Tarea 1

Oscar Andrés Rosas Hernández *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico*

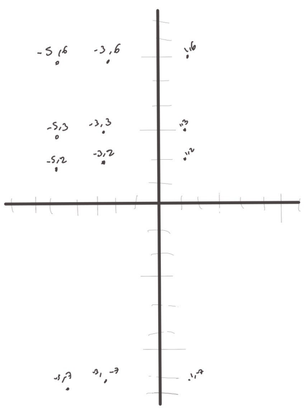
I.

Sea $A = \{ \ 1, -3, -5 \ \}$ y sea $B = \{ \ 2, 3, 6, -7 \ \}$.

- Escriba el producto cartesiano AxB. Grafique el producto cartesiano.
  Super sencillo:

$$AxB = \{ \ (1,2), (1,3), (1,6), (1,-7), (-3,2), (-3,3), (-3,6), (-3,-7), (-5,2), (-5,3), (-5,6), (-5,-7) \ \} \quad (1)$$

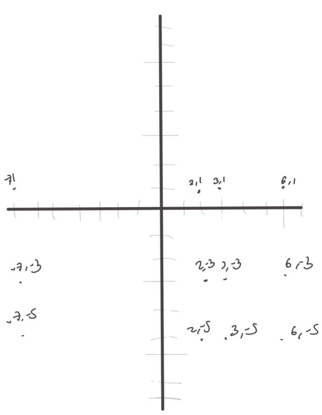
  En grafica seria:



- Escriba el producto cartesiano BxA. Grafique el producto cartesiano.
  Super sencillo:

$$BxA = \{ \ (2,1), (2,-3), (2,-5), (3,1), (3,-3), (3,-5), (6,1), (6,-3), (6,-5), (-7,1), (-7,-3), (-7,-5) \ \} \quad (2)$$

  En grafica seria:



- Encuentre todos los pares (x,y) que satisfacen la relación $R = \{ \ (x, y) \ \mid \ xy > 0 \ \}$
  Pues de manera facil de explicar son aquellos reales que tengan el mismo signo, es decir: $R = (0, \infty) \times (0, \infty) \cup (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$

II.

Sea $A = (-\pi, \pi) \in \mathbb{R}$, y sea $B = [-1, 0) \in \mathbb{R}$.

- Escriba el producto cartesiano AxB. Grafique el producto cartesiano. Pues $A \times B = \{\ (a, b)\ \mid\ a \in (-\pi, \pi)$ y $b \in [-1, 0)\ \}$
- Escriba el producto cartesiano AxB. Grafique el producto cartesiano. Pues $B \times A = \{\ (a, b)\ \mid\ b \in (-\pi, \pi)$ y $a \in [-1, 0)\ \}$

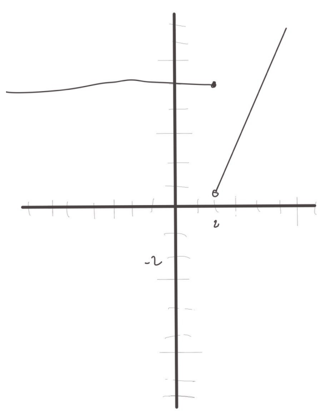
III.

Encuentre el dominio y rango de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{1}{3x-6}$, Dominio = Rango = $\mathbb{R} - \{\ 2\ \}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ Dominio = $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$, Rango = $[0, \infty)$
- $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{6-x}}$ Dominio = $\mathbb{R}$, Rango = $[0, \infty)$

IV.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } > 2 \end{cases}$$

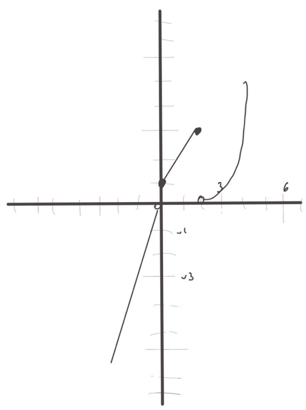


Vamos a evaluarlo:

- $f(-3) = 5$
- $f(0) = 5$
- $f(2) = 5$
- $f(3) = 3$
- $f(5) = 7$

V.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ x+1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ (x-2)^2 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$



Vamos a evaluarlo:

- $f(-5) = -15$
- $f(0) = 1$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 3$
- $f(5) = 9$

VI.

Veamos la paridad

- $f(x) = -x^3 + 5x - 2$
  - Par:
    $$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^3 + 5(-x) - 2 \\ &= x^3 + 5(-x) - 2 \\ &= x^3 - 5x - 2 \end{aligned}$$
    Por lo tanto no es par
  - Impar:
    $$-f(x) = x^3 - 5x + 2$$
    Por lo tanto no es impar
- $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 4$
  - Par:
    $$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^4 + -2(-x)^2 + 4 \\ &= -x^4 + -2x^2 + 4 \end{aligned}$$
    Por lo tanto es par
  - Impar:
    $$-f(x) = x^4 + 2x^2 - 4$$

Por lo tanto no es impar

- $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$
  - Par:
$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\sqrt{(-x)^2-1} \\ &= -x\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$
Por lo tanto no es par
  - Impar:
$$-f(x) = -x\sqrt{x^2-1}$$
Por lo tanto no es impar

VII.

Use la siguiente tabla para evaluar la expresión:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	3	5	1	6	3
g(x)	3	5	6	2	1	4

- $f(g(2)) = f(5) = 6$
- $f(f(1)) = f(2) = 3$
- $g(f(2)) = g(3) = 6$
- $g(g(2)) = g(5) = 1$
- $(f \circ g)(6) = f(4) = 1$
- $(g \circ f)(2) = g(3) = 6$
- $(f \circ f)(5) = f(6) = 3$
- $(g \circ g)(2) = g(5) = 1$

VIII.

Encuentre $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$, y tambien sus dominios, para las siguientes funciones:

- $f(x) = 6x - 5$ $g(x) = \frac{x}{2}$
  - $$\begin{aligned} f(f(x)) &= 6(6x-5) - 5 \\ &= 36x - 30 - 5 \\ &= 36x - 35 \end{aligned}$$
  - $$g(g(x)) = \frac{x}{4}$$
  - $$\begin{aligned} f(g(x)) &= 6(\frac{x}{2}) - 5 \\ &= 3x - 5 \end{aligned}$$
  - $$g(f(x)) = \frac{6x-5}{2}$$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $g(x) = x^2 - 4x$
  - $$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

- $$g(g(x)) = (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) \qquad = x^4 - 8x^3 + 16x - 4x^2 + 16x = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 32x$$
- $$f(g(x)) = (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 - 4(\frac{1}{\sqrt{x}}) \qquad = \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$$
- $$g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

IX.

Demostremos que son inversas:

(a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = \frac{1}{x} + 1$
(b) $f(x) = \frac{x-5}{3x+4}$ $g(x) = \frac{5+4x}{1-3x}$

a)

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x}{1} + 1 - 1}$$
$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x}{1} + 1 - 1}$$
$$f(g(x)) = x$$

b)

$$f(g(x)) = \frac{(\frac{5+4x}{1-3x}) - 5}{3(\frac{5+4x}{1-3x}) + 4}$$
$$f(g(x)) = \frac{(\frac{5+4x}{1-3x}) - (\frac{5-15x}{1-3x})}{3(\frac{5+4x}{1-3x}) + 4}$$
$$f(g(x)) = \frac{(\frac{5+4x}{1-3x}) - (\frac{5-15x}{1-3x})}{(\frac{15+12x}{1-3x}) + 4}$$
$$f(g(x)) = \frac{(\frac{5+4x}{1-3x}) - (\frac{5-15x}{1-3x})}{\frac{15+12x}{1-3x} + \frac{4-12x}{1-3x}}$$
$$f(g(x)) = \frac{5 + 4x - 5 + 15x}{15 + 12x + 4 - 12x}$$
$$f(g(x)) = \frac{19x}{19}$$
$$f(g(x)) = x$$

X.

Encontremos inversas: a) $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$

$f^{-1}(x) = -\frac{x+2}{3x-4}$

b) $y(x) = 2 + \sqrt{3+x}$

$y^{-1}(x) = x^2 - 4x + 1$

XI.

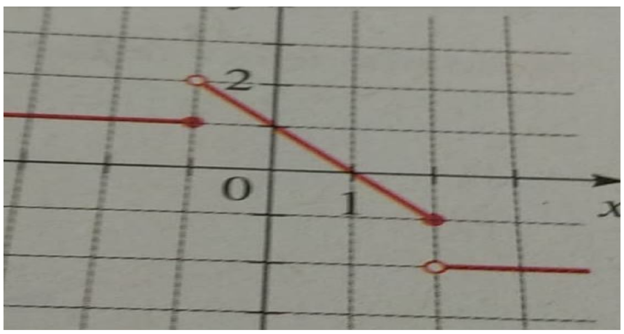
El dominio de la funcion v(t) pues teoricamente puede ser cualquier real, pero en el contexto del problema seria $[0, 40]$.

t	v(t)
0	100
10	$\frac{225}{4}$
20	25
30	$\frac{25}{4}$
40	0

Ahora hablemos de $v^{-1}(t)$ que es $40 - 4\sqrt{x}$, que recibe conceptualmente un volumen y nos dice en que tiempo existia este volumen.

Entonces cosas como $v^{-1}(81) = 4$, quiere decir que cuando t = 4 entonces el volumen era 81

XII.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-\infty, -1] \\ 1 - x & \text{si } x \in (-1, 2] \\ -2 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$