Estructuras Discretas

Tarea 4

Recursividad e Inducción

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Octubre 2018

Índice

1. 1

Prueba que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{0}(2n+1)^2 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = \frac{(0+1)(2(0)+1)(2(0)+3)}{3}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n}(2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ para alguna n.

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2n+1)^2 &= \sum_{i=0}^{n}(2n+1)^2 + (2(n+1)+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2(n+1)+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + \frac{3(2n+3)(2n+3)}{3} \\
&= (2n+3)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3(2n+3)}{3}\right) \\
&= (2n+3)\left(\frac{(n+1)(2n+1)3(2n+3)}{3}\right) \\
&= (2n+3)\left(\frac{2n^2+9n+10}{3}\right) \\
&= \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} \\
&= \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3}
\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

2. 2

Prueba que:

$$3 + 3 * 5 + 3 * 5^2 + \cdots + 3 * 5^n = \sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i = 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

  $$\sum_{i=0}^{0} 3 * 5^i = 3 = 3 * \frac{4}{4} = 3 * \frac{5-1}{4} = 3 * \frac{5^{0+1} - 1}{4}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i = 3\frac{5^{n+1} - 1}{4}$ para alguna n.

  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{i=0}^{n+1} 3 * 5^i &= \sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i + 3 * 5^{n+1} \\
  &= 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 3 * 5^{n+1} \\
  &= 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 3\frac{4 * 5^{n+1}}{4} \\
  &= 3\frac{5^{n+1} - 1 + 4 * 5^{n+1}}{4} \\
  &= 3\frac{5 * 5^{n+1} - 1}{4} \\
  &= 3\frac{5^{n+2} - 1}{4} \\
  &= 3\frac{5^{(n+1)+1} - 1}{4}
  \end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n + 1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

3. 3

Prueba que:

$$2 - 2 * 7 + 2 * 7^2 + \cdots + 2 * (-7)^n = \sum_{i=0}^{n} 2 * (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{0} 2 * (-7)^i = 2 = \frac{8}{4} = \frac{1 - (-7)}{4} = \frac{1 - (-7)^{0+1}}{4}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n} 2 * (-7)^i = \dfrac{1 - (-7)^{n+1}}{4}$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 3 * 5^i &= \sum_{i=0}^{n+1} 2 * (-7)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2 * (-7)^i + 2 * (-7)^{n+1} \\
&= \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4} + 2 * (-7)^{n+1} \\
&= \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4} + \frac{8 * (-7)^{n+1}}{4} \\
&= \frac{1 - (-7)^{n+1} + 8 * (-7)^{n+1}}{4} \\
&= \frac{1 + 7(-7)^{n+1}}{4} \\
&= \frac{1 - (-7)(-7)^{n+1}}{4} \\
&= \frac{1 - (-7)^{(n+1)+1}}{4}
\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n + 1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

4. 4

Encontremos una formula para $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^i}$

- Si $n = 1$ la suma es $\frac{1}{2}$
- Si $n = 2$ la suma es $\frac{3}{4}$
- Si $n = 3$ la suma es $\frac{7}{8}$

Por lo tanto: Si n entonces $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

5. 5

Prueba que:

$$\sum_{k=1}^{n} k * 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 1 * 2 = 2 = (0) + 2 = (0)2^1 + 2$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{k=1}^{n} k * 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k * 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k * 2^k + (n+1) * 2^{n+1} \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1) * 2^{n+1} \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n-1) * 2^{n+1} + 2^{n+2} \\
&= (n-1)2^{n+1} + (n-1) * 2^{n+1} + 2 + 2^{n+2} \\
&= (n-1)(2^{n+1} + 2^{n+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
&= (n-1)(2 * 2^{n+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
&= (n-1)(2^{(n+1)+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
&= (n)(2^{(n+1)+1}) + 2 \\
&= ((n+1)-1)(2^{(n+1)+1}) + 2
\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

6. 6

Prueba que:

$$2|n^2 + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$2|1^2 + 1 = 2|2$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $2|n^2 + n$, es decir $n^2 + n = 2k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + (n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 + (n+1) \\ &= n^2 + n + n + 1 + (n+1) \\ &= 2k + n + 1 + (n+1) \\ &= 2k + 2n + 2 \\ &= 2(k + n + 1) \end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $2|(n+1)^2 + (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

7. 7

Prueba que:

$$3|n^3 + 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$3|1^3 + 2(1) = 3|3$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $3|n^3 + 2n$, es decir $n^3 + 2n = 3k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n+1)(n^2+2n+1) + 2(n+1) \\ &= (n^3+2n^2+n) + (n^2+2n+1) + 2(n+1) \\ &= (n^3+n) + 2n^2 + (n^2+2n+1) + 2(n+1) \\ &= 3k + 3n^2 + (2n+1) + 2(n+1) \\ &= 3k + 3n^2 + (3n+3) \\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $3|(n+1)^3 + 2(n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

8. 8

Prueba que:

$$5|n^5 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$5|1^5 - 1 = 5|0$$

  Y pues siempre se cumple que $x|0$. Por lo tanto el caso base se cumple.
- Supongamos entonces válido $5|n^5 - n$, es decir $n^5 - n = 5k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= (n+1)^5 - (n+1) \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - (n+1) \\ &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5k + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1n)\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $5|(n+1)^5 - (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

9. 9

Prueba que:

$$6|n^3 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$6|1^3 - 1 = 6|0$$

  Y pues siempre se cumple que $x|0$. Por lo tanto el caso base se cumple.
- Supongamos entonces válido $6|n^3 - n$, es decir $n^3 - n = 6k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^3 - (n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 6k + 3n^2 + 3n \\ &= 6k + 3(n^2 + n) \\ &= 6k + 3(2k') \\ &= 6(k + k')\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $6|(n+1)^3 - (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

10. 10

Prueba que:

$$8|n^2 - 1$$

Demostración:

Sea n = 2, entonces es obvio que es falso que $8|3$ o si $n = 4$ entonces $8|15$.

Así que esto es falso. Quiza se cumpla para los impares pero no se :v

11. 11

Encuentre $f(2), f(3), f(4)$ y $f(5)$ si f se define recursivamente por:

- $f(0) = -1$
- $f(1) = 2$

Y tenemos que:

- $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$

  Entonces tenemos que:

  - $f(2) = f(1) + 3f(0) = 2 - 3 = -1$
  - $f(3) = f(2) + 3f(1) = -1 + 6 = 5$
  - $f(4) = f(3) + 3f(2) = 5 - 3 = 2$
  - $f(5) = f(4) + 3f(3) = 2 + 15 = 17$

- $f(n+1) = f(n)^2 * f(n-1)$

  Entonces tenemos que:

  - $f(2) = f(1)^2 * f(0) = 4 * -1 = -4$
  - $f(3) = f(2)^2 * f(1) = 16 * 2 = 32$
  - $f(4) = f(3)^2 * f(2) = 32^2 * -4 = -4096$
  - $f(5) = f(4)^2 * f(3) = -4096^2 * 32 = 536870912$

- $f(n+1) = 3f(n)^2 - 4f(n-1)^2$

  Entonces tenemos que:

  - $f(2) = 3f(1)^2 - 4f(0)^2 = 3 * 2^2 - 4 * 1 = 12 - 4 = 8$
  - $f(3) = 3f(2)^2 - 4f(1)^2 = 3 * 64 - 16 = 176$
  - $f(4) = 3f(3)^2 - 4f(2)^2 = 3 * 176^2 - 4 * 64 = 92672$
  - $f(5) = 3f(4)^2 - 4f(3)^2 = 3 * 92672^2 - 4 * 176^2 = 25764174848$

- $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$

  Entonces tenemos que:

  - $f(2) = f(n-1)/f(n) = f(0)/f(1) = -0.5$
  - $f(3) = f(n-1)/f(n) = f(1)/f(2) = 2/-0.5 = -4$
  - $f(4) = f(n-1)/f(n) = f(2)/f(3) = 0.5/-4 = -1/8$
  - $f(5) = f(n-1)/f(n) = f(3)/f(4) = -4/-1/8 = 4/1/8 = 32$

12. 12

Determine si cada una de las definiciones propuestas es una definición recursiva válida para una función f del conjunto de naturales al conjunto de enteros. Si f está bien definida, encuentre una fórmula para $f(n)$ cuando n es un entero no negativo y pruebe que la formula es valida

- a) Esta esta definida como:
  - $f(0) = 1$
  - $f(n) = -f(n-1) \quad \forall n \geq 1$

  Ahora veamos si esta bien fundado.

  Demostración:

  Ahora, veamos nuestro caso base $f(0)$ esta bien fundado.

- c)

  f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 2f(n + 1) para n mayor a dos.

  No es una función recursiva bien fundada porque con f(2) se genera una cadena infinita que nunca tomará los casos base.

13. 15

- Sea ϵ la cadena vacia, entonces $\epsilon \in Palindromos$
- $'0' \in Palindromos$
- $'1' \in Palindromos$
- $'00' \in Palindromos$
- $'01' \notin Palindromos$
- $'10' \notin Palindromos$
- $'11' \in Palindromos$
- Sea $a : b : c$ una cadena binaria, donde a y c son '0' o '1', mientras que b es una cadena binaria en si, entonces $a : b : c \in Palindromos$ si y solo si $a = c$ y $b \in Palindromos$