UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

PEDRO PAULO LISBOA DE SOUSA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA SUBSTITUTIVA

Belém/PA
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
ESTUDANTE: Pedro Paulo Lisboa de Sousa/ 201711140038
TURMA: 2017
DATA: 18 de Dezembro de 2018

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA SUBSTITUTIVA

Resolução das questões da lista, referentes à disciplina de Probabilidade e Estatística, do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, como substitutiva a uma das notas.

Professor: Miguel Monteiro de Souza

Belém/PA
2018

Sumário

Lista Substitutiva

1. Uma urna contém 2 bolas vermelhas, 3 verdes e 2 azuis. Duas bolas são sorteadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que nenhuma das bolas sejam azuis?

   $P(A) = \dfrac{\text{nº de resultados favoraveis}}{\text{nº de resultados possíveis}} = \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)}$

   Para que não saia nenhuma azul, não contaremos as azuis. Ficam então 5 bolas para usarmos nos resultados favoráveis. Permanecendo 7 nos resultados possíveis.

   A probabilidade para 2 retiradas onde nenhuma das bolas é azul:

   $P = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{4}{6} \rightarrow \dfrac{20}{42} \rightarrow \dfrac{10}{21}$

2. Existem 3 moedas. Uma moeda que possui duas caras, a outra possui probabilidade 0,75 de resultar em cara e a terceira é uma moeda justa. Uma moeda selecionada aleatoriamente é lançada.

	Moeda Duas Caras	Moeda Viciada	Moeda Honesta
Cara	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Coroa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

   Sendo K - cara; m_1, m_2 e m_3 sendo moeda duas caras, viciada e honesta respectivamente, temos:

   $P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = \dfrac{1}{3}$

   $P(m_1 \cap K) = \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$

   $P(m_2 \cap K) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

   $P(m_3 \cap K) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

   a. Qual é a probabilidade de sair cara?

   $P(K) = P(m_1 \cap K) + P(m_2 \cap K) + P(m_3 \cap K) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} \rightarrow \dfrac{4+3+2}{12} \rightarrow \dfrac{9}{12} \rightarrow \dfrac{3}{4}$ A probabilidade de sair cara é de $\dfrac{3}{4}$.

   b. Dado que ocorreu cara, qual é a probabilidade de a moeda selecionado ser a moeda honesta?

   $P(m_1|K) = \dfrac{P(m_1 \cap K)}{P(K)} = \dfrac{1/3}{3/4} \rightarrow \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{3} \rightarrow \dfrac{4}{9}$

   $P(m_2|K) = \dfrac{P(m_2 \cap K)}{P(K)} = \dfrac{1/4}{3/4} \rightarrow \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9}$

   $P(m_3|K) = \dfrac{P(m_3 \cap K)}{P(K)} = \dfrac{1/6}{3/4} \rightarrow \dfrac{1}{\cancel{6}_{3}} \times \dfrac{\cancel{4}^{2}}{3} \rightarrow \dfrac{2}{9}$

   Lembrando que a moeda honesta é representada por m_3, sua probabilidade de sair dado que ocorreu cara é de $\dfrac{2}{9}$.

3. Um dado não honesto é lançado. A v.a. discreta X representa a face voltada pra cima. A função de probabilidade de X é dada abaixo:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	a	a	b	b	0,3

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1;\ E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i);\ E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i);\ Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

a. Dado que $E(X) = 4,2$, encontre o valor de a e b.

Como $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, temos: $3a + 2b + 0,3 = 1 \rightarrow 3a + 2b = 0,7$

Como $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$, temos: $a + 2a + 3a + 4b + 5b + 1,8 = 4,2 \rightarrow 6a + 9b = 4,2 - 1,8$
$\rightarrow 6a + 9b = 2,4$

Com isso podemos resolver da seguinte forma:

$$\begin{cases} 3a + 2b &= 0,7 \\ 6a + 9b &= 2,4 \end{cases} \xrightarrow{Eq_2' \rightarrow Eq_2 - 2Eq_1} \begin{cases} 3a + 2b &= 0,7 \\ 0a + 5b &= 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq_2'' \rightarrow Eq_2'/5} \begin{cases} 3a + 2b &= 0,7 \\ 0a + \ \ b &= 0,2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Eq_1' \rightarrow Eq_1 - 2Eq_2''} \begin{cases} 3a + 0b &= 0,3 \\ 0a + \ \ b &= 0,2 \end{cases} \xrightarrow{Eq_1'' \rightarrow Eq_1'/3} \begin{cases} a + 0b &= 0,1 \\ 0a + \ \ b &= 0,2 \end{cases}$$

Logo, $a = 0,1$ e $b = 0,2$

b. Mostre que $E(X^2) = 20,4$.

Como $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i)$, temos: $a + 4a + 9a + 16b + 25b + 36 \cdot 0,3 \rightarrow 14a + 41b + 10,8$

Substituindo a e b por seus valores chegamos a:
$E(X^2) = 14 \cdot 0,1 + 41 \cdot 0,2 + 10,8 \rightarrow 1,4 + 8,2 + 10,8 \rightarrow 20,4$

c. Encontre $Var(5 - 3X)$.

Propriedades da Variancia (c é uma constante):

i. $Var(X + c) = Var(X)$
ii. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
iii. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Utilizando a propriedade i. temos: $Var(5 + 3X) = Var(3X)$;
Utilizando a propriedade ii. no resultado obtido chegamos a: $Var(3X) = 3^2 Var(X)$.
Logo, $Var(5 - 3X) = 3^2 Var(X) \rightarrow 9Var(X)$
$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow Var(X) = 20,4 - (4,2)^2 \rightarrow Var(X) = 20,4 - 17,64 \rightarrow Var(X) = 2,76$
Com isso, $Var(5 - 3X) = 9 \cdot 2,76 \rightarrow 24,84$

4. Considere que X seja uma v.a. contínua tal que sua f.d.p. é

$$f(x) = c \cdot x^n,\ 0 < x < 1$$

a) Encontre o valor de c.

$$\int_0^1 c \cdot x^n \, dx = 1 \rightarrow c \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = 1 \rightarrow c \cdot \frac{\cancelto{1}{1^{n+1}} - \cancelto{0}{0^{n+1}}}{n+1} = 1 \rightarrow \frac{c}{n+1} = 1 \rightarrow c = n+1$$

b) $P(X > k)$.

$$P(X > k) = \int_k^1 (n+1) \cdot x^n \, dx \rightarrow x^{n+1} \Big|_k^1 \rightarrow \cancelto{1}{1^{n+1}} - k^{n+1} \rightarrow 1 - k^{n+1}$$

5. Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após alguns meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0,02 e, nesse caso, ela tem probabilidade 0,5 de ser recuperável. O custo de cada muda produzida é R$ 1,20, que será acrescido de mais R$ 0,50 se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada muda é vendida a R$ 3,50, encontre a distribuição da variável aleatória "lucro por muda produzida".

$$L = \begin{cases} 3,5 - 1,2 &= \ \ 2,3; \text{ muda sem ataque} \\ 3,5 - 1,7 &= \ \ 1,8; \text{ muda recuperada} \\ 0,0 - 1,2 &= -1,2; \text{ muda irrecuperável} \end{cases}$$

$P(A) = 0,02;\ P(R) = 0,5$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,02 = 0,98$

$P(A \cap R) = P(A \cap \overline{R}) = 0,02 \times 0,5 = 0,01$

l	-1,2	1,8	2,3
P(L= l)	0,01	0,01	0,98

a. Qual é o lucro médio por muda produzida?

$$E(l)=\sum_{i=1}^{n} l_i p(l_i)$$

$E(l)=-1,2\times 0,01+1,8\times 0,01+2,3\times 0,98=2,26$
O lucro médio por muda produzida é de R$2,26.

b. Em uma plantação de 10000 mudas, qual é o lucro esperado?
$10000\times E(l)=10000\times 2,26=22600$
Para 10000 mudas o lucro esperado é de R$22600

c. Em um lote de 50 mudas, qual é a probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis?
Probabilidade de ser aproveitável é a soma das probabilidades de não sofrer ataque e a de sofrer e ser recuperada: $P(\overline{A})+P(A\cap R)=0,98+0,01=0,99$
$X\sim b(50;0,99)$, ou seja, a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros $n=50$ e $p=0,99$.

$$\begin{aligned} P(X\geq 45)^{1} &= P(X=45)+P(X=46)+P(X=47)+P(X=48)+P(X=49)+P(X=50)\\ &= 0,0001347924+0,001450484+0,0122211+0,07561804+0,3055586+0,6050061\\ &= 0,9999891\cong 1 \end{aligned}$$

A probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis é de praticamente 100%.

6. O número de milhas que um determinado carro pode percorrer antes que a bateria se esgote é distribuído exponencialmente com uma média de 10.000 milhas. O proprietário do carro precisa fazer uma viagem de 5000 milhas. Qual é a probabilidade de que ele será capaz de completar a viagem sem ter que substituir a bateria do carro?

$E(x)=10000$; $X\sim Ex(10000)$

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x/10000} & ,\ x\geq 0\\ 0 & ,\ c.c \end{cases}$$

$P(X\geq 5000)=e^{-5000/10000}\rightarrow e^{-1/2}\rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{e}}\rightarrow 0,60653$

A probabilidade de completar a viagem sem substituir a bateria é de $0,60653(60,65\%)$.

[1] Resolvi com o auxílio do R. Utilizei o comando: dbinom(n,size,prob)

Referências

[1] MEYER, P.L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

[2] BUSSAB, W.; Morettin, P. *Estatística básica*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2006. ISBN 9788502034979.