
COMPILANDO CONOCIMIENTO

Tarea Random

ANÁLISIS NÚMÉRICO

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Octubre 2018

Índice

1. Solución a problema no cuadrado por Householder	2
1.1. Ideas previas	2
1.2. Ejemplo	3

1. Solución a problema no cuadrado por Householder

1.1. Ideas previas

Recuerda que la transformación de Householder esta dada por:

$$H = I - 2 \frac{\vec{v} \vec{v}^t}{\vec{v}^t \vec{v}} \quad \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

Ahora recuerda que para una columna \vec{a} tenemos al vector \vec{v} como:

$$\vec{v} = \vec{a} - \alpha e_1$$

Y definimos a α como:

$$\alpha = \begin{cases} |\vec{a}| & \text{si } a_1 < 0 \\ -|\vec{a}| & \text{si } a_1 > 0 \end{cases}$$

1.2. Ejemplo

Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■ El escalar:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^t \vec{v}_1 &= (1 + \sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vamos a obtener la primera matriz de Householder:

Primero tenemos que encontrar α esto se hace así:

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora como $a_{1,1} = 1 \geq 0$, entonces $\alpha = -\sqrt{2}$

Ahora tenemos encontrar \vec{v}_1 :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{a}_1 - \alpha e_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora si podemos hacer la primera matriz de Householder:

$$\begin{aligned} H_1 &= I - 2 \frac{\vec{v} \vec{v}^t}{\vec{v}^t \vec{v}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4 + 2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} H_1 A &= H_1 A \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora podemos sacar otros valores que necesitamos:

■ La matriz:

$$\vec{v}_1 \vec{v}_1^t = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a obtener la segunda matriz de Householder:

Primero tenemos que encontrar α esto se hace así:

$$\begin{aligned}\|\alpha\| &= \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ahora como $a_{1,1} = -1 \leq 0$, entonces $\alpha = \sqrt{2}$

Ahora tenemos encontrar \vec{v}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{a}_2 - \alpha e_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora podemos sacar otros valores que necesitamos:

- La matriz:

$$\vec{v}_2 \vec{v}_2^t = \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- El escalar:

$$\begin{aligned}\vec{v}_2^t \vec{v}_2 &= (-1 - \sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ahora si podemos hacer la segunda matriz de Householder:

$$\begin{aligned}H_2 &= I - 2 \frac{\vec{v}_2 \vec{v}_2^t}{\vec{v}_2^t \vec{v}_2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pero recuerda que antes tenemos que hacer que tenga el tamaño correcto, esto lo hacemos metiendola dentro de la identidad al fondo y la derecha.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$H_2 A = H_2 A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos llamar a R como $R = H_2 H_1$ entonces decimos:

$$\begin{aligned} R &= H_2 H_1 A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora si:

$$\begin{aligned} H_2 H_1 A &= R \\ A &= H_1^T H_2^T R \quad \text{Por ser ortogonal} \\ A &= H_1 H_2 R \quad \text{Por ser Householder} \\ A &= QR \end{aligned}$$

Entonces podemos hacer lo que siempre hacemos:

- $A\vec{x} = \vec{b}$
- $QR\vec{x} = \vec{b}$
- $R\vec{x} = \vec{y}$
- $Q\vec{y} = \vec{b}$

Ahora, la primera que podemos hacer es resolver $Q\vec{y} = \vec{b}$ porque sabemos que Q sigue siendo ortogonal por lo que podemos sacar su inversa simplemente transponiendo, pero como esta hecha por matrices de Householder entonces también es una matriz simétrica, por lo que resolver el sistema es tan sencillo como:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= Q\vec{b} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora podemos escribir nuestra tan ansiada solución como:

$$R\vec{x} = \vec{y} \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Esta la podemos hacer por backward substitution porque despues de todo R es triangular superior, es mas podemos hacer a mano porque no estan tan dificiles:

De la primera ecuación tenemos que: $-\sqrt{2}x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, podemos multiplicar todo por menos la raíz de dos y tenemos que $2x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ y por otro lado $\sqrt{2}x_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

Por lo tanto nuestra solución es $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

Es decir $\|\tilde{x} - (Ax)\| = 1$