



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO**

PEDRO PAULO LISBOA DE SOUSA

**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA SUBSTITUTIVA**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
ESTUDANTE: Pedro Paulo Lisboa de Sousa/ 201711140038
TURMA: 2017
DATA: 18 de Dezembro de 2018

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA SUBSTITUTIVA

Resolução das questões da lista, referentes à disciplina de Probabilidade e Estatística, do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, como substitutiva a uma das notas.

Professor: Miguel Monteiro de Souza

Sumário

Lista Substitutiva	1
Referências	4

Lista Substitutiva

1. Uma urna contém 2 bolas vermelhas, 3 verdes e 2 azuis. Duas bolas são sorteadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que nenhuma das bolas sejam azuis?

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Para que não saia nenhuma azul, não contaremos as azuis. Ficam então 5 bolas para usarmos nos resultados favoráveis. Permanecendo 7 nos resultados possíveis.

A probabilidade para 2 retiradas onde nenhuma das bolas é azul:

$$P = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \rightarrow \frac{20}{42} \rightarrow \frac{10}{21}$$

2. Existem 3 moedas. Uma moeda que possui duas caras, a outra possui probabilidade 0,75 de resultar em cara e a terceira é uma moeda justa. Uma moeda selecionada aleatoriamente é lançada.

	Moeda Duas Caras	Moeda Viciada	Moeda Honesta
Cara	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Coroa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Sendo K - cara; m_1 , m_2 e m_3 sendo moeda duas caras, viciada e honesta respectivamente, temos:

$$P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(m_1 \cap K) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(m_2 \cap K) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(m_3 \cap K) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

- a. Qual é a probabilidade de sair cara?

$$P(K) = P(m_1 \cap K) + P(m_2 \cap K) + P(m_3 \cap K) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \rightarrow \frac{4+3+2}{12} \rightarrow \frac{9}{12} \rightarrow \frac{3}{4}$$

A probabilidade de sair cara é de $\frac{3}{4}$.

- b. Dado que ocorreu cara, qual é a probabilidade de a moeda selecionado ser a moeda honesta?

$$P(m_1|K) = \frac{P(m_1 \cap K)}{P(K)} = \frac{1/3}{3/4} \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{9}$$

$$P(m_2|K) = \frac{P(m_2 \cap K)}{P(K)} = \frac{1/4}{3/4} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$P(m_3|K) = \frac{P(m_3 \cap K)}{P(K)} = \frac{1/6}{3/4} \rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{4}{3} \rightarrow \frac{2}{9}$$

Lembrando que a moeda honesta é representada por m_3 , sua probabilidade de sair dado que ocorreu cara é de $\frac{2}{9}$.

3. Um dado não honesto é lançado. A v.a. discreta X representa a face voltada pra cima. A função de probabilidade de X é dada abaixo:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	a	a	a	b	b	$0,3$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1; E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i); E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i); Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- a. Dado que $E(X) = 4,2$, encontre o valor de a e b .

Como $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$, temos: $3a + 2b + 0,3 = 1 \rightarrow 3a + 2b = 0,7$

Como $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$, temos: $a + 2a + 3a + 4b + 5b + 1,8 = 4,2 \rightarrow 6a + 9b = 4,2 - 1,8$
 $\rightarrow 6a + 9b = 2,4$

Com isso podemos resolver da seguinte forma:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0,7 \\ 6a + 9b = 2,4 \end{cases} \xrightarrow{Eq_2 \rightarrow Eq_2 - 2Eq_1} \begin{cases} 3a + 2b = 0,7 \\ 0a + 5b = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq_2'' \rightarrow Eq_2''/5} \begin{cases} 3a + 2b = 0,7 \\ 0a + b = 0,2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Eq_1' \rightarrow Eq_1' - 2Eq_2''} \begin{cases} 3a + 0b = 0,3 \\ 0a + b = 0,2 \end{cases} \xrightarrow{Eq_1'' \rightarrow Eq_1''/3} \begin{cases} a + 0b = 0,1 \\ 0a + b = 0,2 \end{cases}$$

Logo, $a = 0,1$ e $b = 0,2$

- b. Mostre que $E(X^2) = 20,4$.

Como $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i)$, temos: $a + 4a + 9a + 16b + 25b + 36 \cdot 0,3 \rightarrow 14a + 41b + 10,8$

Substituindo a e b por seus valores chegamos a:

$$E(X^2) = 14 \cdot 0,1 + 41 \cdot 0,2 + 10,8 \rightarrow 1,4 + 8,2 + 10,8 \rightarrow 20,4$$

- c. Encontre $Var(5 - 3X)$.

Propriedades da Variância (c é uma constante):

- i. $Var(X + c) = Var(X)$
- ii. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- iii. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Utilizando a propriedade i. temos: $Var(5 + 3X) = Var(3X)$;

Utilizando a propriedade ii. no resultado obtido chegamos a: $Var(3X) = 3^2 Var(X)$.

Logo, $Var(5 - 3X) = 3^2 Var(X) \rightarrow 9Var(X)$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow Var(X) = 20,4 - (4,2)^2 \rightarrow Var(X) = 20,4 - 17,64 \rightarrow Var(X) = 2,76$$

Com isso, $Var(5 - 3X) = 9 \cdot 2,76 \rightarrow 24,84$

4. Considere que X seja uma v.a. contínua tal que sua f.d.p. é

$$f(x) = c \cdot x^n, 0 < x < 1$$

- a) Encontre o valor de c .

$$\int_0^1 c \cdot x^n dx = 1 \rightarrow c \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = 1 \rightarrow c \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = 1 \rightarrow \frac{c}{n+1} = 1 \rightarrow c = n+1$$

- b) $P(X > k)$.

$$P(X > k) = \int_k^1 (n+1) \cdot x^n dx \rightarrow \left. x^{n+1} \right|_k^1 \rightarrow 1^{n+1} - k^{n+1} \rightarrow 1 - k^{n+1}$$

5. Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após alguns meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0,02 e, nesse caso, ela tem probabilidade 0,5 de ser recuperável. O custo de cada muda produzida é R\$ 1,20, que será acrescido de mais R\$ 0,50 se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada muda é vendida a R\$ 3,50, encontre a distribuição da variável aleatória "lucro por muda produzida".

$$L = \begin{cases} 3,5 - 1,2 = 2,3; & \text{muda sem ataque} \\ 3,5 - 1,7 = 1,8; & \text{muda recuperada} \\ 0,0 - 1,2 = -1,2; & \text{muda irrecuperável} \end{cases}$$

$$P(A) = 0,02; P(R) = 0,5$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,02 = 0,98$$

$$P(A \cap R) = P(A \cap \bar{R}) = 0,02 \times 0,5 = 0,01$$

l	-1,2	1,8	2,3
$P(L=l)$	0,01	0,01	0,98

- a. Qual é o lucro médio por muda produzida?

$$E(I) = \sum_{i=1}^n l_i p(l_i)$$

$$E(I) = -1,2 \times 0,01 + 1,8 \times 0,01 + 2,3 \times 0,98 = 2,26$$

O lucro médio por muda produzida é de R\$2,26.

- b. Em uma plantação de 10000 mudas, qual é o lucro esperado?

$$10000 \times E(I) = 10000 \times 2,26 = 22600$$

Para 10000 mudas o lucro esperado é de R\$22600

- c. Em um lote de 50 mudas, qual é a probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis?

Probabilidade de ser aproveitável é a soma das probabilidades de não sofrer ataque e a de sofrer e ser recuperada: $P(\bar{A}) + P(A \cap R) = 0,98 + 0,01 = 0,99$

$X \sim b(50; 0,99)$, ou seja, a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 50$ e $p = 0,99$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 45)^1 &= P(X = 45) + P(X = 46) + P(X = 47) + P(X = 48) + P(X = 49) + P(X = 50) \\ &= 0,0001347924 + 0,001450484 + 0,0122211 + 0,07561804 + 0,3055586 + 0,6050061 \\ &= 0,9999891 \cong 1 \end{aligned}$$

A probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis é de praticamente 100%.

6. O número de milhas que um determinado carro pode percorrer antes que a bateria se esgote é distribuído exponencialmente com uma média de 10.000 milhas. O proprietário do carro precisa fazer uma viagem de 5000 milhas. Qual é a probabilidade de que ele será capaz de completar a viagem sem ter que substituir a bateria do carro?

$$E(x) = 10000; X \sim Ex(10000)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/10000} & , x \geq 0 \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$P(X \geq 5000) = e^{-5000/10000} \rightarrow e^{-1/2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \rightarrow 0,60653$$

A probabilidade de completar a viagem sem substituir a bateria é de 0,60653 (60,65%).

¹Resolvi com o auxílio do R. Utilizei o comando: `dbinom(x,size,prob)`

Referências

- [1] MEYER, P.L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.
- [2] BUSSAB, W.; Morettin, P. *Estatística básica*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2006. ISBN 9788502034979.