拓扑学入门5——连续映射

sumeragi693

前言

从现在起将讨论多个拓扑空间之间的映射。首先介绍的是连续映射这个非常基础的概念，绝大多数情况下讨论拓扑空间的映射时，我们都只考虑连续映射，其重要性可见一斑。连续映射是微积分中连续函数的一般化，直观上看，它是“把附近的点映射成附近的点”的映射。虽然它的定义比较简洁，但要马上解读出直观的意思可能很难。接下来是定义同胚映射，它是连续的双射且其逆映射也连续。当两个拓扑空间之间存在同胚映射时，称这两个拓扑空间同胚，而同胚的拓扑空间从实质上可以把它们视为同一个空间。

正文

定义5.1（连续映射）

设 X,Y 为拓扑空间，如果映射 $f:X\rightarrow Y$ 满足：对于 Y 中的任意开集 V ，它的原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集，就把 f 称为（从 X 到 Y 的）**连续映射。**

有时为了明确空间上的拓扑（尤其是在同一集合上定义了不同拓扑时），也会采用 $f:(X,\mathcal{O}_1)\rightarrow (Y,\mathcal{O}_2)$ 的写法。

首先列举连续映射的基本性质。

命题5.2（恒等映射和复合）

以下两个命题成立。

1. 对于任意拓扑空间 X ，恒等映射 $id:X\rightarrow X$ 连续。
2. 设 X,Y,Z 为拓扑空间，如果 $f:X\rightarrow Y,g:Y\rightarrow Z$ 都连续，那么复合映射 $g\circ f:X\rightarrow Z$ 也连续。

证明：1，任取开集 $V\subseteq X$ ，则因为 $id(x)=x$ ，所以 $id^{-1}(x)=x$ 。于是 $id^{-1}(V)=V$ ，它仍为开集，所以 id 连续。

2，任取开集 $U\subseteq Z$ ，由 f,g 的连续性可知 $g^{-1}(U)$ 为 Y 中的开集， $f^{-1}[g^{-1}(U)]$ 为 X 中的开集。而 $(g\circ f)^{-1}(U)=(f^{-1}\circ g^{-1})(U)=f^{-1}[g^{-1}(U)]$ ，所以 $g\circ f:X\rightarrow Z$ 连续。

证毕。

映射 $f:X\rightarrow Y$ 称为常值映射，指的是存在 $c\in Y$ ，使得 $\forall x\in X,f(x)=c$ 。

命题5.3（常值映射连续）

设 X,Y 为拓扑空间，常值映射 $f:X\rightarrow Y$ 连续。

证明：设 $f:X\rightarrow Y$ 为常值映射， $\forall x\in X,f(x)=c$ ，任取 Y 中的开集 V ，则当 $c\in V$ 时， $f^{-1}(V)$

证毕。

连续映射定义中的开集可以换成闭集，即以下命题成立。

命题5.4（用闭集定义连续映射）

设 X,Y 为拓扑空间，对于映射 $f:X\rightarrow Y$ ，以下命题等价：

1. f 连续。
2. 对于 Y 中的任意闭集 F ，它的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集。

证明： $1\Rightarrow2$ ，设 $F\subseteq Y$ 是任意闭集，则 F^c 是开集。因为 f 连续，所以 $f^{-1}(F^c)$ 是 X 中的开集。而 $f^{-1}(F^c)=[f^{-1}(F)]^c$ ，所以 $f^{-1}(F)$ 是闭集。

$2\Rightarrow1$ 类似，这里省略。

证毕。

命题5.5（离散空间，平凡空间和连续）

若 X 为离散空间，则对于任意拓扑空间 Y ，任意映射 $f:X\rightarrow Y$ 都连续。若 Y 为平凡空间，则对于任意拓扑空间 X ，任意映射 $f:X\rightarrow Y$ 都连续。

简而言之，离散空间到任意空间的映射都连续，任意空间到平凡空间的映射都连续。

定义5.6（映射在一点的连续）

设 X,Y 为拓扑空间， $x\in X$ 。如果映射 $f:X\rightarrow Y$ 满足：对于点 $f(x)$ 在 Y 中的任意邻域 V ，总是存在某个 x 在 X 中的邻域 U ，使得 $U\subseteq f^{-1}(V)$ （等价地， $f(U)\subseteq V$ ），就称 f 在点 x 处连续。

根据下面的命题，我们可以把映射在空间上的连续性归结为在每一点的连续性，这也是证明连续性最常用的手段。

命题5.7（连续和在一点连续的关系）

设 X,Y 为拓扑空间，对于映射 $f:X\rightarrow Y$ ，以下命题等价：

1. f 连续。
2. $\forall x\in X,f$ 在点 x 处连续。

证明： $1\Rightarrow2$ 。设 $x\in X$ ，对于任意 $f(x)\in Y$ 的邻域 V ，由邻域的定义可知存在开集 $V'\subseteq Y$ ，使得 $f(x)\in V'\subseteq V$ 。取原像，得 $f^{-1}(V')\subseteq f^{-1}(V)$ 。又因为 f 连续，所以 $f^{-1}(V')\subseteq X$ 为开集。注意到 $f(x)\in V'$ ，所以 $x\in f^{-1}(V')$ 。取 $U=f^{-1}(V')$ 为 x 的开邻域，那么 $U\subseteq f^{-1}(V)$ 成立，因此 f 在点 x 处连续。

$2\Rightarrow1$ 。设开集 $V\subseteq Y$ ，任取 $x\in f^{-1}(V)$ ，因为 $f(x)\in V$ ，所以 V 是 $f(x)$ 的开邻域。由条件2得存在 x 的邻域 $U\subseteq X$ ，使得 $x\in U\subseteq f^{-1}(V)$ 。结合命题2.4可知 $f^{-1}(V)\subseteq X$ 是开集，因此 f 连续。

证毕。

为了验证映射在一点的连续性，一种有效的方法是只考察该点邻域基中的邻域。

命题5.8（在一点连续的等价描述）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\rightarrow Y$ 。又设 $x\in X$ 的某个邻域基为 $\mathcal{U},f(x)\in Y$ 的某个邻域基为 $\mathcal{V}$ ，此时以下命题等价：

1. f 在点 x 处连续

证明： $1\Rightarrow2$ 。任取 $V\in\mathcal{V}$ ，则 V 也是 $f(x)$ 的邻域。由条件1得存在 x 的邻域 $U'\subseteq X$ 使得 $U'\subseteq f^{-1}(V)$ 。而 $\mathcal{U}$ 为邻域基，所以存在 $U\in\mathcal{U}$ ，使得 $U\subseteq U'\subseteq f^{-1}(V)$ 。

$2\Rightarrow1$ 。设 $x\in X$ ，任取 $f(x)\in Y$ 的邻域 V ，因为 $\mathcal{V}$ 为邻域基，所以存在 $V'\in \mathcal{V}$ 使得 $V'\subseteq V$ 。取原像，得 $f^{-1}(V')\subseteq f^{-1}(V)$ 。又根据条件2得存在 $U\in\mathcal{U}$ ，使得 $U\subseteq f^{-1}(V')\subseteq f^{-1}(V)$ ，而 U 是 x 的邻域，所以 f 在 x 处连续。

证毕。

命题5.9（距离空间中的连续映射）

设 $(X,d_1),(Y,d_2)$ 为距离空间，对于映射 $f:X\rightarrow Y$ ，以下命题等价：

1. f 连续。
2. 对于任意的 $x_0\in X$ 和任意的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得 $f(B_1(x_0,\delta))\subseteq B_2(f(x_0),\varepsilon)$ 。
3. 对于任意的 $x_0\in X$ 和任意的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，当 $d_1(x_0,x)<\delta$ 时， $d_2(f(x_0),f(x))<\varepsilon$ ，其中 $x\in X$ 。

证明：任取 $x_0\in X$ ，它的邻域基为 $\left\{ B_1(x_0,r)\subseteq X|r>0 \right\}$ 。同理， $f(x_0)\in Y$ 的邻域基为 $\left\{ B_2(f(x_0),r)\subseteq Y|r>0 \right\}$ 。于是由命题5.8可知 $1\Leftrightarrow 2$ 。而3就是2的另一种说法而已。

证毕。

由该命题可知，对于欧氏空间中连续映射的定义，微积分中使用的 $\varepsilon-\delta$ 语言和定义5.1中的描述其实是同一回事。而在微积分中有很多我们熟知的连续函数，由此我们就得到了很多连续映射的例子（例5.12）。

在此先说明一点。把某一距离空间映入欧氏空间的映射连续等价于每个分坐标的映射都连续，这个结论我们在处理具体问题时会经常用到。

命题5.10（映入欧氏空间的映射的连续性）

设 (X,d) 为距离空间， $A\subseteq\mathbb R^n$ （根据注意1.13， A 也是距离空间）。对于映射 $f:X\rightarrow A,f(x)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ ，记 $y_i=f_i(x),i=1,2,\cdots,n$ ，那么以下命题等价：

1. $f:X\rightarrow A$ 连续。
2. 对于每个 $i=1,2,\cdots,n$ ，映射 $f_i:X\rightarrow \mathbb R$ 都连续。

证明： $1\Rightarrow2$ 。任取 $x_0\in X,\varepsilon>0$ ，因为 f 连续，所以存在 $\delta>0$ ，当 $d(x_0,x)<\delta$ 时， $||f(x_0)-f(x)||<\varepsilon$ 。对于每个 $i=1,2,\cdots,n$ ，由于

$$|f_i(x_0)-f_i(x)|\leq\sqrt{[f_1(x_0)-f_1(x)]^2+[f_2(x_0)-f_2(x)]^2+\cdots+[f_n(x_0)-f_n(x)]^2}=||f(x_0)-f(x)||<\varepsilon$$

恒成立，因此当 $d(x_0,x)<\delta$ 时， $|f_i(x_0)-f_i(x)|<\varepsilon$ 成立。这就说明映射 $f_i:X\rightarrow \mathbb R$ 连续。

$2\Rightarrow1$ 。任取 $x_0\in X,\varepsilon>0$ ，对于每个 $i=1,2,\cdots,n$ ，由条件2可知存在 $\delta_i>0$，当 $d(x_0,x)<\delta_i$ 时， $|f_i(x_0)-f_i(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ 。取 $\delta=\min\left\{ \delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n \right\}>0$ ，则当 $d(x_0,x)<\delta$ 时，

$$||f(x_0)-f(x)||=\sqrt{[f_1(x_0)-f_1(x)]^2+[f_2(x_0)-f_2(x)]^2+\cdots+[f_n(x_0)-f_n(x)]^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}\cdot n}=\varepsilon$$

也成立，因此 f 连

习惯上把映入数轴 $\mathbb R$ 的映射叫作**函数**，映入数轴 $\mathbb R$ 的连续映射则叫作**连续函数**。

注意5.11（投影函数连续）

设 $A\subseteq\mathbb R^n$ ，对于每个 $i=1,2,\cdots,n$ ，定义函数 $p_i:A\rightarrow\mathbb R,p_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i$ 为**投影函数**。利用命题5.10的结论，取 $X=A,f=id$ 为恒等映射，则因为 f 连续且此时 $f_i=p_i$ ，所以每个 p_i 都连续。

例5.12（实数的四则运算、多项式函数等连续）

现在利用微积分中的连续函数来举一些连续映射的例子。加法和乘法可以视为二元函数，如加法 $+:\mathbb R^2\rightarrow \mathbb R,+(x_1,x_2)=x_1+x_2$ ，乘法 $\cdot :\mathbb R^2\rightarrow \mathbb R,\cdot(x_1,x_2)=x_1x_2$ ，它们都是连续的。多项式函数 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}{a_ix^i},a_i\in\mathbb R$ 也是连续的，这可以从加法和乘法的连续性导出。实际上有以下一般的结论。

设 X 为距离空间， $f,g:X\rightarrow \mathbb R$ 为连续函数。定义和函数 $f+g:X\rightarrow\mathbb R,(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ，积函数 $fg:X\rightarrow \mathbb R,(fg)(x)=f(x)g(x)$ ，则这两个函数也连续。

两个函数的证法类似，在此只证明和函数的情况。首先，定义函数 $F:X\rightarrow\mathbb R^2,F(x)=(f(x),g(x))$ 。因为两个分量映射都连续，所以 F 连续。于是 $f+g$ 可以看成 $+\circ F$ 这个复合映射，根据命题5.2，复合映射连续。

恒等映射和常值映射都是连续的，多项式函数其实就是通过这两者的不断求和、求积得到，所以连续。更一般地，多个变量的多项式函数也是连续的。例如 $f:\mathbb R^3\rightarrow\mathbb R,f(x,y,z)=3x^2+2xy+3xz+4z^2$ 等也是连续的。证明除了用到恒等映射和常值映射以及它们的求和、求积以外，还要用到注意5.11中的投影映射的连续性。

除法也是连续的，不过要注意的是除数不能为0。除此之外，指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、绝对值函数、求算术平方根以及它们的四则运算、复合等也都是连续函数（需要注意定义域的问题）。

最后，函数 $\max:\mathbb R^2\rightarrow \mathbb R$ 和 $\min:\mathbb R^2\rightarrow \mathbb R$ 也都连续。注意到 $\max\left\{ x,y \right\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|),\min\left\{ x,y \right\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ 便能立刻得出结论。

命题5.13（由等式或不等式定义的集合）

设 X 为拓扑空间， $f:X\rightarrow \mathbb R$ 连续。此时集合 $\left\{ x\in X|f(x)=0 \right\},\left\{ x\in X|f(x)\geq0 \right\}$ 为闭集，而 $\left\{ x\in X|f(x)>0 \right\}$ 为开集。

只要注意到前两个集合分别为 $\left\{ 0\right\}\subset\mathbb R$ 和 $[0,+\infty)\subset\mathbb R$ 这两个闭集的原像，后一个集合为 $(0,+\infty)\subset\mathbb R$ 这个开集的原像，根据连续的定义便能立刻得出结论。

例5.14（欧氏空间中的开、闭集）

将例5.12和命题5.13组合起来就能判断欧氏空间中的图形属于开集还是闭集。例如集合 $A_1=\left\{ (x,y)\in\mathbb R^2|y\geq x^2\right\}$ 为 $\mathbb R^2$ 的闭集，因为只要构造二元多项式函数 $f(x,y)=y-x^2$ ，根据例5.12可知它连续，再利用命题5.13的结论就能证明。除此之外，如 $A_2=\left\{ (x,y,z)\in\mathbb R^3|z=x^2-y^2 \right\},A_3=\left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb R^n|\sum_{i=1}^{n}{x_i^2\leq1},x_i\geq0 \right\}$ 分别为 $\mathbb R^3,\mathbb R^n$ 的闭集（其中 A_3 为闭球 $\bar B(x,1)$ 和闭区域 $\left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb R^n|x_i\geq0 \right\}$ 之交）； $A_4=\left\{ (x,y,z)\in \mathbb R^3|x+y>0,y>x^3,x^2+y^2<1 \right\}$ 为 $\mathbb R^3$ 的开集。

※这里需要大家思考为什么要求多项式为有限个，以及思考多项式为无限个使得子集不再是开集的例子有哪些。

验证映射的连续性时，只需要考虑陪域的基或子基中的开集原像是否为开集就足够了。

命题5.15（利用子基判定连续性）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\rightarrow Y$ 。又设 $\mathcal{S}$ 为 Y 的子基，此时以下命题等价：

1. f 连续。
2. 对于任意的 $S\in\mathcal{S},f^{-1}(S)\subseteq X$ 是 X 的开集。

※因为任何基都可以视为子基，所以当 $\mathcal{S}$ 为基时结论也是成立的。

证明： $1\Rightarrow2$ 由连续的定义马上能得到，只证 $2\Rightarrow1$ 。根据子基的定义，$\mathcal{S}$ 中任意有限个集合之交所组成的集族 $\mathcal{B}_S$ 为基。任取开集 $V\subseteq Y$ ，首先，当 $V\in\mathcal{B}_S$ 时，由 $\mathcal{B}_S$ 的定义可知存在 $S_1,S_2,\cdots,S_n\in\mathcal{S}$ ，使得 $V=\bigcap_{i=1}^n S_i$ 。而交集的原像等于原像的交集，所以 $f^{-1}(V)=\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(S_i)$ 。由条件2可知右边每个集合均为 X 的开集，所以左边也为开集。其次，当 $V\notin\mathcal{B}_S$ 时，根据命题3.2， V 可以表示成 $\mathcal{B}_S$ 中若干开集之并。而并集的原像等于原像的并集，于是我们只要证明这些开集的原像为开集即可。设 $V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ ，其中 $\forall\lambda\in\Lambda,B_\lambda\in\mathcal{B}_S$ 。同理可证每个 $f^{-1}(B_\lambda)\subseteq X$ 为开集，所以 $f^{-1}(V)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ 为开集。

证毕。

连续性也可以用闭包来描述。

命题5.16（利用闭包描述连续性）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\rightarrow Y$ 。以下命题等价：

1. f 连续。
2. 对于任意的 $A\subseteq X,f(\bar A)\subseteq \overline{f(A)}$ 。
3. 对于任意的 $B\subseteq Y,\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\bar B)$ 。

证明： $1\Rightarrow2$ 。任取 $A\subseteq X$ ，显然有 $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ ，两边取原像得 $f^{-1}[f(A)]\subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 。其次，由 f 的连续性和命题5.4得 $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 为闭集，并且注意到 $A\subseteq f^{-1}[f(A)]$ ，这就说明 $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 是包含了 A 的闭集。于是根据命题4.2， $\bar A\subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$ ，所以 $f(\bar A)\subseteq \overline{f(A)}$ 。

$2\Rightarrow3$ 。任取 $B\subseteq Y$ ，记 $A=f^{-1}(B)\subseteq X$ ，则 $f(A)\subseteq B$ 。由闭包的单调性得 $\overline{f(A)}\subseteq \bar B$ ，取原像得 $f^{-1}[\overline{f(A)}]\subseteq f^{-1}(\bar B)$ 。又在上面的证明中得到了 $\overline{f^{-1}(B)}=\bar A\subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$ ，所以 $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\bar B)$ 。

$3\Rightarrow1$ 。任取闭集 $F\subseteq Y$ ，根据条件3， $\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}(\bar F)=f^{-1}(F)$ 。而 $f^{-1}(F)\subseteq\overline{f^{-1}(F)}$ 恒成立，这就说明 $f^{-1}(F)=\overline{f^{-1}(F)}$ ，因此 $f^{-1}(F)$ 为闭集。根据命题5.4可知 f 连续。

证毕。

命题5.17（连续映射和点列的收敛）

证明：任取 f(x) 的邻域 V ，因为 f 在点 x 处连续，所以存在 x 的邻域 U ，使得 f(U)\subseteq V 。由点列 (x_n)_{n=1}^\infty 的收敛性可知存在 N\in\mathbb N_+ ，当 n\geq N 时， x_n\in U 。于是 f(x_n)\in f(U)\subseteq V ，这就意味着 f(x_n)\rightarrow f(x) 。

证毕。

逆命题不一定成立。在一般的拓扑空间中，即使对于任意收敛于 x 的点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ ，都有点列 $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ 收敛于 $f(x)$ ，也不能保证 f 在点 x 处的连续性。但是，当 X 满足第一可数公理时（例如距离空间），逆命题成立。

命题5.18（利用点列的收敛描述连续性）

设 X 为第一可数空间， Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ ，点 $x\in X$ 。以下命题等价：

1. f 在点 x 处连续。
2. 对于 X 中任意收敛于 x 的点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ ，都有 Y 中的点列 $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ 收敛于 $f(x)$ 。

证明： $1\Rightarrow 2$ 参考命题5.17，只证 $2\Rightarrow 1$ 。反证法，假设 f 在 x 处不连续，由于 X 为第一可数空间，根据命题2.15，存在 x 的可数邻域基 $\mathcal{U}=\{U_n|n\in\mathbb{N}_+\}$ ，使得 $U_{n+1}\subseteq U_n$ 。从而只要 $m\geq n$ ，就有 $U_m\subseteq U_n$ 。

设 $f(x)$ 在 Y 中的所有邻域组成集族 $\mathcal{V}$ ，它是 $f(x)$ 的邻域基（例2.6）。因为 f 在点 x 处不连续，根据命题5.8，存在 $V\in\mathcal{V}$ ，使得对于任意的 $U_n\in\mathcal{U}$ ，都有 $f(U_n)\nsubseteq V$ 。于是对于 $n=1,2,3,\cdots$ ，选取 $x_n\in U_n$ 且 $f(x_n)\notin V$ ，得到 X 中的点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 。这个点列是收敛于 x 的，是因为根据命题2.18，任取邻域基 $\mathcal{U}=\{U_n|n\in\mathbb{N}_+\}$ 中的某个邻域 U_k ，存在 $N=k$ ，当 $n\geq N$ 时， $x_n\in U_n\subseteq U_k$ 。然而 Y 中的点列 $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ 不收敛于 $f(x)$ ，这是因为对于任何 $n\in\mathbb{N}_+,f(x_n)\notin V$ 。这就和已知条件2矛盾，所以假设不成立， f 在 x 处连续。

证毕。

命题5.19（利用点列的收敛描述连续性2）

设 X,Y 为距离空间，映射 $f:X\to Y$ ，点 $x\in X$ 。以下命题等价：

1. f 在点 x 处连续。
2. 对于 X 中任意收敛于 x 的点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ ，都有 Y 中的点列 $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ 收敛于 $f(x)$ 。

这就是命题5.18的特殊情形，因为距离空间是特殊的第一可数空间。

现在来定义同胚映射，这个概念相当于线性代数或群论中的同构映射。如果拓扑空间 X,Y 之间存在同胚映射，那么从实质上可以把它们视为同一个空间。

定义5.20（同胚映射）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 如果是连续的双射，并且它的逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 也连续，那么 f 叫作**同胚映射**。如果拓扑空间 X,Y 之间存在同胚映射，那么就称 X,Y **同胚**，记作 $X\cong Y$ 。

两个拓扑空间同胚有时也会说成可以通过把图形弯曲、延伸、压缩等使它们互相转化。虽然这不是严密的论述，但下面的例子可以帮助我们想像 X 是如何通过伸缩变成 Y 的。

例5.21（同胚映射其一）

设 $X=[0,1),Y=[0,+\infty)$ ，通过将欧几里得距离限制在 X,Y 上（注意1.13）再让距离诱导出拓扑，使它们成为拓扑空间。

射，它的逆映射 $f^{-1}=g$ 。因为 f 是连续的双射，且具有连续的逆映射 g ，所以 f 是同胚映射， X,Y 同胚。

从几何上看，这就是把半开半闭区间“伸长”为无限区间，它们同胚。

例5.22（同胚映射其二）

设
$X=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1^2+x_2^2\leq 1\right\},Y=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1\in[-1,1],x_2\in[-1,1]\right\}$
，分别为平面上的单位闭圆盘和边长为2的闭正方形，通过和例5.21同样的方法将它们视为拓扑空间。

首先， $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ，定义 $||x||_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2},||x||_2=\max\{|x_1|,|x_2|\}$ 。这里的 $||x||_1$ 就是欧几里得范数， $d(x,0)=||x||_1$ 。容易证明二者都具有性质： $||cx||_i=|c|\cdot||x||_i$ ，其中 $c\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^2,i=1,2$ 。其次，容易证明二者满足以下不等式： $||x||_2\leq||x||_1\leq\sqrt{2}||x||_2$ （几何意义是单位圆的内接正方形和外切正方形）。

于是 $X=\left\{x\in\mathbb{R}^2|||x||_1\leq 1\right\},Y=\left\{x\in\mathbb{R}^2|||x||_2\leq 1\right\}$ 。定义映射 $f:X\to Y,f(x)=\begin{cases}\frac{||x||_1}{||x||_2}\cdot x,x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$ ，利用性质 $||cx||_i=|c|\cdot||x||_i$ 可以确认 f 确实把 X 的点映射成了 Y 的点。由微积分的知识可知 $x\neq 0$ 时 f 连续，现在考虑在原点 $0=(0,0)$ 的连续性。任取 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}>0$ ，当 $d(x,0)=||x||_1<\delta$ 时，若 $x=0$ ，则 $d(f(0),0)=d(0,0)=0<\varepsilon$ 。若 $x\neq 0$ ，利用不等式 $||x||_2\leq||x||_1\leq\sqrt{2}||x||_2$ 得 $d^2(f(x),0)=(\frac{||x||_1}{||x||_2}\cdot x_1)^2+(\frac{||x||_1}{||x||_2}\cdot x_2)^2\leq(\sqrt{2}x_1)^2+(\sqrt{2}x_2)^2=2||x||_1^2<2\delta^2=\varepsilon^2$ 。所以当 $d(x,0)=||x||_1<\delta$ 时 $d(f(x),0)<\varepsilon$ 恒成立，根据命题5.9， f 在原点连续。这样一来， $\forall x\in X,f$ 在点 x 处都连续，根据命题5.7， $f:X\to Y$ 为连续映射。

又定义映射 $g:Y\to X,g(y)=\begin{cases}\frac{||y||_2}{||y||_1}\cdot y,y\neq 0\\ 0,y=0\end{cases}$ ，同理可证 g 为连续映射。且 $f\circ g=g\circ f=id$ ，所以 $g=f^{-1}$ 。因为 f 是连续的双射，且具有连续的逆映射 g ，所以 f 是同胚映射， X,Y 同胚。

从几何上看，这就是把单位闭圆盘“压缩”成正方形，它们同胚。

注意5.23（连续的双射不一定是同胚映射）

同胚映射的定义中 $f^{-1}:Y\to X$ 连续的条件不能省略。例如在数轴 $\mathbb{R}$ 上分别赋予离散拓扑和通常拓扑，并记作 X,Y 。令 $f:X\to Y$ 为恒等映射 id ，显然它是双射，并且根据命题5.5可知 f 连续。然而， $f^{-1}:Y\to X$ 不连续，因为开集 $\{x\}\subseteq X$ 的原像 $\{x\}\subseteq Y$ 在通常拓扑下不是开集。也就是说，连续的双射的逆映射不一定连续。

学过线性代数的人应该知道，设 V,W 为向量空间，如果 $f:V\to W$ 为线性映射且为双射，那么 $f^{-1}:W\to V$ 也是线性映射。但如同上面所见那样，与该结论类似的结论在拓扑空间中是不一定成立的，希望大家注意。

注意5.24（同胚映射保持开集的一一对应，拓扑性质）

拓扑空间 X,Y 之间的同胚映射 $f:X\to Y$ 满足以下三点：

1. f 为双射。
2. f 连续。
3. f^{-1} 也连续。

$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)\subseteq Y$ 为开集。换句话说，同胚映射 f 不仅使得 X,Y 中的点一一对应，还使得 X,Y 中的开集也一一对应。

本身拓扑空间就是在集合上定义一个拓扑（即规定哪些子集为开集）所得到的。如果两个拓扑空间同胚，那么与拓扑定义相关的所有信息都将被同胚映射 f 一一对应起来，这就是我们可以把两个同胚的拓扑空间视为同一个空间的原因。

到目前为止我们已经定义了闭集、邻域、邻域基、基、子基、闭包、内部和边界，这些定义都是以开集为出发点一步步得到的，所以同胚映射当然也能将这些概念一一对应起来。举个例子，我们来看看邻域基和闭包是如何一一对应的。

（*邻域基*）设 $\mathcal{U}$ 为 $x\in X$ 的邻域基，在同胚映射 $f:X\rightarrow Y$ 的作用下，$\mathcal{U}$ 的像，即集族 $\left\{f(U)\subseteq Y|U\in\mathcal{U} \right\}$ 为点 $f(x)\in Y$ 的邻域基（请大家自己思考）。同时，设 $\mathcal{V}$ 为 $y\in Y$ 的邻域基，在同胚映射 $f^{-1}:Y\rightarrow X$ 的作用下， $\mathcal{V}$ 的像，即集族 $\left\{ f^{-1}(V)|V\in\mathcal{V} \right\}$ 为点 $f^{-1}(y)$ 的邻域基。

（*闭包*）此时说闭包之间一一对应不太合适，但对于 X,Y 中的闭包算子，它们通过同胚映射 f 有着如下联系： $\forall A\subseteq X,f(\bar A)=\overline{f(A)}$ ，即闭包和映射顺序可交换。同样地， $\forall B\subseteq Y,f^{-1}(\bar B)=\overline{f^{-1}(B)}$ 。

像这样，当拓扑空间 X,Y 之间存在同胚映射 $f:X\rightarrow Y$ 时，使用 f 和 f^{-1} 就能把由开集定义的那些概念在两个空间中互相转化。

能够被同胚映射保持不变的那些性质称为**拓扑性质**。正确地说，拓扑空间的性质称为拓扑性质，当且仅当空间 X 具有该性质时，与它同胚的空间 Y 也具有该性质。到目前为止所列举的性质中，可距离化、第一可数、第二可数、可分都是拓扑性质。另外，“离散空间” “平凡空间”也都是拓扑性质。下面以可分性为例进行简单说明。

设 $X\cong Y$ 且 X 可分，则存在同胚映射 $f:X\rightarrow Y$ 以及至多可数的稠密子集 $A\subseteq X$ 。根据稠密的定义， $\bar A=X$ 。而根据上面的介绍，闭包和映射顺序可交换，即 $Y=f(X)=f(\bar A)=\overline{f(A)}$ ，所以 f(A) 在 Y 中稠密。又因为 A 是至多可数集， f 是双射，根据集合论知识， f(A) 也是至多可数集。由于 Y 具有至多可数的稠密子集 f(A) ，因此 Y 可分。

要证明一个性质是拓扑性质，就必须把与该性质有关的概念通过同胚映射一点点翻译出来。因为同胚映射是保持开集一一对应的映射，所以只有用开集来定义的概念才能翻译。并且因为同胚映射为双射，有关集合的势的概念也能翻译（如上面出现的至多可数集）。本系列文章中出现的性质绝大部分仅限于拓扑性质，而要确认它们为拓扑性质，只需要像上面那样一点点翻译就行了，所以今后这个步骤将省略。不过，关于距离空间的性质有时容易误解为拓扑性质，所以必要时会提醒大家注意。

例如距离空间的**有界性**是按照以下方式定义的：设 X 为距离空间， X 有界指的是存在实数 $C>0$ ，使得对于任意 $x,y\in X$ ，都成立 $d(x,y)\leq C$ 。例5.21中的 $X=[0,1)$ 是有界的， $Y=[0,+\infty)$ 不是有界的，但这不影响它们同胚，因此有界性不是拓扑性质。之所以产生这种现象，是因为有界性是利用距离来定义的性质。虽说距离可以定义开集，可以诱导拓扑，但是单纯从开集出发是无法还原出距离的（并非所有空间都可距离化）。因此，利用距离定义的性质不一定是拓扑性质。

例5.25（通过比较拓扑性质来证明不同胚）

要证明拓扑空间 X,Y 同胚，一种简单方法是构造同胚映射 $f:X\rightarrow Y$ 。与之相反，要证明 X,Y 不同胚，则需要花点工夫，因为我们不可能把两个空间之间的所有映射都考虑一遍，然后一一证明它们不是同胚映射。比较有效（甚至可以说总是采用）的方法是着眼于适当的拓扑性质，如果 X 具有拓扑性质 P ，但 Y 不具有该性质，那么 X,Y 一定不同胚。

举个例子，我们来证明通常拓扑下的数轴 $\mathbb R$ 和Sorgenfrey直线 $\mathbb S$ （例3.12）不同胚，需要关注的拓扑性质是第二可数性。 $\mathbb R$ 是第二可数的（例3.5），但 $\mathbb S$ 不是（例3.12），所以它们不同胚。以此类推，通过比较两个拓扑空间的拓扑性质，我们就能得到各种不同胚的

$\mathbb R$ 中不是开集），所以 id 不是同胚映射。但是，我们不能仅仅凭借这一点就判断二者不同胚。上面说过了，要判断两个空间不同胚，需要考虑的是两个空间之间的所有映射都不是同胚映射，而不能只考虑一个。

最后来介绍**开映射**和**闭映射**的概念，并叙述它们和同胚映射的关系。

定义5.26（开映射、闭映射）

设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\rightarrow Y$ 。如果对于任意的开集 $U\subseteq X$ ，都有 $f(U)\subseteq Y$ 是开集，那么 f 称为开映射。如果对于任意的闭集 $F\subseteq X$ ，都有 $f(F)\subseteq Y$ 是闭集，那么 f 称为闭映射。

命题5.27（同胚映射和开映射、闭映射）

设 X,Y 为拓扑空间，对于映射 $f:X\rightarrow Y$ ，以下命题等价：

1. f 是同胚映射。
2. f 是连续的双射，且为开映射。
3. f 是连续的双射，且为闭映射。

证明： $1\Rightarrow2$ 。当 f 为同胚映射时，由定义它是连续的双射。任取开集 $U \subseteq X$ ，因为映射 $f^{-1}:Y\rightarrow X$ 连续，所以 $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)\subseteq Y$ 是开集。由 U 的任意性得 f 为开映射。

$2\Rightarrow3$ 。任取闭集 $F\subseteq X$ ，则 F^c 是开集，由条件2得 $f(F^c)\subseteq Y$ 是开集。又因为 f 是双射，所以补集的像等于像的补集，即 $f(F^c)=[f(F)]^c$ ，从而 $f(F)$ 是闭集。由 F 的任意性得 f 为闭映射。

$3\Rightarrow1$ 。在3的条件下，只需要证明 $f^{-1}:Y\rightarrow X$ 连续。任取闭集 $F\subseteq X$ ，因为 f 是双射，所以 $f(F)=(f^{-1})^{-1}(F)$ 。由条件3可知左边为 Y 中的闭集，于是根据命题5.4和 F 的任意性得 f^{-1} 连续。

证毕。

后记

下一章已更新：sumeragi693：拓扑学入门6——相对拓扑

编辑于 2023-06-28 12:16 · IP 属地上海

拓扑学 点集拓扑 连续函数

killer queen
写的很好，谢谢
2022-11-01 · IP 属地四川 回复 1

BenDan
请教一下：命题5.2下面的第一个命题。如果<X,T1>和<X,T2>是拓扑空间，id是从X到X的恒等映射，那么id是连续映射吗？
07-23 · IP 属地上海 回复 喜欢

BenI
好像：

知乎 首发于 拓扑学入门

Eoia

这有一个要求的，就是T2要比T1细，即T1是T2的子集。

08-27 · IP 属地广东 回复 喜欢

展开其他 2 条回复 >

hengpanda

很详细全面赞，我在网上看到一个连续双射但不同胚的例子，你帮看一下。单位圆 这是一个双射， 为什么呢?

连续映射和同胚 - 小时百科

06-09 · IP 属地上海 回复 喜欢

xx xx

[a b] 关于 d(x,y) = abs(x-y)构成距离空间，然后距离空间上开球的定义是 B(x,r) = { y in X| d(x,y) <r }所以B(a,r)=[a,a+r)，然后开球是开集，所以[a, a+r)是个开集。 我能这样理解吗?

06-28 · IP 属地广东 回复 喜欢

sumeragi693 作者 ▸ **xx xx**

对啊

06-28 · IP 属地上海 回复 喜欢

查看全部 9 条回复 >

甜甜圈

可以用拓扑证明绝对值映射是连续映射吗，刚刚期中考试的题目，不会做(TT)

2022-11-15 · IP 属地山东 回复 喜欢

sumeragi693 作者

看成分段函数，用连续映射的粘接啊。

2022-11-15 · IP 属地上海 回复 喜欢

文章被以下专栏收录

拓扑学入门

介绍点集拓扑学的基础

推荐阅读

2. 点集拓扑基础：连续映射

前言如果两个拓扑空间中存在连续且逆映射也连续的双射，这样的映射称为同胚映射，这两个拓扑空间中也就存在所谓的拓扑不变量。直观地说就是可以用一块橡皮泥捏成茶杯和甜甜圈的形状，但无法...

0003 发表于拓扑学

点集拓扑（12）：连续映射，同胚，嵌入

芷雨Chira

【4.3-4.5】连续映射的拓扑性质：开/闭/紧致/连通，勒贝...

Bazin... 发表于各种杂七杂...

拓扑学|笔记整理 伦

大家好！ 在这篇笔记 各位读者已经具备了 基础，其中包括但不 以及映射的部分知识 些知识仍然了解得不 那么你可以去阅读专

刘朝阳