



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO**

PEDRO PAULO LISBOA DE SOUSA

**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
ESTUDANTE: Pedro Paulo Lisboa de Sousa/ 201711140038
TURMA: 2017
DATA: 04 de Dezembro de 2018

**RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA LISTA
DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS**

Resolução das questões da lista referentes à disciplina de Probabilidade e Estatística, do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, como complemento à 2ª avaliação.

Professor: Miguel Monteiro de Souza

Sumário

Variável Aleatória Discreta	1
Modelos de Probabilidade Discretos	4
Variável Aleatória Contínua	6
Modelos de Probabilidade Contínuos	7
Referências Bibliográficas	9

Variável Aleatória Discreta

1. Em um determinado condomínio residencial 30% das famílias não tem filhos, 40% tem 1 filho, 20% tem 2 filhos e 10% tem 3 filhos. Seja X o número de filhos de uma família sorteada ao acaso dentro desse condomínio residencial.

30% não tem filhos

40% tem 1 filho

20% tem 2 filhos

10% tem 3 filhos

- a) Determine a função de probabilidade e a distribuição acumulada de X .

x : nº de filhos

$\{0,1,2,3\} \rightarrow$ possíveis valores que x pode assumir.

$p(0) = 0,3$; $p(1) = 0,4$; $p(2) = 0,2$; $p(3) = 0,1$

X	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

OBS: Falta o gráfico

- b) Calcule a esperança e o desvio padrão de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i); \text{Var}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i) - [E(X)]^2; DP = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

X	$p(x_i)$	$x_i \cdot p(x_i)$
0	0,3	0
1	0,4	0,4
2	0,2	0,4
3	0,1	0,3
Total		1,1

X	$p(x_i)$	$x_i^2 \cdot p(x_i)$
0	0,3	0
1	0,4	0,4
2	0,2	0,8
3	0,1	0,9
Total		2,1

$E(X) = 1,1$;

$\text{Var}(X) = 2,1 - (1,1)^2 \rightarrow 2,1 - 1,21 = 0,89$

$DP = \sqrt{0,89} \rightarrow 0,9434$

2. Um indivíduo que possui um seguro de automóvel de uma determinada empresa é selecionado aleatoriamente. Seja Y o número de infrações ao código de trânsito para as quais o indivíduo foi reincidente nos últimos 3 anos. A função de probabilidade de Y é:

Y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	0,60	0,25	0,10	0,05

- a) Calcule $E(Y)$.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n y_i p(y_i)$$

Y	$p(y_i)$	$y_i \cdot p(y_i)$
0	0,6	0
1	0,25	0,25
2	0,1	0,2
3	0,05	0,15
Total		0,6

Logo, $E(Y) = 0,6$.

- b) Suponha que um indivíduo com Y infrações reincidentes incorra em uma multa de $U\$100Y^2$. Calcule o valor esperado da multa.

$$v = 100Y^2 \rightarrow E(v) = E(100Y^2) \rightarrow E(v) = 100 \cdot E(Y^2)$$

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^n y_i^2 \cdot p(y_i)$$

Y	$p(y_i)$	$y_i \cdot p(y_i)$
0	0,6	0
1	0,25	0,25
2	0,1	0,4
3	0,05	0,45
Total		1,1

Logo, $E(Y^2) = 1,1$.

Com isso, $E(v) = 100 \cdot E(Y^2) \rightarrow 100 \cdot 1,1 \rightarrow 110$.

Valor esperado: US\$110.

5. Um dado é lançado duas vezes. Seja X a soma dos resultados. Calcule $E(X)$.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix} \right\} \quad X = \left\{ \begin{matrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \end{matrix} \right\}$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$
$x_i \cdot p(x_i)$	$2/36$	$6/36$	$12/36$	$20/36$	$30/36$	$42/36$	$40/36$	$36/36$	$30/36$	$22/36$	$12/36$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$$

$$E(X) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \dots + \frac{12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

6. Um homem possui 4 chaves em seu bolso. Como está escuro, ele não consegue ver qual a chave correta para abrir a porta de sua casa. Ele testa cada uma das chaves até encontrar a correta.

C - chave da porta.

E_1, E_2 e E_3 - outras chaves.

- a) Defina um espaço amostral para esse experimento.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} C, & E_1C, & E_2C, & E_3C, & E_1E_2C, & E_2E_1C, & E_1E_3C, & E_3E_1C \\ E_2E_3C, & E_3E_2C, & E_1E_2E_3C, & E_1E_3E_2C, & E_2E_1E_3C, & E_2E_3E_1C, & E_3E_1E_2C, & E_3E_2E_1C \end{matrix} \right\}$$

- b) Defina a v.a. X = número de chaves experimentadas até conseguir abrir a porta (inclusive a chave correta). Quais são os valores de X ? Qual é a função de probabilidade de X ?

Ω (em n° de tentativas) = {1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4}

A partir de Ω , podemos ver que $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$p(1) = \frac{1}{4}$$

$$p(2) = p(E_1C \cup E_2C \cup E_3C) \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$p(3) = p(E_1E_2C \cup E_2E_1C \cup E_1E_3C \cup E_3E_1C \cup E_2E_3C \cup E_3E_2C) \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{6}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$p(4) = p(E_1E_2E_3C \cup E_1E_3E_2C \cup E_2E_1E_3C \cup E_2E_3E_1C \cup E_3E_1E_2C \cup E_3E_2E_1C) \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \right) \rightarrow \frac{6}{12} \rightarrow \frac{1}{4}$$

X	$p(x_i)$
1	$1/4$
2	$1/4$
3	$1/4$
4	$1/4$

7. Seja uma v.a. X com fdp dada na tabela a seguir:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0	p^2	p^2	p	p	p^2

a) Encontre o valor de p .

Como $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$, temos: $3p^2 + 2p = 1 \rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0$.

Resolvendo a equação chegamos as raízes -1 e $\frac{1}{3}$. Como a p é a probabilidade de um evento ocorrer, temos $p \geq 0$. Logo, $p = \frac{1}{3}$.

b) Calcule $P(X \geq 4)$ e $P(X < 3)$.

$$P(X \geq 4) \rightarrow p^2 + p \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1+3}{9} \rightarrow \frac{4}{9}$$

$$P(X < 3) \rightarrow 2p^2 \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{9}$$

c) Calcule $P(|X - 3| \geq 2)$.

$$|x - 3| \geq 2 \begin{cases} x - 3 \geq 2 & \rightarrow x \geq 5 \\ x - 3 \leq -2 & \rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$P(|x - 3| \geq 2) = P(X \leq 1) + P(X \geq 5) \rightarrow p^2 + p^2 \rightarrow 2 \cdot p^2 \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{9}$$

Modelos de Probabilidade Discretos

1. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

$$p = 0,2; x = 10$$

$$P(X = 10) = 0,2^1 \cdot 0,8^{10-1} \rightarrow (0,2) \cdot (0,8)^9 \rightarrow (0,2) \cdot (0,8)^9 \rightarrow 0,0268$$

2. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a primeira ocorrência de um seis?

$$p = \frac{1}{6}; x = 10$$

$$P(X = 10) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \rightarrow 0,0323$$

3. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a terceira ocorrência de um seis?

$$p = \frac{1}{6}; x = 10; k = 3$$

$$P(X = 10) = \binom{10-1}{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \rightarrow \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \rightarrow \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$P(X = 10) \rightarrow 0,0465$$

4. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

$$p = 0,2$$

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1)$$

$$P(0) = \binom{10}{0} \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} \rightarrow \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} \rightarrow 0,1074$$

$$P(1) = \binom{9}{1} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \rightarrow \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 \rightarrow 10 \cdot (0,2) \cdot (0,8)^9 \rightarrow 0,2684$$

$$P(X \leq 1) = 0,1074 + 0,2684 \rightarrow 0,3758$$

5. Entre os 16 programadores de uma empresa, 12 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 5 programadores para fazer um curso avançado de programação. Qual é a probabilidade dos 5 sorteados serem do sexo masculino?

$$P(X = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{16}{5}} \rightarrow \frac{\frac{12!}{5! \cdot 7!}}{\frac{16!}{5! \cdot 11!}} \rightarrow \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} \rightarrow \frac{11}{14 \cdot 13} \cdot \frac{12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{16 \cdot 15 \cdot 12} \rightarrow \frac{11 \cdot 3}{14 \cdot 13} \rightarrow \frac{33}{182} \rightarrow 0,1813$$

6. Uma central telefônica recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, qual é a probabilidade de a central não receber nenhuma chamada em um minuto? e de receber no máximo 2 chamadas em 2 minutos?

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = 5$$

$$P(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} \rightarrow \frac{1}{e^5} \rightarrow 0,0067$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) \rightarrow \frac{5^0}{0! \cdot e^{10}} + \frac{10}{e^{10}} + \frac{1}{e^{10}} \rightarrow \frac{122}{2 \cdot e^{10}} \rightarrow 0,00277$$

7. Seja X uma v.a. aleatória binomial (n, p) com $n = 5$, $p = \frac{1}{3}$. Calcule $E(X^2)$.

$$X \sim BN(n, p); E(x) = n \cdot p; VAR(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{3}$$

$$VAR(X) = \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \rightarrow \frac{10}{9}$$

$$VAR(X) = E(x^2) - [E(X)]^2 \rightarrow E(x^2) = VAR(X) + [E(X)]^2$$

$$E(x^2) = \frac{10}{9} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{35}{9}$$

8. Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um corte por 2000 pés. Qual é a probabilidade de que um rolo com comprimento de 4000 pés apresente no máximo dois cortes? Pelo menos dois cortes?

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = 2 \text{ p/4000 pés}$$

$$P(X \leq 2) = P(2) + P(1) + P(0) \rightarrow \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} + \frac{2 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{e^{-2}}{0!} \rightarrow \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} \rightarrow 0,676676$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \rightarrow 1 - [P(0) + P(1)] \rightarrow 1 - \left(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2}\right) \rightarrow 0,593994$$

10. A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa em um dia é 0,1.

- a) Qual a probabilidade de que, em 20 peças produzidas em um dia, exatamente 5 sejam defeituosas?

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \rightarrow \frac{20!}{5! \cdot 15!} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \rightarrow \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \rightarrow 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} \rightarrow 0,032$$

- b) Qual a probabilidade de que a 10ª peça produzida em um dia seja a primeira defeituosa?

$$P(X = 10) = (0,1) \cdot (0,9)^9 \rightarrow 0,0387$$

11. Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 10 funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:

- a) exatamente 7 funcionários aumentarem a produtividade;

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \rightarrow \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \rightarrow 120 \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \rightarrow 0,201326592$$

- b) pelo menos 3 funcionários não aumentarem a produtividade;

No máximo 7 aumentaram.

$$P(X \leq 7) = P(X \leq 8) - P(X = 8) \rightarrow P(X \leq 8) - \binom{10}{8} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \rightarrow P(X \leq 8) - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \rightarrow P(X \leq 8) - 45 \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \rightarrow 0,6242 - 45 \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 \rightarrow 0,3222$$

OBS: $P(X \leq 8)$ é calculado na letra c.

- c) não mais que 8 funcionários aumentarem a produtividade.

$$P(X \leq 8) = 1 - [P(X = 9) + P(X = 10)] \rightarrow 1 - \left[\binom{10}{9} \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + \binom{10}{10} \cdot (0,8)^{10} \right]$$

$$\rightarrow 1 - \left[\frac{10 \cdot 9!}{9! \cdot 1!} \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + (0,8)^{10} \right] \rightarrow 1 - [10 \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 + (0,8)^{10}] \rightarrow 0,6242$$

Variável Aleatória Contínua

1. Seja X uma v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = kx^2 \text{ se } 0 \leq x \leq 1.$$

- a) Determine o valor de k .
- b) Calcule $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})$.
- c) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

2. O tempo de vida útil, em anos, de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{4}, \quad x > 0.$$

- a) Mostre que $f(x)$ integra 1.
 - b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?
4. A percentagem de álcool ($100X$) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória com a seguinte fdp:

$$f(x) = 20x^3(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

- a) Estabeleça a FD de X .
- b) Calcule $P(X < \frac{2}{3})$.
- c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se $\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$, o composto se vende por C_1 dólares/galão, caso contrário ele se vende por C_2 dólares/galão. Se o custo C_3 dólares/galão, calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.

Modelos de Probabilidade Contínuos

1. Dada a v.a. X , uniforme em $[5, 10]$, calcule as probabilidades abaixo:
 - a) $P(X < 7)$.
 - b) $P(8 < X < 9)$.
 - c) $P(X > 8,5)$.
 - d) $P(|X - 7,5| > 2)$.
3. Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$, calcule:
 - a) A probabilidade de que a duração seja menor a 10.
 - b) A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.
 - c) O valor t tal que a probabilidade de que a duração seja maior a t assumo o valor 0.01.
4. As alturas de 10:000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170cm e desvio padrão 5cm . Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165cm ?
11. O saldo médio dos clientes de um banco é uma v.a. normal com média $R\$2.000,00$ e desvio padrão $R\$250,00$. Os clientes com os 10% maiores saldos médios recebem tratamento VIP, enquanto aqueles com os 5% menores saldos médios receberão propaganda extra para estimular maior movimentação da conta.
 - a) Quanto você precisa de saldo médio para se tornar um cliente VIP?
 - b) Abaixo de qual saldo médio o cliente receberá a propaganda extra?

Referências Bibliográficas

- [1] MEYER, P.L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.
- [2] BUSSAB, W.; Morettin, P. *Estatística básica*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2006. ISBN 9788502034979.