拓扑学入门6——相对拓扑

sumeragi693

拓扑学入门5——连续映射
50 赞同 · 18 评论 文章

前言

从这章开始，我们将用3章的篇幅讨论如何从给定的拓扑空间创造新的拓扑空间。首先，本章讲述相对拓扑。这是在拓扑空间的子集上确定拓扑的标准方法，也是拓扑空间最基本的构成方法。同时还会介绍作为与相对拓扑有关的映射——嵌入映射。

正文

设 $(X,\mathcal{O})$ 为拓扑空间， $A\subseteq X$ 。我们来思考一下，有没有什么好方法从拓扑 $\mathcal{O}$ 出发定义 A 上的拓扑。

我们先定义**包含映射** $i:A\to X,i(x)=x$ ，为了定义 A 上的拓扑，至少要让该映射连续。原因在于，当我们把定义域扩大到 X 时，包含映射就变成了恒等映射。而 $id:X\to X$ 连续（命题5.2），因此它在 X 的任意一点处都连续。那么当定义域缩小回 A 之后，我们当然仍希望该映射在 A 中的任意一点处都连续，即希望 $i:A\to X$ 连续。一种极端的做法是在 A 上定义离散拓扑（最细的拓扑），根据命题5.5，包含映射连续。但是这样就会使得 A 的拓扑和 X 的拓扑之间没有任何关系，所以这并不是一种好方法。

基于要让包含映射 i 连续这个限制条件，我们来考虑 A 上尽可能粗的拓扑。因为拓扑越粗则所含开集就越少，越不容易引入与全空间 X 无关的信息，即 A 的拓扑越粗，就越与 X 相关。根据连续的定义，对于任意开集 $U\subseteq X$ ，它的原像 $i^{-1}(U)=U\cap A$ 为 A 的开集。换句话说， i 连续的充要条件是集族 $\mathcal{O}_A=\{U\cap A|U\in\mathcal{O}\}$ 中所有集合，即 X 中的开集与 A 之交均为 A 的开集。因此，如果证明了集族 $\mathcal{O}_A$ 满足条件 $O_1\sim O_3$ ，那么我们就在 A 上得到了一个使得 i 连续的拓扑。并且由于我们仅仅要求 i 连续，并没有其他多余的信息，所以这个拓扑一定是最粗的。下面的命题告诉我们，集族 $\mathcal{O}_A$ 确实满足条件 $O_1\sim O_3$ 。

命题6.1（集族 $\mathcal{O}_A$ 满足开集公理）

设 $(X,\mathcal{O})$ 为拓扑空间， $A\subseteq X$ 。定义集族 $\mathcal{O}_A=\{U\cap A|U\in\mathcal{O}\}$ ，则 $\mathcal{O}_A$ 是 A 上的拓扑，即 $\mathcal{O}_A$ 满足条件 $O_1\sim O_3$ 。

证明： $O1$ ：分别取 $U=\emptyset,X\in\mathcal{O}$ ，则 $U\cap A=\emptyset,A\in\mathcal{O}_A$ ，所以 $O1$ 满足。

$O2$ ：任取 $V_1,V_2\in\mathcal{O}_A$ ，根据 $\mathcal{O}_A$ 的定义，对于 $i=1,2$ ，存在 $U_i\in\mathcal{O}$ 使得 $U_i\cap A=V_i$ ，于是 $V_1\cap V_2=(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)=(U_1\cap U_2)\cap A$ 。而 $U_1\cap U_2\in\mathcal{O}$ ，所以 $V_1\cap V_2\in\mathcal{O}_A$ ，所以 $O2$ 满足。

$O3$ ：设 Λ 为指标集，集族 $\{V_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathcal{O}_A$ 。根据 $\mathcal{O}_A$ 的定义，对于每个 $\lambda\in\Lambda$ ，存在 $U_\lambda\in\mathcal{O}$ 使得 $U_\lambda\cap A=V_\lambda$ ，于是 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap A)=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)\cap A$ 。而 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}$ ，所以 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda\in\mathcal{O}_A$ ，所以 $O3$ 满足。

证毕。

定义6.2（相对拓扑）

$(A, \mathcal{O}_A)$ 叫作 $(X, \mathcal{O})$ 的**子空间**。

以后对于拓扑空间 X 的子集 A，如果没有特别说明，总是把 A 看成 X 的子空间（此时 A 上的拓扑为相对拓扑）。根据目前的讨论，我们得到了以下命题。

命题6.3（相对拓扑和包含映射）

设 $(X, \mathcal{O})$ 为拓扑空间， $A \subseteq X$，那么相对拓扑 $\mathcal{O}_A$ 是 A 上使得包含映射 $i : A \to X$ 连续的最小拓扑。也就是说，以下命题成立：

- 包含映射 $i : (A, \mathcal{O}_A) \to (X, \mathcal{O})$ 连续。
- 如果 A 上存在其他拓扑 $\mathcal{O}'$ 使得包含映射 $i : (A, \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ 也连续，那么 $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}'$。

命题6.4（连续映射的限制）

设 X, Y 为拓扑空间，映射 $f : X \to Y$ 连续。此时，限制映射 $f|_A : A \to Y$ （在相对拓扑下）也连续。

证明：由命题6.3可知包含映射 $i : A \to X$ 连续，而 $f|_A = f \circ i : A \to Y$，即限制映射是两个连续映射的复合，所以 $f|_A$ 连续。

证毕。

设拓扑空间 X 的子集满足 $B \subseteq A \subseteq X$，此时 B 既可以看成 X 的子空间，又可以看成 A 的子空间。但不论怎样考虑， B 的相对拓扑都是相同的。也就是说：

命题6.5（子空间的传递性）

设拓扑空间 X 的子集满足 $B \subseteq A \subseteq X$，那么 B 相对于 X 的相对拓扑 $\mathcal{O}_{B,X}$ 和相对于 A 的相对拓扑 $\mathcal{O}_{B,A}$ 相同。

证明：任取 $W \in \mathcal{O}_{B,A}$，根据相对拓扑的定义，存在 A 中的开集 V 使得 $W = V \cap B$，同时也存在 X 中的开集 U 使得 $V = U \cap A$。于是 $W = U \cap A \cap B = U \cap B$，即 $W \in \mathcal{O}_{B,X}$，所以 $\mathcal{O}_{B,A} \subset \mathcal{O}_{B,X}$。反过来，如果任取 $W \in \mathcal{O}_{B,X}$，那么存在 X 中的开集 U 使得 $W = U \cap B$。令 $V = U \cap A$，那么 V 是 A 中的开集，并且 $V \cap B = U \cap A \cap B = U \cap B = W$，即 $W \in \mathcal{O}_{B,A}$，所以 $\mathcal{O}_{B,X} \subset \mathcal{O}_{B,A}$。所以 $\mathcal{O}_{B,A} = \mathcal{O}_{B,X}$。

证毕。

以后在没有特别说明的情况下会经常用到命题6.5的结论，希望大家多注意。

命题6.6（关于相对拓扑的闭集）

设 $(X, \mathcal{O})$ 为拓扑空间， $A \subseteq X$，那么子空间 $(A, \mathcal{O}_A)$ 的闭集族为 $\mathcal{F}_A = \{F \cap A | F^c \in \mathcal{O}\}$。

证明：设 $H \subseteq A$ 为子空间 $(A, \mathcal{O}_A)$ 的闭集，那么 $A - H$ 为子空间的开集（为了区分在全空间和子空间中的补集，子空间的补集用差集来表示），所以存在 X 中的开集 U 使得 $A - H = U \cap A$。记 $F = U^c$，则 F 为 X 的闭集，并且 $H = A - (A - H) = A - (U \cap A) = A - U = A \cap U^c = A \cap F$。因此 $H \in \mathcal{F}_A$。

反之，任取 $H \in \mathcal{F}_A$，根据定义，存在闭集 $F \subseteq X$，使得 $H = F \cap A$。记 $U = F^c$，那么 $U \cap A$ 为子空间的开集。于是 $H = F \cap A = A - U = A - (U \cap A)$，因此 H 为子空间的闭集。

证毕。

在处理子空间中的开集和闭集时有下列两个基本命题。

命题6.7（开集的开集、闭集的闭集）

开集的开集是开集，闭集的闭集是闭集。即如若 $U \subseteq X$ 为开集， $V \subseteq U$ 为子空间 U 中的开集，那么 V 也是 X 的开集。同理，如若 $F \subseteq X$ 为闭集， $H \subseteq F$ 为子空间 F 中的闭集，那么 H 也是 X 的闭集。

证明：根据相对拓扑的定义，存在开集 $V' \subseteq X$ ，使得 $V = V' \cap U$ 。由于 V', U 都是 X 的开集，它们的交当然也是 X 的开集。闭集同理。

证毕。

命题6.8（子空间的开集、闭集）

设 X 为拓扑空间， $B \subseteq A \subseteq X$ 。如果 B 为 X 的开集，那么 B 也为子空间 A 的开集。如果 B 为 X 的闭集，那么 B 也为子空间 A 的闭集。

只要注意到此时 $B = B \cap A$ ，利用相对拓扑的定义和命题6.6就立刻得到结论。

现在再来看距离空间的子空间。设 (X, d) 为距离空间， $A \subseteq X$ 。此时，定义 A 上的拓扑有两种方法。第一种，距离 d 可以诱导拓扑 $\mathcal{O}_d$ 使其成为拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_d)$ ，考虑该拓扑空间的相对拓扑 $\mathcal{O}_{dA}$ 。第二种，把距离函数 d 限制在集合 A 上（注意1.13）得到距离空间 (A, d_A) ，并由该限制距离诱导出拓扑 $\mathcal{O}_{d_A}$ 。实际上这两种拓扑是相同的，所以无需区分，即下列命题成立。

命题6.9（距离空间子集上的拓扑）

设 (X, d) 为距离空间， $A \subseteq X$ 。对于由距离诱导的拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_d)$ 的子空间 $(A, \mathcal{O}_{dA})$ 和由限制距离 d_A 诱导的拓扑空间 $(A, \mathcal{O}_{d_A})$ ，满足 $\mathcal{O}_{dA} = \mathcal{O}_{d_A}$ 。

证明：先证 $\mathcal{O}_{dA} \subseteq \mathcal{O}_{d_A}$ 。任取 $V \in \mathcal{O}_{dA}$ ，则存在开集 $U \in \mathcal{O}_d$ ，使得 $V = U \cap A$ 。设 $x \in V$ 是任意一点，那么 $x \in U$ ，因此存在 $r > 0$ 使得 $B_d(x, r) \subseteq U$ ，那么 $B_d(x, r) \cap A \subseteq U \cap A = V$ 。另一方面，根据限制距离的定义 $d_A = d|_{A \times A}$ 可知 $B_{d_A}(x, r) = \{y \in A | d(x, y) < r\} = B_d(x, r) \cap A$ ，因此 $B_{d_A}(x, r) \subseteq V$ 。由 x 的任意性得 V 是子距离空间 $(A, \mathcal{O}_{d_A})$ 的开集，即 $V \in O_{d_A}$ 。

再证 $\mathcal{O}_{d_A} \subseteq \mathcal{O}_{dA}$ 。任取 $V \in \mathcal{O}_{d_A}$ ，对于 V 中每一点 x ，都存在相应的 r ，使得开球 $B_{d_A}(x, r) = B_d(x, r) \cap A \subseteq V$ 。记 $U = \bigcup_{x \in V} B_d(x, r)$ ，那么 $U \in \mathcal{O}_d$ ，并且有 $U \cap A = (\bigcup_{x \in V} B_d(x, r)) \cap A = \bigcup_{x \in V} (B_d(x, r) \cap A)$ 。因为每个 $B_d(x, r) \cap A \subseteq V$ ，所以并集 $U \cap A \subseteq V$ 。另一方面，根据 U 的定义可知 $V \subseteq U$ ，且 $V \in \mathcal{O}_{d_A}$ 意味着 V 是子距离空间 $(A, \mathcal{O}_{d_A})$ 的开集，即 $V \subseteq A$ ，所以有 $V \subseteq U \cap A$ 。于是 $V = U \cap A$ ，从而 $V \in \mathcal{O}_{dA}$ 。

证毕。

命题6.9表明，任意距离空间的子集装备相对拓扑之后，子空间是可距离化的，并且子空间中诱导出相对拓扑的距离就是全空间的距离限制在子集上的限制距离。

注意6.10（关于命题6.9的证明）

证明的后半部分，即证明 $\mathcal{O}_{d_A} \subseteq \mathcal{O}_{dA}$ 还有另一种方法。首先，距离空间 $(A, \mathcal{O}_{d_A})$ 的所有开球组成的集族 $\mathcal{B} = \{B_{d_A}(x, r) | x \in A, r > 0\}$ 为它的基（例3.4）。此时，因为 $B_{d_A}(x, r) = B_d(x, r) \cap A$ 并且 $B_d(x, r) \in \mathcal{O}_d$ ，所以有 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_{dA}$ 。现在， $\mathcal{O}_{d_A}$ 是由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑（注意3.11），所以 $\mathcal{O}_{d_A}$ 是包含 $\mathcal{B}$ 的最小拓扑。由这个最小性也能推出 $\mathcal{O}_{d_A} \subseteq \mathcal{O}_{dA}$ 。

第一可数性（定义2.12）和第二可数性（定义3.6）是可遗传的，即以下命题成立。

第一可数空间（或第二可数空间）的子空间也是第一可数空间（或第二可数空间）。

证明：先看第一可数。设 X 为第一可数空间， $A \subseteq X$ 。任取 $x \in A$ ，则 x 具有至多可数的邻域基 $\mathcal{U}$ 。显然，邻域基中每个邻域的内部也都是 x 的开邻域，这些开邻域组成的集族也仍然是 x 的至多可数的邻域基，所以不妨直接设 $\mathcal{U}$ 为开邻域基。定义集族 $\mathcal{V} = \{U \cap A | U \in \mathcal{U}\}$ ，那么它是至多可数集，并且是 x 在子空间 A 中的开邻域所组成的集族。下证它是 x 在子空间中的邻域基。任取 x 在子空间中的开邻域 V ，存在开集 $V' \subseteq X$ 使得 $x \in V = V' \cap A$ 。此时， $x \in V'$ 意味着 V' 是 x 在全空间 X 中的开邻域，因此存在 $U \in \mathcal{U}$ ，使得 $x \in U \subseteq V'$ 。于是 $x \in U \cap A \subseteq V' \cap A = V$ ，而 $U \cap A \in \mathcal{V}$ ，由 V 的任意性得 $\mathcal{V} = \{U \cap A | U \in \mathcal{U}\}$ 为邻域基。

再看第二可数。设 X 为第二可数空间， $A \subseteq X$ ，那么 X 具有至多可数的基 $\mathcal{B}$ 。定义集族 $\mathcal{B}' = \{B \cap A | B \in \mathcal{B}\}$ ，则它是至多可数集，并且是由子空间 A 的开集所组成的。下证它是 A 的基。任取子空间的某个开集 $V \subseteq A$ 和任意 $x \in V$ ，存在开集 $V' \subseteq X$ 使得 $x \in V = V' \cap A$ 。此时， $x \in V'$ 意味着存在 $B \in \mathcal{B}$ ，使得 $x \in B \subseteq V'$ 。于是 $x \in B \cap A \subseteq V' \cap A = V$ ，而 $B \cap A \in \mathcal{B}'$ ，由 V 和 x 的任意性得 $\mathcal{B}' = \{B \cap A | B \in \mathcal{B}\}$ 为基。

证毕。

证明过程中用到了 $U \cap A$ 是 x 在子空间 A 中的开邻域这一点，原因很简单。因为 $U \subseteq X$ 是 x 的开邻域，根据相对拓扑的定义，集合 $U \cap A$ 是 A 的开集。并且由于 $x \in U \cap A$ ，根据命题2.2， $U \cap A$ 是 x 的开邻域。反过来，上面的证明过程中已经说明了如果 $V \subseteq A$ 是 x 在子空间 A 中的开邻域，那么必然存在某个 x 在全空间中的开邻域 $V' \subseteq X$ ，使得 $V = V' \cap A$ 。下面会反复利用该结论。

下面的命题在证明分段定义的映射连续时起到很大的作用。

命题6.12（连续映射的粘接）

设 X, Y 为拓扑空间，映射 $f : X \to Y$ 。

1. 设 $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 为 X 的开集族，且 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ （这样的集族叫作 X 的**开覆盖**）。如果 $\forall \lambda \in \Lambda$ ，限制映射 $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ 都连续，那么 $f : X \to Y$ 也连续。
2. 设 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为 X 的有限闭集族，且 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = X$ （这样的集族叫作 X 的**有限闭覆盖**）。如果对于每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ ，限制映射 $f|_{F_i} : F_i \to Y$ 都连续，那么 $f : X \to Y$ 也连续。

证明：1，任取开集 $V \subseteq Y$ ，我们来证明它的原像是 X 的开集。由条件1， $\forall \lambda \in \Lambda, (f|_{U_\lambda})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\lambda$ 为 U_λ 的开集。根据命题6.7， $f^{-1}(V) \cap U_\lambda$ 也是 X 的开集。那么并集 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (f^{-1}(V) \cap U_\lambda) = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V)$ 仍是 X 的开集，因此 f 连续。

2，任取闭集 $H \subseteq Y$ ，仿照1中的证法，注意到有限个闭集之并仍是闭集即可。

证毕。

例6.13（道路的合成）

对于一般的拓扑空间 X ，连续映射 $f : [0, 1] \to X$ 称为 X 中的**道路**， $f(0), f(1)$ 分别称为道路 f 的起点、终点。现假设 X 中有两条道路 f, g ，满足 f 的终点恰好为 g 的起点，即 $f(1) = g(0)$ 。此时，可以按照以下方式定义把 f, g 合成为一条新的道路 $h : [0, 1] \to X$ ：

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

射的复合，所以它们都连续。其次， $[0,1]=[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]$ ，而等号右边为 $[0,1]$ 中的两个闭集之并（命题6.8），根据命题6.12， $h:[0,1]\to X$ 连续。

需要提醒大家注意相对拓扑和点列收敛之间的关系。设 X 为拓扑空间， $A\subseteq X$ ，定义 A 中的点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $x\in A$ 时有两种方法:

1. 将点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 视为 X 中的点列，以 X 的拓扑为基准定义 $x_n\to x$ 。也就是说，对于 x 在 X 中的任何开邻域 $U\subseteq X$ ，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ ，当 $n\geq N$ 时， $x_n\in U$ 。
2. 将点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 视为 A 中的点列，以 A 的相对拓扑为基准定义 $x_n\to x$ 。也就是说，对于 x 在 A 中的任何开邻域 $V\subseteq A$ ，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ ，当 $n\geq N$ 时， $x_n\in V$ 。

以下命题告诉我们，这两种定义实际上是等价的，因此无需区分。

命题6.14（子空间中点列收敛定义的等价性）

设 X 为拓扑空间， $A\subseteq X,x\in A$ 。此时按照上述两种方法定义“ A 中的点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x ”是等价的。

证明： $1\Rightarrow2$ 。任取 x 在 A 中的开邻域 $V\subseteq A$ ，则存在 x 在全空间中的开邻域 $U\subseteq X$ ，使得 $V=U\cap A$ 。根据条件1，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ ，当 $n\geq N$ 时， $x_n\in U$ 。另一方面，因为点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 A 中的点列，即 $\forall n\in\mathbb{N}_+,x_n\in A$ ，所以当 $n\geq N$ 时，$x_n\in U\cap A=V$ 成立，即条件2成立。

$2\Rightarrow1$ 。任取 x 在 X 中的开邻域 U ，则 $V=U\cap A$ 是 x 在 A 中的开邻域。根据条件2，存在 $N\in\mathbb{N}_+$ ，当 $n\geq N$ 时， $x_n\in V\subseteq U$ ，即条件1成立。

证毕。

子空间中的闭包也可以用全空间中的闭包来描述。

命题6.15（子空间中的闭包）

设 X 为拓扑空间， $B\subseteq A\subseteq X$ 。此时 B 在子空间 A 中的闭包 $\mathrm{Cl}_A(B)$ 和在全空间中的闭包 $\bar{B}$ 之间满足关系： $\mathrm{Cl}_A(B)=A\cap\bar{B}$ 。

证明：因为 $\bar{B}$ 是 X 的闭集，根据命题6.6， $A\cap\bar{B}$ 是 A 的闭集。另外，由于 $B\subseteq A$ 且 $B\subseteq\bar{B}$，因此 $B\subseteq A\cap\bar{B}$。针对子空间 A 使用命题4.2，得 $\mathrm{Cl}_A(B)\subseteq A\cap\bar{B}$。反过来，任取 $x\in A\cap\bar{B}$，考虑 x 在 A 中的任意开邻域 V ，则存在 x 在全空间中的开邻域 $U\subseteq X$ ，使得 $V=U\cap A$ 。又因为 $x\in\bar{B}$，根据命题4.5， $U\cap B\neq\emptyset$ 。于是 $V\cap B=(U\cap A)\cap B=U\cap(A\cap B)=U\cap B\neq\emptyset$，从而根据命题4.5，$x\in\mathrm{Cl}_A(B)$ 。由 x 的任意性得 $\mathrm{Cl}_A(B)\supseteq A\cap\bar{B}$，因此 $\mathrm{Cl}_A(B)=A\cap\bar{B}$。

证毕。

例6.16（子空间的开集、闭集）

考虑 $\mathbb{R}$ 的子空间 $X=[-1,1)$ ，并设 $A=[-1,0),B=[0,1)$ 。虽然 A 不是 $\mathbb{R}$ 的开集，但考虑到 $A=(-\infty,0)\cap X$ 且 $(-\infty,0)\subset\mathbb{R}$ 为开集，因此 A 是 X 的开集。同理，虽然 B 不是 $\mathbb{R}$ 的闭集，但考虑到 $B=[0,+\infty)\cap X$ 且 $[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$ 为闭集，因此 B 是 X 的闭集。

再考虑子集
$C\subset X,C=\left\{-1+\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}_+\right\}\cup\left\{1-\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}_+\right\}$
$=\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{3},\cdots,\pm\frac{n-1}{n},\cdots\right\}$
。易证 C 在 $\mathbb{R}$ 中的闭包为 $\bar{C}=C\cup\{-1,1\}$ ，于是根据命题6.15， C 在 X 中的闭包为 $\bar{C}\cap X=C\cup\{-1\}$ 。

区分，这里还是用符号 f^A 标记）。那么 $f^A:Y\to A$ 是否也连续呢？如果不是的话，就会导致讨论映射的连续性时必须注意陪域取在哪个集合上。所幸并不是这样。

命题6.17（子空间的泛性质）

设 A 为拓扑空间 X 的子空间，映射 $f:Y\to X$ 连续。如果 $f(Y)\subseteq A$，那么映射 $f^A:Y\to A$ 连续。

证明：设 $i:A\to X$ 为包含映射，那么 $f=i\circ f^A$。任取开集 $V\subseteq A$，则存在开集 $U\subseteq X$ 使得 $i^{-1}(U)=U\cap A=V$，于是 $(f^A)^{-1}(V)=(f^A)^{-1}[i^{-1}(U)]=(f^A)^{-1}\circ i^{-1}(U)=(i\circ f^A)^{-1}(U)=f^{-1}(U)$。由 $f:Y\to X$ 的连续性得 $(f^A)^{-1}(V)=f^{-1}(U)\subseteq Y$ 是开集，因此 $f^A:Y\to A$ 连续。

证毕。

虽然映射 f,f^A 是不同的映射，但既然 f 的连续性与陪域无关，有时也会统一使用符号 f。

对于拓扑空间 X,Y，有时候虽然 $X\nsubseteq Y$，但我们仍然想把 X 看成 Y 的某个子空间。此时就需要利用下面介绍的**嵌入映射**。

定义6.18（嵌入映射）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 连续。如果 f 为单射，并且把陪域限制在 $f(X)\subseteq Y$ 上所得的连续双射 $\hat{f}:X\to f(X)$ 为同胚映射，那么 f 称为嵌入映射。

定义中提到了“连续双射 $\hat{f}:X\to f(X)$”，它的连续性其实是由命题6.17保证的。另外，在微分流形等理论中“嵌入”一词的意义较狭隘，为了区分狭义上的嵌入，此处定义的嵌入映射有时也称为“**拓扑嵌入**”。

嵌入映射一个简单的例子就是包含映射，此时 $X\subseteq Y,i:X\to Y$ 满足嵌入映射的定义。以下从 $\mathbb{R}^2$ 的图形的角度出发，举一些方便理解的例子。

例6.19（嵌入的例子）

（1）设 $X=[0,1],Y=\mathbb{R}^2$，定义 $f:X\to Y,f(x)=(2x,3x)$（这在微积分中叫作一元向量值函数）。易证 f 是连续的单射（单射是显然的，连续性由命题5.10和命题6.4保证），所以将陪域限制在 $f(X)$ 上时，就得到了连续的双射 $\hat{f}:X\to f(X)$。要证明 $f:X\to Y$ 是嵌入映射，只需要证明 $\hat{f}:X\to f(X)$ 是同胚映射，即证明 $\hat{f}^{-1}:f(X)\to X$ 连续。定义函数 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},g(x,y)=\frac{x}{2}$，它是连续的（可以看成投影函数 $g(x_1,x_2)=x_1$ 和连续函数 $x=\frac{x_1}{2}$ 的复合），所以限制映射 $g|_{f(X)}:f(X)\to\mathbb{R}$ 连续。易证 $\hat{f}^{-1}:f(X)\to X$ 就是把限制映射 $g|_{f(X)}$ 的陪域也限制在 X 上所得，由命题6.17可知它连续，因此 $f:X\to Y$ 为嵌入映射。

以上的论述有点兜圈子的感觉，是因为在证明 $\hat{f}^{-1}:f(X)\to X$ 的连续性时，引入了定义域和陪域都更广，并且连续性也是显而易见的映射 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。实际上，表达式 $\hat{f}^{-1}(x,y)=\frac{x}{2}$ 才是连续性的本质所在，扩大定义域或陪域只是从形式上方便说明它连续。今后这种形式上的转换将省略，取而代之的是使用诸如“由 $\hat{f}^{-1}$ 的表达式可知它连续”之类的表述。另外，这个例子属于嵌入映射的证明以后将会大幅简化（例11.17）。

（2）设 $X=Y=\mathbb{R}^2$，定义连续映射 $f:X\to Y,f(x)=\frac{1}{1+||x||}x$。考虑单位开圆盘 $D^2=\left\{y\in\mathbb{R}^2|||y||<1\right\}$，易证 $f(X)\subseteq D$。又定义连续映射 $g:D^2\to X,g(y)=\frac{1}{1-||y||}y$，容易验证 $\forall x\in X,g[f(x)]=x;\forall y\in D^2,f[g(y)]=y$。于是 $f(X)=D^2$，从而把 f 的陪域限制在 D^2 上就得到了连续的双射 $\hat{f}:X\to D^2$，并且 $g=\hat{f}^{-1}$ 为连续的逆映射。因此 $f:X\to Y$ 为嵌入映射。

意 $x \in \mathbb{R}$，设直线 l 经过点 P 和点 $(x,0)$，则 $f(x)$ 为 l 与单位圆周 S^1 的另一个交点。

f 的连续性由表达式能得到，其次， $f(X)=S^1-\{P\}$，即值域为单位圆周挖去点 P。因为从 f 的表达式可以看出（或者结合几何图形来看） $\forall x \in \mathbb{R}=X, f(x) \in S^1-\{P\}$，所以 $f(X) \subseteq S^1-\{P\}$。另外，定义连续函数 $g: S^1-\{P\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y)=\frac{x}{1-y}$，则 $\forall(x, y) \in S^1-\{P\}, f[g(x, y)]=(x, y)$，因此 $S^1-\{P\} \subseteq f(X)$，于是 $f(X)=S^1-\{P\}$。另外，容易验证 $\forall x \in X, g[f(x)]=x$，所以 f 为单射（否则假设 $x \neq x'$ 但 $f(x)=f(x')$，那么 $x=g[f(x)]=g[f(x')]=x'$，矛盾）。把 f 的陪域限制在像 $f(X)=S^1-\{P\}$ 上，就得到了连续的双射 $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow S^1-\{P\}$，且逆映射 $\hat{f}^{-1}=g$ 连续，因此 $f: X \rightarrow Y$ 为嵌入映射。

在此，也许会有人从图像上对 $\hat{f}^{-1}: S^1-\{P\} \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续性感到惊奇。其实，该映射是把 P 附近的点映射到了数轴正半轴与负半轴上相距很远的点，但因为 $\hat{f}^{-1}$ 的定义域本身不含点 P，所以在讨论连续性时不考虑 P。

例6.20（非嵌入的例子）

下面来举个连续的单射但不是嵌入映射的例子。设 $X=[0,1), Y=\mathbb{R}^2$，定义 $f: X \rightarrow Y, f(x)=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$，则 f 是连续的单射，其像为单位圆周 $f(X)=S^1$。把陪域限制在 S^1 上就得到了连续双射 $\hat{f}: X \rightarrow S^1$，此时，从图像上可以很直观地看出逆映射 $\hat{f}^{-1}: S^1 \rightarrow X$ 在点 $a=(1,0)$ 处不连续。

严格证明可以借助命题5.19。定义 S^1 中的点列 $p_n=(\cos 2\pi(1-\frac{1}{n}), \sin 2\pi(1-\frac{1}{n}))$，由 $2\pi(1-\frac{1}{n}) \rightarrow 2\pi$，结合 $\cos, \sin$ 的连续性、命题5.19和命题2.21可知 $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $(\cos 2\pi, \sin 2\pi)=(1,0)=a$。然而， $\hat{f}^{-1}(p_n)=1-\frac{1}{n} \rightarrow 1 \neq \hat{f}^{-1}(a)$，所以 $\hat{f}^{-1}$ 在点 a 处不连续。这样就构造出了一个连续的单射但不是嵌入映射。

同时， $\hat{f}^{-1}$ 不连续也意味着连续的双射 $\hat{f}: X \rightarrow S^1$ 不是同胚映射。（参考注意5.23）

命题6.21（嵌入映射的性质）

设 X, Y 为拓扑空间， $f: X \rightarrow Y$ 为连续的单射，以下命题等价：

1. f 为嵌入映射。
2. 对于任意开集 $U \subseteq X, f(U)$ 是子空间 $f(X) \subseteq Y$ 的开集。
3. 对于任意闭集 $F \subseteq X, f(F)$ 是子空间 $f(X) \subseteq Y$ 的闭集。
4. 对于任意拓扑空间 Z 和映射 $g: Z \rightarrow X$，如果复合映射 $f \circ g: Z \rightarrow Y$ 连续，那么 g 也连续。

证明：记 $\hat{f}: X \rightarrow f(X)$ 为把陪域限制在 $f(X)$ 上而得到的连续双射，根据嵌入映射的定义， f 为嵌入映射等价于 $\hat{f}$ 为同胚映射。而条件2、3意味着 $\hat{f}$ 分别为开、闭映射，根据命题5.27可知条件1、2、3等价。

$1 \Rightarrow 4$。设 f 为嵌入映射，则 $\hat{f}$ 为同胚映射。对于任意拓扑空间 Z 和映射 $g: Z \rightarrow X$，当复合映射 $f \circ g: Z \rightarrow Y$ 连续时，因为 $(f \circ g)(Z)=f[g(Z)] \subseteq f(X)$，所以把陪域限制在 $f(X)$ 上时就得到了连续映射 $h: Z \rightarrow f(X)$。注意到 $g=\hat{f}^{-1} \circ h$ 为两个连续映射的复合，因此 $g: Z \rightarrow X$ 连续。

$4 \Rightarrow 1$。要证 f 为嵌入映射，只要证 $\hat{f}$ 为同胚映射。而 f 是连续的单射，即 $\hat{f}$ 是连续的双射，因此只要证 $\hat{f}^{-1}: f(X) \rightarrow X$ 连续。在条件4中取 $Z=f(X), g=\hat{f}^{-1}$，则 $f \circ \hat{f}^{-1}: f(X) \rightarrow Y$ 为包含映射，它连续，因此 $g=\hat{f}^{-1}$ 连续。

证毕。

命题6.22（复合映射和嵌入映射）

1. 如果 f,g 均为嵌入映射，那么 $g\circ f:X\to Z$ 也为嵌入映射。
2. 如果 $g\circ f:X\to Z$ 为嵌入映射，那么 f 也为嵌入映射。

证明：1，当 f,g 为嵌入映射时，它们均为连续的单射，所以 $g\circ f$ 为连续的单射。任取拓扑空间 W 和映射 $h:W\to X$ 使得 $g\circ f\circ h:W\to Z$ 连续，因为 g 为嵌入映射，根据命题6.21，映射 $f\circ h:W\to Y$ 连续。又因为 f 为嵌入映射，根据命题6.21，映射 h 连续。于是根据命题6.21， $g\circ f$ 为嵌入映射。

2，因为 $g\circ f$ 为嵌入映射，所以它为单射，那么 f 也为单射。这是因为取 $x,x'\in X$ ，当 $f(x)=f(x')$ 时 $g\circ f(x)=g\circ f(x')$ ，由 $g\circ f$ 的单射性得 $x=x'$ 。如此， f 就是连续的单射。任取拓扑空间 W 和映射 $h:W\to X$ 使得映射 $f\circ h:W\to Y$ 连续，则复合映射 $g\circ f\circ h:W\to Z$ 连续。因为 $g\circ f$ 为嵌入映射，根据命题6.21， h 连续，再用一次命题6.21便得到 f 为嵌入映射。

证毕。

命题6.23（开映射、闭映射和嵌入映射）

设 $f:X\to Y$ 为连续的单射，如果 f 为开映射（或闭映射），那么 f 为嵌入映射。

证明：当 f 为开映射时，任取开集 $U\subseteq X$ ，则 $f(U)\subseteq Y$ 为开集。而 $f(U)\subseteq f(X)\subseteq Y$ ，根据命题6.8可知 $f(U)$ 是子空间 $f(X)$ 的开集。根据命题6.21， f 为嵌入映射。闭映射同理可证。

证毕。

定义6.24（开嵌入、闭嵌入）

当连续的单射 $f:X\to Y$ 为开映射或闭映射时， f 称为**开嵌入**或**闭嵌入**。嵌入映射是由命题6.23保证的。

命题6.25（映射为开嵌入、闭嵌入的条件）

设 X,Y 为拓扑空间， $f:X\to Y$ 为嵌入映射。此时， f 为开嵌入（或闭嵌入）的充要条件是 $f(X)\subseteq Y$ 为开集（或闭集）。

证明：只证开嵌入，闭嵌入同理。必要性是显然的，因为 X 本身就是开集，而且开嵌入也是开映射，所以 $f(X)$ 是开集。充分性。任取开集 $U\subseteq X$ ，根据命题6.21， $f(U)$ 是 $f(X)$ 的开集。而 $f(X)$ 是 Y 的开集，于是根据命题6.7， $f(U)$ 也是 Y 的开集。从而 $f:X\to Y$ 是开映射，再根据开映射的定义得 f 是开嵌入。

证毕。

利用这个命题，我们可以判断出例6.19中的（1）为闭嵌入（ $f(X)$ 为平面内包含两端点的线段），（2）为开嵌入（ $f(X)$ 为单位开圆盘），（3）为非开非闭的嵌入（ $f(X)$ 为挖去一点的单位圆周）。由此可知，开映射和闭映射的概念依赖于选择的陪域。（3）中的嵌入映射 $f:X\to Y$ 既不是开映射也不是闭映射，但因为把陪域限制在 $f(X)$ 上得到的 $\hat{f}$ 为同胚映射，所以根据命题5.27，它将同时开映射和闭映射。

后记

下一章已更新：sumeragi693：拓扑学入门7——商拓扑

编辑于 2023-05-20 19:42 · IP 属地广西

拓扑学 代数拓扑 点集拓扑

3 条评论 默认 最新

horus
命题6.8感觉不需要用到6.5
05-20 · IP 属地北京 回复 喜欢

sumeragi693 作者
嗯，写错了，应该是6.6。
05-20 · IP 属地广西 回复 喜欢

Priest
拜托 快更新等着学习呢
2022-07-29 · IP 属地俄罗斯 回复 喜欢

文章被以下专栏收录

拓扑学入门
介绍点集拓扑学的基础