UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

PEDRO PAULO LISBOA DE SOUSA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Belém/PA
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
ESTUDANTE: Pedro Paulo Lisboa de Sousa/ 201711140038
TURMA: 2017
DATA: 04 de Dezembro de 2018

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Resolução das questões da lista referentes à disciplina de Probabilidade e Estatística, do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, como complemento à 2ª avaliação.

Professor: Miguel Monteiro de Souza

Belém/PA
2018

Sumário

Variável Aleatória Discreta

1. Em um determinado condomínio residencial 30% das famílias não tem filhos, 40% tem 1 filho, 20% tem 2 filhos e 10% tem 3 filhos. Seja X o número de filhos de uma família sorteada ao acaso dentro desse condomínio residencial.

   30% não tem filhos
   40% tem 1 filho
   20% tem 2 filhos
   10% tem 3 filhos

   a) Determine a função de probabilidade e a distribuição acumulada de X.

      x: nº de filhos
      {0,1,2,3} $\rightarrow$ possíveis valores que x pode assumir.
      $p(0) = 0,3;\ p(1) = 0,4;\ p(2) = 0,2;\ p3 = 0,1$

X	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & se\ x < 0; \\ 0.3, & se\ 0 \leq x < 1; \\ 0.7, & se\ 1 \leq x < 2; \\ 0.9, & se\ 2 \leq x < 3; \\ 1\ , & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

   b) Calcule a esperança e o desvio padrão de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i);\ Var(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - [E(X)]^2;\ DP = \sqrt{Var(X)}$$

X	$p(x_i)$	$x_i.p(x_i)$
0	0,3	0
1	0,4	0,4
2	0,2	0,4
3	0,1	0,3
Total		1,1

X	$p(x_i)$	$x_i^2.p(x_i)$
0	0,3	0
1	0,4	0,4
2	0,2	0,8
3	0,1	0,9
Total		2,1

$\boldsymbol{E(X) = 1,1;}$
$Var(X) = 2,1 - (1,1)^2 \rightarrow 2,1 - 1,21 = 0,89$
$\boldsymbol{DP} = \sqrt{0,89} \rightarrow \boldsymbol{0,9434}$

2. Um indivíduo que possui um seguro de automóvel de uma determinada empresa é selecionado aleatoriamente. Seja Y o número de infrações ao código de trânsito para as quais o indivíduo foi reincidente nos últimos 3 anos. A função de de probabilidade de Y é:

Y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,60	0,25	0,10	0,05

   a) Calcule $E(Y)$.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p(y_i)$$

Y	$p(y_i)$	$y_i.p(y_i)$
0	0,6	0
1	0,25	0,25
2	0,1	0,2
3	0,05	0,15
Total		0,6

Logo, $E(Y) = 0,6$.

b) Suponha que um indivíduo com Y infrações reincidentes incorra em uma multa de $U\$100Y^2$. Calcule o valor esperado da multa.

$v = 100Y^2 \;\rightarrow\; E(v) = E(100Y^2) \;\rightarrow\; E(v) = 100.E(Y^2)$

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.p(y_i)$$

Y	$p(y_i)$	$y_i.p(y_i)$
0	0,6	0
1	0,25	0,25
2	0,1	0,4
3	0,05	0,45
Total		1,1

Logo, $E(Y^2) = 1,1$.
Com isso, $E(v) = 100.E(Y^2) \;\rightarrow\; 100.1,1 \;\rightarrow\; 110.$
Valor esperado: $U\$110$.

5. Um dado é lançado duas vezes. Seja X a soma dos resultados. Calcule $E(X)$.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\} X = \left\{ \begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \end{array} \right\}$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$
$x_i.p(x_i)$	$^2/_{36}$	$^6/_{36}$	$^{12}/_{36}$	$^{20}/_{36}$	$^{30}/_{36}$	$^{42}/_{36}$	$^{40}/_{36}$	$^{36}/_{36}$	$^{30}/_{36}$	$^{22}/_{36}$	$^{12}/_{36}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p(x_i)$$

$E(X) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \ldots + \frac{12}{36} = \frac{252}{36} = 7$

6. Um homem possui 4 chaves em seu bolso. Como está escuro, ele não consegue ver qual a chave correta para abrir a porta de sua casa. Ele testa cada uma das chaves até encontrar a correta.

C - chave da porta.
E_1, E_2 e E_3 - outras chaves.

a) Defina um espaço amostral para esse experimento.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccccc} C, & E_1C, & E_2C, & E_3C, & E_1E_2C, & E_2E_1C, & E_1E_3C, & E_3E_1C \\ E_2E_3C, & E_3E_2C, & E_1E_2E_3C, & E_1E_3E_2C, & E_2E_1E_3C, & E_2E_3E_1C, & E_3E_1E_2C, & E_3E_2E_1C \end{array} \right\}$$

b) Defina a v.a. X = número de chaves experimentadas até conseguir abrir a porta (inclusive a chave correta). Quais são os valores de X? Qual é a função de probabilidade de X?

Ω(em nº de tentativas) = $\{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4\}$
A partir de Ω, podemos ver que $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

$p(1) = \frac{1}{4}$

$p(2) = p(E_1C \cup E_2C \cup E_3C) \rightarrow \frac{1}{4}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} \rightarrow 3.\frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$

$p(3) = p(E_1E_2C \cup E_2E_1C \cup E_1E_3C \cup E_3E_1C \cup E_2E_3C \cup E_3E_2C) \rightarrow 6.\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\right) \rightarrow \frac{6}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$

$p(4) = p(E_1E_2E_3C \cup E_1E_3E_2C \cup E_2E_1E_3C \cup E_2E_3E_1C \cup E_3E_1E_2C \cup E_3E_2E_1C) \rightarrow 6.\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1}\right) \rightarrow \frac{6}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$

X	$p(x_i)$
1	$1/4$
2	$1/4$
3	$1/4$
4	$1/4$

7. Seja uma v.a. X com fdp dada na tabela a seguir:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0	p^2	p^2	p	p	p^2

a) Encontre o valor de p.

Como $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, temos: $3p^2 + 2p = 1 \rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0$.

Resolvendo a equação chegamos as raízes -1 e $\frac{1}{3}$. Como a p é a probapilidade de um evento ocorrer, temos $p \geq 0$. Logo, $p = \frac{1}{3}$.

b) Calcule $P(X \geq 4)$ e $P(X < 3)$.

$P(X \geq 4) \rightarrow p^2 + p \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1+3}{9} \rightarrow \frac{4}{9}$

$P(X < 3) \rightarrow 2p^2 \rightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{9}$

c) Calcule $P(|X-3| \geq 2)$.

$$|x-3| \geq 2 \begin{cases} x-3 \geq 2 & \rightarrow \quad x \geq 5 \\ x-3 \leq -2 & \rightarrow \quad x \leq 1 \end{cases}$$

$P(|x-3| \geq 2) = P(X \leq 1) + P(X \geq 5) \rightarrow p^2 + p^2 \rightarrow 2.p^2 \rightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{9}$

Modelos de Probabilidade Discretos

1. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

   $p = 0,2;\ x = 10$

   $P(X = 10) = 0,2^1 \cdot 0,8^{10-1} \to (0,2)\cdot(0,8)^9 \to (0,2)\cdot(0,8)^9 \to 0,0268$

2. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a primeira ocorrência de um seis?

   $p = \frac{1}{6};\ x = 10$

   $P(X = 10) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \to 0,0323$

3. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a terceira ocorrência de um seis?

   $p = \frac{1}{6};\ x = 10;\ k = 3$

   $P(X = 10) = \binom{10-1}{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \to \frac{9!}{2!\cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \to \frac{\cancel{9}\cdot\cancel{8}}{\cancel{2}\cdot 6\cdot\cancel{36}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \to \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$

   $P(X = 10) = \to 0,0465$

4. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

   $p = 0,2$

   $P(X \leq 1) = P(0) + P(1)$

   $P(0) = \binom{10}{0} \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} \to \cancelto{1}{\frac{10!}{0!\cdot 10!}} \cdot \cancelto{1}{(0,2)^0} \cdot (0,8)^{10} \to 0,1074$

   $P(1) = \binom{9}{1} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \to \frac{10!}{1!\cdot 9!} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \to 10\cdot(0,2)\cdot(0,8)^9 \to 0,2684$

   $P(X \leq 1) = 0,1074 + 0,2684 \to 0,3758$

5. Entre os 16 programadores de uma empresa, 12 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 5 programadores para fazer um curso avançado de programação. Qual é a probabilidade dos 5 sorteados serem do sexo masculino?

   $P(X = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{16}{5}} \to \frac{\frac{12!}{\cancel{5!}\cdot 7!}}{\frac{16!}{\cancel{5!}\cdot 11!}} \to \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12} \to \frac{11}{14\cdot 13} \cdot \frac{\cancel{12}\cdot\cancel{10}\cdot\cancelto{3}{9}\cdot\cancel{8}}{\cancel{16}\cdot\cancel{15}\cdot\cancel{12}} \to \frac{11\cdot 3}{14\cdot 13} \to \frac{33}{182} \to 0,1813$

6. Uma central telefônica recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, qual é a probabilidade de a central não receber nenhuma chamada em um minuto? e de receber no máximo 2 chamadas em 2 mintuos?

   $$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

   $\lambda = 5$

   $P(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} \to \frac{1}{e^5} \to 0,0067$

   $\lambda = 10$

   $P(X \leq 2) = P(2) + P(1) + P(0) \to \frac{10^2}{2!\cdot e^{10}} + \frac{10}{e^{10}} + \frac{1}{e^{10}} \to \frac{122}{2\cdot e^{10}} \to 0,00277$

7. Seja X uma v.a. aleatória binomial (n, p) com $n = 5$, $p = \frac{1}{3}$. Calcule $E(X^2)$.

$$X \sim BN(n,p);\ E(x) = n \cdot p;\ VAR(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{3} \to \frac{5}{3}$

$VAR(X) = \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \to \frac{10}{9}$

$$VAR(X) = E(x^2) - [E(X)]^2 \to E(x^2) = VAR(X) + [E(X)]^2$$

$E(x^2) = \frac{10}{9} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \to \frac{35}{9}$

8. Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um corte por 2000 pés. Qual é a probabilidade de que um rolo com comprimento de 4000 pés apresente no máximo dois cortes? Pelo menos dois cortes?

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$\lambda = 2\ \ p/4000\ pés$

$P(X \leq 2) = P(2) + P(1) + P(0) \to \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} + \frac{2 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{e^{-2}}{0!} \to \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} \to 0,676676$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \to 1 - [P(0) + P(1)] \to 1 - \left(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2}\right) \to 0,593994$

10. A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa em um dia é 0,1.

   a) Qual a probabilidade de que, em 20 peças produzidas em um dia, exatamente 5 sejam defeituosas?
   $P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \to \frac{20!}{5! \cdot 15!} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \to \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{15!}} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \to 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \to 0,032$

   b) Qual a probabilidade de que a 10ª peça produzida em um dia seja a primeira defeituosa?
   $P(X = 10) = (0,1) \cdot (0,9)^9 \to 0,0387$

11. Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 10 funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:

   a) exatamente 7 funcionários aumentarem a produtividade;
   $P(X=7) = \binom{10}{7} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \to \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \to 120 \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \to 0,201326592$

   b) pelo menos 3 funcionários não aumentarem a produtividade;
   No máximo 7 aumentaram.
   $P(X \leq 7) = P(X \leq 8) - P(X = 8) \to P(X \leq 8) - \binom{10}{8} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \to P(X \leq 8) - \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{2!}} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \to P(X \leq 8) - 45 \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \to 0,6242 - 45 \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \to 0,3222$
   OBS: $P(X \leq 8)$ é calculado na letra c.

   c) não mais que 8 funcionários aumentarem a produtividade.
   $P(X \leq 8) = 1 - [P(X=9) + P(X=10)] \to 1 - \left[\binom{10}{9} \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + \binom{10}{10} \cdot (0,8)^{10}\right]$
   $\to 1 - \left[\frac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 1!} \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + (0,8)^{10}\right] \to 1 - [10 \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + (0,8)^{10}] \to 0,6242$

Variável Aleatória Contínua

1. Seja X uma v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = kx^2 \; se \; 0 \leq x \leq 1.$$

a) Determine o valor de k.

$\int_0^1 k \cdot x^2 \, dx = 1 \to k \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 \to \frac{k}{3} = 1 \to k = 3$

b) Calcule $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$.

$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2} 3 \cdot x^2 \, dx \to 3 \cdot \int_{1/4}^{1/2} x^2 \, dx \to \cancel{3} \cdot \left.\frac{x^3}{\cancel{3}}\right|_{1/4}^{1/2} \to \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \to \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \to \frac{7}{64}$
$\to 0,109375$

c) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \, dx; \; E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) \, dx; \; VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3 \cdot x^2 \, dx \to \int_0^1 3 \cdot x^3 \, dx \to 3 \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 \to \frac{3}{4} \to 0,75$

$E(X^2) = \int_0^1 3 \cdot x^4 \, dx \to 3 \cdot \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 \to \frac{3}{5} \to 0,6$

$VAR(X) = 0,6 - (0,75)^2 \to 0,0375$

2. O tempo de vida útil, em anos, de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{x \cdot e^{-x/2}}{4}, \; x > 0.$$

a) Mostre que $f(x)$ integra 1.

$F(X) = \int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-x/2}}{4} \, dx = 1$

$\frac{1}{4} \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-x/2} \, dx = 1 \to -\frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}(x+2)\Big|_0^\infty = 1 \to 0 - (-1) = 1 \to 1 = 1$

b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

Como a vida útil é medida em anos e a garantia é de 6 meses, a garantia é de $\frac{1}{2}$ ano.

$P(0 < X < 1/2) = \int_0^{1/2} \frac{x \cdot e^{-x/2}}{4} \, dx \to 1 - \frac{5}{4 \cdot e^{1/4}} \to 0,0265$

4. A percentagem de álcool $(100X)$ em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória com a seguinte fdp:

$$f(x) = 20x^3(1-x), \; 0 < x < 1.$$

a) Estabeleça a FD de X.

$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) \, dx$

$F(X) = \int_0^x 20 \cdot x^3 \cdot (1-x) \, dx \to 20 \cdot \int_0^x (x^3 - x^4) \, dx \to 20 \cdot \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^x \to \cancel{20} \cdot \frac{5 \cdot x^4 - 4 \cdot x^5}{\cancel{20}}$
$\to 5 \cdot x^4 - 4 \cdot x^5$

b) Calcule $P\left(X < \frac{2}{3}\right)$.

$F\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \to 5 \cdot \frac{16}{81} - 4 \cdot \frac{32}{243} \to \frac{15 \cdot 16 - 4 \cdot 32}{243} \to \frac{240 - 128}{243} \to \frac{112}{243} \to 0,461$

c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se $\dfrac{1}{3} < X < \dfrac{2}{3}$, o composto se vende por C_1 dólares/galão, caso contrário ele se vende por C_2 dólares/galão. Se o custo C_3 dólares/galão, calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.

Probabilidade de ser vendida por C_1:

$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)$

$F\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 - 4 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \rightarrow 5 \cdot \dfrac{1}{81} - 4 \cdot \dfrac{1}{243} \rightarrow \dfrac{15-4}{243} \rightarrow \dfrac{11}{243}$

$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = \dfrac{112-11}{243} \rightarrow \dfrac{101}{243} \rightarrow 0,4156$

Sendo assim, a probabilidade de ser vendida por C_2 é:

$1 - P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = 1 - \dfrac{101}{243} \rightarrow \dfrac{142}{243} \rightarrow 0,5843$

Considerando L como a variável que representa o lucro, temos que:

$$L = \begin{cases} C_1 - C_3 & \dfrac{1}{3} < X < \dfrac{2}{3} \\ C_2 - C_3 & cc. \end{cases}$$

L	$C_1 - C_3$	$C_2 - C_3$
$P(L = \ell)$	$0,4156$	$0,5843$

Modelos de Probabilidade Contínuos

1. Dada a v.a. X, uniforme em $[5,10]$, calcule as probabilidades abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & c.c \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10-5}, & 5 \le x \le 10 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

   a) $P(X<7)$.
   $P(X<7) = \int_5^7 \frac{1}{5}\,dx \to \frac{x}{5}\Big|_5^7 \to \frac{7-5}{5} \to \frac{2}{5} \to 0,4$

   b) $P(8<X<9)$.
   $P(8<X<9) = 1-P(X\le 8)-P(X\ge 9)$
   $P(X\ge 9) = \int_8^9 \frac{1}{5}\,dx \to \frac{x}{5}\Big|_8^9 \to \frac{9-8}{5} \to \frac{1}{5} \to 0,2$

   c) $P(X>8,5)$.
   $P(X>8,5) = \int_{8,5}^{10} \frac{1}{5}\,dx \to \frac{x}{5}\Big|_{8.5}^{10} \to \frac{10-8,5}{5} \to \frac{3}{2*5} \to 0,3$

   d) $P(|X-7,5|>2)$.
   $|X-7,5|>2 = \begin{cases} X-7,5>2 \to X>9,5 \\ X-7,5<-2 \to X<5,5 \end{cases}$
   $P(|X-7,5|>2) = \int_5^{5,5} \frac{1}{5}\,dx + \int_{9,5}^{10} \frac{1}{5}\,dx \to \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{5} \to 0,2$

3. Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$, calcule:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}}, & x>0; \\ 0, & c.c \end{cases}, \ \lambda = 1$$

   a) A probabilidade de que a duração seja menor a 10.
   $P(x \le 10) = 1-e^{-10} \to 0,9999$

   b) A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.
   $p(5<x<15) = P(X<15)-P(X<5) = 1-e^{-15}-1+e^{-5} \to e^{-5}-e^{-15} \to 0,0067$

   c) O valor t tal que a probabilidade de que a duração seja maior a t assuma o valor 0.01.
   $P(X>t) = e^{-t} = 0,01 \to \cancel{\ln e}^{-t} = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \to t = -[\cancel{\ln(1)}^{0} - \ln(100)] \to t = \ln(100) \to t = 4,605$

4. As alturas de 10:000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média $170cm$ e desvio padrão $5cm$. Qual o número esperado de alunos com altura superior a $165cm$?

   A proporção de alunos com altura superior a 165cm é dada por:

   $P(X>165)$, ou $P(Z>(165-170)/5) = P(Z>-1) = 0,8413$

   Logo, o número de alunos com mais de 165cm é uma variável aleatória com distribuição binomial(10000, 0.8413).

   $X \sim B(10000,\ 0,8413);\ E(X) = n.p \to 10000.0,8413 \to 8413$

11. O saldo médio dos clientes de um banco é uma v.a. normal com média $R\$2.000,00$ e desvio padrão $R\$250,00$. Os clientes com os 10% maiores saldos médios recebem tratamento VIP, enquanto aqueles com os 5% menores saldos médios receberão propaganda extra para estimular maior movimentação da conta.

   Seja $X =$ saldo médio; é dado que $X \sim N(2000; 250^2)$

a) Quanto você precisa de saldo médio para se tornar um cliente VIP?

Temos de determinar o valor de k tal que $P(X \geq k) = 0,1$. O que equivale a calcular 90% da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser $0,9$. Logo $k > média$.

$P(X \geq k) = 0,1 \rightarrow P\left(\frac{X-2000}{250} \geq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,1 \rightarrow P\left(\frac{X-2000}{250} \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,9$

$P\left(Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,9 \rightarrow P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,9$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,9 - 0,5 \rightarrow 0,4$

Utilizando a tabela[1] temos:

$\frac{k-2000}{250} = 1,28 \rightarrow k = 2000 + 320 \rightarrow 2320$

Logo, os clientes com saldo médio maior ou igual a $R\$2320,00$ terão tratamento VIP.

b) Abaixo de qual saldo médio o cliente receberá a propaganda extra?

Nesse caso, para determinar k, assumimos $P(X \leq k) = 0,05$. O que equivale a 5% da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser $0,05$. Logo, $k < média$. Será utilizada a simetria da distribuição, invertendo o sinal da abscissa, para utilizarmos a área na metade direita da função de densidade.

$P(X \leq k) = 0,05 \rightarrow P\left(\frac{X-2000}{250} \leq \frac{k-2000}{250}\right) \rightarrow P\left(Z \geq -\frac{k-2000}{250}\right)$

$P\left(Z \geq \frac{2000-k}{250}\right) = 0,5 - 0,05 = 0,45$

Utilizando a tabela[1] temos:

$\frac{2000-k}{250} = 1,64 \rightarrow k = 2000 - 410 \rightarrow k = 1590$

Logo, os clientes com saldo médio inferior a $R\$1590,00$ receberão a propaganda extra.

[1] http://www.dex.ufla.br/thelmasafadi/tabela%20normal.pdf

Referências Bibliográficas

[1] MEYER, P.L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

[2] BUSSAB, W.; Morettin, P. *Estatística básica*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2006. ISBN 9788502034979.