Primer Parcial Teoría de Gráficas y Juegos

Oscar Andrés Rosas Hernández [SoyOscarRH@ciencias.unam.mx / 417024956]
Facultad de Ciencias, UNAM, México

1 Problema

Sea G una gráfica de orden n, tamaño m y número de componente $c(G) = k$

- ¿Cuántas subgráficas generadoras de G existen?
  La verdad este ejercicio me tuvo un par de horas dandole vueltas, pero repasando definiciones todo se vuelve mucho mas sencillo.

  Supongamos a $G = (V(G), E(G))$ entonces $G' = (V(G'), E(G'))$ es una subgráfica si y solo si $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$.

  Ahora una subgráfica es generadora si $V(G') = V(G)$.

  Entonces, veamos, lo que tenemos es que para contar las subgráficas generadoras los vértices ya estan fijos, no podemos quitar ninguno, entonces lo único que podemos "moverle" es a las aristas, originalmente tenemos que $|E(G)| = m$, es decir, de manera general para este problema no tenemos ni idea cuales sean las aristas, lo unico que sabemos es que hay m de ellas, supongamos que por ejemplo tiene a $e_1, e_2, \dots, e_m$.

  Entonces podriamos empezar a listas las subgráfica generadoras:
  - $G_0 := (V(G), \{\ \})$
  - $G_1 := (V(G), \{\ e_1\ \})$
  - $G_2 := (V(G), \{\ e_2\ \})$
  - $G_3 := (V(G), \{\ e_3\ \})$
  - $\dots$
  - $G_m := (V(G), \{\ e_m\ \})$
  - $G_{m+1} := (V(G), \{\ e_1, e_2\ \})$

  Espera pero antes de que continuemos, lo que estamos haciendo es contar todos los posibles subconjuntos de un conjunto (en este caso el conjunto de aristas), entonces perfectamente podemos usar el conjunto potencia, y la cardinalidad de este conjunto sera la cardinalidad que estamos buscando.

  Entonces hay 2^m subgráfica generadoras. QED.
- ¿Cuántas aristas hay que agregar para que G sea conexa?
  Que buena pregunta, no porque sea difícil sino porque cuesta argumentarla de una manera que no parezca que es trivial.

  Primeramente podriamos pensar en nuestras k componentes como vertices inconexos, entonces lo que hariamos sería transformar esa grafica de k vertices sin aristas entre si (no puede tener aristas pues si la hubiera entonces el conjunto de esos dos vertices seria una sola componente conexa) en una trayectoria.

Es bien conocida que una trayectoria de n vertices necesita $n-1$ aristas.

Entonces se deduce que bastaria con hacer lo mismo, orderar de alguna manera arbitraria a las componentes conexas, tomar la primera y elegir arbitrariamente un vertice, elegir igualmente un vertice de la segunda componente y crear una arista que los una; despues repetir la idea entre la componente dos y tres y tres y cuatro y asi.

Por lo tanto, bastan $n-1$ aristas.

2 Problema

Demuestra que si G es una gráfica r-regular bipartita con $1 \leq r$ y partición $V(G) = \{ U, W \}$, entonces $|U| = |W|$.

La idea la vamos a sacar del principio del pastor, que dice que si quieres contar la cantidad de ovejas dentro de un campo y sabes que solo tienes ovejas y que todas tiene 4 patas entonces simplemente cuenta las patas y divide entre 4.

Ahora sea d el grafo de cada nodo, y ya que al menos mencionan que es 1-regular entonces al menos tenemos un vertice y $d \geq 1$.

Ahora el numero de aristas asociadas con vertices en U es $|U|d$ y el numero de aristas asociados con W es $|W|d$, ahora en una grafica bipartita cada arista conecta un nodo de U con uno en W.

Entonces el numero total de aristas asociadas con las dos partes es la misma. Entonces $|U|d = |W|d$ y por lo tanto $|U| = |W|$.