

Calculo Numérico

Trabalho_4

Prof. Dra. Larissa de Freitas ¹,
Guilherme de Souza¹

1

1. Métodos implementados

- Trapezio;
- 1/3 de Simpsom;
- 3/8 de Simpsom ;
- Euler;
- Runge-Kutta 2a Ordem;
- Runge-Kutta 4a Ordem;

Para execução de tais métodos como, **Trapezio, 1/3 de Simpsom e 3/8 de Simpsom** foram aplicados na lista de exercícios 11¹. Os métodos de **Euler, Runge-Kutta 2a ordem e 4a ordem** utilizou-se a lista de exercícios 12².

Todos os métodos foram desenvolvido na linguagem de programação python, fazendo uso da plataforma Colaboratory (plataforma do Google), o código se encontra disponível na plataforma para acesso via link³

2. Método do Trapezio

O método dos trapazeio é um metodo numerico para aproximação da resolução de um integral definida.

$$\int_a^b f(x) dx =$$

Dado que no calculo da integral temos diversos procedimentos para resolução desta integral, seja por substituição, integral por partes, substituição trigonométrica, entre outras. Mas o Método do trapézio por sua vez, nos retorna um valor aproximado independentemente do método utilizado.

Sabemos que a area a limitada pelos limites da integral, como demonstrado na figura 1, o que o método se propoe a realizar a divisão desta area em alguns trapézios ao final realiza sua soma, dessa forma obtendo uma aproximação.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k$$

- (B) Trapezio: 31.365285650063754
- (C) Trapezio: 0.7842407666178157

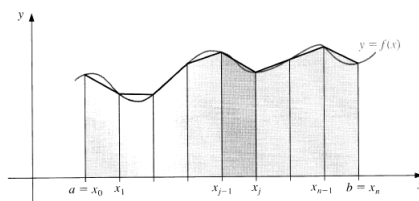


Figure 1. Exemplo de de atuação do método dos trapézios

| -1.08268227 -0.73575888 0.0 5.43656366 59.11244879 |

Table 1. Função utilizando a regra do trapezio no exercício B da lista 11

- **(D)** Trapezio: 0.10486282062502501
- **(E)** Trapezio: -13.575979391799388
- **(F)** Trapezio: 0.5196110146984233

3. Simpsom

Dando continuidade com métodos de integração, dado a dificuldade de se resolver a integral partindo do principio que muitas vezes se quer há o conhecimento da função, faremos uso do método de Simpsom.

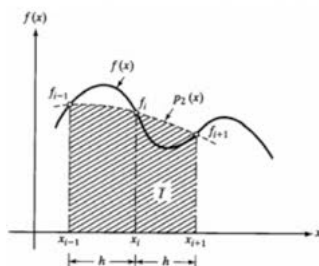


Figure 2. Exemplo de atuação do método de Simpson

Dado o exemplo da figura 2, pegamos os dois limites da integral conhecidos e dividido em partes suas partes iguais de maneira a encontrar o h , como a seguir:

$$h = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}$$

Dessa forma terei mais pontos sobre o grafico da função, assim interpolando estes pontos, ou seja, procuro qual é o polinomio de menos grau possivel que passe sobre todos, assim calculando a area entre o grafico do polinomio e o intervalo dos eixos do x, esta area é uma aproximação da função f da integral ou seja:

¹Disponível no AVA: https://ava.ufpel.edu.br/pre/pluginfile.php/318455/mod_resource/content/1/ListaDeExercicios11.pdf

²Disponível no AVA: https://ava.ufpel.edu.br/pre/pluginfile.php/320366/mod_resource/content/2/ListaDeExercicios12.pdf

³Código: https://colab.research.google.com/drive/1D2WZN_HYdlaP5LdSa-c4y9_G4DBMhnHT

	0.5	0.97297297	0.9	0.8	0.69230769	0.59016393	0.25	
--	-----	------------	-----	-----	------------	------------	------	--

Table 2. Função utilizando a regra do trapezio no exercício C da lista 11

	0.0	0.20999043	0.69856645	1.08060461	0.83640026	-0.53179749	-1.66458735	
--	-----	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	--

Table 3. Função utilizando a regra do trapezio no exercício D da lista 11

$$\int_{k-1}^{k+1} f(x) dx \approx \int_{k-1}^{k+1} P_2(x) dx$$

Pois dessa forma o polinomio é facil de integrar, assim é facil chegar a aproximação da integral. Neste trabalho fizemos uso de dois de seus métodos conhecidos como 1/3 de Simpson, para polinomios de segunda ordem, e 3/8 de Simpson para polinomios de ordem superiores, (a demonstração será ocultada pela vasta demonstração disponvel na internet e pela sua extensa explicação).

Desta forma tais métodos se propoe a serem mais precisos que o métodos do trapézio, geralmente, nem sempre cumprido tal afirmação dada determinada integral e o polnomio.

3.1. Aplicação de 1/3 de Simpson

- (B) 1/3 de Simpsom: 22.231872397453277
- (C) 1/3 de Simpsom: 0.8054718653079309
- (D) 1/3 de Simpsom: 0.12706697873621364
- (E) 1/3 de Simpsom: -11.92869601630686
- (F) 1/3 de Simpsom: 0.5355245326505693

3.2. Aplicação de 3/8 de Simpsom

- (B) 3/8 de Simpsom: 24.405365132780666
- (C) 3/8 de Simpsom: 0.7552413857741727
- (D) 3/8 de Simpsom: 0.2029697091109325
- (E) 3/8 de Simpsom: -11.336218635489457
- (F) 3/8 de Simpsom: 0.4982574816855577

	0.0	2.24766465	5.42294499	6.97416428	2.08548731	-13.92608463	-39.26843454	-56.88800	
--	-----	------------	------------	------------	------------	--------------	--------------	-----------	--

Table 4. Função utilizando a regra do trapezio no exercício E da lista 11

	0.4	0.71910112	0.64	0.56637168	0.5	0.44137931	0.3902439	0.34594595	0.15384615	
--	-----	------------	------	------------	-----	------------	-----------	------------	------------	--

Table 5. Função utilizando a regra do trapezio no exercício F da lista 11

4. Euler

Como os demais metodos aqui apresentados, o método foca em encontrar aproximações de forma a resolver a $f(x)$. Com tal método é possível partindo de um ponto conhecido, como, x_0, y_0 , com isso consigo andar um passo no grafico usando a inclinação da tangente e da secante, ou seja:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$h = x_1 - x_0$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \approx y'(x_0)$$

$$y_1 - y_0 \approx h y'(x_0)$$

$$y_1 \approx y_0 + h y'(x_0)$$

Com isso, a partir do ponto em que está no grafico, é possível avançar um tamanho h e encontrar o valor x_1 com isso é possível encontrar a imagem, y_1 . Ou seja, os novos valores estão bem proximo do grafico da função, dessa forma, basta repetir o metodo mais vezes, de forma a encontrar mais pontos proximos conforme aumenta em um tamanho h , a partir do resultado encontrado anteriormente como pode ser visto na figura 3.

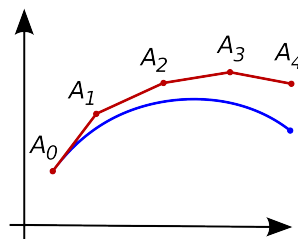


Figure 3. Exemplo de atuação do método de Simpson

5. Runge-Kutta

Dado sua precisão e simplicidade um dos métodos mais utilizados é o método de Runge-kutta. É uma família de métodos que possuem a precisão dos métodos de Taylor, porém não exige o cálculo das derivadas de ordem superior.

A demonstração do método base será ocultada como alguns anteriormente aqui apresentados, dado a sua semelhança na sua primeira ordem ao método de Euler e Taylor de primeira ordem.

-1.08268227	-1.47151776	-0.73575888	10.87312731	10.87312731
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Table 6. Função utilizando a regra do trapezio no exercício B da lista 11

0.5	1.94594595	0.97297297	1.6	0.8	1.18032787	0.29508197
-----	------------	------------	-----	-----	------------	------------

Table 7. Função utilizando a regra do trapezio no exercício C da lista 11

5.1. Runge-Kutta 2a ordem

Dentre a familia deste método temos o de 2a ordem, que é definido por⁴:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

com,

$$c_1 + c_2 = 1,$$

$$k_1 = f(t_i, \omega_i),$$

$$k_2 = f(t_i + ha_a, \omega_i + h(a_2 k_1)).$$

Dessa forma podemos determinar c_1 , c_2 e a_2 , desenvolvendo a função k_2 pelo polinomio de Taylor, em torno de (t_i, ω_i) até segunda ordem. Assim acabamos por obter um sistema não linear que possui diversas soluções.

5.2. Runge-Kutta 4a Ordem

Através de alguns calculos e algumas mudanças nas variaves tanto da do Runge-Kutta 2a ordem quanto o Runge-Kutta 4-estagios, conseguiremos definir um Método de Runge-Kutta 4a ordem. Através dos calculos chegaremos a um sistema não-linear com solução unica.

6. Disertando sobre os Resultados

Ao analisarmos os resultados encontrados a partir da aplicação dos métodos de 1/3, 3/8 de Simpson e o método dos trapezios na lista de exercicio 11, podemos observar que os resultados são bastantes semelhantes, os mesmo podem ser encontrado em suas devidas seções e nas tabelas de 1 à 15.

Dado que o Método dos trapezios foi o que apresentou resultados levemente distante dos demais por dois ou mais. Como exemplo podemos pegar o exercicio (B) no qual ele apresenta 7 a mais que o 3/8 e 9 comparado ao 1/3, da mesma forma ja demonstra a leve diferença entre o 1/3 e 3/8 de Simpson, sendo somente por dois e menor ainda ao comparar os demais resultados encontrados. Uma boa forma de analisar e que facilita ver a diferença, é ao observar o os valores antes da soma do vetor.

Nos resultados aqui apresentados, ou seja, nesta determinada situação, as descrições dos métodos se fizeram por valer, onde conseguirmos observar que os métodos se Simpson tendem a serem mais precisos comparado ao método dos trapezios.

Na questão 4 da lista 12, ao modificarmos o tamanho do h no Runge-Kutta 4a ordem, podemos notar ao observar o grafico na figura 4, que passos menores

⁴Formula disponivel em:<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/ensino/aulas/sme0300-2-13-fisica/aula20-edorungekutta.pdf>

	0.0	0.41998087	0.20999043	2.16120922	1.08060461	-1.06359498	-0.26589874	
--	-----	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	--

Table 8. Função utilizando a regra do trapezio no exercício D da lista 11

	0.0	4.49532929	2.24766465	13.94832857	6.97416428	-27.85216926	-13.92608463	-113.776	
--	-----	------------	------------	-------------	------------	--------------	--------------	----------	--

Table 9. Função utilizando a regra do trapezio no exercício E da lista 11

aparentemente nos retorna uma presição um pouco melhor, realizando um curva mais aproximativa a qual esperamos. Mas podemos observar que isso faz com que eu tenha um numero maior de repetição, enquanto em $h=0.5$ realizamos somente 4, com $h=0.25$ realizamos 8 repetições.

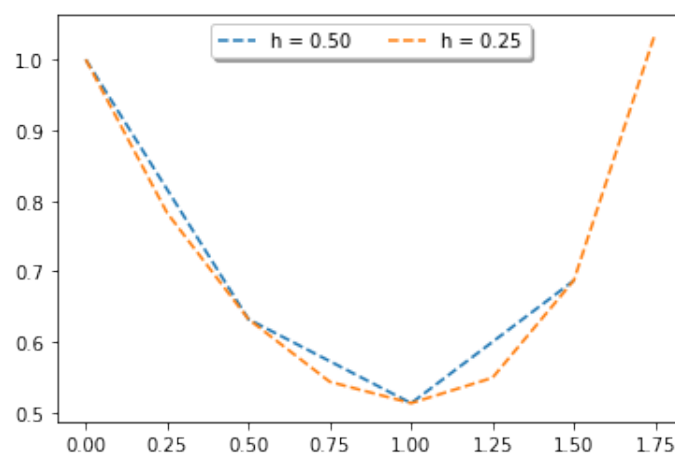


Figure 4. Resultado da aplicação do Metodo Runge-Kutta 4a Ordem na questão 4 da lista 12

Mas por outro lado ao observarmos a Tabela 16 e 17, com o h maior aparentemente o resultado tende a convergir mais rapido, de forma que é possível observar ao compararmos a coluna K4 de ambas as tabelas.

Semelhantemente temos a questão 3 da lista de exercicio 2, porém o método de aplicação utilizado é o método de Euler, sofrendo algumas leves mudança pela forma que foi implementado o código, onde podemos observar ser realizado mais uma repetição que o método anterior aplicado na questão 4.

Ao obersevarmos as Tabelas 18 e 19, podemos notar que quanto menor o h a distância de presição passa a ser 0.3 ou mais, porém os restante o se asemelha as afirmações anterior ditas para o método de Runge-Kutta 4a ordem. Ao analisarmos o Grafico 5 podemos notar que seu comportamento também acaba por se asemelhar ao anterior, porém um distntância maior é apresentada entre as retas dispostas no gráfico.

Para resolução da questão 2 da lista 12, fez-se uso dos métodos Runge-Kutta 2a e 4a ordem, para resolução da questão, foi definida por ela um $h=0.5$ minutos. Podemos observar nas figuras 6 e 7 onde podemos observar que os metodos obtiveram conclusões semelhantes em 54.0 minutos, podendo observar o comportamento da tabela apresentada na figura, uma parte da mesma foi ocultada para proporcionar uma melhor vizualização.

| 0.4 1.43820225 0.71910112 1.13274336 0.56637168 0.88275862 0.44137931 0.69189189

Table 10. Função utilizando a regra do trapezio no exercício F da lista 11

| -1.08268227 -1.10363832 0.0 8.15484549 59.11244879 |

Table 11. Função utilizando a regra do trapezio no exercício B da lista 11

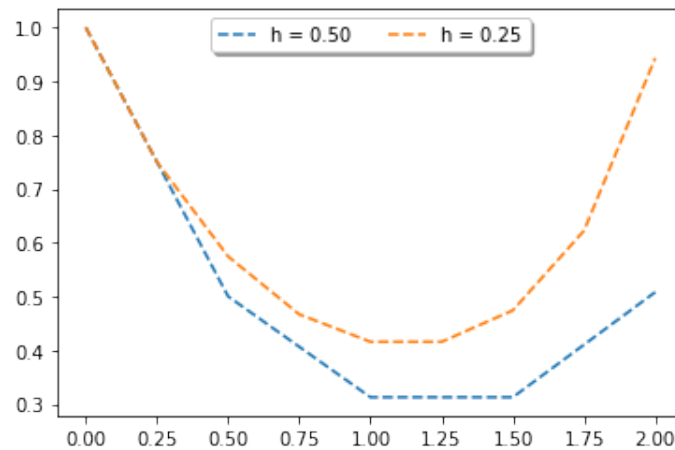


Figure 5. Resultado da aplicação do Metodo de Euler na questão 3 da lista 12

	Xk	Yk	K1	K2
0	0.0	3.000000	-0.103923	-0.103019
1	0.5	2.948264	-0.103023	-0.102119
2	1.0	2.896979	-0.102123	-0.101219
3	1.5	2.846143	-0.101223	-0.100319
4	2.0	2.795758	-0.100323	-0.099419
..
104	52.0	0.029708	-0.010342	-0.009399
105	52.5	0.024773	-0.009444	-0.008496
106	53.0	0.020288	-0.008546	-0.007593
107	53.5	0.016253	-0.007649	-0.006689
108	54.0	0.012669	-0.006753	-0.005784

Figure 6. Resultado da aplicação do Metodo de Runge-Kutta 2a ordem na questão 2 da lista 12

| 0.5 1.45945946 1.35 1.2 0.69230769 0.59016393 0.25 |

Table 12. Função utilizando a regra do trapezio no exercício C da lista 11

| 0.0 0.31498565 1.04784968 1.62090692 0.83640026 -0.53179749 -1.66458735 |

Table 13. Função utilizando a regra do trapezio no exercício D da lista 11

| 0.0 3.37149697 8.13441749 10.46124643 2.08548731 -13.92608463 -58.90265182 -56.8880

Table 14. Função utilizando a regra do trapezio no exercício E da lista 11

| 0.4 1.07865169 0.96 0.84955752 0.5 0.44137931 0.58536585 0.34594595 0.15384615 |

Table 15. Função utilizando a regra do trapezio no exercício E da lista 11

Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0.0	1.000000	-1.000000	-0.703125	-0.772705	-0.460236
0.5	0.632342	-0.474257	-0.224778	-0.252065	0.000000
1.0	0.513347	0.000000	0.288758	0.329364	0.847536
1.5	0.686995	0.858744	1.859718	2.375845	5.624753

Table 16. Resultado da questão 4 da lista 12 com $h=0.5$ usando o método de Runge-Kutta 4a ordem

Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0.0	1.000000	-1.000000	-0.861328	-0.878391	-0.731627
0.25	0.782872	-0.733943	-0.593939	-0.608979	-0.472971
0.50	0.632341	-0.474256	-0.349208	-0.358733	-0.237413
0.75	0.543693	-0.237866	-0.120459	-0.123899	0.000000
1.0	0.513419	0.000000	0.136377	0.140905	0.308613
1.25	0.549385	0.309029	0.523699	0.547598	0.857855
1.50	0.687279	0.859099	1.303750	1.394939	2.136779
1.75	1.036998	2.138809	3.281255	3.640500	5.841370

Table 17. Resultado da questão 4 da lista 12 com $h=0.25$ usando o método de Runge-Kutta 4a ordem

Xk	Yk	Função
0.0	1.000000	0.000000
0.5	0.500000	-0.375000
1.0	0.312500	0.000000
0.75	0.312500	0.390625
1.0	0.507812	1.523438

Table 18. Resultado da Questão 3 da lista 12 com $h=0.5$ usando o método de Euler

Xk	Yk	Função
0.0	1.000000	0.000000
0.25	0.750000	-0.703125
0.50	0.574219	-0.430664
0.75	0.466553	-0.204117
1.0	0.415524	0.000000
1.25	0.415524	0.233732
1.50	0.473957	0.592446
1.75	0.622068	1.283015
2.0	0.942822	2.828465

Table 19. Resultado da questão 3 da lista 12 com $h=0.25$, usando o método Euler

Xk	Yk	Função
0.0	10.000000	0.000000
1.0	27.826087	38.819758
2.0	66.645845	36.733675
3.0	103.379521	-25.574117

Table 20. Resultado da questão 1 da lista 12 usando o método de Euler

Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0.0	10.000000	17.826087	30.049930	36.435824	45.995871
1.0	42.798911	45.777240	37.573938	40.719138	15.399913
2.0	79.092795	22.192759	3.550366	19.570089	-14.290856

Table 21. Resultado da questão 1 da lista 12 usando Runge-Kutta 4a ordem

Xk	Yk	K1	K2
0.0	10.000000	17.826087	-27.826087
1.0	5.000000	9.456522	-28.913043
2.0	-4.728261	-9.942532	44.012377

Table 22. Resultado da questão 1 da lista 12 usando Runge-Kutta 2a ordem

	Xk	Yk	K1	K2	K3	K4
0	0.0	3.000000	-0.103923	-0.103472	-0.103474	-0.103023
1	0.5	2.948263	-0.103023	-0.102572	-0.102574	-0.102123
2	1.0	2.896977	-0.102123	-0.101672	-0.101674	-0.101223
3	1.5	2.846140	-0.101223	-0.100772	-0.100774	-0.100323
4	2.0	2.795754	-0.100323	-0.099872	-0.099874	-0.099423
...
104	52.0	0.029602	-0.010323	-0.009863	-0.009884	-0.009422
105	52.5	0.024665	-0.009423	-0.008962	-0.008985	-0.008522
106	53.0	0.020178	-0.008523	-0.008061	-0.008086	-0.007621
107	53.5	0.016142	-0.007623	-0.007159	-0.007188	-0.006721
108	54.0	0.012555	-0.006723	-0.006257	-0.006290	-0.005820

Figure 7. Resultado da aplicação do Metodo de Runge-Kutta 4a ordem na questão 2 da lista 12