão)} \\ \text{Se } \det H = 0, \text{ nada se conclui.} \end{array} \right.$$

Untitled-1 *

```
z[x_, y_] := x^2 + y^2
```

```
D[z[x, y], {{x, y}, 2}] → Isto calcula a Hessiana
```

```
Out[62]= {{2, 0}, {0, 2}}
```

```
In[63]:= MatrixForm[%]
```

```
Out[63]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In[64]:= Det[%]
```

```
Out[64]= 4
```

```
fxx > 0 e Det > 0 → Mínimo Local
```

Integrais duplas e triplas

Para se calcular integrais duplas e triplas procede-se de maneira semelhante ao cálculo de integrais simples, sendo que agora a **expressão** pode conter outra integral, observe:

```

In[66]:= ∫ ∫ (x * E ^ (x * y)) dx dy
Out[66]=  $\frac{e^{xy}}{y}$ 

In[67]:= ∫01 ∫12 (x * E ^ (x * y)) dx dy
Out[67]= -1 - e + e2

Ou :

In[68]:= Integrate[Integrate[x * E ^ (x * y), x], y]
Out[68]=  $\frac{e^{xy}}{y}$ 

In[69]:= Integrate[Integrate[x * E ^ (x * y), {x, 1, 2}], {y, 0, 1}]
Out[69]= -1 - e + e2

```

Observe que neste caso, é melhor expressar a integral graficamente, evitando o uso da função escrita (isto poderá confundir na hora de inserir o intervalo de integração, principalmente quando o cálculo envolver três integrais).

Rotacional e divergente

Finalizando os conceitos de Cálculo 2, existem duas definições particularmente importantes:

Rotacional: mostra a tendência de um campo vetorial girar ao redor de um ponto. Ex.: o campo de velocidades de um fluido. Um campo cujo rotacional é **nulo** é dito **conservativo**. É um vetor definido pela operação:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (Py - Qz, Pz - Rx, Qx - Py)$$

No Mathematica, tal operação é definida por **Curl[F]**.

Divergente: mostra o fluxo de um campo vetorial em uma dada área. É definido pela operação:

$$\nabla \cdot F = Px + Qy + Rz$$

No Mathematica, tal operação é definida por **Div[F]**.

Veja:

```

In[72]:= << Calculus`VectorAnalysis`

In[70]:= F[x_, y_, z_] := {y z E^(x z), E^(x z), x y E^(x z)}

In[71]:= F[x, y, z]

Out[71]= {exz y z, exz, exz x y}

      Curl[F[x, y, z]]

      {0, 0, 0}

In[76]:= Div[F[x, y, z]]

Out[76]= 0

```

O Mathematica para o Cálculo 3

Dos assuntos mais importantes do Cálculo 3, podemos destacar equações diferenciais (e todos seus tipos) e séries (numéricas e de potências).

O Mathematica possibilita com razoável facilidade a aplicação destes assuntos, contendo funções para resolver os problemas deste curso.

Equações diferenciais e sistemas

Das equações diferenciais mais básicas, existem inúmeros tipos (homogêneas ou não, lineares, ordens variadas, coeficientes variáveis, constantes etc.). Todas elas podem ser resolvidas utilizando-se basicamente um único comando, **DSolve**.

A sintaxe do comando é a seguinte:

DSolve[equação, função, var.independente].

Por exemplo, quando se deseja calcular a função $y(x)$, deve-se fazer: **DSolve[equação, y[x], x]**.

Seguem-se exemplos variados de equações diferenciais resolvidas no Mathematica.

Primeira ordem:

```
In[77]:= DSolve[x^3*y'[x] + 4 x^2*y[x] == E^(-x), y[x], x]
```

```
Out[77]= {{y[x] -> \frac{e^{-x} (-1 - x)}{x^4} + \frac{C[1]}{x^4}}}
```

```
In[78]:= DSolve[y'[x] == (x (x^2 + 1)) / 4 y[x]^3, y[x], x]
```

```
Out[78]= {{y[x] -> -\frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{-2 x^2 - x^4 - 16 C[1]}},
           {y[x] -> \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{-2 x^2 - x^4 - 16 C[1]}}}}
```

Observe que o Mathematica chama de **C[n]** as constantes que aparecem nas soluções gerais das equações diferenciais.

Segunda ordem (homogêneas ou não):

```
In[82]:= DSolve[y''[x] + 4 y'[x] + 4 y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[82]= {{y[x] -> e^{-2 x} C[1] + e^{-2 x} x C[2]}}
```

```
In[85]:= DSolve[x^2*y''[x] - 4 x*y'[x] + 6 y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[85]= {{y[x] -> x^2 C[1] + x^3 C[2]}}
```

```
In[83]:= DSolve[y''[x] + 4 y[x] == x^2 + 3 E^x, y[x], x]
```

```
Out[83]= {{y[x] -> C[1] Cos[2 x] + C[2] Sin[2 x] +
           \frac{1}{40} (-5 + 24 e^x + 10 x^2) (Cos[2 x]^2 + Sin[2 x]^2)}}
```

```
In[84]:= Simplify[%]
```

```
Out[84]= {{y[x] -> -\frac{1}{8} + \frac{3 e^x}{5} + \frac{x^2}{4} + C[1] Cos[2 x] + C[2] Sin[2 x]}}
```

Problemas de valor inicial:

Para resolver PVIs, basta modificar a sintaxe da função para receber uma lista de equações, de modo a ficar da seguinte forma:

```
DSolve[{equação, cond1, cond2, ...}, y[x], x]
```

Observe:

Resolva o PVI abaixo:

$9y'' + 6y' + 82y = 0$, com $y(0) = -1$ e $y'(0) = 2$.

No Mathematica, fica:

```
In[86]:= DSolve[{9 y''[x] + 6 y'[x] + 82 y[x] == 0, y[0] == -1, y'[0] == 2}, y[x], x]
Out[86]= {{y[x] -> -1/9 e^{-x/3} (9 Cos[3 x] - 5 Sin[3 x])}}
```

Sistemas de equações diferenciais:

Da mesma forma que nos PVIs, novamente é requerida uma alteração na sintaxe para a adição de mais equações, assim:

`DSolve[{equação1, equação2, ..., cond1, cond2, ...}, {y1[x], y2[x] ...}, x]`

Resolver o problema de valor inicial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \text{ com } \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untitled-1

Isto é equivalente a :

```
y1'[x] = y1[x] + y2[x] + 2 y3[x]
y2'[x] = 2 y2[x] + 2 y3[x]
y3'[x] = -y1[x] + y2[x] + 3 y3[x]
y1[0] = 2 ; y2[0] = 0 ; y3[0] = 1
```

Então

```
In[90]:= DSolve[{y1'[x] == y1[x] + y2[x] + 2 y3[x], y2'[x] == 2 y2[x] + 2 y3[x],
  y3'[x] == -y1[x] + y2[x] + 3 y3[x], y1[0] == 2, y2[0] == 0, y3[0] == 1},
  {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]
```

```
Out[90]= {{y1[x] -> 2 e^{2 x}, y2[x] -> 2 e^x (-1 + e^x), y3[x] -> e^x}}
```

Seqüências e séries

Seqüências:

Para o estudo de seqüências, é interessante saber se uma determinada seqüência é **convergente** (por meio de cálculo de limites) e encontrar os **n** primeiros termos das mesmas. O comando **Table** permite visualizar tais termos, bastando-se utilizar a sintaxe `Table[f[n], {n, mín, Max}]`.

Observe:

```
In[93]:= Table[(5 n + 1) / (3 n - 2), {n, 0, 10}]
```

```
Out[93]= {-1/2, 6, 11/4, 16/7, 21/10, 2, 31/16, 36/19, 41/22, 46/25, 51/28}
```

```
In[94]:= Limit[(5 n + 1) / (3 n - 2), n → ∞]
```

```
Out[94]= 5/3
```

Observe que esta sequência é convergente (o limite existe)

Séries:

Para séries, dois comandos são úteis, o já utilizado neste tutorial **Sum** (faz somatórios, se o limite superior vai ao infinito, o Mathematica retorna na forma de erro se a série é divergente e permite o cálculo do valor de convergência caso contrário).

Também útil é o comando **Series**, que expande qualquer função em uma série de potências.

Observe:

Basta usar o botão ao lado, na barra de ferramentas, ou digitar `Sum[f[n], {n, min, max}]`

```
In[97]:= Sum[1 / n, {n, 0, ∞}]
```

```
Sum::div : Sum does not converge. More...
```

```
Sum::div : Sum does not converge. More...
```

```
Out[97]= ∑n=0∞ 1/n
```

Esta série é divergente.

```
In[99]:= Sum[(-1)^n * (1 / n), {n, 1, ∞}]
```

```
Out[99]= -Log[2]
```

Esta série é convergente e converge para $-\ln(2)$

O comando **Series** tem sintaxe:

```
Series[f, {x, x0, n}]
```

Isto gerará a série de potências da função **f**, relativa à variável **x**, a partir do ponto **x0** até a ordem **n**.

Note alguns exemplos:

```
In[103]:= Series[E^x, {x, 0, 6}]
```

$$\text{Out[103]}= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + O[x]^7$$

```
In[104]:= Series[Sin[x], {x, \pi, 8}]
```

$$\text{Out[104]}= -(x - \pi) + \frac{1}{6} (x - \pi)^3 - \frac{1}{120} (x - \pi)^5 + \frac{(x - \pi)^7}{5040} + O[x - \pi]^9$$

$O[x]^7$ representa os demais termos da série.

Você pode truncar a série (se quiser plotar, por exemplo) usando a função **Normal**. Assim :

```
In[105]:= Normal[%]
```

$$\text{Out[105]}= \pi - x + \frac{1}{6} (-\pi + x)^3 - \frac{1}{120} (-\pi + x)^5 + \frac{(-\pi + x)^7}{5040}$$

```
In[106]:= Normal[Series[E^x, {x, 0, 6}]]
```

$$\text{Out[106]}= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

Manipulando listas e matrizes no Mathematica

O Mathematica, como já foi dito na introdução, é um software multidisciplinar. Esta nova seção do tutorial mostra como o software pode facilitar cálculos, utilizando-se de tabelas de dados e matrizes.

Agora você pode, por exemplo, testar várias funções de uma só vez, exibindo concomitantemente os resultados, usando-se das tabelas de dados.

A lista de operações com matrizes é grande, iremos citar no tutorial as mais importantes, como cálculo de determinante, inversa, autovalores e autovetores (importantes em engenharia, e usados em disciplinas como álgebra linear, por exemplo).

Criando listas de dados

No Mathematica é bem simples criar listas de dados, bastando-se digitar: **{dado1,dado2,dado3,...,dadoN}**. Você pode defini-la como uma variável qualquer, e realizar operações com ela, veja no exemplo abaixo:

Exemplo 1

```

In[56]:= f[x_] := x^2

In[58]:= L = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Out[58]= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

In[59]:= f[L]

Out[59]= {1, 4, 9, 16, 25, 36}

```

Operações importantes de listas de dados

Como no C, o Mathematica possibilita inúmeras operações com listas de dados (arrays), veja algumas:

L[[n]]	Retorna o n-ésimo elemento da lista;
First[lista]	Retira o primeiro elemento de uma lista;
Last[lista]	Retira o último elemento de uma lista;
Rest[lista]	Retorna a lista sem o primeiro elemento;
Part[lista,n]	Retira o n-ésimo elemento de uma lista;
Part[lista, n-]	Retira o n-ésimo elemento de uma lista, contando do final para o começo;
Take[lista, n]	Retira os primeiros n elementos de uma lista;
Take[lista, n-]	Idem começando do final para o começo;
Take[lista, {m,n}]	Retira os elementos de m a n;
Drop[lista, n]	Apaga os n primeiros elementos de uma lista;
Drop[lista, {n}]	Apaga o n-ésimo elemento da lista;
Prepend[lista, elemento]	Coloca o elemento no início da lista;
Append[lista, elemento]	Coloca o elemento no final da lista;
Insert[lista, elemento, n]	Coloca o elemento na posição n da lista;
Delete[lista, n]	Apaga o n-ésimo elemento da lista;
Union[lista1, ..., listaN]	Cria uma única lista com todos os elementos de lista1, lista2, ..., listaN. Não repete elementos;
Intersection[lista1, listaN]	Faz a intersecção das n listas;
Complement[lista1, listaN]	Encontra o complementar das listas;
Partition[lista, n]	Transforma a lista em uma nova lista na qual cada elemento é uma lista com n elementos;
Length[lista]	Retorna o tamanho de uma lista.

A função **Matrixform[lista]** retorna a lista ou tabela, na forma matricial.

Operações básicas com matrizes

As matrizes são criadas de maneira semelhante a listas, por exemplo, uma matriz 3x3 é criada da seguinte maneira:

M(3x3) = {{a₁₁, a₁₂, a₁₃}, {a₂₁, a₂₂, a₂₃}, {a₃₁, a₃₂, a₃₃}}

As operações de soma, subtração, produto e divisão procedem da mesma maneira a números reais. Há ainda comandos próprios de matrizes, entre os quais:

Transpose[M] - retorna a transposta de M;
MatrixPower[M,n] - retorna a n-ésima potência de M;
Inverse[M] - retorna a inversa de M;
Det[M] - encontra o determinante da matriz M;
IdentityMatrix[n] - define uma matriz identidade de ordem n;
DiagonalMatrix[lista] - cria uma matriz onde os elementos da diagonal pertencem à lista e o restante são zeros.

Para encontrar os autovalores e autovetores associados a uma matriz M, existem 3 comandos:

Eigenvalues[M] - encontra os autovalores;
Eigenvectors[M] - encontra os autovetores;
Eigensystem[M] - encontra os autovalores, seguido dos autovetores.

Para aprender mais sobre o Mathematica

Para aprender mais no Mathematica, cabe ao usuário treinar e praticar, e aos poucos novos comandos e maneiras mais eficientes de calcular são descobertas e, com isso, a experiência será gradativamente aprimorada.

Há também a possibilidade de se encontrar na Internet tutoriais como este, além de outros mais avançados e completos, bem como sites com um bom conteúdo a respeito desse fantástico software.

Procurando na Internet, encontrei alguns sites que julgo interessante divulgá-los em meu trabalho.

<http://www.ime.unicamp.br/~marcio/> - Página da Web do Prof. Márcio Rosa, da Unicamp. Contém uma seção dedicada ao ensino de cálculo com auxílio da informática - entre em Teia, depois em bate-papo sobre informática - lá você poderá encontrar este tutorial, bem como tutoriais de outros alunos, além de dicas do próprio docente. Há também nas seções das disciplinas as provas resolvidas utilizando o Mathematica - um estímulo a aprender a mexer no Software. Vale dar uma espiada.

<http://www.wolfram.com/> - Site do produtor do programa, em inglês. Apresenta um vasto material com links e tutoriais, bem como sites com tecnologias variadas que podem ser obtidas com o software. Destaca-se pela variedade. Por exemplo, o **WolframTones**, que utiliza comandos matemáticos para gerar tons de celular.

<http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambienteensino/maodupla/> - Site da Unicamp, o Mão Dupla também disponibiliza tutorial completo de uma versão um pouco mais antiga do Mathematica, mas que nada fica devendo para as atuais. Ainda fornece um campo para que o estudante tire sua dúvida no próprio site.

<http://www.gregosetroianos.mat.br/softmathematica.asp> - este site conta um pouco da história dos CAS, e também mostra a versatilidade do programa apresentado neste tutorial. Muito interessante e também conta com links úteis para o ensino de cálculo.

<http://www.somatematica.com.br/> - Site sobre matemática em geral, vários níveis, desde o fundamental até o superior, requer que seja feito um cadastro (é rápido), mas vale a pena. Apresenta um grande conteúdo e também fala um pouco dos softwares matemáticos.

<http://library.wolfram.com/> - Por fim, a biblioteca do produtor, com milhares de referências sobre o Mathematica. É, por assim dizer, o Google dos Mathematicos.

Seguem agora três apêndices, o primeiro contendo teclas de atalho úteis para a rapidez nos cálculos efetuados com o Mathematica, o segundo, contendo a resolução de alguns exercícios abrangendo os tópicos mais importantes do curso de cálculo e o último, um breve comentário sobre as funções para cálculo numérico de integrais, quando não existem primitivas para certas funções.

Apêndice 1: Usando linguagem matemática tradicional no Mathematica

Se você não quer decorar comandos estranhos, há no Mathematica um jeito de inserir símbolos matemáticos utilizando os comandos da tabela abaixo:

Comando	Resultado
<code>int</code>	Símbolo de integral
<code>sumt</code>	Símbolo de somatória
<code>prodt</code>	Notação de produtório
<code>ee</code>	Notação de exponencial. Mesmo que E.
<code>ii</code>	Representação da unidade imaginária. Mesmo que I.
<code>inf</code>	Símbolo de infinito
<code>deg</code>	Símbolo de graus
<code>elem</code>	Pertence
<code>un</code>	União
<code>inter</code>	Intersecção
<code>a</code>	Alfa
<code>b</code>	Beta
<code>g</code>	Gama
<code>d</code>	Delta minúsculo
<code>e</code>	Épsilon
<code>z</code>	Zeta
<code>et</code>	Eta
<code>th</code>	Teta
<code>k</code>	Kapa
<code>l</code>	Lambda
<code>m</code>	Mi
<code>n</code>	Ni
<code>x</code>	Csi
<code>Pi</code>	Pi
<code>r</code>	Ro
<code>s</code>	Sigma
<code>t</code>	Tau
<code>ph</code>	Fi
<code>cph</code>	Fi (curvo)
<code>c</code>	Chi
<code>os</code>	Psi
<code>o</code>	Ômega
<code>G</code>	Gama maiúsculo
<code>D</code>	Delta maiúsculo
<code>Th</code>	Teta maiúsculo
<code>L</code>	Lambda maiúsculo
<code>T</code>	Csi maiúsculo
<code>Ph</code>	Fi maiúsculo
<code>Ps</code>	Psi maiúsculo
<code>O</code>	Ômega maiúsculo

Tecclas de Atalho

⏏ representa a tecla **Escape**.
(isto quer dizer que as expressões acima devem ser digitadas entre escapes)

Ctrl+2: símbolo de raiz quadrada;

Ctrl+6: entra um expoente, ou o intervalo final de integração;

Ctrl+5: usado após o anterior, entra o intervalo inicial de integração;

Ctrl+Space: sai de um expoente e permite a digitação em um nível abaixo;

Ctrl+/: faz uma barra fracionária

TAB: muda de quadro para digitação.

Apêndice 2:

Funções internas para avaliação de certas integrais

Existem funções cujas primitivas não podem ser expressas de forma fechada. A fim de possibilitar a avaliação aproximada dos valores em determinados intervalos, o Mathematica possui inúmeras funções internas que representam os resultados destas integrais.

Alguns exemplos destas integrais mais conhecidos são:

$$\int \frac{\text{Sen}(x)}{x} dx$$

$$\int \frac{\text{Cos}(x)}{x} dx$$

$$\int e^{-x^2} dx$$

Estas integrais possuem algumas características importantes, como permitir obter valores aproximados para constantes numéricas (o número π , por exemplo) ou mesmo ter significado em segmentos matemáticos (a última integral descrita é a chamada função-erro, da curva Gaussiana, importantíssima em estatística).

Observe o que acontece no Mathematica quando pedimos as primitivas de tais funções (e alguns valores conhecidos calculados para estas integrais).

$\text{In}[1]:= \int \frac{\text{Sin}[x]}{x} dx$	$\text{In}[11]:= 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}[x]}{x} dx$
$\text{Out}[1]= \text{SinIntegral}[x]$	$\text{Out}[11]= \pi$
$\text{In}[2]:= \int \frac{\text{Cos}[x]}{x} dx$	$\text{In}[12]:= \int_5^{10} E^{(-x^2)} dx$
$\text{Out}[2]= \text{CosIntegral}[x]$	$\text{Out}[12]= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (-\text{Erf}[5] + \text{Erf}[10])$
$\text{In}[5]:= \int E^{(-x^2)} dx$	$\text{In}[13]:= \text{N}[\%]$
$\text{Out}[5]= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{Erf}[x]$	$\text{Out}[13]= 1.36252 \times 10^{-12}$

SinIntegral[x], **CosIntegral[x]**, **Erf[x]** são apenas alguns exemplos de funções internas do Mathematica para este tipo de situação.

Apêndice 3:

Resolvendo exercícios de Cálculo no Mathematica

O Mathematica pode ser um ótimo subsídio tanto para estudo como para pessoas que trabalham com cálculo. É muito simples e visual perceber o comportamento de funções e resultados de problemas clássicos do cálculo 1.

Veja alguns exemplos abaixo, de como o Mathematica pode facilitar a resolução dos mesmos.

(O Mathematica também facilita a resolução de exercícios que exigem apenas aplicação de fórmula, mas estes não serão abordados aqui, uma vez que sua resolução é simples e já foi demonstrada na explicação de cada comando do software).

Exemplo 1:

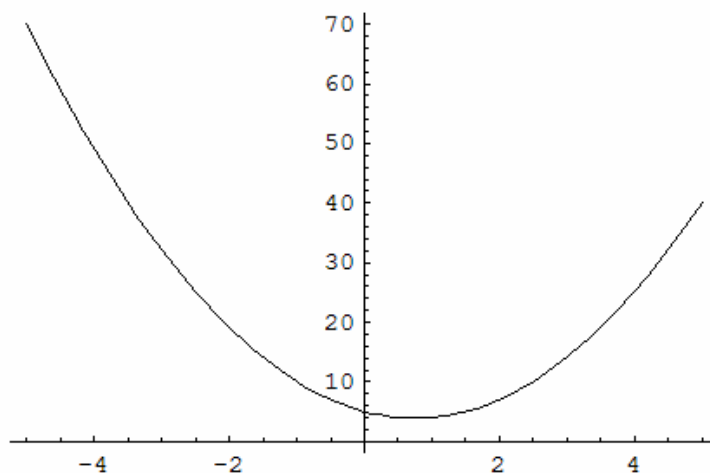
Reta tangente à curva

Ache a reta tangente à curva no ponto $(2, f(2))$ da função $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e trace os respectivos gráficos.

Observe a resolução passo a passo na tela do Mathematica:

Primeiramente,
traçando o gráfico da função dada

```
In[1]:= f[x_] := 2 x^2 - 3 x + 5
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



Out[2]= Graphics -

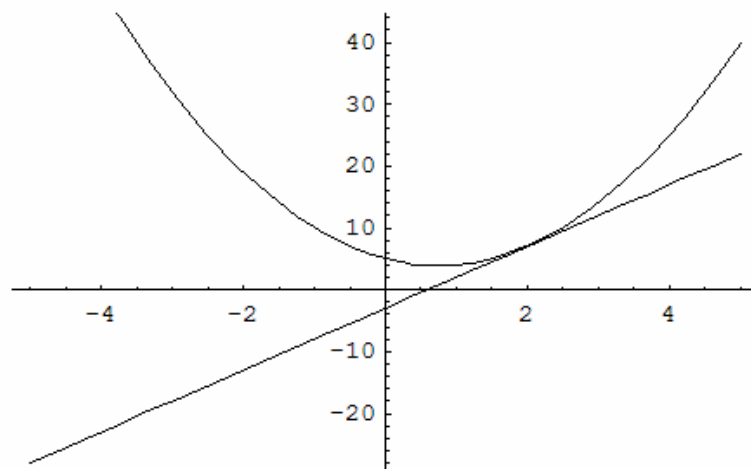
Temos que a reta tangente no ponto $(2, f(2))$
é :

$$g[x] = f[2] + f'[2] * (x - x_0)$$

Então :

```
In[3]:= g[x_] := f[2] + f'[2] * (x - 2)
```

```
In[4]:= Plot[{f[x], g[x]}, {x, -5, 5}]
```



Out[4]= Graphics -

Exemplo 2: Taxas relacionadas

Um balão esférico está sendo inflado. O raio r do balão está aumentando à taxa de $0,2\text{cm/s}$ quando $r = 5\text{ cm}$. A que taxa o volume V do balão está aumentando naquele instante?

```

Definindo V[r] ,
determina o volume de uma esfera de raio r

In[5]:= V[r_] := (4 / 3) * Pi * r^3

Pela regra da cadeia :
      dV / dt = dV / dr * dr / dt
dr / dt pelo enunciado vale 0.2

Então :

In[7]:= V'[5] * .2

Out[7]= 62.8319

É esta a taxa de aumento de volume da esfera
      quando r = 5 cm.

```

Exemplo 3: Máximos e Mínimos

Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer uso dos pedaços de papelão com dimensões 8 dm por 15 dm , cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Encontre o comprimento do lado do quadrado que será cortado de cada pedaço de papelão para se obter uma caixa aberta de maior volume possível.

No Mathematica, teremos:

Untitled-1 *

```
In[8]:= V[x_] := x * (15 - 2 x) * (8 - 2 x)
```

```
In[9]:= Obtendo os pontos críticos : V'[x] = 0
```

```
Solve[V'[x] == 0, x]
```

```
Out[10]:= {{x -> 5/3}, {x -> 6}}
```

Agora, inspecionando os valores obtidos :

```
In[11]:= V[5/3]
```

```
Out[11]:= 2450/27
```

```
In[12]:= N[%]
```

```
Out[12]:= 90.7407
```

```
In[13]:= V[6]
```

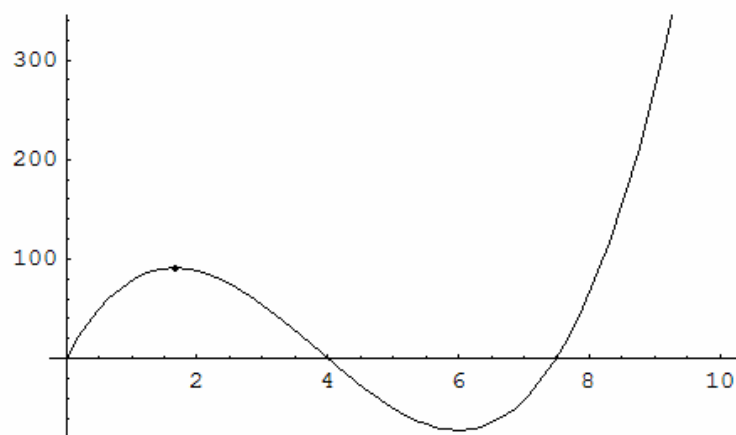
```
Out[13]:= -72
```

O ponto procurado é $x =$

$5/3$. O outro não nos interessa pois fornece um volume negativo.

Com o gráfico da função V , temos :

```
In[14]:= Plot[V[x], {x, 0, 10}]
```

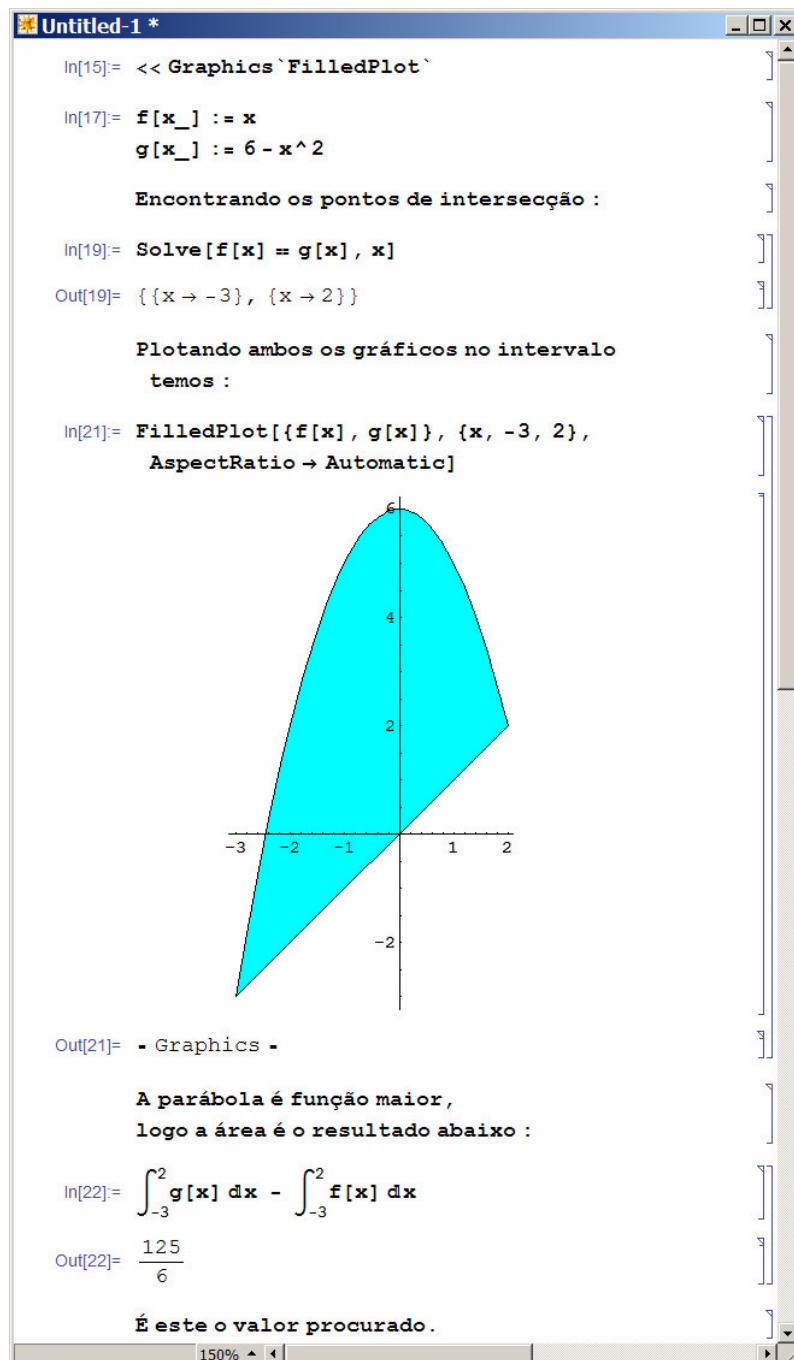


```
Out[14]:= Graphics
```

Exemplo 4: Área entre curvas

Determine a área A , da região R , delimitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = 6 - x^2$.

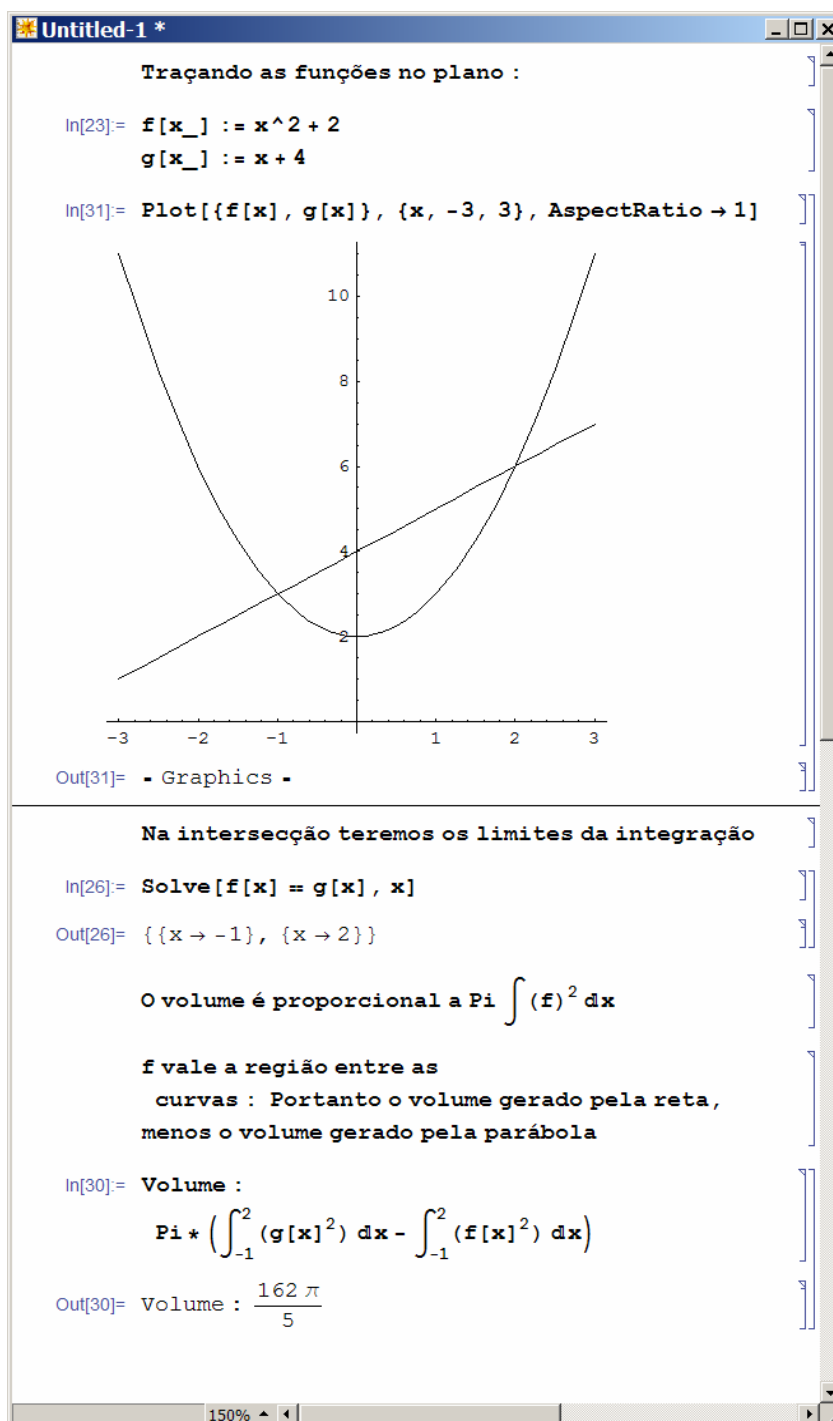
Para este exercício, iremos utilizar mais um pacote de biblioteca do Mathematica, o **FilledPlot**, que possibilita traçar gráficos com áreas preenchidas por cores.



Exemplo 5: Volumes de sólidos de revolução

Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela região delimitada por $y = x^2 + 2$ e a reta $y = x + 4$ em torno do eixo x .

No Mathematica:



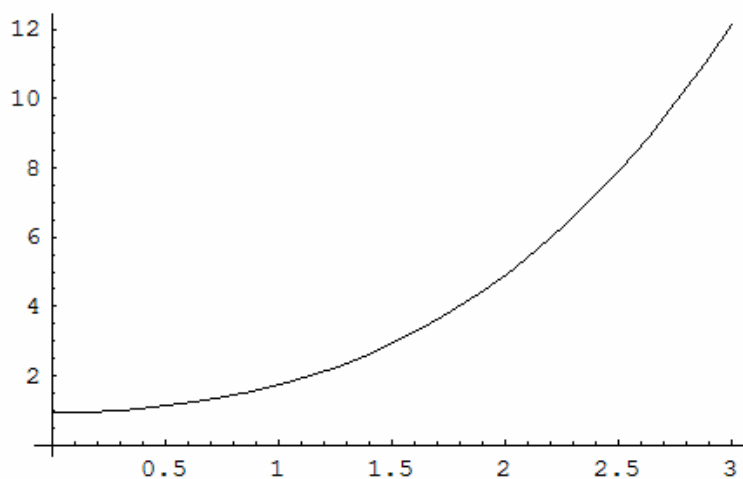
Exemplo 6: Comprimento de arco

Calcule o comprimento da curva $y = [(2+x^2)^{3/2}] / 3$, no intervalo $[0, 3]$.

```
In[58]:= f[x_] := ((2 + x^2)^(3/2)) / 3
```

No intervalo dado a função se assemelha a
isso :

```
Plot[f[x], {x, 0, 3}]
```



```
Out[59]= a2 assemelha dado função  
intervalo No se (isso : (- Graphics -))
```

O comprimento de um arco é dado pela
integral :

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Então :

```
In[60]:= f'[x]
```

```
Out[60]= x \sqrt{2 + x^2}
```

```
In[61]:= \int_0^3 \sqrt{1 + (\%)^2} dx
```

```
Out[61]= 12
```

O comprimento do arco da curva vale 12 u.c.

Exemplo 7: Planos tangentes

Encontre o plano tangente ao parabolóide $z=x^2+y^2$ no ponto (1,3) e trace os gráficos.

Observe a resolução na tela do Mathematica:

```

Um plano tangente a uma superficie é definido por
z = f (a, b) + fx (a, b) (x - a) + fy (a, b) (y - b)

fx e fy as derivadas parciais da função que define
a superficie

In[14]:= f[x_, y_] := x^2 + y^2

In[18]:= f[1, 3]

Out[18]= 10

In[20]:= D[f[x, y], x]
          D[f[x, y], y]

Out[20]= 2 x

Out[21]= 2 y

A funcao entao, fica :
z = f (1, 3) + fx (1, 3) (x - 1) + fy (1, 3) (y - 3)

In[22]:= z[x_, y_] := f[1, 3] + 2 (x - 1) + 6 (y - 3)

Este é o plano tangente a curva

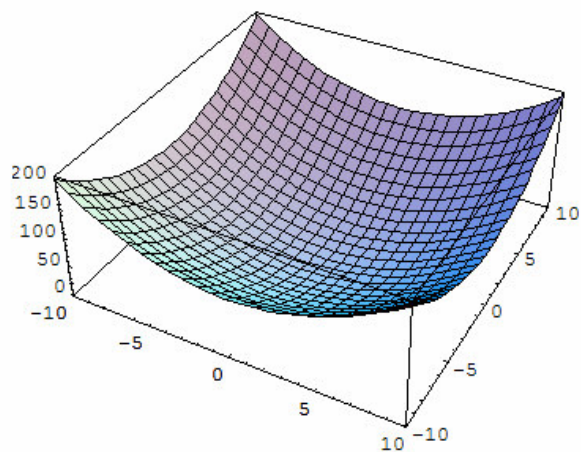
In[23]:= z[x, y]

Out[23]= 10 + 2 (-1 + x) + 6 (-3 + y)

```

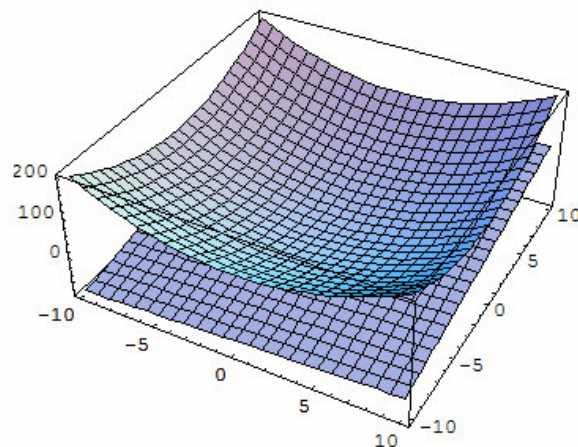
Observe agora, os gráficos:

```
In[43]:= Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



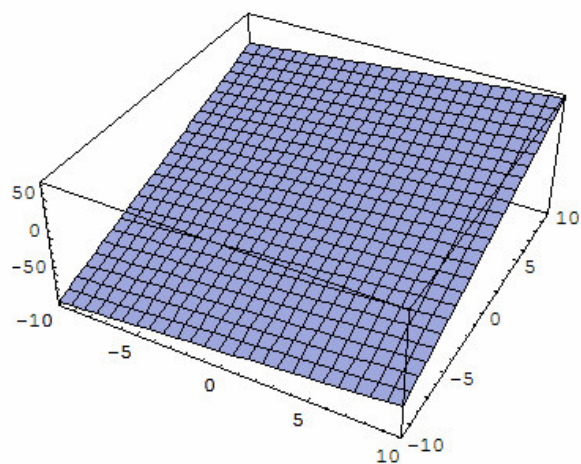
```
Out[43]:= - SurfaceGraphics -
```

```
In[42]:= Show[%, %%]
```

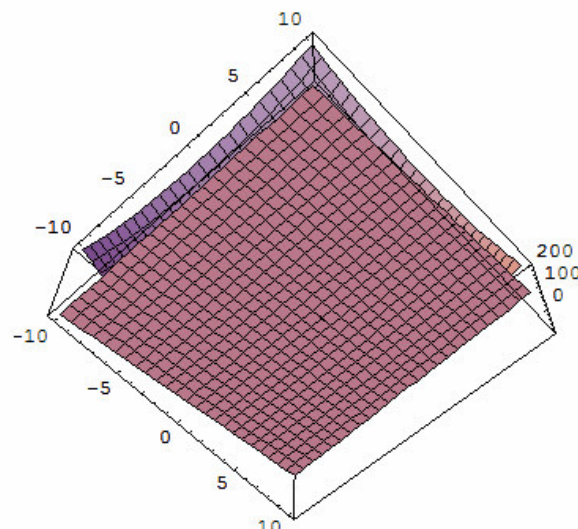


```
Out[42]:= - Graphics3D -
```

```
In[44]:= Plot3D[z[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



```
In[45]:= Show[%, %, ViewPoint -> {1.148, -1.241, -2.931}]
```



Exemplo 8: Aplicações de equações diferenciais

Sistema massa-mola:

Um corpo pesando 16 lb estica uma mola de 3 in. O corpo está ligado a um amortecedor viscoso, com a constante de amortecimento igual a 2 lb.s/ft. Se o corpo for movimentado, da posição de equilíbrio, com uma velocidade inicial para baixo de 3 in/s, achar a sua posição em um instante t qualquer. Determinar o instante em que retorna, pela primeira vez, à posição de equilíbrio.

No Mathematica:

In[19]:= Primeiramente, devemos converter todas as unidades,
passando de polegadas para pés (1 pé = 12 polegadas)

$$k = F / s; \quad F = 16 \text{ lb}; \quad s = 3 / 12 \text{ ft}$$

$$\text{In[1]}:= k = 16 / (3 / 12)$$

$$\text{Out[1]}= 64$$

$$\text{In[3]}:= c = 2$$

$$\text{Out[3]}= 2$$

$$m = P / g; \quad P = 16 \text{ lb}; \quad g \sim 32 \text{ ft} / \text{s}^2$$

$$\text{In[4]}:= m = 16 / 32$$

$$\text{Out[4]}= \frac{1}{2}$$

A equação diferencial que iremos resolver é

$$mu'' + cu' + ku = 0 \quad (\text{nao há força externa})$$

As condições iniciais são relativas ao deslocamento
inicial ($u[0] = 0 \rightarrow$ equilíbrio) e a velocidade
($u'[0] = 3 / 12$)

$$\begin{aligned} \text{In[5]}:= & m \\ & c \\ & k \end{aligned}$$

$$\text{Out[5]}= \frac{1}{2}$$

$$\text{Out[6]}= 2$$

$$\text{Out[7]}= 64$$

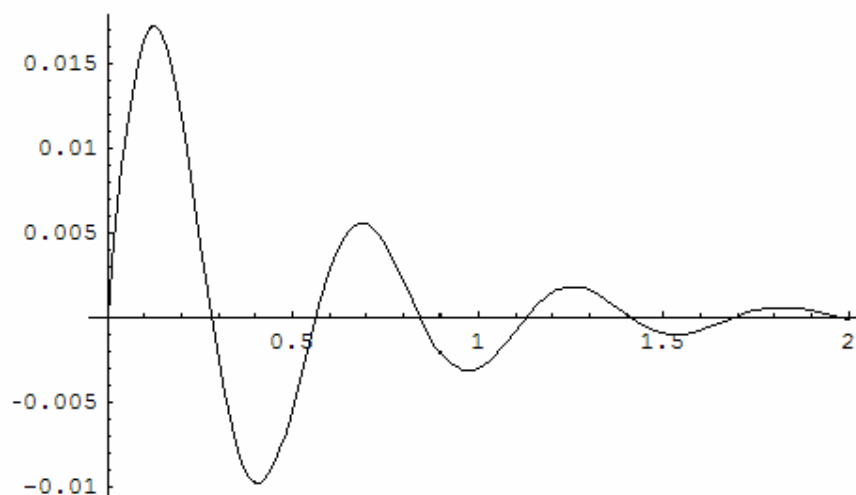
$$\text{In[10]}:= \text{DSolve}[\{m * u''[t] + c * u'[t] + k * u[t] == 0, u[0] == 0, \\ u'[0] == 3 / 12\}, u[t], t]$$

$$\text{Out[10]}= \left\{ \left\{ u[t] \rightarrow \frac{e^{-2t} \sin[2 \sqrt{31} t]}{8 \sqrt{31}} \right\} \right\}$$

É esta a equação que descreve o movimento

$$\text{In[11]:= } u[t_]:= \frac{e^{-2t} \sin[2\sqrt{31} t]}{8\sqrt{31}}$$

`In[19]:= Plot[u[t], {t, 0, 2}]`



`Out[19]= - Graphics -`

A primeira vez que o corpo retorna à posição de equilíbrio é aprox. 0.3 s
(quando a função zera novamente)

`In[18]:= FindRoot[u[t], {t, 0.3}]`

`Out[18]= {t → 0.282123}`

É este o tempo procurado.

Conclusão:

Estas são algumas das mais variadas aplicações do Mathematica no curso de Cálculo, lembramos que este software é bem poderoso, um importante aliado no estudo de todas ciências exatas, com inúmeras funções escondidas e outras nem tanto, que devem ser estudadas com cuidado.

Lembrando que você pode pedir ajuda sobre o uso de um determinado comando a qualquer momento, digitando **??Nome_Comando**, ou **Information[Nome_Comando]**.

Convidamos você a conhecer o fantástico mundo dos CASs, que possibilitam testar e ensinar matemática de um jeito totalmente novo, longe da monotonia das salas de aula e das longas teorias, que muitas vezes, nos fazem pensar se na prática é tão complicado assim.

Na prática, todos utilizam sistemas que realizam os cálculos, o ser humano entra com o raciocínio lógico, que deve ser apurado com um bom curso de cálculo.

Referências Bibliográficas:

<http://www.wolfram.com>

<http://www.ime.unicamp.br/~marcio>

<http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/maodupla/>

C. H. Edwards, Jr. & David E. Penney, *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. I e vol. II (capítulos 8 e 9), Prentice-Hall do Brasil Ltda., 1997.

W. E. Boyce & R. C. DiPrima, *Equações diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Ed. Livros Técnicos e Científicos S.A., 6ª Edição, 1999.

Help Browser do Software Mathematica 5.0

Observação: Todos os sites foram acessados durante o segundo semestre de 2005 e durante a segunda revisão do trabalho, realizada em novembro/2006.