

# Tarea 1

Oscar Andrés Rosas Hernández. *Facultad de Ciencias - UNAM*

Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext}$$

## I. 1.A

¿Cuanto vale  $V_\infty$  en términos de  $C$ ,  $R$ ,  $V_{rest}$ ,  $I_{ext}$ ? Siendo  $V_\infty$  el voltaje en el estado estacionario cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\frac{d}{dx}Vt = 0$ .

Pues primero que nada despejemos y apliquemos las condiciones que nos dijeron:

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ C(0) &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ 0 &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$\begin{aligned} I_{ext} &= \frac{(V - V_{rest})}{R} \\ (I_{ext})(R) &= (V - V_{rest}) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$V_\infty = V_{rest} + (I_{ext})(R) \quad (2)$$

## II. 1.B

Modifiquemos a (1) para llegar a algo como:

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V + V_\infty:$$

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ RC \frac{dV}{dt} &= -(V - V_{rest}) + RI_{ext} \end{aligned}$$

Ahora definamos a  $RC = \tau$ , porque:

- $R$  esta en farads, que se puede ver de muchas maneras, pero una útil es ver que  $F = \frac{C}{V} = \frac{s}{\Omega}$  por lo que  $RC$  es una cantidad en segundos.
- $RC$  es una constante famosa, que justo indica que tan cerca nos acercamos a que el capacitor este completamente cargado, por ejemplo a  $4\tau$  el capacitor esta cargado al 98 %.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau \frac{dV}{dt} &= -(V - V_{rest}) + RI_{ext} \\ &= -V + V_{rest} + RI_{ext} \\ &= -V + (V_{rest} + RI_{ext}) \quad \text{Por (2)} \\ &= -V + V_\infty \end{aligned}$$

## III. 2.A

- (1) Probemos que  $V(t) = V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  es solución a la ecuación diferencial.

Vamos a sustituir como es la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{d}{dt} (V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= -\frac{d}{dt} V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Ahora, entonces, veamos que pasa si sustituimos desde un lado:

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= CV_\infty \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= CV_\infty \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \end{aligned}$$

Ahora, por el otro lado:

$$\begin{aligned} -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} &= -\frac{(V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ &= -\frac{(V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest}) - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{rest} - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} - V_\infty}{R} \\ &= -\frac{-V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \\ &= \frac{V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \end{aligned}$$

Si te das cuenta llegamos por ambos lados a lo mismo, por lo que es solución.

De hecho si aplicamos la transformada de Laplace para intentar resolver la ecuación así como esta, llegaremos a esta solución.

## IV. 2.B

Probemos que  $V(t) = V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}$  es solución a la ecuación diferencial.

Vamos a sustituir como es que es la derivada:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} V_{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_{\infty} \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$

Ahora, entonces, veamos que pasa si sustituimos desde un lado:

$$\begin{aligned}C \frac{dV}{dt} &= -CV_{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -CV_{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_{\infty} \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{-V_{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}\end{aligned}$$

Ahora, por el otro lado:

$$\begin{aligned}-\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} &= -\frac{(V_{\infty}(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ &= -\frac{(V_{\infty}(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest}) - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_{\infty}(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{\infty}}{R}\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que  $V_{\infty} = 0$ , entonces ambos lados son iguales. Así que esta solución es solo válida si y solo si  $V_{\infty} = 0$ .