# Ультимативная шпаргалка по производству

## В этом листочке:

## Два завода:

- Возрастающие/убывающие $MC$ на обоих заводах
- Убывающие + возрастающие $MC$. Что будет, если $q^2$ сложить с $\sqrt{q}$.
- Квази-FC, когда «включать» заводы, что сравнивать
- Сложение квадратичных издержек $aq_1^2 + bq_1$ и $cq_2^2 + dq_2$
- Предложение СК фирмы с несколькими заводами

## Производственая функция:

- $TC \to \min \iff Q \to \max$ и как это использовать. Почему $F = \sqrt{2K + L}$ это очень просто.
- Идея $\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$, когда можно использовать.
- Функция Кобба-Дугласа для работы с издержками
- «Разделение» производственной функции, максмизация через переход к распределению денег, типа $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3x_4$
- Работа с функциями минимума/максимума

# Два завода

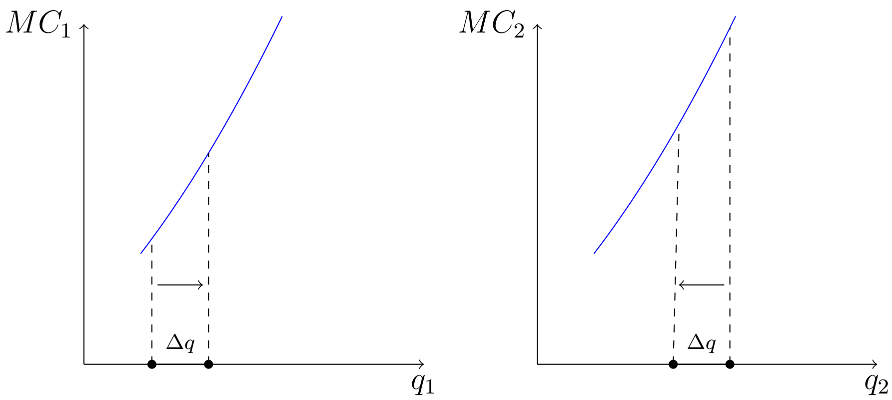
**Сюжет I. Возрастающие/убывающие $MC$ на обоих заводах.**

✎ **Утверждение:**

Если на двух заводах с возрастающми непрерывными $MC$ производятся ненулевые выпуски, то $MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$.

**Доказательство:**

Пусть это неверно. Допустим, $MC_1 < MC_2$. Тогда по непрерывности найдется $\Delta q$ такое, что при замене $q_1 \mapsto q_1 + \Delta q, \quad q_2 \mapsto q_2 - \Delta q$ совокупные издержки сократятся, а выпуск не изменится.




Поскольку переменные издержки – это площадь под $MC$, то при таком перераспределении выпусков они сократятся.

**Как использовать:**

Во-первых стоит обратить внимание, что утверждение верно только тогда, когда выпуски больше нуля. Понятно, что у заводов $TC_1 = 10q_1 + q_1^2$ и $TC_2 = q_2^2$ предельные издержки равны только начиная с некоторого $Q$, когда в работу включатся оба завода. Но уж если выпуски больше нуля, то мы легко получаем необходимую связь на количества. Это утверждение, естественно, верно и для нескольких заводов. Так, например, если в нашем распоряжении заводы

$$TC_1 = q_1^2 \qquad TC_2 = 2q_2^2 \qquad TC_3 = \frac{q_3^2}{2}$$

то мы понимаем, что во-первых все заводы используются (первая единица ничего не стоит, $MC(0) = 0$, такой завод не может стоять без дела), а во-вторых

$$MC_1 = MC_2 = MC_3$$

$$2q_1 = 4q_2 = q_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{2}{7}Q \qquad q_2 = \frac{1}{7}Q \qquad q_3 = \frac{4}{7}Q \Rightarrow$$

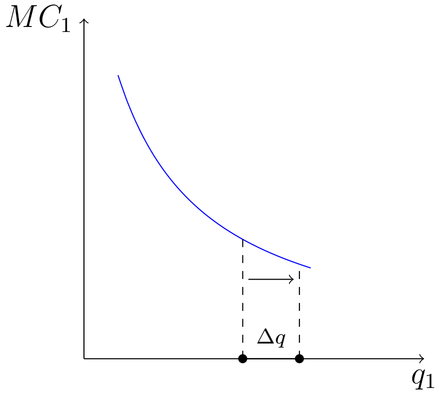
$$\Rightarrow TC = \left(\frac{2}{7}Q\right)^2 + 2\left(\frac{1}{7}Q\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}Q\right)^2 = \frac{2}{7}Q^2$$

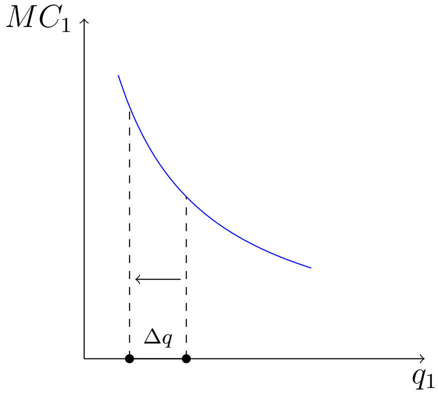
✎ **Утверждение**:

Два завода с убывающими непрерывными $MC$ не могут работать одновременно. Иначе говоря, мы будем использовать только один, а именно тот, издержки на котором меньше. Более сильное утверждение: если на одном из заводов $MC = const$, а на втором убывают, они тоже не используются вместе.

**Доказательство:**

Допустим, в оптимуме работают оба завода и $q_1, q_2 > 0$. Без ограничения общности можно считать $MC_1 \leqslant MC_2$. Но тогда перераспределение $q_1 \mapsto q_1 + \Delta q, \quad q_2 \mapsto q_2 - \Delta q$ уменьшит совокупные издержки, причем исходное неравенство сохранится, значит выгодно производить перераспределение, пока один из выпусков не станет равен нулю. Обратите внимание, что доказательство не меняется для случая константных $MC$ на одном заводе.




Поскольку переменные издержки – это площадь под $MC$, то увеличение издержек на первом заводе не так велико, как сокращение издержек на втором.

**Как использовать:**

Если в наличии заводы с убывающими (невозрастающими) предельными издержками, достаточно сравниить производство на первом заводе с производством на втором и взять нижнюю огибующую. Пусть, например, даны заводы

$$TC_1 = 2\sqrt{q} \qquad TC_2 = \frac{2}{3}q$$

Тогда совокупной функцией издержек является их нижняя огибающая:

$$TC = \begin{cases} \frac{2}{3}Q, & Q \leqslant 9 \\ 2\sqrt{Q}, & Q > 9 \end{cases}$$

Если издержки заданы как, например, $TC_1 = \sqrt{q}, TC_2 = 3\sqrt{q}$, то можно сразу говорить, что разделения производства между заводами не будет и $TC = TC_1 = \sqrt{Q}$.

**Сюжет II. Возрастающие и убывающие $MC$.**

✎ **Утверждение:**

Если в производстве участвуют два завода, на одном из которых предельные издержки возрастают, а на втором убывают, то возможны только два сценария:

- Работают оба завода и $MC_1 = MC_2$
- Работает только один завод

Иными словами, ситуация, как не неожиданно, «такая же», как в случае с двумя заводами с возрастающими издержками.

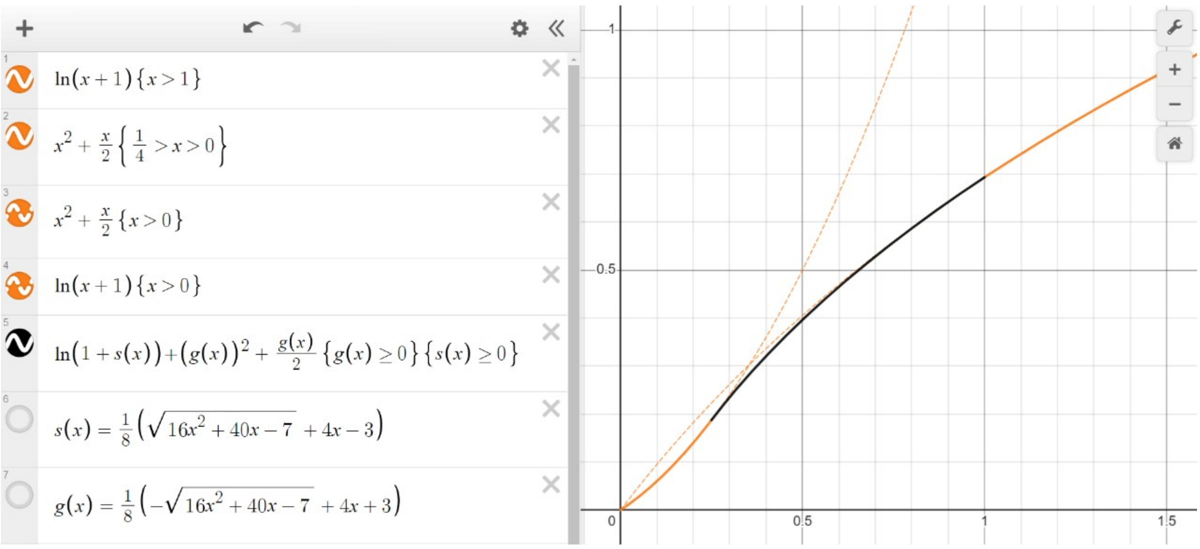
**Доказательство:**

Пусть за первом заводе $MC$ возрастают, а на втором убывают. Тогда, если $MC_1 > MC_2$, то можно перебросить $\Delta q$ с первого завода на второй и уменьшить издержки. Если же $MC_1 < MC_2$, то можно перебросить $\Delta q$ со второго завода на первый. Разница с предыдущими двумя случаями здесь состоит в том, что неравенство может как прийти к $MC_1 = MC_2$, так и сохраняться, вплоть до закрытия одного из заводов.

**Как использовать:**

Об этом просто хорошо бы помнить. Так, например, производство на заводах $TC_1 = \sqrt{q}$ и $TC_2 = q^2$ устроено следующим образом: сначала мы работаем на $TC_2 = q^2$, затем в один момент включаем $\sqrt{q}$, работая при этом так, что $MC_1 = MC_2$. Действительно, хотя предельные издержки у $\sqrt{q}$ и падают, они никогда не станут такими маленькими, чтобы мы отказывались от производства условно говоря *бесплатных* первых единиц продукции завода $q^2$.

С другой стороны, если бы нам пришлось использовать заводы $TC_1 = ln(q+1)$ и $TC_2 = q^2 + \frac{q}{2}$, мы бы только вначале использовали бы квадратичный завод, где $MC_2(0) = \frac{1}{2}$, затем перешли бы на совместное производство, пока производство на заводе с логарифмом не стало бы дешевле, чем любое на заводе с квадратом, а именно после $Q = 1$, где $MC_1(1) = \frac{1}{2}$.




С помощью перераспределения удается улучшить ситуацию (черный участок), но ненадолго, потому что логарифм оказывается дешевле.

Такая задача не встретится не олимпиаде, но вообще нужно просто рассмотреть все три случая (первый завод, второй завод, совместное производство) и взять нижнюю огибающую.

**Сюжет III. Линейные и квадратичные заводы.**

Рассмотрим пример сложения линейного и квдратичного заводов, квадратичных заводов.

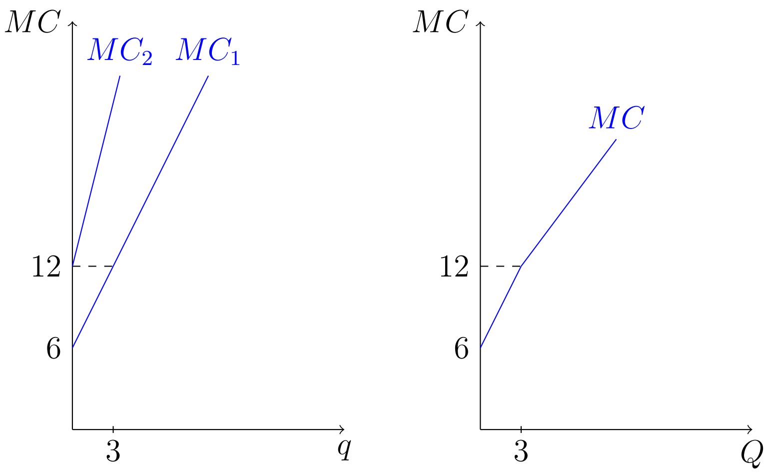
I) $TC_1 = 6q_1 \qquad TC_2 = q_2^2$. Тут все просто – пока $MC$ на втором заводе не сравняется с $MC$ на первом, мы используем только его. Затем, производя первые единицы все еще на втором заводе, остальное производим на первом. Здесь точка перехода $Q = 3$, тогда

$$TC = \begin{cases} Q^2,\ Q \leqslant 3 \\ 6(Q-3)+9,\ Q > 3 \end{cases}$$

Последнее выражение можно упростить, оно приведено здесь, чтобы продемонстрировать логику: все единицы *после первых трех* производятся на первом заводе, а на те первые три единицы мы тратим $TC_2(3) = 9$.

II) $TC_1 = 6q_1, \qquad TC_2 = q^2 + 10q_2$. Здесь, конечно, $TC = 6Q$

III) $TC_1 = q_1^2 + 6q_1 \qquad TC_2 = 2q_2^2 + 12q$




$$MC_1 = 2q_1 + 6 \qquad MC_2 = 4q_2 + 12$$

Когда есть несколько возрастающих $MC$ несложно показать, что алгоритм действия такой: сначала производим там, где $MC$ меньше, затем, как только появляется возможность, производим так, что $MC_1 = MC_2$.

Интересно, что это равносильно горизонтальному сложению $MC$, т.к. для совокупной функции издержек $MC(Q) = MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$ (неважно, где делать следующую единицу), поэтому если мы достигли какой-то точки $MC$ по вертикальной оси, это означает, что по горизонтальной $Q = q_1^{-1}(MC_1) + q_2^{-1}(MC_2) = q_1^{-1}(MC) + q_2^{-1}(MC)$.

Покажем несколько способов, как можно получить функцию издержек на втором участке:

1) Стандартно найдем $q_1$ и $q_2$ из равенства $MC$.

$$2q_1 + 6 = 4q_2 + 12 \tag{1}$$
$$q_1 + q_2 = Q \tag{2}$$

Отсюда $q_1 = \dfrac{2Q+3}{3}, \quad q_2 = \dfrac{Q-3}{3}$ и

$$TC = TC_1(q_1) + TC_2(q_2) = \left(\frac{2Q+3}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{2Q+3}{3} + 2\left(\frac{Q-3}{3}\right)^2 + 12 \cdot \frac{Q-3}{3} =$$

$$= \frac{2Q^2}{3} + 8Q - 3$$

Тогда общие издержки это

$$TC = \begin{cases} Q^2 + 6Q,\ Q \leqslant 3 \\ \dfrac{2Q^2}{3} + 8Q - 3,\ Q > 3 \end{cases}$$

2) Можно найти $MC$ второго участка и восстановить $VC$. Вспомнив, что $MC = MC_1 = MC_2$, получим

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{MC-6}{2} + \frac{MC-12}{4} = \frac{3MC}{4} - 6 \Rightarrow$$

$$MC = \frac{4Q}{3} + 8 \Rightarrow\ VC = \frac{2Q^2}{3} + 8Q$$

Дело в том, что наша функция «не знает», что раньше нам приходилось производить дороже. Подумайте, где на графике располагается площадь, на которую отличаются наша функция и настоящая. Мы можем найти ее и не графически, а просто подставив $Q = 3$ и сравнив результаты. Получаем разницу в 3, откуда

$$TC = \begin{cases} Q^2 + 6Q,\ Q \leqslant 3 \\ \dfrac{2Q^2}{3} + 8Q - \mathbf{3},\ Q > 3 \end{cases}$$

✎ Последний способ удобно использовать для заводов вида $TC = aq^2$. Обратимся к самому первому примеру в листочке:

$$TC_1 = q_1^2 \qquad TC_2 = 2q_2^2 \qquad TC_3 = \frac{q_3^2}{2}$$

Здесь

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{MC_1}{2} + \frac{MC_2}{4} + MC_3 = \frac{MC}{2} + \frac{MC}{4} + MC = \frac{7}{4}MC$$

Тогда $MC = \dfrac{4}{7}Q$ и $TC = \dfrac{2}{7}Q^2$. Здесь никакие издержки не потеряются.

**Сюжет IV. Квази-$FC$. Издержки на открытие завода.**

✎ **Утверждение:** При работе с заводами, содержащими квази-$FC$ достаточно рассмотреть все комбинации состояний этих заводов, для каждой комбинации найти соответствующую функцию общих издержек и взять нижнюю огибающую. Иными словами, нужно проверить «что будет», если мы решим производить на нескольких конкретных заводах, и для каждого $Q$ открывать только те наборы заводов, которые дают минимальные издержки.

**Доказательство:**

Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве упражнения.

**Как пользоваться:**

**Пример попроще:** пусть в распоряжении два завода

$$TC_1 = \begin{cases} 0, & q_1 = 0 \\ 2q_1^2 + 10, & q_1 > 0 \end{cases} \qquad TC_2 = 12q_2$$

Согласно нашему утверждению достаточно рассмотреть только два сценария: «первый завод открыт» и «первый завод закрыт». В первом случае издержки равны

$$TC_I = \begin{cases} 2Q^2 + 10, & Q < 3 \\ 12Q - 8, & Q \geqslant 3 \end{cases}$$

а во втором $TC_{II} = 12Q$. Пересекая эти кривые и беря нижнюю огибающую, имеем

$$TC = \begin{cases} 12Q, & Q < 1 \\ 2Q^2 + 10, & 1 \leqslant Q \leqslant 3 \\ 12Q - 8, & Q > 3 \end{cases}$$

**Пример посложнее:** бывает и так, что «сократить» в решении особенно нечего. Пусть в распоряжении имеется несколько заводов:

$$TC_1 = \begin{cases} 0, \; q_1 = 0 \\ q_1^2 + 8, \; q_1 > 0 \end{cases} \qquad TC_2 = \begin{cases} 0, \; q_1 = 0 \\ 6q_2 + 7, \; q_1 > 0 \end{cases} \qquad TC_3 = 8q_3$$

В общем случае нужно рассмотреть все теоретически возможные комбинации заводов ($\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$) и взять нижнюю огибающую (заводы 2 и 3, естественно, вместе работать не могут). После взятия нижней огибающей получим

$$TC = \begin{cases} 8Q, & Q \leqslant 4 - 2\sqrt{2} \\ Q^2 + 8, & 4 - 2\sqrt{2} < Q \leqslant 4 \\ 8Q - 8, & 4 < Q \leqslant 7 \\ 6Q + 6, & 7 < Q \end{cases}$$

Сначала работает третий завод, затем переключаемся на первый, или что тоже самое, первый+третий, ведь первые 4 единицы все равно производятся на первом. Участок $8Q - 8$ есть как раз участок совместной работы первого и третьего заводов, а уже $6Q + 6$ – совместной работы первого и второго заводов. Если бы квази-FC на первом заводе не оправдывали бы сокращение издержек на те три первые единицы, которые он производит, работая в паре со вторым, мы бы не взяли его, и «на бесконечности» остался бы только второй завод.

### Сюжет V. Предложение СК фирмы с несколькими заводами

✎ **Утверждение:**

Предложение совершенно конкурентной фирмы, обладающей несколькими заводами, является суммой предложений для каждого завода.

**Доказательство:**

Это очевидно следует из преобразования

$$\pi = P(q_1 + q_2 + \ldots q_n) - TC_1(q_1) - TC_2(q_2) - \ldots - TC_n(q_n) =$$

$$= [Pq_1 - TC_1(q_1)] + [Pq_2 - TC_2(q_2)] + \ldots + [Pq_n - TC_n(q_n)] \to \max_{q_1,\ldots,q_n}$$

**Как пользоваться:**

Пользоваться с удовольствием. Пусть у фирмы есть заводы

$$TC_1 = \begin{cases} 0, \; q_1 = 0 \\ q_1^2 + 9 \end{cases} \qquad TC_2 = \begin{cases} 0, \; q_2 = 0 \\ q_2^2 + 9q + 25 \end{cases} \qquad TC_3 = q_3^3$$

Тогда предложение этих заводов

$$q_1 = \begin{cases} 0, \; P \leqslant 6 \\ \dfrac{P}{2}, \; P > 6 \end{cases} \qquad q_2 = \begin{cases} 0, \; P \leqslant 19 \\ \dfrac{P-9}{2}, \; P > 19 \end{cases} \qquad q_3 = \sqrt{\frac{P}{3}}$$

Сложить такие функции предложения несложно.

$$Q = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{P}{3}}, \; P \leqslant 6 \\ \dfrac{P}{2} + \sqrt{\dfrac{P}{3}}, \; P \in (6, 19] \\ P - 4.5 + \sqrt{\dfrac{P}{3}}, \; P > 19 \end{cases}$$

А теперь представьте сложение таких заводов.

# Производственная функция

## Сюжет I. Самая важная идея. $TC \to \min \Leftrightarrow Q \to \max$

✎ **Утверждение:**

Пусть дана функция $Q = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функция $TC = TC(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда задача поиска функции

$$TC(Q) = \min_{x_1,\ldots,x_n | F(x_1,\ldots,x_n)=Q} TC(x_1, \ldots, x_n)$$

(Для каждого $Q$ ищем распределение ресурсов, дающее минимальные издержки)

Эквивалентна задаче поиска функции

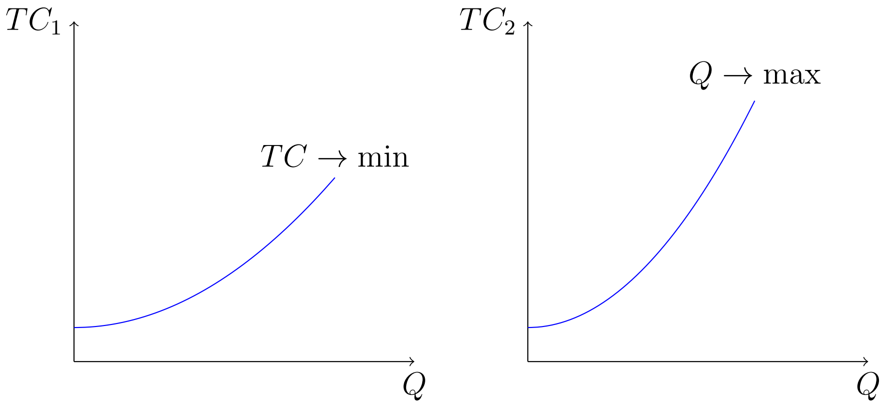
$$Q(TC) = \max_{x_1,\ldots,x_n | TC(x_1,\ldots,x_n)=TC} F(x_1, \ldots, x_n)$$

(Для каждого значения издержек ищем максимальное $Q$, доступное для производства)

С последующим поиском $TC(Q) = Q^{-1}(TC)$.

**Доказательство:**

Действительно, пусть полученные функции не совпадают




Рассмотрим два случая:

I) Нашлось $Q$ такое, что $TC_1 > TC_2$. Ну это, понятно, невозможно, так как это означало бы, что при каких-то $TC_2$ удалось произвести $Q$, при этом, имея данное $Q$, мы указали, что *минимальные* издержки на его производстов составляют $TC_1$. Противоречие.

II) Нашлось $Q$ такое, что $TC_1 < TC_2$. Но это означает, что на левом графике издержкам $TC_2$ соответсвует какое-то большее значение $Q$. Но тогда получается, что при максимизации $Q$, имея на руках $TC_2$, мы произвели *немаксимальное* количество (правый график). Противоречие.

В доказательстве используется предположение, что общие издержки неубывают по количеству, что всегда верно в отсутствии издержек на утилизацию.

**Как использовать.**

Рассмотрим несколько важных примеров:

I) Иногда способы почти эквивалентны. Рассмотрим, например, функцию $F = KL$.

$$TC = wL + rK = wL + \frac{rQ}{L} \to \min$$

$$TC \geqslant 2\sqrt{rwQ}$$

причем равенство достигается, тогда

$$TC = 2\sqrt{wrQ}$$

$$Q = KL = \left(\frac{TC}{r} - L\frac{w}{r}\right) L \to \max$$

$$L = \frac{TC}{2w}, \qquad K = \frac{TC}{2r} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{TC^2}{4rw} \Leftrightarrow TC = 2\sqrt{wrQ}$$

II) Но существует множество случаев, когда способ, заключающийся в максимизации $Q$ кратно упрощает задачу. Рассмотрим, например, функцию $F = \sqrt{3K + 2L}$. Если мы максимизируем эту функцию, то совершенно очевидно, что либо мы вкладываем всё в капитал, либо все в труд. Легко находится (либо из соотношения $MP_K/r$ и $MP_L/w$, либо путем сравнением окончательных функций) отношение $\frac{w}{r}$, при котором мы меняем одно на другое. Не составляет труда «развернуть» функцию, чтобы получить издержки:

$$Q = \sqrt{3K} \Rightarrow K = \frac{Q^2}{3} \Rightarrow TC = rK = \frac{rQ^2}{3}$$

$$Q = \sqrt{2L} \Rightarrow L = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow TC = wL = \frac{wQ^2}{2}$$

Отсюда $TC = \begin{cases} \frac{rQ^2}{3}, \ \frac{w}{r} \geqslant \frac{2}{3} \\ \frac{wQ^2}{2}, \ \frac{w}{r} < \frac{2}{3} \end{cases}$

III) Другой случай: функция Кобба-Дугласа[1]. С помощью нашего способа можно, «сразу» найти функцию издержек. Пусть $F = K^3L^5$. Так как оптимум функции известен, получим

$$K^3L^5 \to \max \text{ при } rK + wL = TC \Rightarrow$$

$$K = \frac{3TC}{8r} \qquad L = \frac{5TC}{8w} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{3^3 \cdot 5^5 TC^8}{8^8 r^3 w^5} \Leftrightarrow TC = 8\sqrt[8]{Q}\sqrt[8]{\frac{r^3w^5}{3^3 \cdot 5^5}}$$

IV) Продолжая идею из случая II), рассмотрим функцию $F = 2K^2 + 5L^5$. Почему мы не будем разделять производство между $K$ и $L$? Можно провести аналогию с заводами с убывающими $MC$ (подумайте, почему это буквально одно и то же). Можно доказать это в общем случае, взяв производную от $K^n + (1-K)^m$ при $n, m > 1$ и понять, что максимум функции на ограничении. Действительно, производная такого выражения равна $nK^{n-1} - m(1-K)^{m-1}$, она возрастает по $K$, значит если и имеет пересечение с нулем, то там находится ее минимум. Так или иначе, зная это, получим, что существует два варианта:

[1] См. Приложение

$$Q = 2K^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{Q}{2}} \Rightarrow TC = rK = r\sqrt{\frac{Q}{2}}$$

$$Q = 5L^5 \Rightarrow L = \sqrt[5]{\frac{Q}{5}} \Rightarrow TC = wL = w\sqrt[5]{\frac{Q}{5}}$$

Отсюда $\quad TC = \begin{cases} r\sqrt{\dfrac{Q}{2}}, & Q^3 \leqslant \dfrac{32w^2}{25r^{10}} \\ w\sqrt[5]{\dfrac{Q}{5}}, & Q^3 < \dfrac{32w^2}{25r^{10}} \end{cases}$

Соответствующие границы получены просто сравнением $r\sqrt{\frac{Q}{2}}$ и $w\sqrt[5]{\frac{Q}{5}}$, это еще одно удобство такого способа. Обратите внимание, что задача имела бы точно такую же сложность и при $TC = (2K^2 + 5L^5)^2$, вообще при любом монотонном преобразовании исходной функции.

V) Иногда, все же, бывает, что проще именно минимизировать издержки. Так, например, для функции $F = \dfrac{KL}{K+1}$ при максимизации $Q$ получим сложную производную, приравняв которую к 0, получим (если брать производную по K) $K = \dfrac{\sqrt{r^2 - rTC} + r}{r}$. Подставлять это обратно в $Q$ и разворачивать эту функцию... Сложновато.

С другой стороны несложно получить

$$TC = rK + wL = rK + wQ\frac{K+1}{K} = wQ + rK + \frac{wQ}{K} \geqslant wQ + 2\sqrt{rwQ}$$

Равенство достигается и $TC = wQ + 2\sqrt{rwQ}$ действительно является функцией издержек.

## Сюжет II. Использование $\dfrac{MP_K}{r}$ и $\dfrac{MP_L}{w}$ в контексте строгого условия оптимума

✎ **Утверждение №1:**

Если $MP_K$ и $MP_L$ непрерывны, убывают по соответствующим переменным, цены $w$ и $r$ на ресурсы не меняются, и если оба ресурса используются в производстве $(K, L > 0)$, то должно выполняться $\dfrac{MP_K}{r} = \dfrac{MP_L}{w}$.

**Доказательство:**

Пусть без ограничения общности $\dfrac{MP_K}{r} > \dfrac{MP_L}{w}$. Осуществим переход $K \mapsto K + \Delta K$, $L \mapsto L - \Delta L$ с условием $r\Delta K = w\Delta L$ (издержки не меняются). При достаточно маленьких изменениях $\Delta K, \Delta L$ верно, что $\Delta Q > 0$, так как в силу предельного перехода

$$\Delta Q \to MP_K \Delta K - MP_L \Delta L > 0$$

Последнее следует из цепочки неравенств

$$MP_K \Delta K - MP_L \Delta L > 0$$

$$MP_K \Delta K - MP_L \Delta K \frac{r}{w} > 0$$

$$wMP_K - rMP_L > 0$$

$$\frac{MP_K}{r} > \frac{MP_L}{w}$$

Заметим, что перераспределение $K \mapsto K + \Delta K$, $L \mapsto L - \Delta L$ не может осуществляться вечно: как раз в силу убывания $MP_K, MP_L$ мы придем к необходимому равенству.

> Обратите внимание, что доказательство работает при условии, что $MP_K$ убывает по $K$ и возрастает по $L$, а $MP_L$ убывает по $L$ и возрастает по $K$. Если это выполнено, то указанное выше перераспределение все еще двигает $\dfrac{MP_K}{r}$ и $\dfrac{MP_L}{w}$ в сторону сближения (проверьте!). Это, таким образом, более сильная версия теоремы.

**Как использовать:**

Данная теорема дает в общем очень сильное условие оптимальности. Рассмотрим примеры:

I) $F = 2\sqrt{K} + \sqrt{L}$

Во-первых ответим на вопрос, почему $K, L > 0$. Это так, потому что первые единицы, вложенные в каждый ресурс, дают бесконечно большой прирост к $Q$. Тогда

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

$$\frac{1}{r\sqrt{K}} = \frac{1}{2w\sqrt{L}}$$

$$2w\sqrt{L} = r\sqrt{K}$$

$$Q = 2\sqrt{K} + \sqrt{L} = 2\sqrt{K} + \frac{r}{2w}\sqrt{K}$$

$$\sqrt{K} = \frac{Q}{2 + \dfrac{r}{2w}}, \quad \text{аналогично}$$

$$\sqrt{L} = \frac{Q}{\dfrac{4w}{r} + 1}, \quad \text{тогда}$$

$$TC = rK + wL = r\left(\frac{Q}{2 + \frac{r}{2w}}\right)^2 + w\left(\frac{Q}{\frac{4w}{r} + 1}\right)^2 = Q^2 \frac{rw}{r + 4w}$$

Эту задачу можно несложно решить в том числе и через максимизацию $Q$ при помощи производной.

II) $F = \sqrt{KL} + L, \quad r = 1, w = 3$

Либо мы используем только труд, либо труд и капитал вместе. Во втором случае выполняются условия **усиленной** (та, что в рамочке) теоремы и тогда

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}}{r} = \frac{\dfrac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} + 1}{w}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \frac{-r + \sqrt{r^2 + rw}}{r} = 1 \Rightarrow K = L$$

$$Q = \sqrt{KL} + L = \sqrt{L \cdot L} + L = 2L$$

$$K = L = \frac{Q}{2}$$

$$TC = rK + wL = K + 3L = 2Q$$

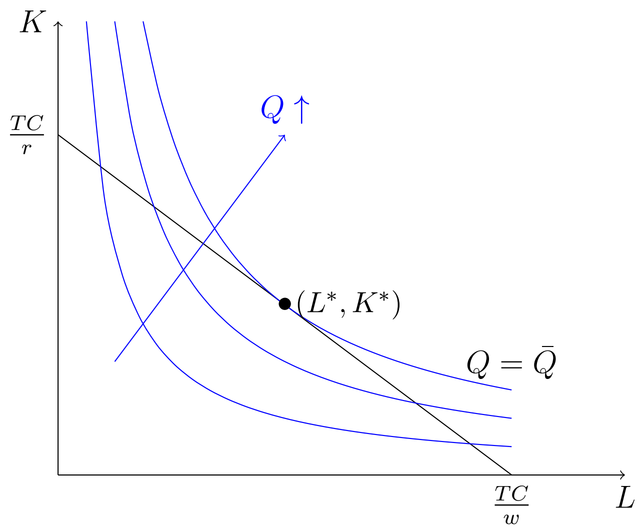
Это уже ответ? Не совсем: по-хоршему нужно сравнить это с использованием одного труда, но тогда $TC = 3L = 3Q$. Значит, действительно, $TC = 2Q$.

**Сюжет II. Использование $\dfrac{MP_K}{r}$ и $\dfrac{MP_L}{w}$ в контексте строгого условия оптимума**

✎ **Утверждение №2:** Если изокванты (кривые безразличия) производственной функции выпуклы, цены на ресурсы $w$ и $r$ не меняются, и $K, L > 0$, то должно выполняться $\dfrac{MP_K}{r} = \dfrac{MP_L}{w}$.

**Доказательство:**

Будем решать задачу $Q \to \max$ при фиксированных $TC$. Для постоянных цен фиксированные $TC$ задают бюджетное ограничение – прямую, и задача может быть наглядно переформулирована в терминах изоквант: найти такую изокванту $F(K, L) = \bar{Q}$, что она имеет хотя бы одну общую точку с бюджетным ограничением, и при этом такое $\bar{Q}$ максимально.




Можно видеть, что если изокванты выпуклы и дополнительно известно, что в оптимуме $K > 0, L > 0$, то такой оптимум обязательно должен быть точкой касания бюджетного ограничения и соответствующей изокванты.

Тогда в этой точке равны производная бюджетного ограничения и производная изокванты. Теорема о неявной функции из курса математического анализа позволяет найти значение производной изокванты в терминах $MP_K$ и $MP_L$. Если обозначить функцию, которая задает изокванту как $f : L \to K$, то

$$F(K, L) = \bar{Q} \Rightarrow f'_L(L^*) = -\frac{MP_L(\bar{Q})}{MP_K(\bar{Q})}$$

В свою очередь, производная бюджетного ограничения равна $\frac{-TC/r}{TC/w} = -\frac{w}{r}$. Отсюда и получаем

$$-\frac{MP_L(\bar{Q})}{MP_K(\bar{Q})} = -\frac{w}{r}$$

или, опуская $\bar{Q}$,

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

**Как использовать:**

Одно из препятствий на пути того, чтобы воспользоваться этим способом состоит в том, что вид изолиний не всегда очевиден. Однако часто этот способ очень упрощает решение.

I) Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $Q = K^\alpha L^\beta$, где $\alpha, \beta > 0$. Понятно, что ее изолинии выпуклы, а также что $K, L > 0$. Заметим, что здесь не получится напрямую воспользоваться убыванием $MP_K$ и $MP_L$, так как они могут возрастать. С другой стороны, такую функцию можно монотонными преобразованиями привести к такой, у которой они будут убывать. Так или иначе, воспользуемся только выпуклостью изолиний:

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

$$\frac{\alpha K^{\alpha-1} L^\beta}{r} = \frac{\beta L^{\beta-1} K^\alpha}{w}$$

$$TC = wL + rK = w \cdot \frac{r\beta K}{\alpha w} + rK$$

$$K = \frac{\alpha TC}{(\alpha+\beta)r} \qquad L = \frac{\beta TC}{(\alpha+\beta)w}$$

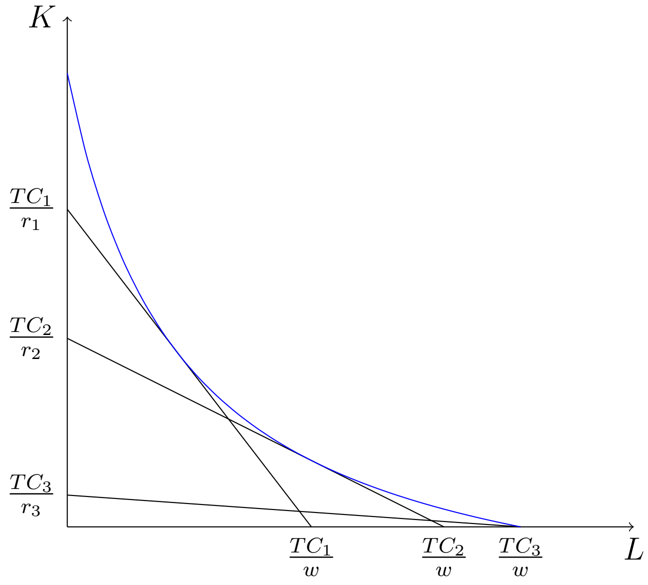
Отсюда можно получить и итоговое выражение для $Q$.

II) Данный способ также позволяет по-другому посмотреть на ограничения. Рассмотрим функцию $Q = KL + K + L$. Теорема $\boxed{\text{в рамочке}}$ дает возможность записать $\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$, т.к. соответствующие производные не возрастают по своей переменой, но возрастают по второй. Однако в данной задаче решение не всегда будет «внутренним». Если мы воспользуемся указанным условием, то получим

$$K = \frac{TC + w - r}{2r} \qquad L = \frac{TC + r - w}{2w}$$

Видно, что при некоторых соотношениях $r$ и $w$ может оказаться, что мы будем «покупать» отрицательное количество одного из товаров. Как это возможно? Из-за характера функции при очень большом соотношении цен, скажем $r \gg w$, нам бы хотелось «продать» очень маленькую единицу $K$ и на вырученные деньги купить очень много $L$ (поскольку $K$ мало, отрицательная величина $KL$ также не страшна).

Найти данные отношения цен можно, записав $Q(K), Q(L)$, но объяснить алгебраически, что происходит в этих точках, сложно. Однако давайте посмотрим на изолинии функции $Q = KL + K + L$. Точнее говоря, мы посмотрим на одну изолинию и для разных соотношений цен найдем минимальные издержки. Зафиксируем зарплату $w$ и будем менять ренту $r$.




Здесь мы должны обратить внимание на следующее: при достаточно небольших $r$ оптимум действительно там, где касание, или где $\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$. Однако при очень больших $r$ ($r = r_3$) мы просто вкладываем все в труд, не покупая капитал, и в общей точке изолинии и бюджетного ограничения теперь нет касания. Чему же равно соотношение цен, при котором мы прекратим покупать капитал? Оно как раз соответствует касанию в граничной точке. Нетрудно увидеть, что это соотношение зависит от $Q$. Но этого нам достаточно: поскольку мы ищем функцию издержек, нам как раз и нужно некоторое граничное значение $Q$ (в терминах $w$ и $r$). С одной стороны, в этой точке касание все еще происходит, значит

$$K = \frac{TC + w - r}{2r} \qquad L = \frac{TC + r - w}{2w}$$

С другой, там $K = 0$, следовательно, $Q = L$. Отсюда

$$\begin{cases} TC = wL \\ TC = r - w \end{cases} \qquad \Rightarrow L^* = \frac{r - w}{w} = Q^*$$

При достижении такого $Q$ мы начнем покупать только труд. Симметричное выражение получится «с другой стороны» с капиталом.

Давайте решим задачу до конца: для этого надо выразить функцию издержек на «хорошем» участке, где оба ресурса используются.

$$Q = \left(\frac{TC + w - r}{2r}\right)\left(\frac{TC + r - w}{2w}\right) + \frac{TC + w - r}{2r} + \frac{TC + r - w}{2w}$$

$$\dots$$

$$Q = \frac{[TC + (w + r)]^2 - 4wr}{4wr}$$

Отсюда

$$TC = 2\sqrt{wr(1 + Q)} - w - r$$

Тогда мы можем записать ответ:

$$TC = \begin{cases} \dfrac{Q}{\min\{w, r\}}, & Q < \frac{\max\{w,r\} - \min\{w,r\}}{\min\{w,r\}} \\ 2\sqrt{wr(1 + Q)} - w - r, & \text{иначе} \end{cases}$$

III) Рассмотрим функцию $Q = K^2L + L^2K$. Ее $MP_K$ и $MP_L$ возрастают по соответствующим переменным, и не очевидно, что существует монотонное преобразование, которое это изменит.

С другой стороны, мы можем посмотреть на изолинии, и окажется, что они будут вогнутыми. Действительно, очевидно, что это так для функций $K^2L$ и $L^2K$, а наша в некотором (не будем вдаваться в подробности) смысле является их комбинацией. Более того, видно, что из похожих соображений изолинии нигде не пересекают оси, а значит граничных случаев не будет. Тогда

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$

$$\frac{2KL + L^2}{r} = \frac{2KL + K^2}{w}$$

$$2wKL + wL^2 = 2rKL + rK^2$$

$$2w + w\frac{L}{K} = 2r + r\frac{K}{L} \qquad t = \frac{L}{K}$$

$$2w + wt = 2r + \frac{r}{t}$$

$$wt^2 + 2(w - r)t - r = 0$$

$$t = \frac{r - w + \sqrt{w^2 - wr + r^2}}{w}$$

$$TC = rK + wL = rK + wKt = K(r + r - w + \sqrt{w^2 - wr + r^2})$$

$$K = \frac{TC}{2r - w + \sqrt{w^2 - wr + r^2}} \quad L = \frac{TC}{2w - r + \sqrt{w^2 - wr + r^2}}$$

Отсюда

$$Q = K^2L + L^2K = \frac{2\sqrt{r^2 - rw + w^2} + r + w}{(\sqrt{r^2 - rw + w^2} + 2r - w)^2(\sqrt{r^2 - rw + w^2} + 2w - r)^2}TC^3$$

$$TC = \sqrt[3]{Q}\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{r^2 - rw + w^2} + 2r - w)^2(\sqrt{r^2 - rw + w^2} + 2w - r)^2}{2\sqrt{r^2 - rw + w^2} + r + w}}$$

**Сюжет III. Разделение производственной функции.**
**Задачи вида $F = x_1x_2 + 3x_3 + 4x_4$.**

✎Полезно бывает воспользоваться следующим приемом: пусть производственная функция представлена в виде суммы нескольких независимых производственных функций

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_a(x_1, \ldots, x_\alpha) + F_b(x_{\alpha+1}, \ldots, x_\beta) + \ldots + F_y(x_{\Psi+1}, \ldots x_\Omega) + F_z(x_{\Omega+1}, \ldots, x_n)$$

Положим, для простоты, что ресурсы связаны линейным соотношением (в общем случае необязательно):

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx_n = TC$$

Поскольку мы занимаемся поиском максимума функции $F$ можно утверждать, что для такого максимума деньги, потраченные на наборы $(x_1, \ldots, x_\alpha), \ldots, (x_{\Omega+1}, \ldots, x_n)$ распределены оптимально *внутри своих производственных функций*. В противном случае можем перераспределить что-то *внутри* такой функции и получить увеличение в выпуске.

Следовательно, если известны зависимости максимальных выпусков от затрат, направленных на $F_a, F_b, \ldots F_n$ (а это в точности соответствующие функции издержек, только «наоборот»), то можно решать следующую задачу:

Как распределить суммы $a, b, \ldots, z$ между нашими производственными функциями, чтобы максимизировать выражение

$$F_a(a) + F_b(b) + \ldots + F_z(z)$$

где $F_i(x)$ – функция, обратная издержкам, то есть показывающая «сколько максимально мы произведем, имея в распоряжении $x$ денег». При этом суммы связаны соотношением $a+b+\ldots+z = TC$, то есть мы сократили количество неизвестных до количества функций.

**Как использовать:**

Разберем несколько примеров:

I) $F = x_1x_2 + x_3x_4x_5, \qquad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1$

Пусть $I_1$ – сумма, которую мы вкладываем в $x_1$ и $x_2$, $I_2$ – сумма, которую мы вкладываем в $x_3, x_4, x_5$. Понятно, что $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_4 = x_5$. Тогда

$$x_1x_2 = \frac{I_1^2}{4}, \qquad x_3x_4x_5 = \frac{I_2^3}{27}$$

таким образом, наша задача свелась к максимизации $F = \dfrac{I_1^2}{4} + \dfrac{I_2^3}{27}$ на ограничении $I_1 + I_2 = TC$. Такое мы уже видели, два одночлена в производственной функции говорят о том, что все деньги пойдут только в один из них. Отсюда

$$Q = \begin{cases} \frac{TC^2}{4}, \, TC \leqslant \frac{27}{4} \\ \frac{TC^3}{27}, \, TC > \frac{27}{4} \end{cases} \Rightarrow TC = \begin{cases} 2\sqrt{Q}, \, Q \leqslant 11\frac{25}{64} \\ 3\sqrt[3]{Q}, \, Q > 11\frac{25}{64} \end{cases}$$

II) $F = x_1^2x_2 + 3x_2 + 4x_4, \qquad p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 4$

Пусть $I_1$ – сумма, которую мы вкладываем в $x_1$ и $x_2$, $I_2$ – сумма, которую мы вкладываем в $x_3, x_4$. Кобб-Дуглас подсказывает нам, что $x_1 = \frac{2I_1}{3}, x_2 = \frac{I_1}{6}$. Таким образом, $x_1^2x_2 = \dfrac{2I_1^3}{27}$. С другой стороны заметим, что как не распределяй $I_2$ между $x_3, x_4$, получится так или иначе $3x_3 + 4x_4 = I_2$.

Задача свелась к максимизации $\dfrac{2I_1^3}{27}+I_2$ на ограничении $I_1+I_2=TC$. Опять одночлены, опять никакого разделения:

$$Q=\begin{cases} TC,\, TC\leqslant\sqrt{\frac{27}{2}} \\ \frac{2TC^3}{27},\, TC>\sqrt{\frac{27}{2}} \end{cases} \Rightarrow TC=\begin{cases} Q,\, Q\leqslant\sqrt{\frac{27}{2}} \\ \sqrt[3]{Q}\sqrt[3]{\frac{27}{2}},\, Q>\sqrt{\frac{27}{2}} \end{cases}$$

**Сюжет IV. Работа с функциями минимума и максимума**

Все, наверное, знают обоснование того, что если «все хорошо», то аргументы функции минимума должны совпадать. Зная это, можно легко получить функцию издержек, поскольку аргументы не просто совпадают, но еще и в известном смысле «приравниваются» к $Q$.

I) $Q=\min(K,2L)\Rightarrow \quad K=Q, L=\frac{Q}{2}\Rightarrow TC=rK+wL=rQ+\dfrac{wQ}{2}=Q\left(r+\dfrac{w}{2}\right)$

II) $Q=\min(K^2,3L)\Rightarrow \quad K=\sqrt{Q},\, L=\frac{Q}{3}\Rightarrow\; TC=rK+wL=r\sqrt{Q}+\dfrac{wQ}{3}$

III) $Q=5\min(\sqrt{K},L^3)\Rightarrow \quad K=\left(\frac{Q}{5}\right)^2,\, L=\sqrt[3]{\dfrac{Q}{5}}\Rightarrow\; TC=rK+wL=r\left(\frac{Q}{5}\right)^2+w\sqrt[3]{\dfrac{Q}{5}}$

IV) $Q=\sqrt{\min(K,L)}\Rightarrow \quad Q^2=\min(K,L)\Rightarrow K=L=Q^2\Rightarrow TC=rK+wL=Q^2(w+r)$

✎ Отметим, что не всегда аргументы функции min() должны быть равны. Например для $F(K,L)=\min(K^2+7L,5L)$, очевидно, это не так и попросту $Q=5L$, $TC=\frac{wQ}{5}$.

✎ Если же у нас функция максимума, то, естественно, все выгодно вкладывать только в один ресурс. Тогда получается просто нижняя огибающая из нескольких вариантов. Рассмотрим один пример:

$Q=\max(2K,L^2)$.

Здесь либо $Q=2K$ и $TC=\frac{rQ}{2}$, либо $Q=L^2$ и $TC=w\sqrt{Q}$. В итоге получаем

$$TC=\begin{cases} \dfrac{rQ}{2},\, Q\leqslant\dfrac{4w^2}{r^2} \\ w\sqrt{Q},\, Q>\dfrac{4w^2}{r^2} \end{cases}$$

Денисов Максим для
Олмат Экономика

05.01.24

## Приложение. Функция Кобба-Дугласа.

✎ **Утверждение:** пусть стоит оптимизационная задача

$$\begin{cases} X^\alpha Y^\beta \to \max \\ p_X X + p_Y Y = I \end{cases}$$

Тогда ее решением будет

$$X = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_X} \qquad Y = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_Y}$$

**Доказательство:**

Тут можно оптимизировать как угодно, например, через $\frac{MP_X}{p_X} = \frac{MP_Y}{p_Y}$. Но мы сделаем это с помощью производной:

$$X^\alpha \left(\frac{I}{p_Y} - X\frac{p_x}{p_Y}\right)^\beta \to \max$$

$$X^\alpha (I - Xp_X)^\beta \to \max$$

$$\frac{d}{dX} X^\alpha (I - Xp_X)^\beta = \alpha X^{\alpha-1}(I - Xp_X)^\beta - p_X \beta X^\alpha (I - Xp_x)^{\beta-1} =$$

$$= X^{\alpha-1}(I - Xp_x)^{\beta-1}[\alpha(I - Xp_X) - Xp_X\beta]$$

Два множителя слева не обращаются в ноль, а третий – обращается, так еще и убывает. Значит максимум функции там, где

$$\alpha(I - Xp_X) - Xp_X\beta = 0$$

$$X = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_X}$$

$$Y = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_Y}$$

Обратите внимание, что оптимальный выбор одного ресурса не зависит от цены другого. Поэтому эту функцию так и любят – из нее легко выводится спрос, удобно отслеживать изменения в оптимальной корзине при изменении цен, дохода. Если вы вкладываете свои 500 рублей в производственную функцию $F = K^2L^3$, то даже не зная ничего о ценах, вы уверены, что на 200 рублей купите капитала, а на оставшиеся 300 рублей – труда. Соответствующие выражения для $X$ и $Y$ полезно запомнить, хотя ими и нельзя будет воспользоваться на олимпиаде.