

離散数学 II 第 11 回レポート

2025 年 12 月 24 日 2025311066 藤井 壮樹

問題 1 図 1 の有向グラフ G_1 について、 s から t への最大流問題を考える。ただし、各辺には、容量 c と現在のフロー f の値がこの順序で記されている。次の各間に答えよ。

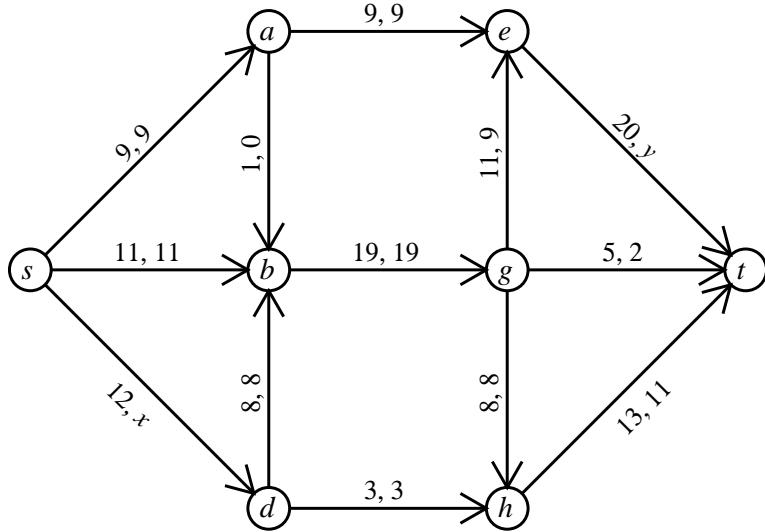


図 1 グラフ G_1

(a) x, y を求めよ。

解

$$x = 11, y = 18$$

(b) フロー f の流量 $|f|$ を求めよ。

解

$$|f| = 31$$

(c) カット $C = \{(s, a), (b, g), (d, h), (a, b)\}$ の容量を求めよ。なお、 C の辺をすべて開放除去すると、 G_1 は 2 つの連結成分に分かれる。それらのうち、 s を含む方の点の集合を X 、それ以外の点の集合を \bar{X} とすれば、このカットは $C(X, \bar{X})$ と書くことができる。

解

$$|C(X, \bar{X})| = 31$$

問題 2 図 2 の有向グラフ G_2 について、 s から t への最大流問題を考える。ただし、各辺には、容量 c と現在のフロー f の値がこの順序で記されている。次の各間に答えよ。

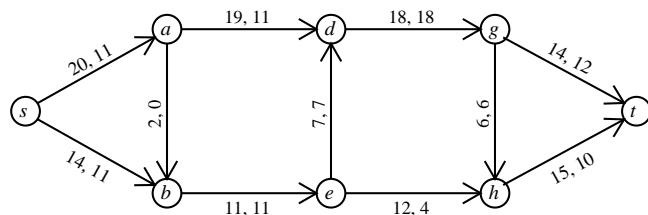


図 2 グラフ G_2

(a) 残余グラフ $R(f)$ を求めて図示せよ。

解

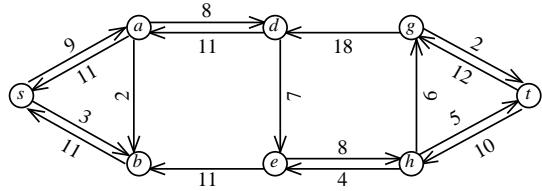


図3 残余グラフ $R(f)$

- (b)増加パス p を求めて図示せよ。ただし、増加パスが複数ある場合には、辺の本数が最も少ないものを選べ。

解

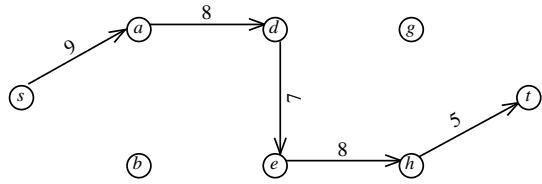


図4 増加パス p

- (c)上で選んだ増加パス p によって修正されたフロー f' を求めて図示せよ。

解

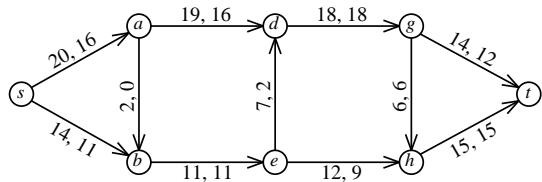


図5 修正されたフロー f'

- (d)最大フロー f^* を求めて図示せよ。

解

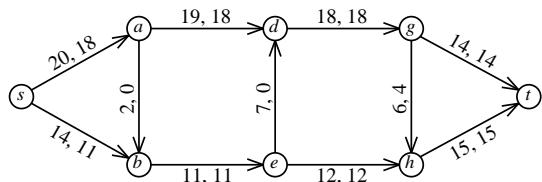


図6 最大フロー f^*

問題3 最大流をプログラム、MATLAB または Mathematica で求めよ。選んだ方法(プログラムの言語または MATLAB/Mathematica)とスクリーンショットを記すこと。

- (a)グラフ G_3 の点1から11への最大フローを求めよ。得られた最大フローの値、および、最大フローを書き込んだグラフを示せ。

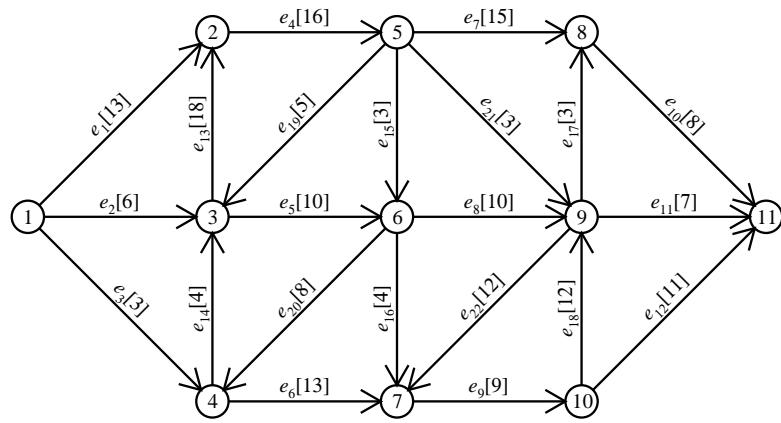


図 7 グラフ G_3

解

選んだ方法 Python

最大フローの値 $|f^*| = 8$

最大フロー

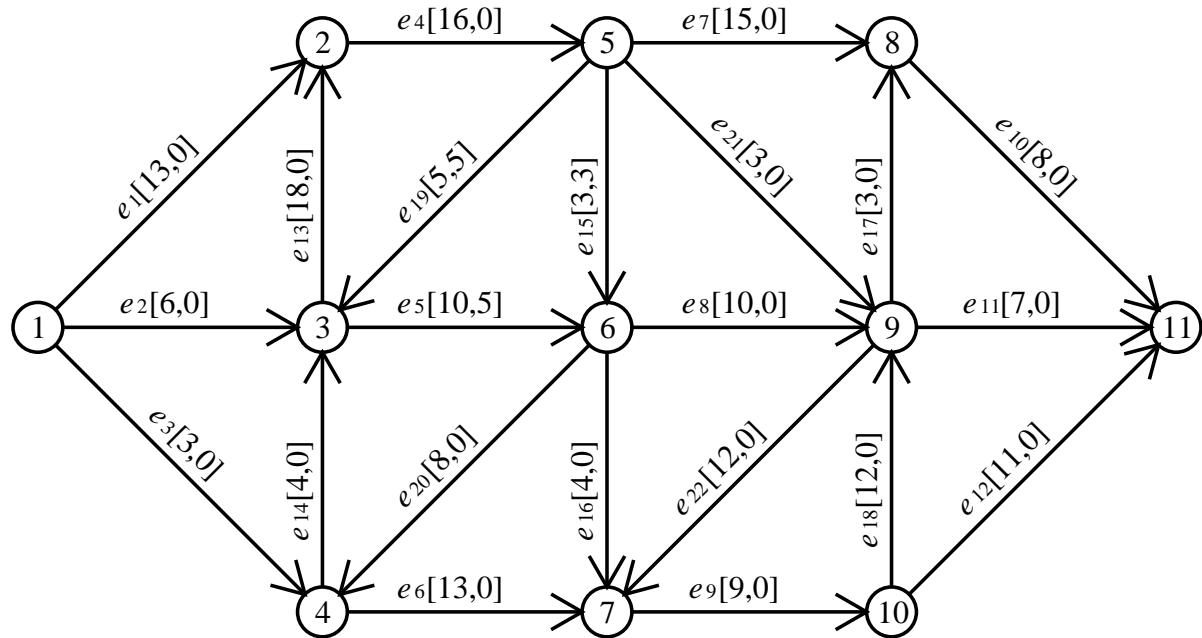


図 8 最大フロー

Screenshot of a Google Colab notebook titled "Untitled7.ipynb - Colab". The code cell contains Python code for the Ford-Fulkerson algorithm. The output shows the algorithm's execution and the resulting flow and cut values.

```
[4]: print();
print("# 入力データ");
print("# 各辺の始点の配列、終点の配列、容量の配列");
src = [1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 5, 6, 5, 9];
dst = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 3, 4, 9, 7];
cap = [13, 6, 3, 16, 10, 13, 15, 10, 9, 8, 7, 11, 18, 4, 3, 4, 3, 12, 5, 8, 3, 12];
# 問題の準備
init(src, dst, cap);
# Ford-Fulkersonのアルゴリズム実行
# 引数で始点と終点を指定
x = fulkerson(5, 6);
# 結果を表示
# フローの値を表示
print("Value=" +str(x));
# 各辺のフローを表示
showFlow();
# カットを表示
showCut();
```

... Value=8
Flow: 3->6(5) 5->6(3) 5->3(5)
Cut: 5->6 5->3

図9 スクリーンショット

(b) グラフ G_4 の点 v_2 と v_8 の間の辺連結度 $\lambda(v_2, v_8; G)$ を求めるための入力を求めよ。

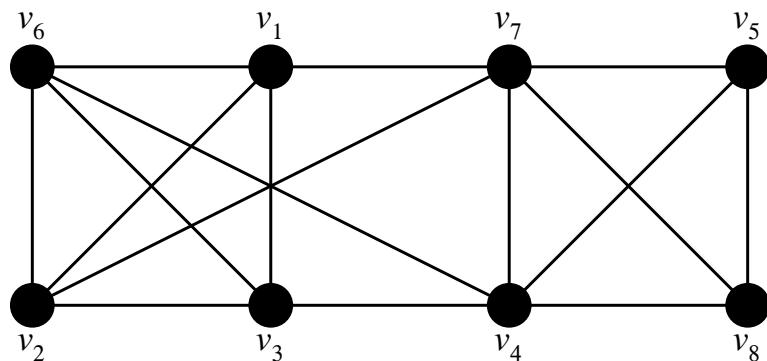


図 10 グラフ G_4

解

ミニツツペーパー

今回の授業内容で重要だと思ったこと

最大フローについて考える際、残余グラフや増加パスの性質を理解しながら考えることが大切だと感じた。

今回の授業内容でよく理解できなかった点、疑問に思ったこと

最大流問題と辺連結度の関係性について、証明が難しかった。