

Comparación de métodos no destructivos para calcular el módulo de Young

Alejandro Mildiner, Tomás Di Napoli

Grupo 2

Laboratorio 4 - 1er cuatrimestre 2021. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Resumen

En este trabajo se compararán dos métodos distintos no destructivos para medir el módulo de Young del latón y del acero. Uno de los métodos consiste en medir las deformaciones de una varilla de cada material, y el otro en medir las frecuencias de vibración de la misma. Se concluye que el método que consiste en medir las frecuencias de la vibración de la varilla es mas rápido y fácil de realizar, y además presenta un error relativo menor al del otro método. Los resultados del módulo de Young obtenidos con este último son de $E = (245 \pm 26)GPa$ para el acero y $E = (93 \pm 8)GPa$ para el latón.

1. Introducción

El módulo de Young de un material es una medida de la deformación elástica que este adquiere al aplicarle una determinada tensión. Usualmente ésta es una medida útil a tener en cuenta a la hora de diseñar un experimento para poder estimar posibles fuentes de error indeseadas pero inevitables.

Existen distintos métodos para la determinación del módulo de Young [1] [2]; muchos requieren la destrucción del material a caracterizar[1] y no son prácticos para realizar en cualquier laboratorio. Es por este motivo que en el presente trabajo se estudiarán dos métodos no destructivos y sencillos de realizar para medir esta propiedad.

En particular, en este trabajo se caracterizó el módulo de Young de una varilla cilíndrica de acero y otra de latón. Para esto se midieron los desplazamientos verticales de las varillas, sujetas en un extremo y libres en el extremo opuesto, debidos a una fuerza aplicada sobre ellas. Un esquema del problema se puede ver en la figura 1.

Las hipótesis que se tomaron sobre la deformación de las varillas son las siguientes: Los desplazamientos verticales de la varilla son pequeños respecto de la varilla en reposo (en el esquema, $(\frac{dy}{dx})^2 \ll 1$), no hay estiramiento longitudinal ($\delta x = 0$) y la sección transversal de la varilla no se deforma. Bajo estas hipótesis es posible deducir una ecuación[3] para la curva que traza la varilla dada por su desplazamiento vertical

$$y(x) = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3). \quad (1)$$

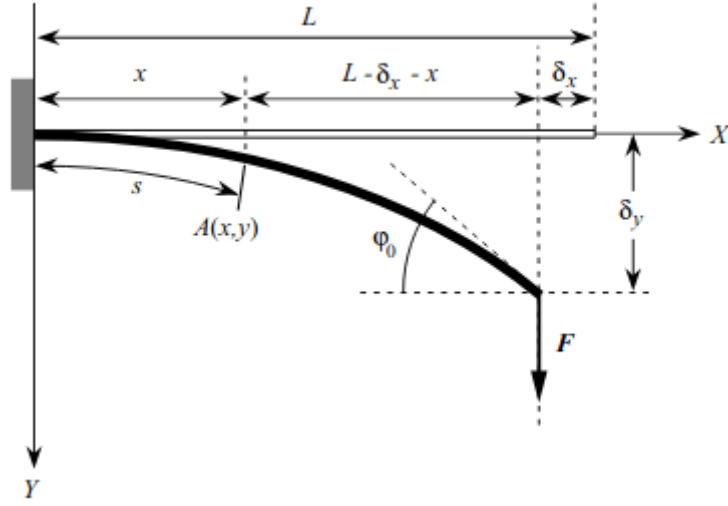


Figura 1: Descripción esquemática del problema. Imagen sacada de [3].

Donde $y(x)$ es el desplazamiento vertical de la varilla en el punto x (tomando como $x = 0$ al extremo fijo y $x = L$ al extremo libre de la varilla), F es la fuerza aplicada en el extremo libre de la varilla, E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia de la sección transversal de la varilla y L es la longitud de la varilla en reposo.

Por otro lado, también se midieron las oscilaciones de la varilla en voladizo al excitarla con un golpe. Se asume que la varilla es cilíndrica, que tiene un largo mucho mayor a su diámetro, se desprecian todas las deformaciones de la varilla excepto la deformación que genera su curvatura en y (ver figura 1), y que hay un decaimiento exponencial de la amplitud con el tiempo debido a la disipación de energía por la fricción interna de la varilla y por la viscosidad del medio en el que oscila. Bajo estas aproximaciones es posible deducir la expresión para la amplitud de los modos normales de oscilación de la varilla en función del tiempo[4]

$$v_i(x, t) = A(x)e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d}t + \phi) \quad (2)$$

Donde $v_i(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la varilla para el modo de oscilación i , en el punto x a tiempo t . $A(x)$ es la amplitud máxima en el punto x , ϕ es una fase y ζ es el coeficiente de decaimiento. Por último, $\omega_{i,d}$ es la frecuencia de oscilación del modo i atenuada por la disipación, y puede ser determinada por la ecuación[4]

$$\omega_{i,d} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2} = \left(\frac{\beta_i L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3)$$

Donde los parámetros E , I , L y ζ adquieren la interpretación ya mencionada, A es el área de la sección transversal de la varilla, ρ es la densidad del material, y los valores $\beta_i L$ son las soluciones a la ecuación $\cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) = -1$.

2. Cálculo del módulo de Young a través de la medición de las deformaciones de una varilla

Para medir el módulo de Young de forma estática se utilizaron imágenes de distintos patrones de difracción proyectados sobre una hoja milimetrada. Se analizaron los datos de una barra de latón y una de acero. Se presentará el análisis del latón ya que el del acero es análogo. Para este método de determinación del módulo de Young, se realizaron experimentos en un laboratorio y por un equipo de personas distinto al que hizo el análisis de datos.

2.1. Diseño experimental

Se utilizó una barra en voladizo, es decir, de un extremo estaba fija y del otro suelta, como se observa en la figura 2. Sobre la barra se colocó una hoja metálica, y se utilizó otra fuera de la barra y fija, de forma tal que al hacer pasar un haz de un láser entre las dos hojas metálicas este produzca un patrón de difracción. Sobre el extremo libre de la varilla se fueron colocando distintas masas sobre un porta-pesas, de forma tal que la barra se incline cada vez más a medida que se aumente la masa. Se esperó a que el sistema estuviese en reposo. Se colocó una hoja milimetrada en donde se proyectaba el patrón de difracción para usarla de escala. Se tomaron fotos del patrón de difracción sobre la hoja milimetrada siempre desde el mismo lugar, y también una foto sólo de la hoja desde el mismo ángulo. En la figura 2 se puede observar como era el armado experimental.

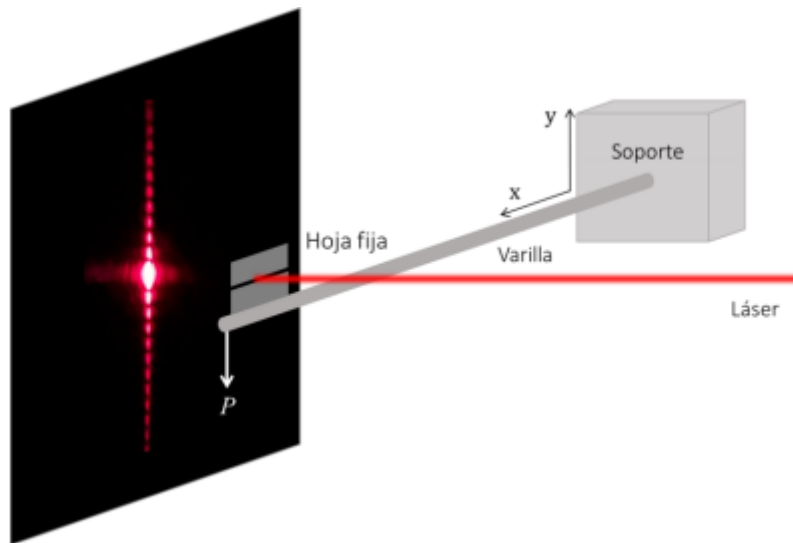


Figura 2: Armado experimental para calcular el módulo de Young de Forma estática. Imagen sacada de [5].

Se utilizó un láser de Helio-Neón rojo que tiene una longitud de onda $\lambda = 632,8nm$, la distancia de la rendija a la pantalla era de $(125,0 \pm 0,5)cm$. La longitud que se midió de la varilla fue $L = (31,0 \pm 0,5)cm$, y la rendija se colocó en una posición $x = (22,0 \pm 0,5)cm$ tomando el 0 en donde la varilla estaba fija. La varilla era cilíndrica con un diámetro $d = (4,6 \pm 0,2)mm$. Se verificó en todos los casos que se cumpliera la condición de Fraunhofer[7].

2.2. Calibración de la imagen

Para calibrar la escala se utilizaron las imágenes donde sólo aparece una parte de la hoja milimetrada, de ésta solo se utilizó la componente roja de la imagen ya que era el color predominante porque estaba iluminada por un láser rojo. Se marcaron 5 puntos sobre esta imagen con la función “ginput” [6] del módulo “matplotlib” de python, que permite extraer las coordenadas x e y de una imagen clickeando sobre esta. Se tomaron las líneas que corresponden a las separaciones de un centímetro ya que las milimetradas no se distinguían claramente. Se calculó la distancia euclídea entre pares de puntos consecutivos, y luego se calculó el promedio de las distancias para tener el valor de la escala de píxeles por centímetros, y se calculó la desviación estándar para obtener el error de la misma, obteniendo así una escala de $(145 \pm 12) \frac{px}{cm}$.

2.3. Análisis de los patrones de difracción

Para analizar las imágenes con los patrones de difracción lo que se hizo fue rotar las imágenes de forma tal que el patrón de difracción quede vertical, sobre las imágenes se graficó una línea vertical para tener una referencia y se recortaron las partes en donde no estaba el patrón. Esto se puede observar en la figura 3.

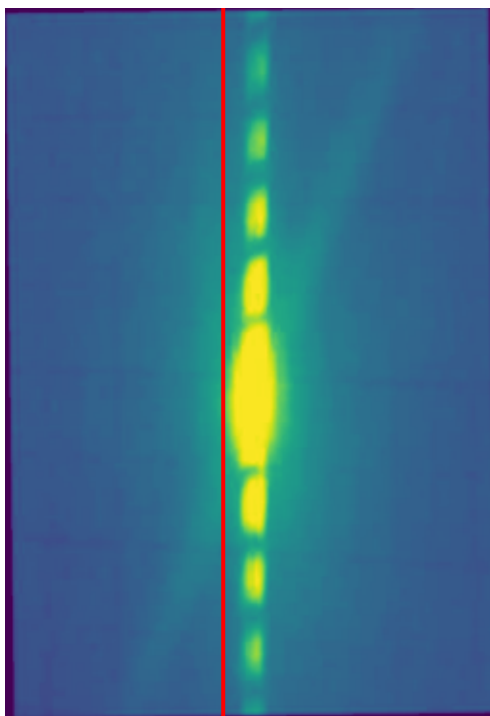


Figura 3: Imagen del patrón de difracción, solo con la masa del porta-pesas, 18g, rotada y con una línea roja vertical para usar de referencia.

Para tener una mejor definición de los mínimos del patrón de difracción se sumaron los valores de las filas de la matriz de la imagen, obteniendo así un vector con el valor de la suma de cada

fila. De esta forma se puede graficar el valor de cada componente de ese vector en función de cada una de las filas de la imagen. Además se hizo una convolución de una dimensión en el vector de la suma de filas, que daba como resultado el promedio de los dos valores adyacentes. El núcleo de convolución que generaba esto era el vector $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Esto se puede ver en la imagen 4.

Se utilizó la función `ginput` nuevamente y se tomaron todos los mínimos distinguibles. Como antes, se calcularon las diferencias entre las componentes x del vector obtenido mediante esta función, es decir, la distancia entre los mínimos, se promediaron y se dividió por la escala, obteniendo así la distancia entre mínimos en centímetros. También a través de la desviación estándar se calcularon los errores de los mismos. Esto se hizo para cada una de las imágenes, es decir para cada uno de los pesos, obteniendo la distancia entre mínimos consecutivos para cada una de las distintas masas.

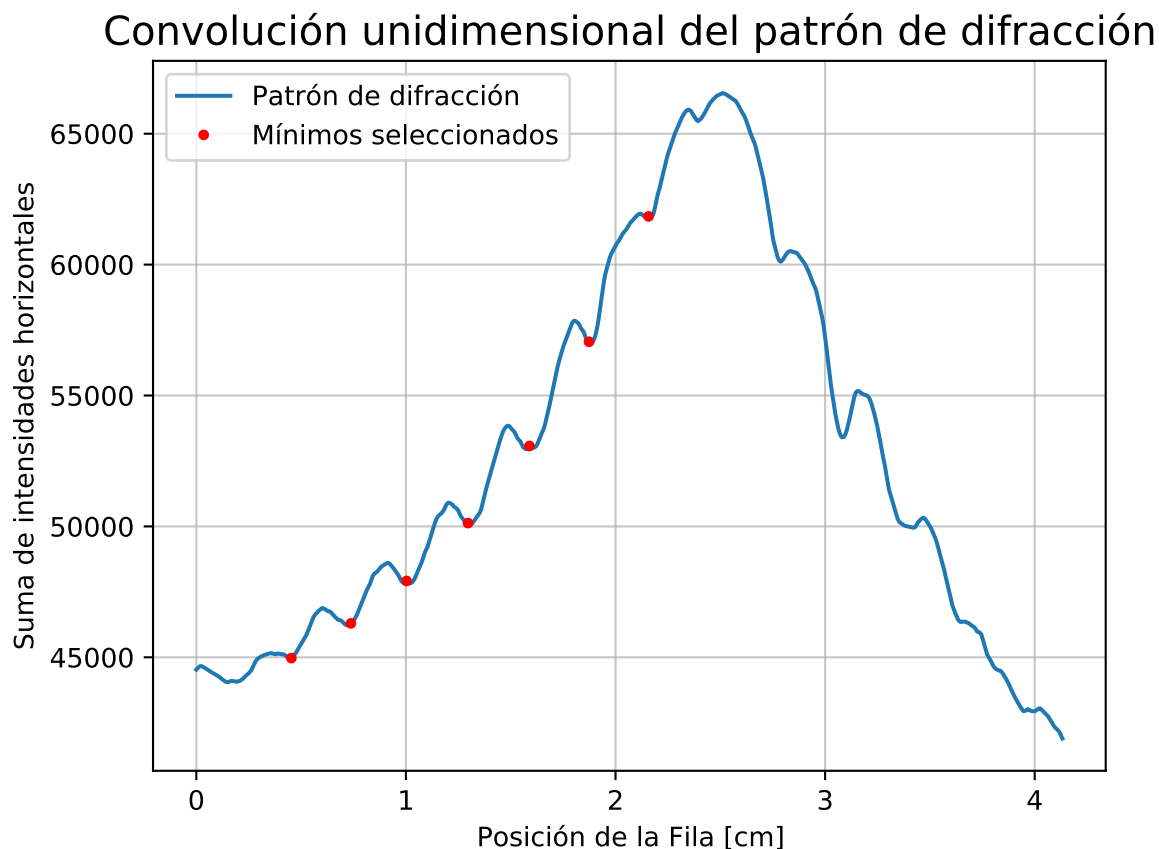


Figura 4: Patrón de difracción, una vez aplicados los métodos mencionados, del latón con una masa igual a 20.5g (masa de 2.5g más la del porta-pesas de 18.0g). En este caso la distancia media entre los mínimos que se calculó fue $(0,29 \pm 0,02)cm$.

Usando la ecuación de la distancia entre mínimos de un patrón de difracción a través de una rendija $a = D\lambda/\Delta z$ [7] se puede obtener la apertura de ésta, con D la distancia de la barra a la hoja milimetrada, λ la longitud de onda del láser y Δz la distancia entre mínimos.

2.4. Resultados del método estático

El módulo de Young se puede calcular despejando E de la ecuación 1. Tomando $y(x)$ como la apertura de la rendija con $x = (22,0 \pm 0,5)cm$, e $I = \frac{\pi d^4}{64}$ con d el diámetro, ya que la barra era cilíndrica. De la ecuación se puede hacer un gráfico de la apertura de la rendija en función de la fuerza, es decir, $a(F) = \frac{k}{E}F$, siendo $k = (260 \pm 91) \times 10^6 \frac{1}{m}$. Entonces se hizo un ajuste lineal para obtener pendiente de la recta, como se ve en la figura 5. Por lo tanto el módulo de Young, E , va a ser la división de k por la pendiente de la recta ajustada, es decir, $E = k/b$, siendo b la pendiente. Para el Latón se obtuvo el valor $E_{laton} = (92 \pm 32)GPa$ y para el acero $E_{acero} = (249 \pm 56)GPa$.

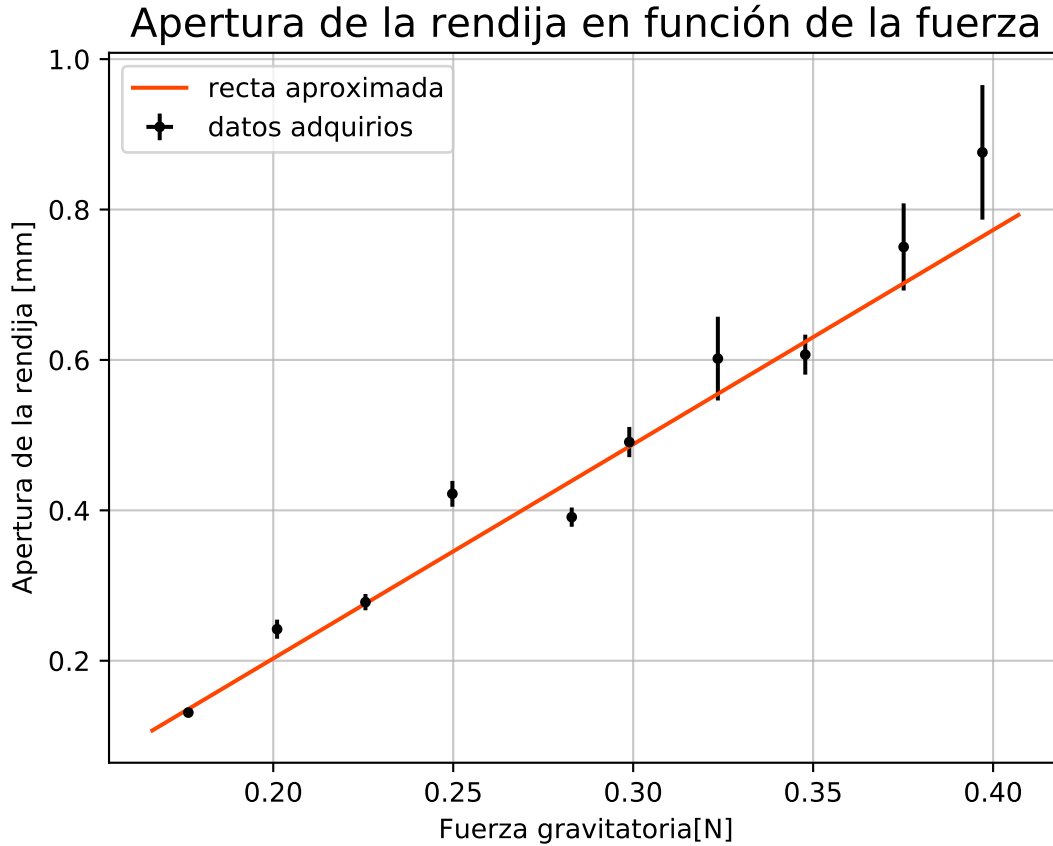


Figura 5: Gráfico de la apertura de la rendija en función de la fuerza y aproximación lineal de los datos. Los errores de la fuerza están graficados aunque no sean apreciables en el gráfico.

3. Cálculo del módulo de Young a través de las vibraciones de una varilla

Para este método de determinación del módulo de Young, se realizaron experimentos en un laboratorio y por un equipo de personas distinto al que hizo el análisis de datos.

3.1. Diseño experimental

Se realizaron mediciones por separado con una varilla de latón de largo $L_l = (255 \pm 2)mm$ y diámetro $d_l = (4,6 \pm 0,2)mm$ y otra de acero de largo $L_a = (240 \pm 2)mm$ y diámetro $d_a = (4,0 \pm 0,2)mm$. Uno de los extremos de la varilla se sujetó a un soporte fijo al piso y el otro extremo se dejó libre, como se puede ver en el esquema experimental presentado en la figura 6.

Se colocó una hoja metálica fija a la varilla y paralela a ella y otra (con la misma orientación) fija al soporte. La distancia entre las hojas metálicas se eligió de forma tal que al iluminar con un láser la separación entre ellas se cumplieran las siguientes condiciones: (i) que la luz no sea difractada, (ii) que haya una relación lineal entre la distancia entre las hojas y la cantidad de luz que las atraviesa, y (iii) Que la luz incidente tenga la misma intensidad en todos los puntos de las hojas y la separación entre ellas. Con esta configuración, si la varilla estaba inclinada de forma que las hojas estuvieran más separadas que en el equilibrio la luz transmitida era mayor, de lo contrario la luz transmitida era menor.

Se colocó un fotodetector en el lado opuesto de las hojas metálicas sobre el que incidía la luz del láser para poder medir la intensidad lumínica transmitida. El fotodetector fue conectado a un osciloscopio para adquirir los datos a 1000 muestras por segundo. Dadas las condiciones (i), (ii) y (iii) se puede establecer una relación lineal entre la diferencia de potencial proveniente del fotodetector y el desplazamiento vertical de la varilla en el punto donde fueron colocadas las hojas.

Por último, en el momento de medir se empezaron a guardar los datos con el osciloscopio y luego se golpeó a la varilla con un destornillador para excitar sus vibraciones. Cada medición duró 30 segundos desde el momento en el que el osciloscopio empezó a tomar los datos.

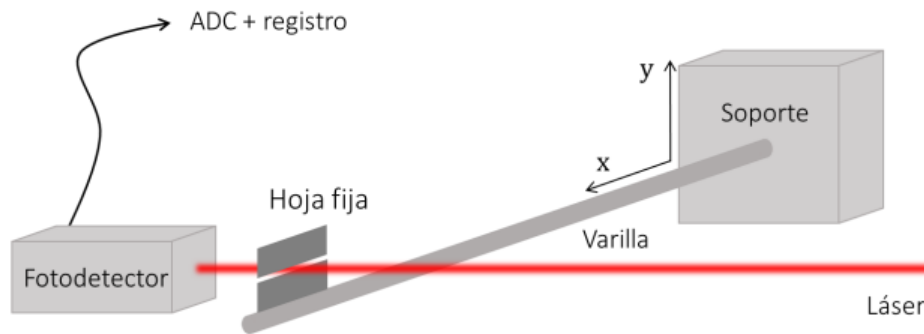


Figura 6: Esquema del diseño experimental. Imagen sacada de [5].

3.2. Análisis de la oscilación de la varilla a través de transformadas rápidas de Fourier

Se presentará un análisis para una de las mediciones realizadas para la varilla de acero; el resto de mediciones fueron analizadas de forma análoga.

Los datos obtenidos de la intensidad de luz en función del tiempo se pueden ver en la figura 7 (a) y (b). En la figura (b) se pueden ver las oscilaciones de mayor frecuencia con mejor detalle, pero

en la figura (a)(que muestra el tiempo total de la oscilación) se nota que la señal está modulada con una frecuencia $\omega_m = (2,2 \pm 0,2)Hz$.

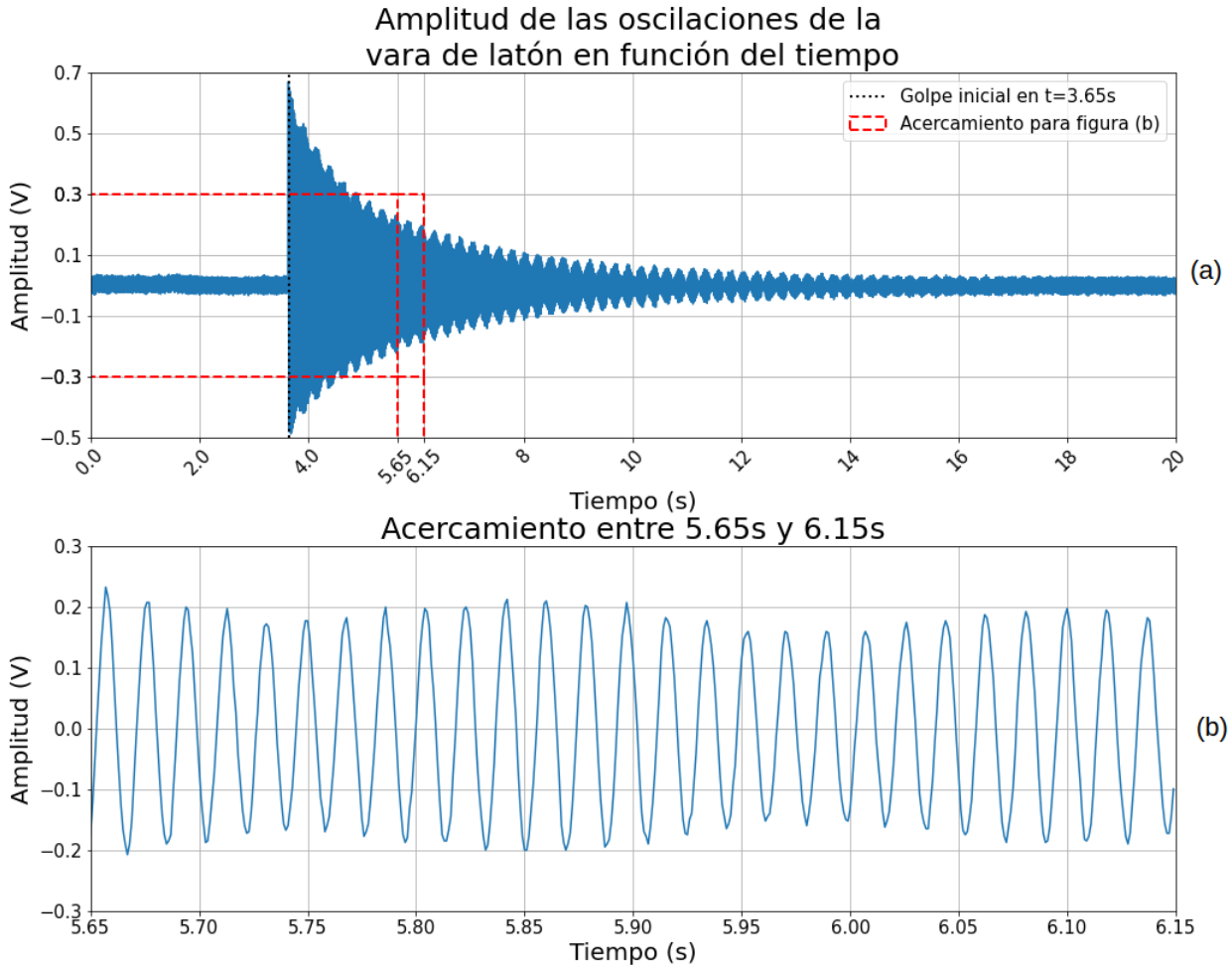
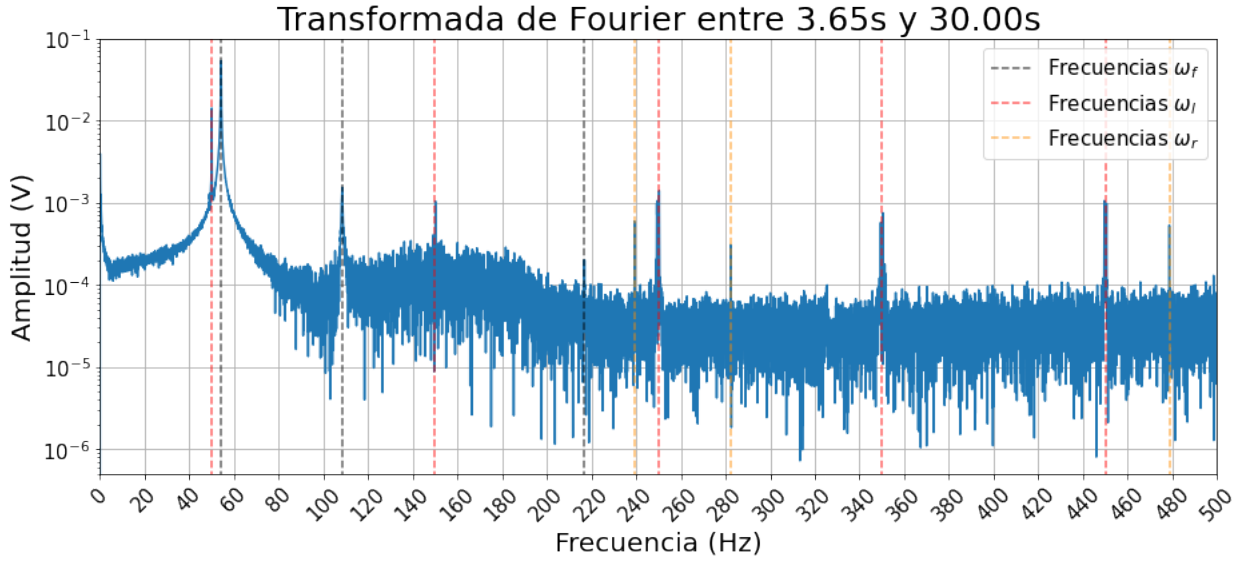


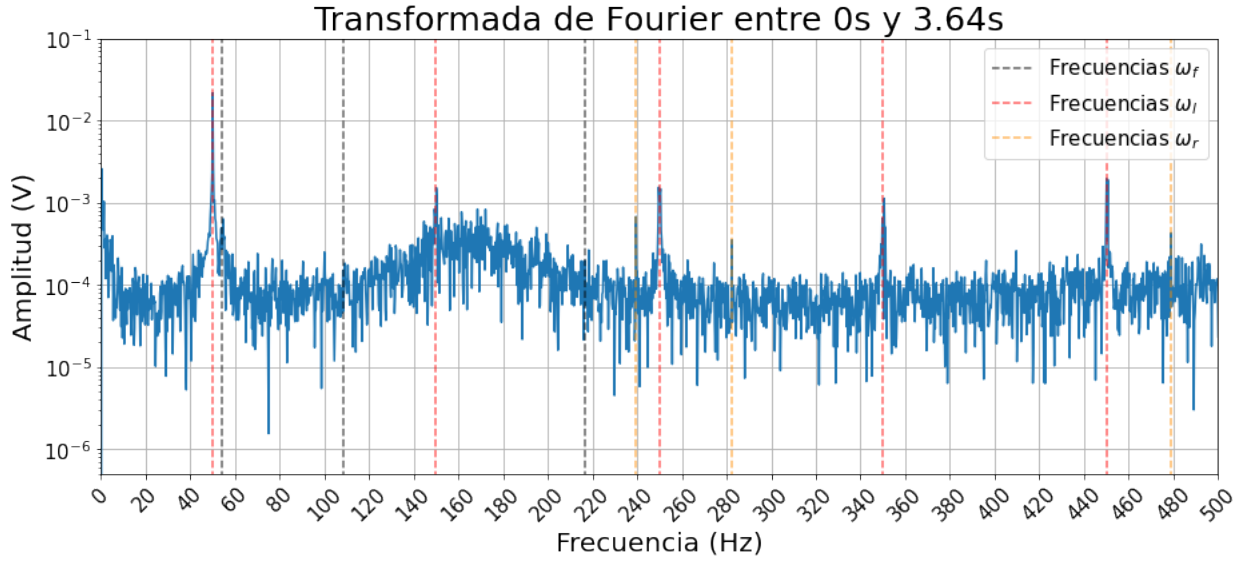
Figura 7: (a) Datos de la vibración en función del tiempo para la varilla de acero entre 0 y 20 segundos. (b) Datos de la vibración en función del tiempo para la varilla de acero entre 5.65 y 6.15 segundos.

Para entender la naturaleza de esta modulación y para encontrar las frecuencias de oscilación de la varilla de acero, se calcularon dos transformadas rápidas de Fourier(FFT). Una se aplicó entre los tiempos $t = 3,65s$ y $t = 30,00s$, rango en el cual la varilla estaba oscilando, y la otra se aplicó entre $t = 0s$ y $t = 3,64s$ con el fin de visualizar cuales eran las frecuencias presentes en la señal antes de que la varilla comenzara a vibrar. Se estimó el valor esperado de la frecuencia fundamental de la varilla $\omega_{est} = (49 \pm 3)Hz$ usando en conjunto la ecuación 3 (usando que $\zeta^2 = 0$) y usando un valor tabulado del módulo de Young del acero $E_{acero} = (200 \pm 10)GPa$. Con el gráfico de la figura 7 (a) se puede calcular el valor del tiempo característico del decaimiento $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_{est}} \approx 2,15s$ y entonces $\zeta^2 = \left(\frac{1}{\tau\omega}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-6}$, por lo que resulta razonable despreciarlo. El valor absoluto de las FFT se puede ver en la figura 8.

En la figura 8 (a) se muestran cuales son las frecuencias predominantes en las mediciones tomadas con el fotodetector luego de haber excitado los modos de oscilación de la varilla. Las dos frecuencias con mayor amplitud se pueden ver en $\omega_f = (54,23 \pm 0,05)Hz$ y $\omega_l = (50,06 \pm 0,05)Hz$. Además, con al menos un orden de magnitud menor en la amplitud se pueden ver los primeros dos múltiplos pares de ω_f : $\omega_{f2} = 2\omega_f = (108,50 \pm 0,05)Hz$ y $\omega_{f4} = 4\omega_f = (216,92 \pm 0,05)Hz$; así como también los múltiplos impares de ω_l : $\omega_{l3} = (150,18 \pm 0,05)Hz$, $\omega_{l5} = (250,32 \pm 0,05)Hz$, $\omega_{l7} = (350,42 \pm 0,05)Hz$ y $\omega_{l9} = (450,56 \pm 0,05)Hz$. Por último, se observan las tres frecuencias $\omega_{r1} = (239,28 \pm 0,05)Hz$, $\omega_{r2} = (282,24 \pm 0,05)Hz$ y $\omega_{r3} = (478,61 \pm 0,05)Hz$.



(a) FFT en el rango en el que la varilla oscilaba (entre 3.65 y 30 segundos).



(b) FFT en el rango en el que la varilla no había comenzado a oscilar (entre 0 y 3.64 segundos).

Figura 8: Comparación de las transformadas de Fourier antes(b) y después(a) de que comenzara a oscilar la varilla de acero.

Si se observa ahora la FFT de los datos antes de que comenzara la vibración de la varilla, en la figura 8 (b), se puede ver que hay algunas frecuencias que desaparecieron y otras que se siguen viendo. Donde antes estaban ubicadas las frecuencias ω_f y sus múltiplos, ahora no hay picos distinguibles. Sin embargo, el resto de frecuencias anteriormente mencionadas (las ω_l y ω_r) siguen apareciendo en el gráfico con una amplitud similar a la que se ve en la figura 8 (a). Es por este motivo que se deduce que estas frecuencias son superfluas para las oscilaciones de la varilla metálica. Más aún, teniendo en cuenta que la frecuencia de oscilación de la corriente de línea es de $50Hz$, se puede adjudicar la aparición de las frecuencias ω_l a que el fotodetector haya adquirido luz ambiente proveniente de alguna lamparita conectada a esta línea durante la medición. Por último, utilizando la ecuación de la frecuencia de modulación entre dos señales $\omega_m = \frac{\omega_f - \omega_l}{2} = (2,09 \pm 0,05)Hz$ se deduce que la modulación que aparece en la señal es la producida entre las frecuencias ω_f y ω_l .

Dadas estas justificaciones resulta razonable asumir que las únicas frecuencias relacionadas con las vibraciones de la varilla son las ω_{fi} . En particular, como ω_{f2} y ω_{f4} son múltiplos de la ω_f , y ésta toma un valor similar al predicho teóricamente para la frecuencia del modo fundamental

de oscilación de la varilla, se deduce que ω_f es la frecuencia fundamental del sistema. Además, las frecuencias ω_{f2} y ω_{f4} son armónicos de la frecuencia fundamental. La razón para la aparición de estos armónicos no está clara, aunque una hipótesis razonable es que la frecuencia temporal de medición no alcanzaba para caracterizar la señal con suficiente resolución, y por este motivo aparecen los armónicos.

3.3. Resultados del método dinámico

Una vez identificada la frecuencia fundamental de oscilación de la varilla para cada medición se promediaron los resultados y se obtuvo una frecuencia promedio de $\bar{\omega}_A = (54,23 \pm 0,05)Hz$ para la barra de acero y $\bar{\omega}_L = (32,35 \pm 0,05)Hz$ para la de latón.

Teniendo estos valores, se despejó $E = \bar{\omega}_f^2 \frac{\rho A}{T} \left(\frac{L}{\beta_1 L} \right)^4$ de la ecuación 3, recordando que $\zeta^2 \approx 0$ y reemplazando los valores de la varilla correspondiente para todos los parámetros se obtuvieron los resultados de $E_A = (245 \pm 26)GPa$ para el acero y $E_L = (93 \pm 8)GPa$ para el latón.

4. Conclusiones

A través de dos métodos simples de realizar y no destructivos se llegó a calcular el módulo de Young de dos materiales distintos. Aunque ambos métodos presentan pocas dificultades a la hora de preparar el experimento en cualquier laboratorio, su mayor desventaja proviene de la indeterminación de la medición. El método estático presentó unos errores relativos del 35 % para el latón y del 22 % para el acero, mientras que el método dinámico presentó errores del 9 % para el latón y 11 % para el acero, por lo que el método dinámico de medición es preferible para mejor precisión. Además, el método dinámico requiere una sola medición rápida de realizar si se dispone de los instrumentos necesarios. Sin embargo, el método estático requiere múltiples mediciones y un diseño experimental de mayor precisión.

En conclusión, si se toleran errores relativos de aproximadamente el 10 %, el método dinámico de determinación del módulo de Young es rápido y efectivo para realizarlo en el laboratorio.

Referencias

- [1] K. Yamaguchi, H. Adachi and N. Takakura (1998). *Effects of Plastic Strain and Strain Path on Young's Modulus of Sheet Metals*. Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, Japan.
- [2] Sebastián Tognana, Walter Salgueiro, Alberto Somoza, Angel Marzocca. (2010) *Measurement of the Young's modulus in particulate epoxy composites using the impulse excitation technique*. Buenos Aires, Argentina.
- [3] Tarsicio Beléndez, Cristian Neipp y Augusto Beléndez (2002) *Flexión de Una Barra Delgada Empotrada en un Extremo: Aproximación para Pequeñas Pendientes* Alicante, España
- [4] Deformación y vibración de una viga en coladizo, Fernando D. Stefani <http://materias.df.uba.ar/l4a2021c1/files/2021/03/Deformaci%C3%B3n-y-vibraci%C3%B3n-de-una-viga-en-voladizo.pdf>
- [5] http://materias.df.uba.ar/l4a2021c1/files/2021/03/clase_031.pdf
- [6] https://matplotlib.org/stable/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.ginput.html
- [7] Hecht E. (2017) Optics.