下限拓扑

数学上，下限拓扑是定义在实数集 ℝ 上的拓扑。其不同于 ℝ 上的标准拓扑（由开区间生成），且具有若干有趣的性质。其为全体半开区间 [a,b) 组成的基生成的拓扑，其中 a 和 b 取遍任意实数。

这样得到的拓扑空间称为Sorgenfrey直线（得名自 Robert Sorgenfrey）或箭头，有时记为 $\mathbb{R}_l$. 与康托集和长直线类似，Sorgenfrey 直线也经常作为点集拓扑学中不少似是而非的命题的反例。

$\mathbb{R}_l$ 与自身的积也是有用的反例，称为Sorgenfrey平面。

类似地，可以定义 ℝ 上的上限拓扑，其性质与下限拓扑完全相同。

性质

条目“Robert Sorgenfrey”尚未创建，可参考英语维基百科的对应页面：Robert Sorgenfrey。

- 下限拓扑比实数集的标准拓扑更精细（具有更多开集）。原因是每个开区间都可写成半开区间的可限拓扑中也是开集。
- 对任意实数 a 和 b, 区间 $[a, b)$ 都是 $\mathbb{R}_l$ 的闭开集（既是开集，也是闭集）。而且，对任意实数 a, 集 $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ 皆为闭开集。故 $\mathbb{R}_l$ 为完全不连通空间。
- $\mathbb{R}_l$ 的紧子集只能是可数集（允许是有限集）。要证明此结论，考虑非空紧集 $C \subseteq \mathbb{R}_l$. 取定 $x \in C$, 覆盖:

  $$\{[x, +\infty)\} \cup \left\{\left(-\infty, x - \tfrac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

  由于 C 为紧，此开覆盖具有有限子覆盖，故存在实数 $a(x)$ 使得区间 $(a(x), x]$ 不含 C 除 x 以外的点。这对任意 $x \in C$ 为真。现选取有理数 $q(x) \in (a(x), x] \cap \mathbb{Q}$. 对不同的 $x \in C$, 区间 $(a(x), x]$ 两两不交，故函数 $q : C \to \mathbb{Q}$ 为单射，故 C 至多可数。

- “下限拓扑”得名自以下性质：$\mathbb{R}_l$ 中的序列（或网）(x_α) 收敛到 L 当且仅当其“从右接近 L”，即对任意的 $\epsilon > 0$，均存在下标 α_0 使得 $\forall \alpha \geq \alpha_0 : L \leq x_\alpha < L + \epsilon$. $\mathbb{R}_l$ 因此可用于研究单侧极限：对函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f 于 x 之右极限（假定陪域具有标准拓扑），等于定义域在下限拓扑下 f 于 x 之一般极限。
- 就分离公理而言，$\mathbb{R}_l$ 是完美正规豪斯多夫空间（T_6 空间）。
- 就可数性公理而言，$\mathbb{R}_l$ 是第一可数空间和可分空间，但并非第二可数空间。
- 就紧致性而言，$\mathbb{R}_l$ 是林德勒夫空间和仿紧空间，但并非σ-紧空间，也不是局部紧空间。
- $\mathbb{R}_l$ 不可度量化，因为可分的度量空间必为第二可数。然而，$\mathbb{R}_l$ 的拓扑是由一个预度量给出。
- $\mathbb{R}_l$ 是一个贝尔空间 [1]。

参考资料

1. Re: Baireness of Sorgenfrey line, more details (and more accurate). at.yorku.ca. [2018-07-05]. （原始内容存档于2011-06-04）.

- Steen, Lynn Arthur; Seebach, J. Arthur Jr., Counterexamples in Topology Dover reprint of 1978, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995 [1978], ISBN 978-0-486-68735-3, MR 0507446