

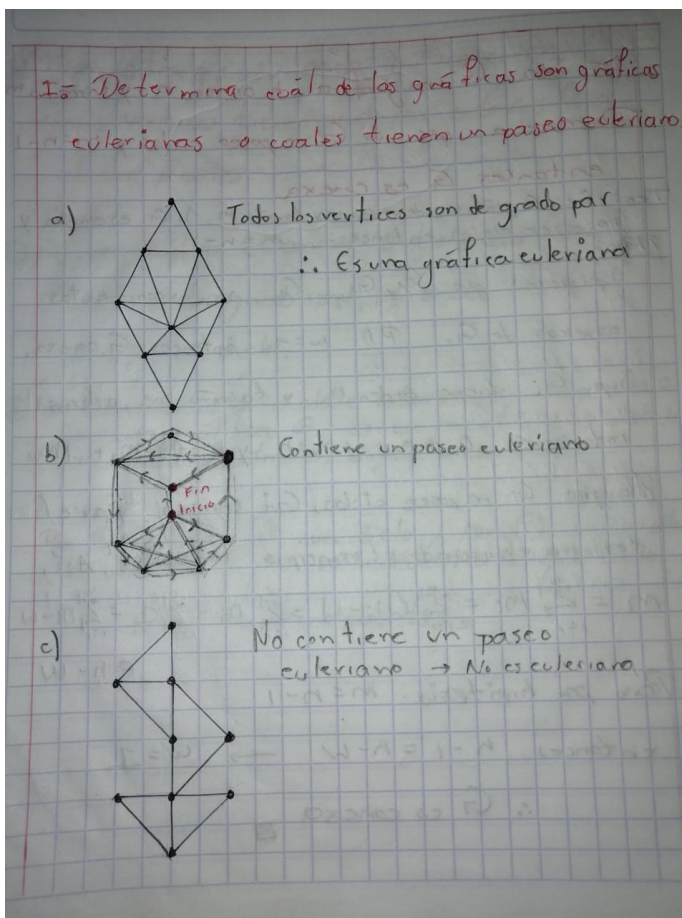
Tarea 4: Gráficas y Juegos

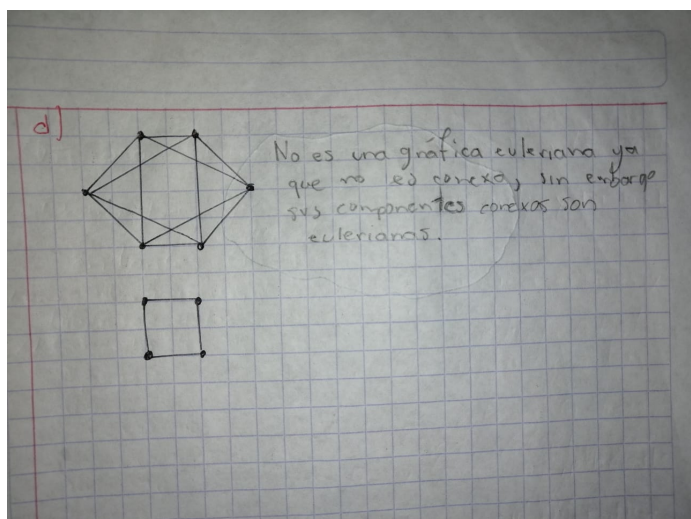
Oscar Andrés Rosas Hernández [SoyOscarRH@gmail.com / 417024956]
Rodrigo Alfredo Lemus Palma [rodrigolemus97@ciencias.unam.mx / 417006954]

Facultad de Ciencias, UNAM, CDMX, México

1 PROBLEMA

Determina cual de las graficas de la Figura son graficas eulerianas o cuales tienen un paseo euleriano

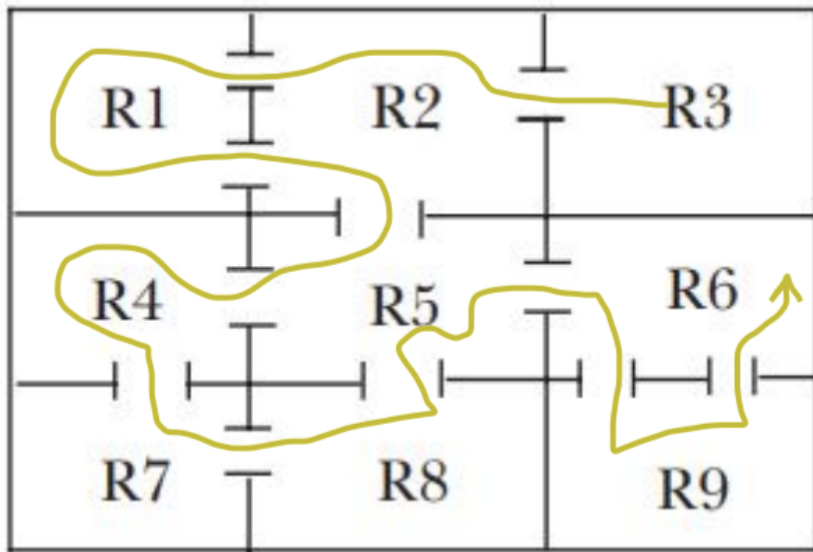




2 PROBLEMA

El diagrama de la Figura 2 muestra las nueve habitaciones del segundo piso de una casa con puertas entre varias estancias ¿Es posible comenzar en alguna habitación y caminar para que cada puerta sea cruzada exactamente una vez? ¿Cómo se relaciona esta pregunta con la teoría de gráficas?

Claro, mira:



La idea es ver esto como una grafica, donde las habitaciones son nodos / vertices y las puertas son aristas en este caso no es una grafica simple pues por ejemplo hay mas de un vertice entre R6 y R9 (tambien podemos asignarles un peso a cada arista en este casi casi todas tendrian 1 pero entre R6 y R9 habria un 2).

Total, ahora el problema se reduce a encontrar un camino euleriano.

3 PROBLEMA

En el vestibulo de un gran hotel, se ha construido un canal que rodea ocho areas terrestres A, B, C, D, W, X, Y, Z. En ciertas ubicaciones se han construido diez puentes sobre el agua, indicados por a, b, c, d, e, f, g, h, j, k.

- ¿Es posible dar un paseo por las regiones terrestres en el vestibulo? tal que cada puente se cruce exactamente una vez?

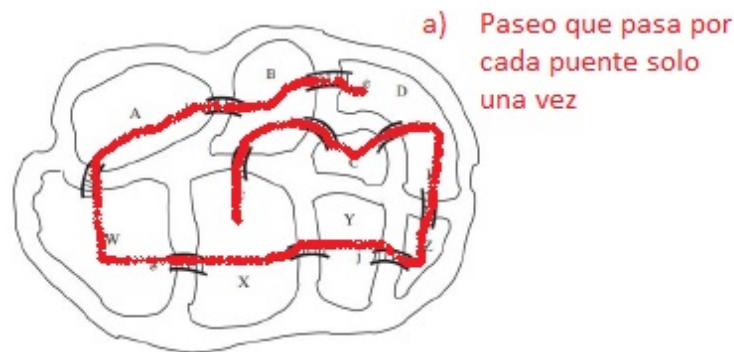


Figura 3: Gráfica del ejercicio 3

- ¿Es posible dar un paseo en bote por una parte de la via fluvial para que el barco pase por debajo de cada puente exactamente una vez?

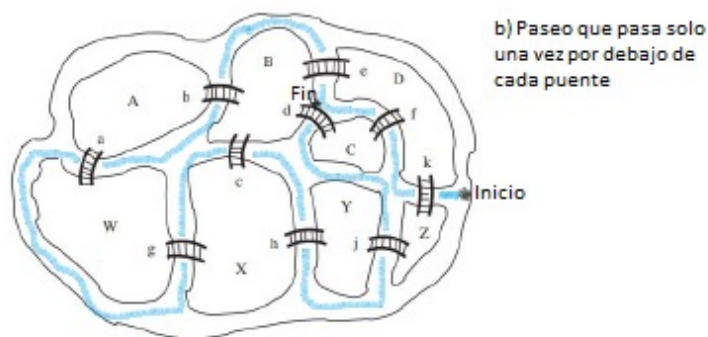


Figura 3: Gráfica del ejercicio 3

4 PROBLEMA

¿Cuál es la longitud de un paseo euleriano en un árbol de orden $n \geq 2$?

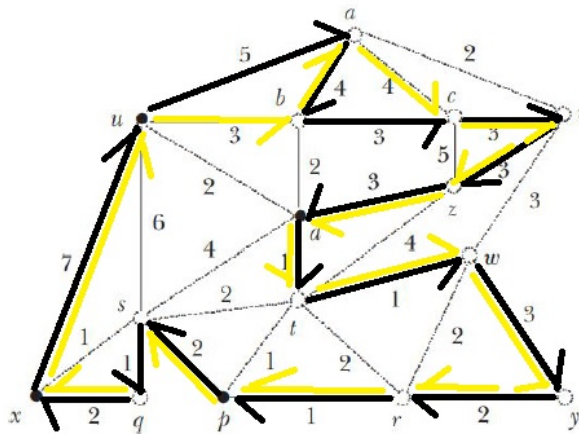
Pues siendo rigurosos un árbol no tiene un paseo euleriano. Pero hay algo que se parece mucho: La técnica del recorrido de Euler (ETT), que se llama así por el gran Leonhard Euler, es un método para representar árboles.

El árbol se ve como una gráfica dirigida que contiene dos aristas dirigidas para cada vértice del árbol.

Hay $|V| - 1$ aristas, y vamos a pasar por cada una dos veces, una bajando y otra subiendo. Por lo tanto tendremos $2(|V| - 1)$ viajes por las aristas, vamos a empezar en la raíz y cada vez que viajemos por un vértice lo agregaremos al camino, por lo tanto habrá $2|V| - 1$ vértices en el camino.

5 PROBLEMA

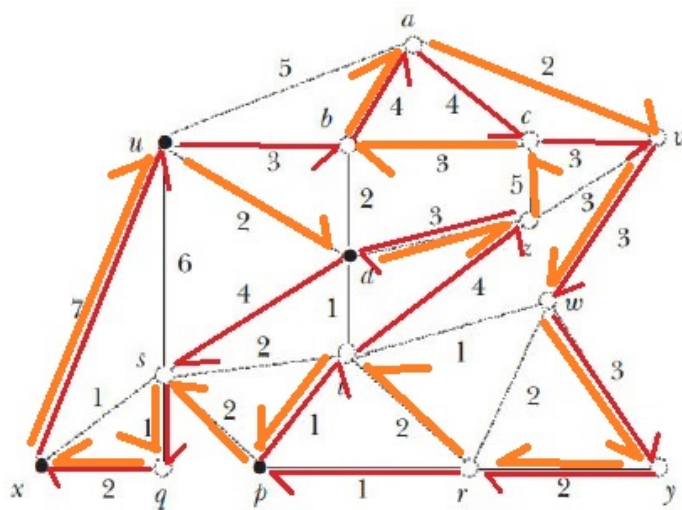
En la Figura 4 se muestra una gráfica ponderada G que representa las calles en una comunidad cerrada. Los vértices de G representan las intersecciones de calles, las aristas representan las calles y el peso de una arista representa el tiempo mínimo (en minutos) que se tarda en conducir a lo largo de la calle, inspeccionando las casas y terrenos a ambos lados. Se ha contratado a un guardia de seguridad para vigilar la comunidad. Cada noche, comienza en la intersección a y conduce a lo largo de cada calle al menos una vez y vuelve a a . ¿Cuál es la cantidad mínima de tiempo requerida para hacer esto?



$$t = 40 \text{ m}$$

$$t = 38 \text{ m}$$

Por tanto el tiempo óptimo son 38 minutos



$$t = 40 \text{ m}$$

$$t = 45 \text{ m}$$

6 PROBLEMA

Demuestra que si G es una gráfica Euleriana, entonces G no puede tener puentes

Ok, entonces sea G una gráfica euleriana, es decir que todos sus vértices tienen grado par pero no son 0.

Supongamos entonces que existe un puente, sea ese puente (e) aquel que conecte a u, v , ahora por definición de un puente tenemos que $G - e$ ya no es conexa, es decir ahora el vértice u tiene un grado impar, veamos que pasa si sumamos el grado de todos los vértices de la componente a la que pertenece u .

- Por un lado es la suma de unos puros vértices pares y u que es impar, por lo tanto impar
- Pero por el primer teorema de gráficas tenemos el resultado de que la suma de grados es igual a dos veces la cantidad de aristas, por lo tanto es un número par.

Contradicción.

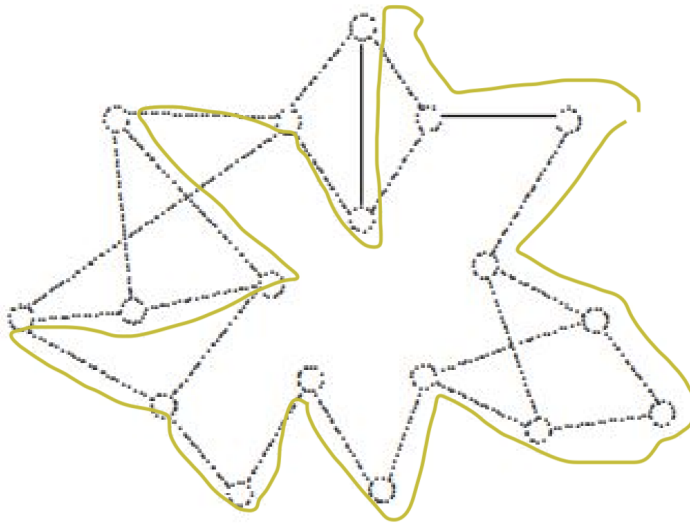
7 PROBLEMA

Demuestra que no hay recorrido de caballo en el tablero de ajedrez de 5 x 5

8 PROBLEMA

La figura muestra una gráfica G de orden 18 ¿ G es hamiltoniana?

Pues si, para que una grafica sea hamiltoniana basta con que exista un camino cerrado hamiltoniano es decir que visita todos los vertices una vez. Mira:



9 PROBLEMA

¿Toda grafica de orden 10 con grado minimo 5 es Hamiltoniana? Justifica tu respuesta

9. Toda grafica de orden 10 con grado mínimo 5 es Hamiltoniana?

Sabemos que si G es una grafica con n vértices
y $n \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ entonces G es hamiltoniana.

Entonces:

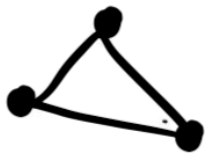
$$\begin{array}{l} \delta(G) = 5 \\ n = 10 \end{array} \rightarrow n/2 = 5$$
$$\therefore \delta(G) = \delta = \frac{n}{2}$$

\rightarrow Toda grafica de orden 10 con grado mínimo 5 es hamiltoniana.

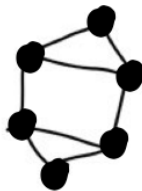
10 PROBLEMA

- Encuentra una gráfica que sea Euleriana y Hamiltoniana
- Encuentra una gráfica que sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana
- Encuentra una gráfica que sea Hamiltoniana y que no sea Euleriana
- Encuentra una gráfica que no sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana

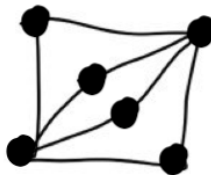
$H\checkmark$ $E\checkmark$



$H\checkmark$ $E\times$



$H\times$ $E\checkmark$



$H\times$ $E\times$

