Ejercicio Extra

Oscar Andrés Rosas Hernández *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, CDMX*

I. Problemas

Sea $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias tal que $X_i \sim exp(\lambda)$.

- Usando las propiedades de la varianza y de la esperanza:
  - Para la esperanza podemos saber que:

$$\begin{aligned} E(X_1 + \cdots + X_n) &= E(X_1) + \cdots + E(X_n) && \text{propiedad de la esperanza} \\ &= \frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda} && \text{Como es una exponencial entonces } E(X_i) = \tfrac{1}{\lambda} \\ &= \frac{n}{\lambda} \end{aligned}$$

  - Para la varianza podemos saber que:

$$\begin{aligned} V(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) && \text{propiedad de la varianza} \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 0 && \text{Son independientes, por lo tanto su covarianza es 0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{n}{\lambda^2} \end{aligned}$$

- Usando las propiedades de la suma podemos ver que $X_1, \dots, X_n \sim Gamma(n, \lambda)$ Entonces podemos sacarlas de formulario:
  - $E(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\lambda}$
  - $Var(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

Ahora demos la funcion de distribuciones:

$$\begin{aligned} f_{X_1 + \cdots + X_n}(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(X_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$