

Trabajo Práctico – IECD

Grupo 11

2025-12-8

Introducción

Objetivo del trabajo

Análisis de propiedades estadísticas de tests diagnósticos:

1. **Test perfecto** (baseline)
2. **Test imperfecto** con S_e y S_p conocidos
3. **Dos muestras** (pre-post intervención)

Parte I: Test perfecto (baseline)

1.1 Distribución de T_{per}

Contexto

- ▶ Población con prevalencia $\theta = P(Y = 1)$
- ▶ Test perfecto: $Se = Sp = 1$
- ▶ $Y_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, i.i.d.

Variable de interés

$$T_{per} = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Distribución

$$T_{per} \sim \text{Binomial}(n, \theta)$$

$$P(T_{per} = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

1.2 Estimador de Máxima Verosimilitud

Función de verosimilitud

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{Y_i} (1-\theta)^{1-Y_i} = (1-\theta)^{N_0} \theta^{N_1}$$

Log-verosimilitud

$$\ell(\theta) = N_0 \ln(1-\theta) + N_1 \ln(\theta)$$

Estimador EMV

$$\hat{\theta}_{per} = \frac{N_1}{n} = \frac{T_{per}}{n}$$

1.3 Sesgo, Varianza, Error cuadrático medio, consistencia y distribución asintótica

► Sesgo:

El estimador $\hat{\theta}_{per} = \frac{T_{per}}{n}$ es insesgado porque

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{per}] = \mathbb{E}\left[\frac{T_{per}}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[T_{per}] = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

Usamos que $T_{per} \sim \text{Binomial}(n, \theta)$, por lo que $\mathbb{E}[T_{per}] = n\theta$.

► **Varianza:**

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{per}) = \text{Var}\left(\frac{T_{per}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(T_{per}) = \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

También utilizamos que T_{per} es binomial.

► **Error cuadrático medio (ECM):**

Como el sesgo es cero,

$$\text{ECM}(\hat{\theta}_{per}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{per}) + \mathbb{E}^2(\hat{\theta}_{per}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

► **Consistencia:**

Observamos que $\hat{\theta}_{per} = \frac{T_{per}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$,
donde $\mathbb{E}[Y_i] = \theta$ y $\text{Var}(Y_i) = \theta(1 - \theta)$.

Por la Ley Fuerte de los Grandes Números,

$$\hat{\theta}_{per} \xrightarrow{c.s.} \theta.$$

Por lo tanto, $\hat{\theta}_{per}$ es **fuertemente consistente**.

► **Distribución asintótica:**

Por el Teorema Central del Límite,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{per} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \theta(1 - \theta)).$$

1.4 Intervalo de confianza para θ

Sabemos que por TCL:

$$\sqrt{n} \frac{(\hat{\theta}_{per} - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Además, por ley débil de los grandes números:

$$\hat{\theta}_{per} \xrightarrow{P} \theta$$

Entonces, combinando los resultados anteriores con Slutsky:

$$\sqrt{n} \frac{(\hat{\theta}_{per} - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_{per}(1 - \hat{\theta}_{per})}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Como $P(Z \geq 1.96) = 0.025$, vale lo siguiente:

$$P\left(-1.96 \leq \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_{per} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}_{per}(1 - \hat{\theta}_{per})}} \leq 1.96\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.95.$$

Finalmente, se deduce el siguiente intervalo de nivel asintótico 0.95:

$$IC_{0.95}(\theta) = \hat{\theta}_{per} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\theta}_{per}(1 - \hat{\theta}_{per})}{n}}$$

1.5 Cubrimiento empírico

Para evaluar el cubrimiento empírico del intervalo dado en 1.4, se llevó a cabo una simulación Monte Carlo para los siguientes valores de n :

10, 20, 50, 100, 1000, 10000

Y se obtuvieron estos resultados:

Table 1: Cubrimiento empírico del intervalo

n	cubrimiento
10	0.9232
20	0.8992
50	0.9362
100	0.9462
1000	0.9472
10000	0.9486

Los resultados obtenidos son coherentes con la teoría. Al tratarse de un intervalo asintótico, el cubrimiento empírico converge hacia el nivel nominal del 0.95 conforme aumenta el tamaño muestral n .

Parte II: Test imperfecto con S_e y S_p conocidos

2.0.1 Estimación de p con T_{per}

Estimador de p

$$\hat{p} = \frac{T_{per}}{n}$$

Distribución

$$T_{per} \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Propiedades

- ▶ $\mathbb{E}[\hat{p}] = p$
- ▶ $\text{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$
- ▶ \hat{p} es EMV de p

2.0.2 p como función de θ , S_e y S_p .

$$p = S_e \theta + (1 - S_p)(1 - \theta)$$

Formas equivalentes

$$p = (S_e + S_p - 1) \theta + (1 - S_p)$$

$$\theta = \frac{p + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}$$

Casos límite

$$\theta = 0 \Rightarrow p = 1 - S_p$$

$$\theta = 1 \Rightarrow p = S_e$$

2.0.3 Comportamiento de $p = P(T = 1)$

Fórmula base

$$p(\theta, Se, Sp) = Se\theta + (1 - Sp)(1 - \theta)$$

Valores de referencia

$$Se = 0.9, \quad Sp = 0.95, \quad \theta = 0.25$$

$$p(0.25) = 0.2625$$

p vs θ (fijos Se , Sp)

Comportamiento

- ▶ **Lineal creciente** en θ

Límites

$$\theta = 0 \Rightarrow p = 1 - Sp = 0.05$$

$$\theta = 1 \Rightarrow p = Se = 0.9$$

Interpretación

- ▶ θ **bajo**: p dominada por falsos positivos
- ▶ θ **alto**: p dominada por verdaderos positivos

p vs Se (fijos θ , Sp)

Comportamiento

- ▶ **Lineal creciente** en Se
- ▶ Pendiente: $\theta = 0.25$

Efecto

- ▶ **Se baja:** Pocos verdaderos positivos
- ▶ **Se alta:** Mejor detección $\rightarrow p$ mayor

Para $Se = 0.9$:

$$p = 0.9 \times 0.25 + 0.05 \times 0.75 = 0.2625$$

p vs Sp (fijos θ , Se)

Comportamiento

- ▶ **Lineal decreciente** en Sp
- ▶ Pendiente: $-(1 - \theta) = -0.75$

Efecto

- ▶ **Sp baja:** Muchos falsos positivos $\rightarrow p$ alto
- ▶ **Sp alta:** Menos falsos positivos $\rightarrow p$ bajo

Para $Sp = 0.95$:

$$p = 0.225 + 0.05 \times 0.75 = 0.2625$$

Conclusiones clave

Relaciones lineales

1. $p \nearrow$ **con** θ
2. $p \nearrow$ **con** Se
3. $p \searrow$ **con** Sp

2.1.4 Estimador de momentos (MoM)

Por item 2.0.2, sabemos que:

$$p = S_e\theta + (1 - S_p)(1 - \theta)$$

Reagrupando:

$$p = (S_e + S_p - 1)\theta + 1 - S_p$$

Entonces:

$$\theta = \frac{p + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}$$

Como $\mathbb{E}[T_i] = p$, el estimador de momentos de p es $\hat{p}_{MoM} = \frac{T_{per}}{n}$.

Finalmente, el estimador plug-in de momentos de θ es el siguiente:

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{\hat{p}_{MoM} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}$$

2.1.5 Sesgo, varianza y ECM

► Sesgo:

Primero se observa que:

$$\mathbb{E}[\hat{p}_{MoM}] = \mathbb{E}\left[\frac{T_{per}}{n}\right] = p = (S_e + S_p - 1)\theta + 1 - S_p$$

Luego:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MoM}] = \mathbb{E}\left[\frac{\hat{p}_{MoM} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}\right] = \frac{\mathbb{E}[\hat{p}_{MoM}] + S_p - 1}{S_e + S_p - 1} = \theta$$

Por lo tanto $\hat{\theta}_{MoM}$ es un estimador insesgado de θ .

► **Varianza:**

Primero se observa que:

$$\text{Var}[\hat{p}_{MoM}] = \text{Var}\left[\frac{T_{\text{per}}}{n}\right] = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{\theta}_{MoM}] &= \text{Var}\left[\frac{\hat{p}_{MoM} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}\right] = \frac{\text{Var}[\hat{p}_{MoM} + S_p - 1]}{(S_e + S_p - 1)^2} = \\ &\frac{\text{Var}[\hat{p}_{MoM}]}{(S_e + S_p - 1)^2} = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}\end{aligned}$$

► **ECM:**

Como el sesgo es 0:

$$\text{ECM}(\hat{\theta}_{MoM}) = \text{Var}[\hat{\theta}_{MoM}] + \mathbb{B}^2[\hat{\theta}_{MoM}] = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

► Consistencia

Observemos que, por ley fuerte de los grandes números:

$$\hat{p}_{MoM} = \frac{T_{per}}{n} \xrightarrow{cs} p$$

Luego, como $\hat{\theta}_{MoM}$ es una función continua de \hat{p}_{MoM} :

$$\hat{\theta}_{MoM} \xrightarrow{cs} \frac{p + S_p - 1}{S_e + S_p - 1} = \theta$$

Por lo tanto, $\hat{\theta}_{MoM}$ es fuertemente consistente.

2.1.6 Comparación ECM: Test perfecto vs imperfecto

Fórmulas

$$\text{ECM}_{\text{perfecto}} = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}$$

$$\text{ECM}_{\text{imperfecto}} = \frac{p(1 - p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

Factor de aumento

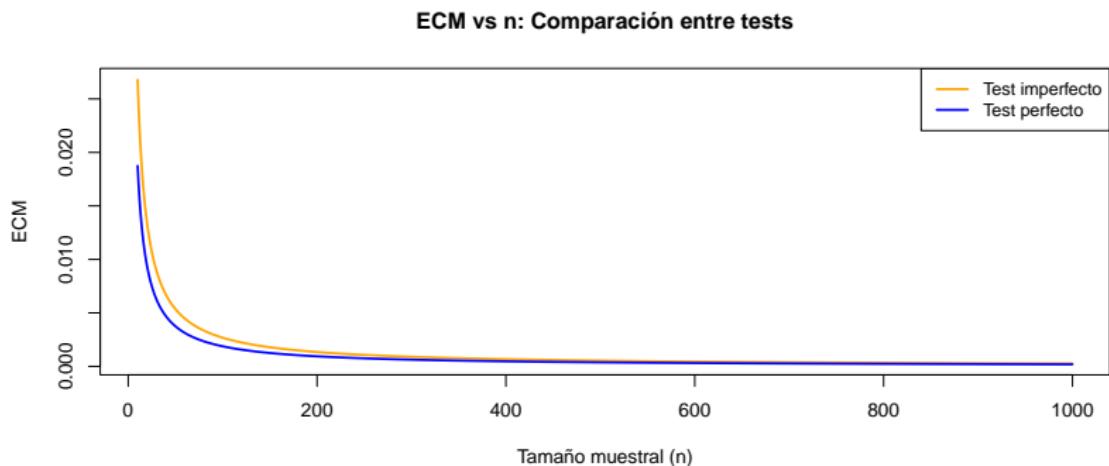
$$\boxed{\frac{1}{(S_e + S_p - 1)^2}}$$

Para $S_e = 0.9$, $S_p = 0.95$

$$S_e + S_p - 1 = 0.85 \Rightarrow \frac{1}{0.85^2} \approx 1.38$$

ECM 38% mayor con test imperfecto

Comportamiento en función de n



Conclusiones clave

Observaciones del gráfico

1. **ECM imperfecto > ECM perfecto** para todo n
2. Ambas **decrecen** como $1/n$

2.1.7 Validación: Teórico vs Simulado

Diseño de simulación

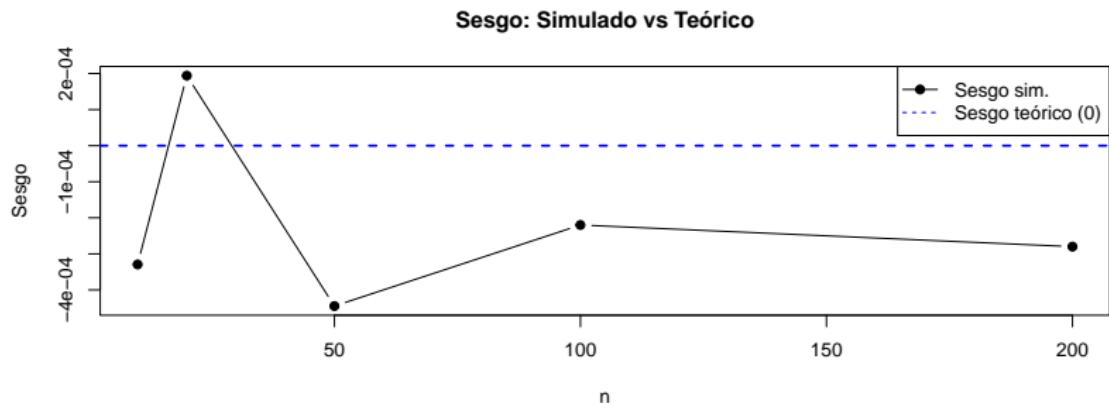
- ▶ $R = 10000$ réplicas
- ▶ $n \in \{10, 20, 50, 100, 200\}$
- ▶ $\theta = 0.25, S_e = 0.9, S_p = 0.95$
- ▶ Estimador: $\hat{\theta}_{MoM}$

Valores teóricos

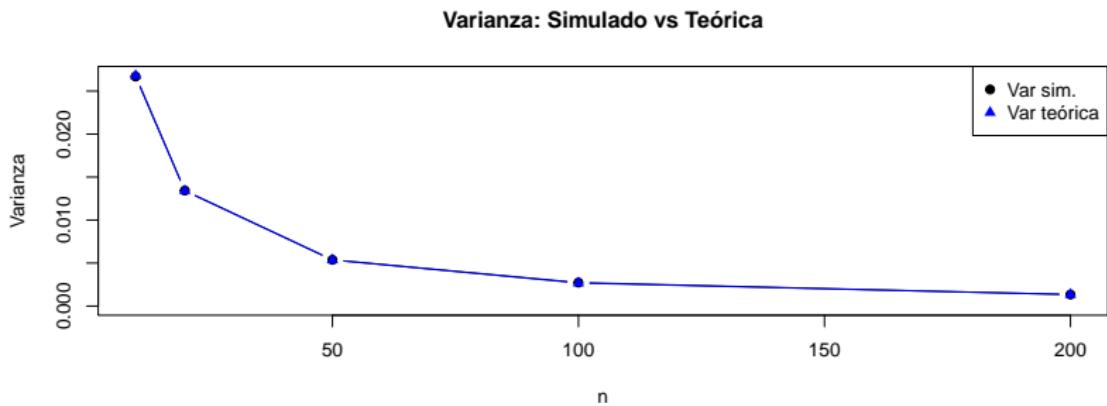
$$\text{Var}_{\text{teórica}} = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

$$\text{ECM}_{\text{teórico}} = \text{Var}_{\text{teórica}} \quad (\text{sesgo} = 0)$$

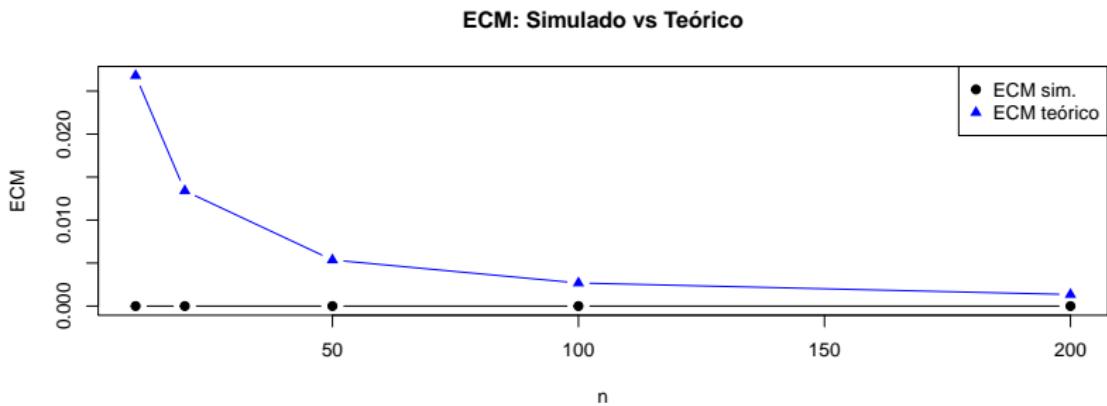
Sesgo: Simulado vs Teórico ($=0$)



Varianza: Simulado vs Teórica



ECM: Simulado vs Teórico



Conclusiones de la validación

Confirmaciones

1. **Sesgo aprox 0** en simulación → Insesgabilidad verificada
2. **Varianza simulada aprox Varianza teórica** para todo n
3. **ECM simulada aprox ECM teórico** → Fórmulas correctas

Comportamiento observado

- ▶ **Convergencia:** A mayor n , mejor ajuste teórico-simulado
- ▶ **Consistencia:** Var/ECM decrecen como $1/n$
- ▶ **Robustez:** Fórmulas teóricas válidas aún para n pequeño

Implicaciones

- ▶ **Expresiones teóricas** son confiables
- ▶ **Estimador MoM** se comporta según teoría
- ▶ **Simulación** valida aproximaciones asintóticas

2.1.8 Bootstrap para $\hat{\theta}_{MoM}$ ($n = 10$)

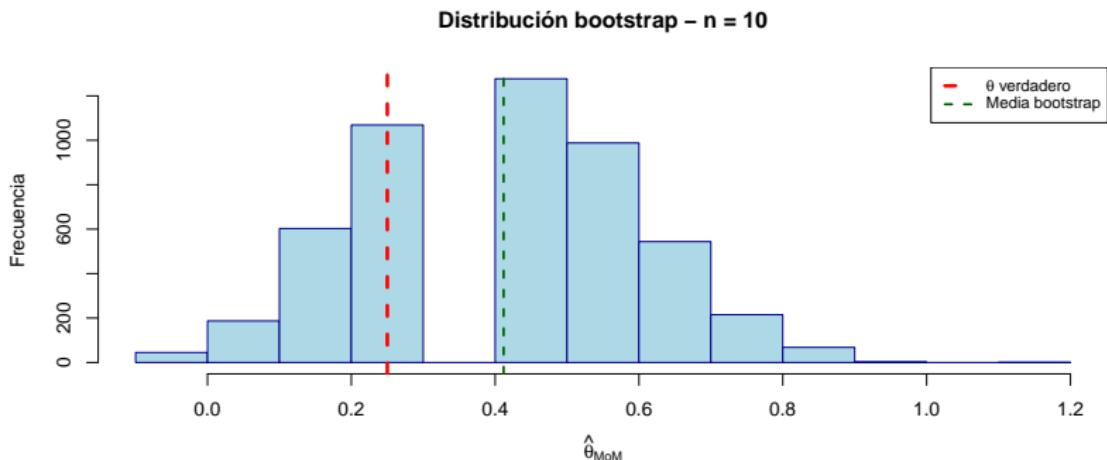
Parámetros

- ▶ $\theta = 0.25$, $S_e = 0.9$, $S_p = 0.95$
- ▶ $n = 10$, $B = 5000$ réplicas bootstrap
- ▶ Bootstrap no paramétrico

Método

1. Muestra original: $T_i \sim \text{Bernoulli}(p)$
2. Remuestreo con reemplazo
3. Recalcular $\hat{\theta}_{MoM}$ en cada réplica

Distribución bootstrap ($n = 10$)



Resultados bootstrap

Estadísticas clave

Media bootstrap = 0.4117

Sesgo bootstrap = 0.1617

Desvío bootstrap = 0.1837

Características observadas

1. **Alta dispersión** (gran variabilidad)
2. **Sesgo positivo**
3. **Distribución asimétrica** hacia derecha
4. **Valores fuera de [0,1]** posibles

2.2.9 Intervalos de confianza bootstrap

Objetivo

Construir intervalos de confianza para θ basados en el estimador de momentos utilizando bootstrap no paramétrico.

Método

- ▶ A partir de los datos T_i , se calcula $\hat{\theta}_{MoM}$ en cada remuestreo.
- ▶ Se generan $B = 1000$ réplicas bootstrap:
 $\hat{\theta}_{MoM}^{*(b)}$, $b = 1, \dots, B$.
- ▶ Intervalo bootstrap percentil:

$$IC_{0.95}^{boot} = [Q_{0.025}(\hat{\theta}^*), Q_{0.975}(\hat{\theta}^*)].$$

Simulación Monte Carlo

- ▶ Replicaciones: $R = 700$.
- ▶ Tamaños muestrales: $n \in \{10, 20, 50, 100, 1000\}$.
- ▶ Para cada réplica se obtiene:
 - ▶ **Cubrimiento empírico:** $1\{\theta \in IC^{boot}\}$
 - ▶ **Longitud:** $IC^{up} - IC^{low}$

2.2.10 Intervalo de confianza asintótico

Recordemos que:

- ▶ $\hat{p}_{MoM} = \frac{T_{per}}{n}$
- ▶ $\mathbb{E}[\hat{p}_{MoM}] = p$
- ▶ $\text{Var}[\hat{p}_{MoM}] = \frac{p(1-p)}{n}$
- ▶ $\hat{\theta}_{MoM} = \frac{\hat{p}_{MoM} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}$
- ▶ $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MoM}] = \theta$
- ▶ $\text{Var}[\hat{\theta}_{MoM}] = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$

- ▶ Entonces por TCL:

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{MoM} - p) \xrightarrow{D} N(0, (p(1-p)))$$

Defino $g(x) = \frac{x+S_p-1}{S_e+S_p-1}$ y $g'(x) = \frac{1}{S_e+S_p-1}$. Notar que $g(x)$ es C^1 .

- ▶ Por Método Delta:

$$\sqrt{n}(g(\hat{p}_{MoM}) - g(p)) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{p(1-p)}{(S_e + S_p - 1)^2}\right)$$

Luego,

$$\frac{\hat{\theta}_{MoM} - \theta}{\sqrt{\text{Var}[\hat{\theta}_{MoM}]}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

- Además $\hat{p}_{MoM} = \frac{T_{per}}{n} \xrightarrow{cs} p$, entonces:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_{MoM}(1 - \hat{p}_{MoM})}{p(1 - p)}} \xrightarrow{P} 1$$

debido a que $h(x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{p(1-p)}}$ es continua en $(0, 1)$.

Si $\widehat{\text{Var}}[\hat{\theta}_{MoM}] = \frac{\hat{p}_{MoM}(1-\hat{p}_{MoM})}{n(S_e+S_p-1)^2}$, usando teorema de Slutsky:

$$\frac{\hat{\theta}_{MoM} - \theta}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}[\hat{\theta}_{MoM}]}} = \frac{\hat{\theta}_{MoM} - \theta}{\sqrt{\text{Var}[\hat{\theta}_{MoM}]}\sqrt{\frac{\hat{p}_{MoM}(1-\hat{p}_{MoM})}{p(1-p)}}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

- ▶ Por lo tanto, se deduce el siguiente intervalo de nivel asintótico 0.95:

$$IC_{0.95}^{\theta} = \hat{\theta}_{MoM} \pm 1.96 \sqrt{\widehat{\text{Var}}[\hat{\theta}_{MoM}]}$$

donde $\widehat{\text{Var}}[\hat{\theta}_{MoM}] = \frac{\hat{p}_{MoM}(1-\hat{p}_{MoM})}{n(S_e+S_p-1)^2}$

2.2.11 Comparación entre ambos intervalos

Comparemos los resultados obtenidos.

Table 2: Bootstrap Percentil

n	cubrimiento	longitud_media
10	0.9343	0.5648
20	0.9114	0.4262
50	0.9471	0.2805
100	0.9357	0.2004
1000	0.9329	0.0638

Table 3: Intervalos Asintóticos

n	cubrimiento	longitud_media
10	0.9300	0.5972
20	0.9171	0.4407
50	0.9314	0.2848
100	0.9400	0.2013
1000	0.9614	0.0641

- ▶ El bootstrap parece ser más robusto en muestras pequeñas, lo cual es esperable porque no depende de aproximaciones normales ni del método delta.
- ▶ El método asintótico da intervalos ligeramente más largos.
- ▶ A medida que aumenta n los resultados convergen a los valores esperados.

2.3.12 Comportamiento del estimador de momentos

Definición

El estimador de momentos se obtiene de:

$$p = Se\theta + (1 - Sp)(1 - \theta)$$

y reemplazando p por $\hat{p} = T_{\text{per}}/n$:

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{\hat{p} + Sp - 1}{Se + Sp - 1}.$$

Observación clave

- ▶ Aunque $\hat{p} \in [0, 1]$, la transformación es **lineal**, por lo que $\hat{\theta}_{MoM}$ **puede salir de** $[0, 1]$.
- ▶ Esto ocurre cuando la muestra tiene demasiados o muy pocos positivos.

Condiciones

$$\hat{\theta}_{MoM} \leq 0 \quad \text{o} \quad \hat{\theta}_{MoM} \geq 1 - Se$$

Ejemplos numéricos

Valores de referencia

$$Se = 0.9, \quad Sp = 0.95, \quad 1 - Sp = 0.05, \quad Se + Sp - 1 = 0.85.$$

Ejemplo 1: $\hat{\theta}_{MoM} < 0$

Si no hay positivos en la muestra:

$$\hat{p} = 0.$$

Entonces:

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{0 + 0.95 - 1}{0.85} = \frac{-0.05}{0.85} \approx -0.0588.$$

Ejemplo 2: $\hat{\theta}_{MoM} > 1$

Si la muestra da un valor extremo:

$$\hat{p} = 0.05$$

2.3.13 Estudio del estimador truncado

Motivación

El estimador de momentos puede tomar valores fuera de $[0, 1]$. Para evitar valores imposibles se define el estimador **truncado**:

Definición

$$\hat{\theta}_{\text{trunc}} = \begin{cases} \hat{\theta}_{\text{MoM}}, & 0 \leq \hat{\theta}_{\text{MoM}} \leq 1, \\ 0, & \hat{\theta}_{\text{MoM}} < 0, \\ 1, & \hat{\theta}_{\text{MoM}} > 1. \end{cases}$$

Interpretación

- ▶ Coincide con $\hat{\theta}_{\text{MoM}}$ cuando este es válido.
- ▶ Recorta valores negativos a 0 y mayores a 1 a 1.
- ▶ Introduce **sesgo** para muestras pequeñas, pero evita valores inaceptables.

Simulación Monte Carlo del estimador truncado

Parámetros usados

- ▶ $\theta = 0.25$, $Se = 0.9$, $Sp = 0.95$
- ▶ Tamaños muestrales: $n = 10, 100, 1000$
- ▶ Réplicas: $N_{rep} = 10000$

Para cada réplica:

1. Generar $T \sim \text{Binomial}(n, p_{verdadera})$
2. Calcular $\hat{\theta}_{\text{trunc}}$
3. Estimar:
 - ▶ media
 - ▶ sesgo
 - ▶ varianza
 - ▶ $\text{ECM} = \text{Sesgo}^2 + \text{Var}$

Tabla de resultados

n	media	sesgo	var	ECM
10	0.2485	-0.00149	0.02463	0.02463
100	0.25005	0.000048	0.002685	0.002685

Análisis del estimador truncado

Sesgo

- ▶ Para $n = 10$, el estimador muestra sesgo apreciable.
Esto ocurre porque $\hat{\theta}_{MoM}$ cae a menudo por debajo de 0 y se trunca.
- ▶ El sesgo $\rightarrow 0$ cuando n aumenta (coincide con el estimador original).

Varianza

- ▶ Disminuye al crecer n .
- ▶ Para $n = 10$ es elevada por la alta variabilidad de \hat{p} .
- ▶ Para $n = 1000$ es muy baja y estable.

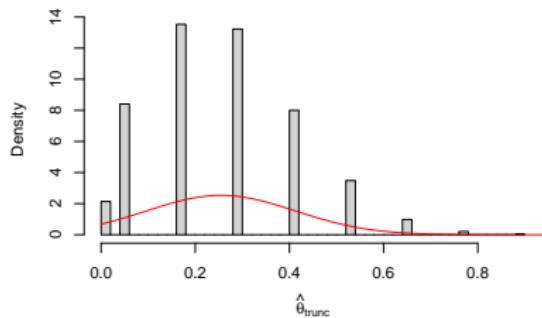
ECM

$$ECM = \text{Sesgo}^2 + \text{Var.}$$

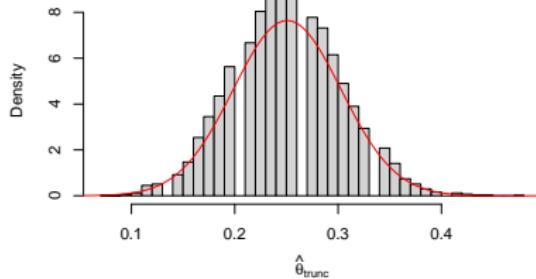
- Para muestras pequeñas, ECM grande por sesgo + varianza. -
- Para muestras grandes, el ECM es muy pequeño.

Distribución del estimador truncado

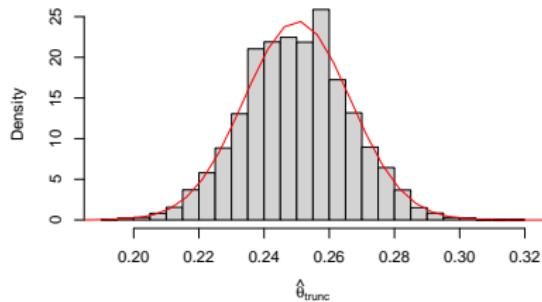
Histograma de theta_trunc, n = 10



Histograma de theta_trunc, n = 100



Histograma de theta_trunc, n = 1000



QQ-plot de $\hat{\theta}_{trunc}$ para n=1000



Observaciones de la simulación

- ▶ Para $n = 10$:
 - ▶ La distribución muestra **acumulación en 0 y 1**.
 - ▶ No es aproximadamente normal.
- ▶ Para $n = 100$:
 - ▶ La masa en los bordes disminuye.
 - ▶ La distribución empieza a ser unimodal y más suave.
- ▶ Para $n = 1000$:
 - ▶ El truncamiento ocurre con probabilidad casi nula.
 - ▶ La distribución es bien aproximada por una normal:

$$\hat{\theta}_{\text{trunc}} \approx \mathcal{N} \left(\theta, \frac{p(1-p)}{n(Se + Sp - 1)^2} \right).$$

Conclusión general

- ▶ Para muestras grandes, el estimador truncado **preserva la distribución asintótica del MoM**.

