

```
+++ title = "保研笔试&面试准备" description = '' date = 2025-06-24T17:35:00+08:00 math = true draft = true summary = "" +++
```

## 上海科技大学-信息学院 VDI

全英文笔试面试，需要锻炼英文能力

### Mock Exam Paper

#### Part I: Single Choice Questions

##### Question 1

In an  $n$ -dimensional Euclidean space, given a set of mutually orthogonal non-zero vectors  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . If a vector  $x$  can be expressed as a linear combination of this set,  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ , what is the formula to find the coefficient  $\lambda_i$ ?

- A.  $\frac{x \cdot v_i}{|v_i|^2}$
- B.  $\frac{x \cdot v_i}{|x|}$
- C.  $(x \cdot v_i) \cdot v_i$
- D.  $x \cdot v_i$

##### Question 2

Which of the following statements about Big O notation is **correct**?

- A.  $n^2 = O(n \log n)$
- B.  $2^n = O(n!)$
- C.  $n! = O(n^n)$
- D.  $\sqrt{n} = O(\log n)$

##### Question 3

Let the probability that a person lives to the age of 70 be  $P_1$ . Given that a person has cancer, the probability that they live to 70 is  $P_2$ . The probability that a person in the general population has cancer is  $P_3$ . What is the probability that a person, who is known to have lived to 70, has cancer?

- A.  $\frac{P_1 P_2}{P_3}$
- B.  $\frac{P_2 P_3}{P_1}$
- C.  $\frac{P_1 P_3}{P_2}$
- D.  $P_2 P_3$

##### Question 4

Five balls, numbered 1, 2, 3, 4, 5, are to be pushed onto a stack in the order of 1, 2, 3, 4, 5. Each ball is pushed and popped exactly once. It is known that the first ball to be popped is ball 3. Which of the remaining balls **cannot** be the last one to be popped?

- A. Ball 1
- B. Ball 2
- C. Ball 4
- D. Ball 5

##### Question 5

For a complete binary tree where nodes are indexed starting from 0, given any non-root node with index  $i$  (where  $i > 0$ ), what is the index of its parent node?

- A.  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$
  - B.  $\lceil \frac{i-1}{2} \rceil$
  - C.  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$
  - D.  $i-2$
- 

## Part II: Multiple Choice Questions

### Question 6

Let  $A$  and  $B$  be symmetric matrices of the same size. Which of the following statements must be true?

- A.  $A+B$  is symmetric.
- B.  $AB$  is symmetric.
- C. If  $A$  is invertible, then  $A^{-1}$  is symmetric.
- D.  $(AB)^T = BA$ .

### Question 7

Let  $X_1, X_2, \dots, X_n$  be an i.i.d. (independent and identically distributed) sample from a normal distribution  $N(\mu, \sigma^2)$ . Which of the following expressions are the Maximum Likelihood Estimators (MLE) for  $\mu$  and  $\sigma^2$ ?

- A. The estimator for  $\mu$  is  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- B. The estimator for  $\sigma^2$  is  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$ .
- C. The estimator for  $\sigma^2$  is  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$ .
- D. The estimator for  $\mu$  is the median of the sample.

### Question 8

A complete binary tree has a height of 10 (the root is at level 0, so there are 11 levels in total from 0 to 10). Which of the following are possible values for the total number of nodes in this tree?

- A. 1023
- B. 1024
- C. 2047
- D. 2048

### Question 9

Let  $A$  be an  $m \times n$  matrix with  $\text{rank}(A) = r$ . Which of the following quantities are always equal to  $r$ ?

- A. The dimension of the column space of  $A$ .
- B. The dimension of the row space of  $A$ .
- C. The number of non-zero singular values of  $A$ .
- D.  $n$  minus the dimension of the null space of  $A$ .

### Question 10

Let  $Q$  be a symmetric matrix such that  $Q^2 = Q$ . Which of the following statements must be true?

- A. All eigenvalues of  $Q$  are either 0 or 1.
- B.  $\text{trace}(Q) = \text{rank}(Q)$ .
- C.  $Q$  is a positive semidefinite matrix.
- D.  $I - Q$  is also an idempotent matrix (i.e.,  $(I-Q)^2 = I-Q$ ).

### Question 11

Let  $G = (V, E)$  be a graph with vertex set  $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . An edge  $(u, v)$  exists in  $E$  if and only if

$u$  and  $v$  are coprime (i.e.,  $\gcd(u, v) = 1$ ). Which of the following sequences can be the visiting order of a Depth-First Search (DFS) traversal starting from some vertex?

- A. 2-3-4-5-6
- B. 6-5-2-3-4
- C. 3-5-4-2
- D. 4-3-2-5-6

---

## 标准答案

### Part I: 单选题

- 1. A
- 2. B
- 3. B
- 4. B
- 5. A

### Part II: 多选题

- 6. A, C, D
- 7. A, B
- 8. B, C
- 9. A, B, C, D
- 10. A, B, C, D
- 11. A, B, D

---

## 解析

### Part I: 单选题解析

- 1. (A). 见上一轮回答，核心是利用正交向量点积为0的性质，将方程两边同与  $v_i$  作点积来分离出系数  $\lambda_i$ 。
- 2. (B). 阶乘函数  $n!$  的增长率快于指数函数  $2^n$ 。选项A、D是错误的，因为多项式函数增长快于对数函数。选项C  $n! = O(n^n)$  也是正确的，但  $2^n$  与  $n!$  的比较是算法中更基础和经典的考点。
- 3. (B). 典型的贝叶斯定理应用。设A="活到70岁", B="患癌", 求  $P(B|A)$ 。根据公式  $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$ , 代入  $P_2, P_3, P_1$  即可。
- 4. (B). 3号球先出栈，意味着1和2已入栈且2在1之上。因此，2必须比1先出栈。如果2是最后一个出栈，则1必已出栈，这与“2必须比1先出栈”矛盾。
- 5. (A). 0-indexed的完全二叉树，节点  $i$  的父节点是  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ 。 $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$  是1-indexed树的公式。

### Part II: 多选题解析

- 6. 正确答案: A, C, D
  - A.  $A+B$  is symmetric: 正确。  $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ 。因为A, B都是对称的，所以它们的和也是对称的。

- **B.  $AB$  is symmetric:** 错误。 $(AB)^T = B^T A^T = BA$ 。只有当A和B矩阵可交换时（即  $AB=BA$ ）， $AB$ 才是对称的，但这并非普遍成立。
- **C. If  $A$  is invertible, then  $A^{-1}$  is symmetric:** 正确。 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 。因为  $A$  是对称的（ $A^T=A$ ），所以  $(A^{-1})^T = A^{-1}$ 。
- **D.  $(AB)^T = BA$ :** 正确。这是矩阵转置的基本性质：积的转置等于转置的积，但顺序相反。 $(AB)^T = B^T A^T$ 。因为A, B对称，所以  $B^T=B$ ,  $A^T=A$ ，故  $(AB)^T = BA$ 。

## 7. 正确答案: A, B

- **A, B:** 正确。这是正态分布参数最大似然估计（MLE）的标准结论。 $\mu$  的MLE是样本均值  $\bar{X}$ ，而  $\sigma^2$  的MLE是  $\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ 。
- **C:** 错误。分母为  $n-1$  的是总体方差的**无偏估计量**，而不是最大似然估计量。
- **D:** 错误。样本中位数通常不是正态分布均值的最大似然估计量（除非在某些特殊分布下，如拉普拉斯分布）。

## 8. 正确答案: B, C

- **分析:** 树高为10，意味着层数为0到10。
  - 一个**满二叉树**（所有层都填满）的高度为  $h=10$  时，节点总数为  $2^{h+1}-1 = 2^{11}-1 = 2047$ 。
  - 一个**完全二叉树**的高度为  $h=10$  时，其节点数  $N$  必须满足： $2^{10} \leq N \leq 2^{11}-1$ 。
  - 代入  $h=10$ ，我们得到节点数的范围是  $[1024, 2047]$ 。
- **A. 1023:** 错误。 $1023 = 2^{10}-1$ ，这是高度为9的满二叉树的节点数。
- **B. 1024:** 正确。 $1024$  在范围  $[1024, 2047]$  内，是高度为10的完全二叉树可能的最小节点数。
- **C. 2047:** 正确。 $2047$  在范围  $[1024, 2047]$  内，是高度为10的完全二叉树可能的最大节点数（即满二叉树）。
- **D. 2048:** 错误。超出了范围。

## 9. 正确答案: A, B, C, D

- 矩阵的秩（rank）有多个等价定义：
- **A:** 正确。秩定义为列空间（由矩阵的列向量生成的向量空间）的维度。
- **B:** 正确。矩阵的行秩（行空间的维度）恒等于其列秩。
- **C:** 正确。在奇异值分解（SVD）中，矩阵的秩等于其非零奇异值的数量。
- **D:** 正确。这是**秩-零度定理**（Rank-Nullity Theorem）的直接应用。该定理指出： $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n$ （其中  $n$  是矩阵的列数）。因此， $\mathrm{rank}(A) = n - \mathrm{nullity}(A)$ 。

## 10. 正确答案: A, B, C, D

- $Q$  是对称矩阵且  $Q^2=Q$ （幂等矩阵）。这种矩阵在统计学和线性代数中通常是**正交投影矩阵**。
- **A:** 正确。设  $\lambda$  是  $Q$  的一个特征值，对应特征向量  $v \neq 0$ 。则  $Qv = \lambda v$ 。那么  $Q^2v = Q(\lambda v) = \lambda(Qv) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$ 。又因为  $Q^2=Q$ ，所以  $Q^2v = Qv = \lambda v$ 。因此  $\lambda^2 v = \lambda v \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)v = 0$ 。因为  $v \neq 0$ ，所以  $\lambda(\lambda - 1) = 0$ ，即  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$ 。
- **B:** 正确。因为  $Q$  对称，所以可对角化。 $\mathrm{rank}(Q)$  等于其非零特征值的数量（即1的数量）。 $\mathrm{trace}(Q)$  等于其所有特征值的和。因此， $\mathrm{trace}(Q)$  也等于特征值1的数量。

- **C:** 正确。半正定矩阵的定义之一是对于任意向量  $x$ ，都有  $x^T Q x \geq 0$ 。因为  $Q$  对称且幂等，所以  $x^T Q x = x^T Q^T Q x = (Qx)^T (Qx) = |Qx|^2 \geq 0$ 。
- **D:** 正确。我们需要验证  $(I-Q)^2 = I-Q$ 。展开左边： $(I-Q)(I-Q) = I^2 - IQ - QI + Q^2 = I - Q - Q + Q^2$ 。因为  $Q^2=Q$ ，所以表达式变为  $I - 2Q + Q = I - Q$ 。

#### 11. 正确答案: A, B, D

- **首先构建邻接关系 ( $u, v$  互质):**
  - $\text{Adj}(2): \{3, 5\}$
  - $\text{Adj}(3): \{2, 4, 5\}$
  - $\text{Adj}(4): \{3, 5\}$
  - $\text{Adj}(5): \{2, 3, 4, 6\}$
  - $\text{Adj}(6): \{5\}$
- **A. 2-3-4-5-6: 可能。** DFS路径: 从2到3 (邻居)  $\rightarrow$  从3到4 (邻居)  $\rightarrow$  从4到5 (邻居)  $\rightarrow$  从5到6 (邻居)。这是一条简单路径，可以作为DFS的探索顺序。
- **B. 6-5-2-3-4: 可能。** DFS路径: 从6到5 (唯一邻居)  $\rightarrow$  从5到2 (邻居)  $\rightarrow$  从2到3 (邻居)  $\rightarrow$  从3到4 (邻居)。
- **C. 3-5-4-2: 不可能。** 在访问了3-5-4之后，DFS会从4回溯到5。从5出发，它会访问未被访问的邻居（如2或6）。但它不会直接从4跳到2，因为4和2不相邻 ( $\gcd(4,2)=2$ )。
- **D. 4-3-2-5-6: 可能。** DFS路径: 从4到3 (邻居)  $\rightarrow$  从3到2 (邻居)  $\rightarrow$  从2到5 (邻居)  $\rightarrow$  从5到6 (邻居)。