Estadística I — clase 7 TÉCNICAS ESTADÍSTICAS NO PARAMÉTRICAS

Análisis de rangos

- Las pruebas no paramétricas equivalentes al análisis de varianza y las pruebas de t se basan en los rangos de las observaciones en lugar de las observaciones mismas.
- Esta metodología utiliza información acerca de los tamaños relativos de las observaciones, sin asumir nada acerca de la naturaleza específica de la población desde donde se obtuvieron los datos.

Análisis de rangos

- Se denomina rango al número de orden de una observación en la muestra ordenada
- Ejemplo
 - Se tienen la siguiente muestra: 3, 8, 2, 12, 5
 - La muestra ordenada es la siguiente
 - 2, 3, 5, 8, 12
 - La observación 2 tiene el rango 1
 - La observación 8 tiene el rango 4, etc.
- Los estadísticos de prueba se generan operando con los rangos, no con los valores de las variables
- Estos estadísticos tienen distribuciones de probabilidad que permiten su utilización en contrastes de hipótesis

Análisis de rangos

- Se denominan estadísticos de orden a aquellos que se obtienen a partir de la muestra ordenada
- Ejemplos
 - Mediana
 - Cuartiles
 - Rango intercuartil
- Originados considerando el ordenamiento de los datos de las variables

Comparación de variables cuantitativas en dos grupos independientes

Comparación de medias poblacionales independientes

Existen dos formas para resolver este problema

- Utilizar el test de t
- Utilizar el test de Mann-Whitney

Cuál utilizar depende de los supuestos sobre la variable que se mide

Test de t para comparación de dos medias independientes

$$\mathcal{X}_{11},\ldots,\mathcal{X}_{1n}$$
 Muestra de una población normal con media μ_1 y desvío σ_1 $\mathcal{X}_{21},\ldots,\mathcal{X}_{2m}$ Muestra de una población normal con media μ_2 y desvío σ_2

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$$
 $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Ho y Ha son eventos *exhaustivos y mutuamente excluyentes*. Una de las dos afirmaciones *debe* ser verdadera.

Test de t para comparación de dos medias

Estadísticos de prueba

Sigmas desconocidos e iguales

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

Sigmas desconocidos y no iguales

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \sim t_{gl}$$

Test de t para comparación de dos medias

Supuestos de la prueba t para dos muestras independientes

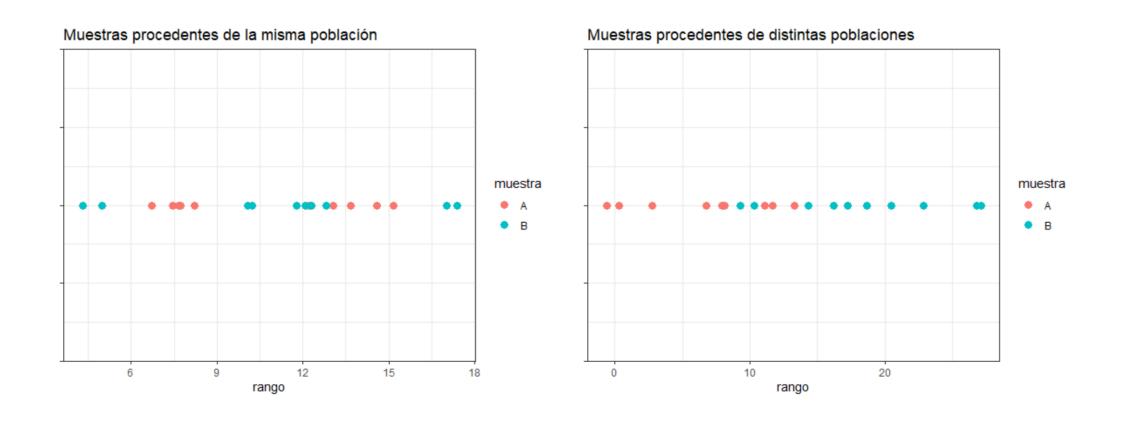
- Independencia: Las observaciones tienen que ser independientes las unas de las otras. Para ello, el muestreo debe ser aleatorio
- Normalidad: Las poblaciones que se comparan tienen que seguir una distribución normal. En caso de cierta asimetría, los t-test son considerablemente robustos si el tamaño de las muestras es mayor o igual a 30.
- Igualdad de varianza (homocedasticidad): la varianza de las poblaciones comparadas debe de ser igual. En caso de no cumplirse esta condición se puede emplear un Welch Two Sample t-test

Es importante evaluar hasta que punto, el no cumplimiento de una o varias de sus condiciones, puede afectar al resultado del t-test. Si su utilización queda descartada, se puede recurrir a otros test estadísticos.

El test de Mann-Whitney

- También conocido como Wilcoxon rank-sum test o u-test
- Es un test no paramétrico que contrasta si dos muestras proceden de poblaciones equidistribuidas.
- La idea en la que se fundamenta este test es la siguiente: si las dos muestras comparadas proceden de la misma población, al juntar todas las observaciones y ordenarlas de menor a mayor, cabría esperar que las observaciones de una y otra muestra estuviesen intercaladas aleatoriamente. Por lo contrario, si una de las muestras pertenece a una población con valores mayores o menores que la otra población, al ordenar las observaciones, estas tenderán a agruparse de modo que las de una muestra queden por encima de las de la otra.

El test de Mann-Whitney



El test de Mann-Whitney

- Condiciones necesarias del test de Mann-Whitney-Wilcoxon
- Independencia: Las observaciones tienen que ser independientes las unas de las otras. Para ello, el muestreo debe ser aleatorio
- La variable tiene que ser por lo menos ordinal o bien se tienen que poder ordenar de menor a mayor.
- No es necesario asumir que las muestras se distribuyen de forma normal o que proceden de poblaciones normales. Pero, para que el test compare medianas, ambas han de tener el mismo tipo de distribución (varianza, asimetría...).
- Igualdad de varianza entre grupos (homocedasticidad).

Pruebas no paramétricas para comparar poblaciones sobre la base de muestras independientes

- Prueba de Mann-Whitney
- Se basa en la combinación de los conjuntos de las n₁ y n₂ observaciones.
- Cuando todas las observaciones están juntas se asigna un rango a cada una de las observaciones ordenadas, que comienza en 1 y termina en n₁+n₂

Procedimiento

- Se obtiene la suma de los rangos asociados con las observaciones de una de las dos muestras. (escogida en forma arbitraria si son del mismo tamaño, en caso contrario se hace con la muestra más pequeña).
- Esta suma es igual a R₁
- El estadístico está dado por:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - R_1$$

Ejemplo:

 Se sospecha que una empresa lleva a cabo una política de discriminación, con respecto al sexo, en los sueldos de sus empleados. Se seleccionaron 12 empleados masculinos y 12 femeninos de entre los que tienen responsabilidades y experiencias similares en el trabajo; sus salarios anuales en miles de dólares son los siguientes:

Mujeres	22.5	19.8	20.6	24.7	23.2	19.2	18.7	20.9	21.6	23.5	20.7	21.6
Hombres	21.9	21.6	22.4	24.0	24.1	23.4	21.2	23.9	20.5	24.5	22.3	23.6

¿Existe alguna razón para creer que estas muestras aleatorias provienen de poblaciones con diferentes distribuciones? (alfa=0.05).

Se combinan los salarios de las dos muestras para formar un solo conjunto de 24 salarios anuales. Luego se ordenan y se les asigna un rango de la siguiente manera:

Sexo	М	M	M	Н	M	M	M	Н	Н	M	M	Н
	18.7	19.2	19.8	20.5	20.6	20.7	20.9	21.2	21.6	21.6	21.6	21.9
Rango	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sexo	Н	Н	М	М	Н	М	Н	Н	Н	Н	Н	М
Sexo	H 22.3	H 22.4	M 22.5	M 23.2	H 23.4	M 23.5	H 23.6	H 23.9	H 24.0	H 24.1	H 24.5	M 24.7

Ejemplo resuelto en R

Comparacion de variables cuantitativas en dos grupos apareados

Test para comparación de dos medias normales apareadas

 x_{11},\ldots,x_{1n} Muestra de una población normal con media μ_1 y desvío σ_1 σ_2 Muestra de una población normal con media σ_2 y desvío σ_2

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$$
 $H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Ho y Ha son eventos *exahustivos y mutuamente excluyentes*. Una de las dos afirmaciones *debe* ser verdadera.

Test para comparación de dos medias normales apareadas

- Se considera la siguiente variable
- $d_i = x_{1i} x_{2i}$ para cada uno de los sujetos de la muestra.
- Con esto, puede comprobarse que

$$\bar{d} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

Estadistico de prueba:

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_d / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Test para comparación de dos medias normales apareadas

Supuestos

- Muestras independientes en cada población
- Normalidad en cada una de las poblaciones

Prueba del signo (Wilcoxon)

- Se utiliza cuando las muestras no son independientes (equivalente a la prueba de t de student para muestras apareadas.
- La idea básica consiste en determinar la frecuencia con la cual el valor de un miembro del par es superior al valor del otro miembro del par.

Prueba del signo (Wilcoxon)

 Por ejemplo, si se tienen dos grupos simbolizados por A y B, cada vez que el valor de A es superior al valor de B, se asigna un valor positivo y cuando el valor de A es inferior al valor de B se asigna un valor negativo.

- Cuando la hipótesis nula es verdadera, deberá haber una similar cantidad o proporción de valores positivos y negativos.
- Es decir, si la H_0 es verdadera, la probabilidad de valores positivos es 0.5

Prueba del signo

- La estadística para la prueba del signo, denotada por S, es el número de signos + para los n pares.
- Dado que bajo H₀ cada par constituye un ensayo independiente con una probabilidad para el signo positivo + de 0.5, la estadística S tiene una distribución binomial con p= 0.5.

Prueba del signo

- Para valores grandes de n puede utilizarse la aproximación normal de la distribución binomial.
- Cuando ocurren empates al aplicar la prueba del signo, el procedimiento que se recomienda seguir es el de ignorarlos y emplear la prueba sólo para aquellos pares en los que no ocurren empates.

Ejemplo

Se seleccionaron al azar 10 parejas de recién casados y se les preguntó por separado, tanto al marido como a la esposa, cuántos hijos deseaban tener. Se obtuvieron los siguientes datos.

Pareja	1	2	3	_4	5	_6	7	8	9	10
Esposa (X)	3	2	1	0	0	1	2	2	2	0
Esposo (Y)	2	3	2	2	0	2	1	3	1	2

Mediante el empleo de la prueba del signo, ¿existe alguna razón para creer que las esposas desean menos hijos que sus esposos?

Supóngase un tamaño máximo del error tipo I de 0.05.

Ejemplo

• Nótese que deberá rechazarse H_0 si el número de signos + es muy pequeño. Al restar las respuestas de cada esposo de la de su esposa, y notando que las respuestas de cinco de las parejas son las mismas, se obtienen el siguiente arreglo de signos + y -.

Pareja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Signo	+	-	-	-	-	-	+	-	+	-

Signos positivos= 3

Ejemplo

```
> hijos %>% t_test(numero ~ sexo, paired = T)
.y. group1 group2    n1    n2 statistic    df    p
1 numero mujer varón    10    10    -1.34    9 0.213

> hijos %>% wilcox_test(numero ~ sexo, paired = T)
.y. group1 group2    n1    n2 statistic    p
1 numero mujer varón    10    10    12 0.212
```

Conclusiones

Cuando usar uno u otro método

Prueba t

- Poblaciones con distribución normal
- Muestras de gran tamaño

Prueba del signo de Wilcoxon

- Variables cuantitativas no normales
- Variables cuantitativas con distribución asimétrica
- Muestras pequeñas donde no se pueda chequear normalidad
- Variables ordinales

Tamaño del efecto

Tamaño del efecto

- El tamaño del efecto es la magnitud de la influencia de una variable sobre el comportamiento de otra
- Puede ocurrir que el efecto de una variable sea estadísticamente significativo y, sin embargo, desde el punto de vista clínico esa diferencia no sea relevante.
- Por esta razón, suele informarse tanto la significación estadística como el tamaño del efecto

Tamaño del efecto

De acuerdo al contraste de hipótesis utilizado, el tamaño del efecto debe medirse con el indicador adecuado

- Contrastes de dos medias
 - Paramétricos: D de Cohen
 - No paramétrico: Tamaño del efecto de Wilcoxon

d de Cohen

• Es una medida del tamaño del efecto como diferencia de medias estandarizada. Es decir, nos informa de cuántas desviaciones típicas de diferencia hay entre los resultados de los dos grupos que se comparan

$$d = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{Desvío \ de \ la \ diferencia}$$

d = 0,20: tamaño del efecto pequeño.

d = 0,50: tamaño del efecto mediano.

d = 0,80: tamaño del efecto grande.

d de Cohen

Tamaño del efecto en Mann-Whitney

• Se utiliza el siguiente indicador

$$r = \frac{Z}{\sqrt{n}}$$

• Donde Z es el estadístico de Mann-Whitney y n es el tamaño de la muestra

0.10 - < 0.3 (small effect)

0.30 - < 0.5 (moderate effect)

>= 0.5 (large effect).

Tamaño del efecto en Mann-Whitney

```
> wilcox.test(BWT ~ SMOKE, data=LOWBWT)
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

```
data: BWT by SMOKE W = 5243.5, p-value = 0.007109 alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

> wilcox_effsize(BWT ~ SMOKE, data=LOWBWT)

Tamaño del efecto en comparaciones apareadas

- El d de Cohen se utiliza para medir el tamaño del efecto para el test t de muestras apareadas
- El r de Mann-Whitney permite medir el tamaño del efecto en el caso no paramétrico

• En ambos casos, se readecuan los indicadores