Trabajo Práctico – IECD

Grupo 11

2025-12-8

Introducción

Objetivo del trabajo

Análisis de propiedades estadísticas de tests diagnósticos:

1. **Test perfecto** (baseline)
2. **Test imperfecto** con S_e y S_p conocidos
3. **Dos muestras** (pre-post intervención)

Parte I: Test perfecto (baseline)

1.1 Distribución de T_{per}

Contexto

- Población con prevalencia $\theta = P(Y = 1)$
- Test perfecto: $Se = Sp = 1$
- $Y_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, i.i.d.

Variable de interés

$$T_{per} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Distribución

$$T_{per} \sim \text{Binomial}(n, \theta)$$

$$\boxed{P(T_{per} = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}}$$

1.2 Estimador de Máxima Verosimilitud

Función de verosimilitud

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{Y_i}(1-\theta)^{1-Y_i} = (1-\theta)^{N_0}\,\theta^{N_1}$$

Log-verosimilitud

$$\ell(\theta) = N_0 \ln(1-\theta) + N_1 \ln(\theta)$$

Estimador EMV

$$\hat{\theta}_{per} = \frac{N_1}{n} = \frac{T_{per}}{n}$$

1.3 Propiedades del estimador

Sesgo

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_{per}] = \theta \quad \text{(insesgado)}$$

Varianza

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{per}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Error Cuadrático Medio

$$\text{ECM}(\hat{\theta}_{per}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Consistencia

$$\hat{\theta}_{per} \xrightarrow{c.s.} \theta$$

Distribución asintótica

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_{per} - \theta) \xrightarrow{d} N\big(0, \theta(1-\theta)\big)$$

1.4 Intervalo de confianza para θ

Por TCL y Slutsky

$$\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\theta}_{per} - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_{per}(1 - \hat{\theta}_{per})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Intervalo de confianza 95%

$$IC_{0.95}(\theta) = \hat{\theta}_{per} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{\theta}_{per}(1 - \hat{\theta}_{per})}{n}}$$

1.5 Cubrimiento empírico

Simulación Monte Carlo

Table 1: Cubrimiento empírico para diferentes n

n	Cubrimiento
10	0.9232
20	0.8992
50	0.9362
100	0.9462
1000	0.9472
10000	0.9486

Parte II: Test imperfecto con S_e y S_p conocidos

2.0.1 Estimación de p con T_{per}

Estimador de p

$$\hat{p} = \frac{T_{per}}{n}$$

Distribución

$$T_{per} \sim \text{Binomial}(n, p)$$

Propiedades

- $\mathbb{E}[\hat{p}] = p$
- $\text{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$
- $\hat{p}$ es EMV de p

2.0.2 p como función de θ, S_e y S_p.

$$\boxed{p = Se\,\theta + (1 - Sp)(1 - \theta)}$$

Formas equivalentes

$$p = (Se + Sp - 1)\,\theta + (1 - Sp)$$

$$\theta = \frac{p + Sp - 1}{Se + Sp - 1}$$

Casos límite

$$\theta = 0 \Rightarrow p = 1 - Sp$$

$$\theta = 1 \Rightarrow p = Se$$

2.0.3 Comportamiento de $p = P(T = 1)$

Fórmula base

$$p(\theta, Se, Sp) = Se\,\theta + (1 - Sp)(1 - \theta)$$

Valores de referencia

$$Se = 0.9, \quad Sp = 0.95, \quad \theta = 0.25$$

$$p(0.25) = 0.2625$$

p vs θ (fijos Se, Sp)

Comportamiento

- **Lineal creciente** en θ

Límites

$$\theta = 0 \Rightarrow p = 1 - Sp = 0.05$$

$$\theta = 1 \Rightarrow p = Se = 0.9$$

Interpretación

- θ **bajo**: p dominada por falsos positivos
- θ **alto**: p dominada por verdaderos positivos

p vs Se (fijos θ, Sp)

Comportamiento

- **Lineal creciente** en Se
- Pendiente: $\theta = 0.25$

Efecto

- Se **baja**: Pocos verdaderos positivos
- Se **alta**: Mejor detección $\rightarrow$ p mayor

Para $Se = 0.9$:

$$p = 0.9 \times 0.25 + 0.05 \times 0.75 = 0.2625$$

p vs Sp (fijos θ, Se)

Comportamiento

- **Lineal decreciente** en Sp
- Pendiente: $-(1-\theta) = -0.75$

Efecto

- Sp **baja**: Muchos falsos positivos $\rightarrow$ p alto
- Sp **alta**: Menos falsos positivos $\rightarrow$ p bajo

Para $Sp = 0.95$:

$$p = 0.225 + 0.05 \times 0.75 = 0.2625$$

Conclusiones clave

Relaciones lineales

1. $p \nearrow$ **con** θ
2. $p \nearrow$ **con** Se
3. $p \searrow$ **con** Sp

2.1.4 Estimador de momentos (MoM)

Fórmula final

$$\boxed{\hat{\theta}_{MoM} = \frac{\hat{p}_{MoM} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}}$$

Donde

$$\hat{p}_{MoM} = \frac{T_{per}}{n}$$

2.1.5 Propiedades del estimador MoM

Sesgo

$$\boxed{\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MoM}] = \theta}$$

Conclusión: Estimador insesgado

Varianza

$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MoM}) = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}}$$

Error Cuadrático Medio

$$\boxed{\mathrm{ECM}(\hat{\theta}_{MoM}) = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}}$$

(Sesgo $= 0 \rightarrow$ ECM $=$ Varianza)

Consistencia y forma de p

Consistencia

$$\boxed{\hat{\theta}_{MoM} \xrightarrow{c.s.} \theta}$$

- $\hat{p}_{MoM} \xrightarrow{c.s.} p$ (Ley fuerte) - Función continua de $\hat{p}_{MoM}$

2.1.6 Comparación ECM: Test perfecto vs imperfecto

Fórmulas

$$\mathrm{ECM}_{\mathrm{perfecto}} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$\mathrm{ECM}_{\mathrm{imperfecto}} = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

Factor de aumento

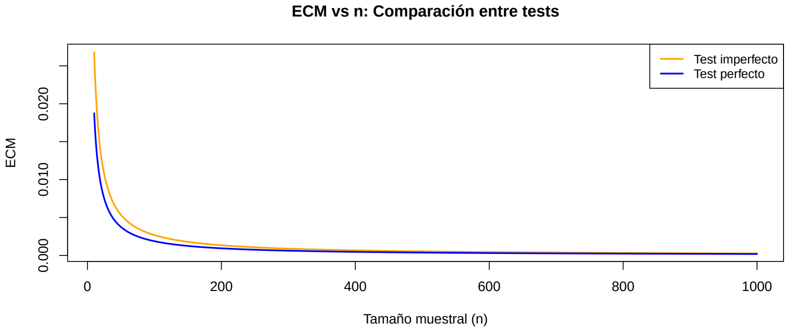
$$\boxed{\frac{1}{(S_e + S_p - 1)^2}}$$

Para $S_e = 0.9$, $S_p = 0.95$

$$S_e + S_p - 1 = 0.85 \Rightarrow \frac{1}{0.85^2} \approx 1.38$$

ECM 38% mayor con test imperfecto

Comportamiento en función de n



Conclusiones clave

Observaciones del gráfico

1. **ECM imperfecto** $>$ **ECM perfecto** para todo n
2. Ambas **decrecen** como $1/n$

2.1.7 Validación: Teórico vs Simulado

Diseño de simulación

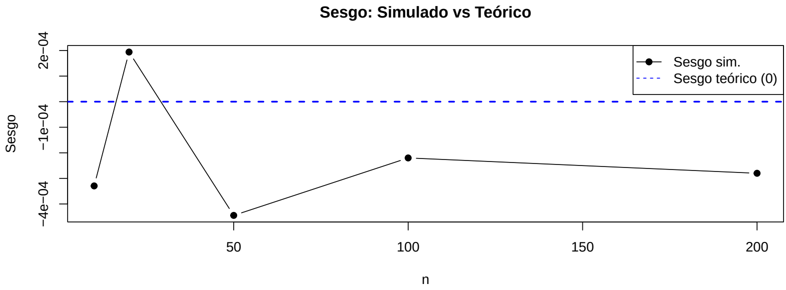
- $R = 10000$ réplicas
- $n \in \{10, 20, 50, 100, 200\}$
- $\theta = 0.25$, $S_e = 0.9$, $S_p = 0.95$
- Estimador: $\hat{\theta}_{MoM}$

Valores teóricos

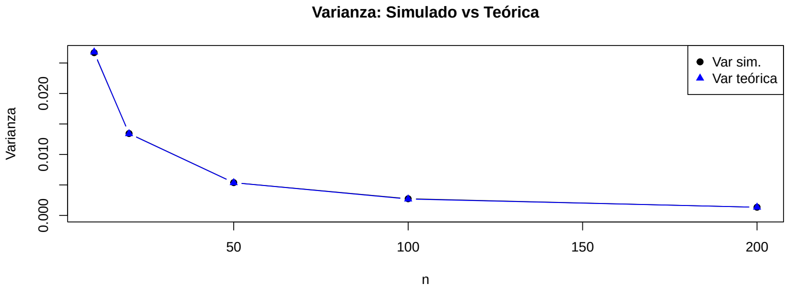
$$\text{Var}_{\text{teórica}} = \frac{p(1-p)}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

$$\text{ECM}_{\text{teórico}} = \text{Var}_{\text{teórica}} \quad (\text{sesgo} = 0)$$

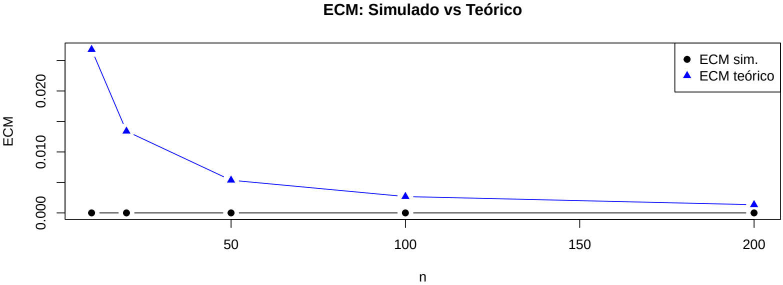
Sesgo: Simulado vs Teórico (=0)



Varianza: Simulado vs Teórica



ECM: Simulado vs Teórico



Conclusiones de la validación

Confirmaciones

1. **Sesgo aprox 0** en simulación $\rightarrow$ Insesgabilidad verificada
2. **Varianza simulada aprox Varianza teórica** para todo n
3. **ECM simulada aprox ECM teórico** $\rightarrow$ Fórmulas correctas

Comportamiento observado

- **Convergencia**: A mayor n, mejor ajuste teórico-simulado
- **Consistencia**: Var/ECM decrecen como $1/n$
- **Robustez**: Fórmulas teóricas válidas aún para n pequeño

Implicaciones

- **Expresiones teóricas** son confiables
- **Estimador MoM** se comporta según teoría
- **Simulación** valida aproximaciones asintóticas

2.1.8 Bootstrap para $\hat{\theta}_{MoM}$ ($n = 10$)

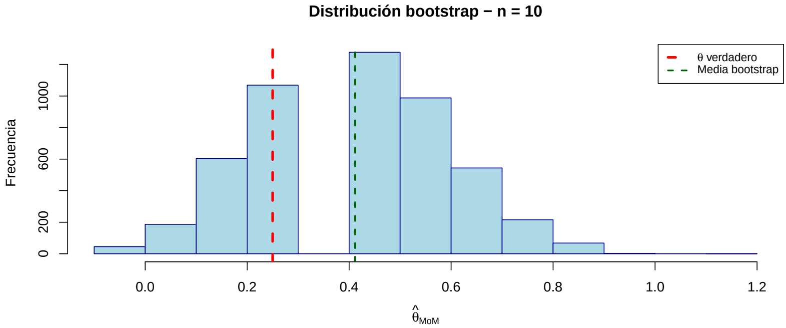
Parámetros

- $\theta = 0.25$, $S_e = 0.9$, $S_p = 0.95$
- $n = 10$, $B = 5000$ réplicas bootstrap
- Bootstrap no paramétrico

Método

1. Muestra original: $T_i \sim \text{Bernoulli}(p)$
2. Remuestreo con reemplazo
3. Recalcular $\hat{\theta}_{MoM}$ en cada réplica

Distribución bootstrap ($n = 10$)



Resultados bootstrap

Estadísticas clave

$$\text{Media bootstrap} = 0.4117$$

$$\text{Sesgo bootstrap} = 0.1617$$

$$\text{Desvío bootstrap} = 0.1837$$

Características observadas

1. **Alta dispersión** (gran variabilidad)
2. **Sesgo positivo**
3. **Distribución asimétrica** hacia derecha
4. **Valores fuera de [0,1]** posibles

IC Bootstrap Percentil - Método

Objetivo

Construir IC para θ usando bootstrap no paramétrico

Algoritmo

1. Para cada $n \in \{10, 20, 50, 100, 1000\}$
2. $R = 700$ réplicas Monte Carlo
3. $B = 1000$ remuestreos bootstrap
4. Calcular $\hat{\theta}_{MoM}$ en cada bootstrap
5. IC $=$ cuantiles 2.5% y 97.5%

Fórmula bootstrap

$$IC_{\text{boot}}^{0.95} = \left[Q_{0.025}(\hat{\theta}^*), Q_{0.975}(\hat{\theta}^*)\right]$$

donde $\hat{\theta}^*$ son estimaciones bootstrap

IC Asintótico - Resultado final

Estimador y varianza estimada

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{\hat{p} + S_p - 1}{S_e + S_p - 1}$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}_{MoM}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n(S_e + S_p - 1)^2}$$

Intervalo de confianza 95%

$$\boxed{IC_{\text{asint}}^{0.95} = \hat{\theta}_{MoM} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n(S_e + S_p - 1)^2}}}$$

Fundamentos

- **TCL + Método Delta** $\rightarrow$ Normalidad asintótica
- **Slutsky** $\rightarrow$ Reemplazar p por $\hat{p}$
- **Nivel**: 0.95 asintótico ($z_{0.975} = 1.96$)

Resultados: Bootstrap vs Asintótico

Cubrimiento empírico y longitud

Table 2: IC Bootstrap Percentil (R=700, B=1000)

n	Cubrimiento	Longitud media
10	0.9329	0.5680
20	0.9186	0.4285
50	0.9314	0.2782
100	0.9429	0.2006
1000	0.9514	0.0638

Resultados: Intervalos Asintóticos

Table 3: IC Asintótico (R=700)

n	Cubrimiento	Longitud media
10	0.9257	0.5930
20	0.9186	0.4366
50	0.9200	0.2836
100	0.9414	0.2013
1000	0.9457	0.0641

Conclusiones

1. **Bootstrap más robusto** para n pequeño
2. **Asintótico adecuado** para $n \geq 50$
3. **Longitudes similares** en ambos métodos
4. **Convergencia** cuando n crece