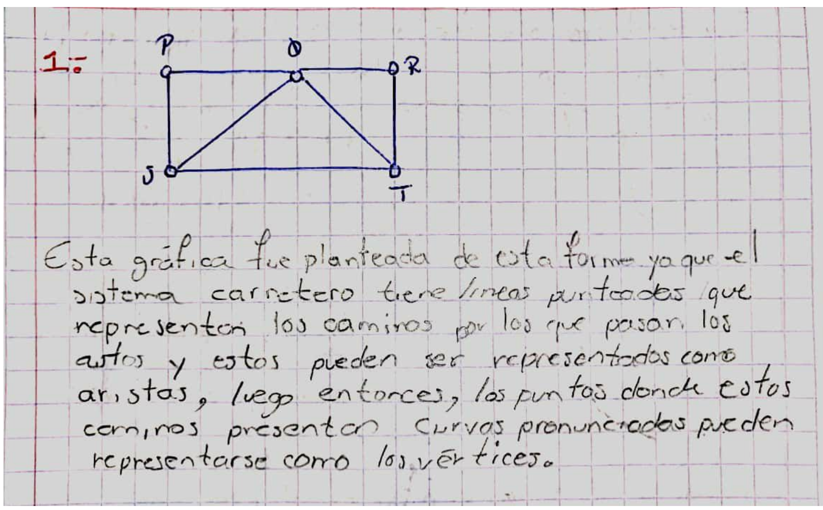
Tarea 1: Gráficas y Juegos

Oscar Andrés Rosas Hernández [SoyOscarRH@gmail.com / 417024956]
Rodrigo Alfredo Lemus Palma [rodrigolemus97@ciencias.unam.mx / 417006954]

Facultad de Ciencias, UNAM, CDMX, México

Primer Problema

Observa la figura 1 y con base en tu criterio plantea una gráfica que la represente, explica el porqué de tu planteamiento.



Segundo Problema

Cuatro estudiantes universitarios Fernando (F), Lourdes (L), Mateo (M) y Pedro (P) están viendo un partido de fútbol en la televisión en un bar.

Durante el entretiempo, entablan una discusión sobre qué equipos de fútbol que han visto jugar en persona: a los New England Patriots (NE), New York Giants (NG), Dallas Cowboys (DC) y Chicago Bears (CB).

Esto es lo que dicen:

- **F**: NE, NG, CB
- **L**: NE, DC, CB
- **M**: NE, NG, DC
- **P**: NG, DC, CB

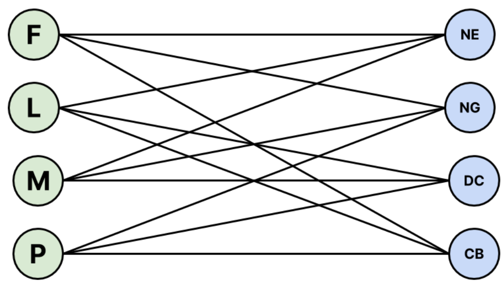
Propón una gráfica que represente esta situación.

Solución:

Lo que se nos ocurrio fue usar no solo una gráfica G, sino una bipartita, de tal manera que U representen a las personas y V a los equipos mientras que las aristas, que una personas vio a un equipo en vivo.

Siendo mas exacto tenemos que:

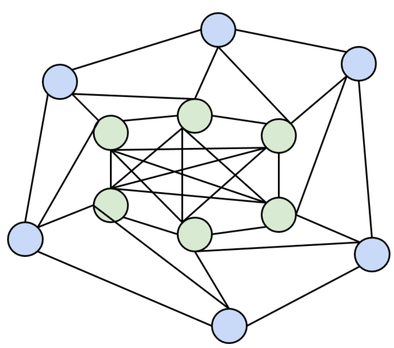
- $Vertices(U) = \{\ F, L, M, P\ \}$
- $Vertices(V) = \{\ NE, NG, DC, CB\ \}$
- $Aristas(G) = \{\ \mathbf{F}NE, \mathbf{F}NG, \mathbf{F}CB, \mathbf{L}NE, \mathbf{L}DC, \mathbf{L}CB, \mathbf{M}NE, \mathbf{M}NG, \mathbf{M}DC, \mathbf{P}NG, \mathbf{P}DC, \mathbf{P}CB\ \}$



TERCER PROBLEMA

Construye una gráfica G, tal que $|V(G)| = 12$, $|A(G)| = 33$, seis vértices tengan grado 4 y seis vértices de grado 7.

- En azul los que tienen grado 4
- En verde los que tienen grado 7



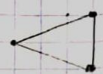
CUARTO PROBLEMA

¿Cuál es el tamaño máximo posible para las siguientes gráficas?

- De orden 3.
- De orden 4.
- De orden 5.
- De orden n con $n \in N$.

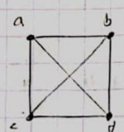
4: Tamaño máximo de las siguientes gráficas

1: Órden 3:



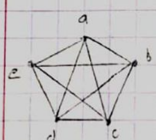
Tamaño máximo: 3

Órden 4:



m_{max}: 6

Orden 5



$m_{max} = 9$

Orden n: Cada posible arista está formada por dos vértices distintos en $V(G)$. La i de V_i la escogemos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ correspondiente a los índices de nuestros n vértices. De aquí que elegimos de entre n opciones

$$\{V_i, \_\}$$

Para el segundo elemento debemos escoger otro vértice pero no puede ser el mismo V_i ya que tendríamos a la pareja $\{v_i, v_i\} = \{v_i\}$ ya que en conjuntos no nos importan las repeticiones pero este no es un subconjunto de $V(G)$ de cardinalidad dos. Por tanto tenemos que escoger V_j con $j = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Por tanto elegimos de las $(n-1)$ opciones. Entonces las posibilidades para elegir $\{v_i, v_j\}$ son $n(n-1)$.

Notemos que

$$\forall \; i,j \in \{1, 2, \ldots, n\} \; i \neq j, \text{ las parejas}$$

$$\{v_i, v_j\} \text{ y } \{v_j, v_i\}$$

aparecen en momentos distintos pero vistas como aristas son iguales. Es decir, las estamos contando dos veces (como cuando sumamos los grados de todos los vértices). Por lo tanto, el número total de posibles subconjuntos de cardinalidad dos de $V(G)$ es

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Quinto Problema

Sea $S = \{ 2, 3, 4, 7, 11, 13 \}$. Dibuja la gráfica simple G cuyo conjunto de vértices es S y tal que $ij \in A(G)$ para $i, j \in S$ si $i + j \in S$ o $|i - j| \in S$. Hagamos una matriz de adjacencia:

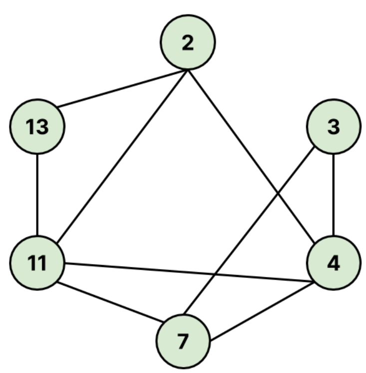
Solución:

Hagamos los fragmentos de la matriz:

	2	3	4	7	11	13
2	@	$0\ (2+3=5$ y $\|2-3\|=1)$	$1\ (2+4=6$ y $\|2-4\|=2)$	$0\ (2+7=9$ y $\|2-7\|=5)$	$1\ (2+11=13$ y $\|2-11\|=9)$	$1\ (2+13=15$ y $\|2-13\|=11)$
3	@	@	$1\ (3+4=7$ y $\|3-4\|=1)$	$0\ (3+7=10$ y $\|3-7\|=4)$	$0\ (3+11=14$ y $\|3-11\|=8)$	$0\ (3+13=16$ y $\|3-13\|=10)$
4	@	@	@	$1\ (4+7=11$ y $\|3-7\|=4)$	$1\ (4+11=15$ y $\|4-11\|=7)$	$0\ (4+13=17$ y $\|4-13\|=9)$
7	@	@	@	@	$1\ (7+11=18$ y $\|7-11\|=4)$	$0\ (7+13=20$ y $\|7-13\|=6)$
11	@	@	@	@	@	$1\ (11+13=24$ y $\|11-13\|=2)$
13	@	@	@	@	@	@

Bueno, ahora podemos llenarla con todos los valores:

	2	3	4	7	11	13
2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1	0
7	0	0	1	0	1	0
11	1	0	1	1	0	1
13	1	0	0	0	1	0

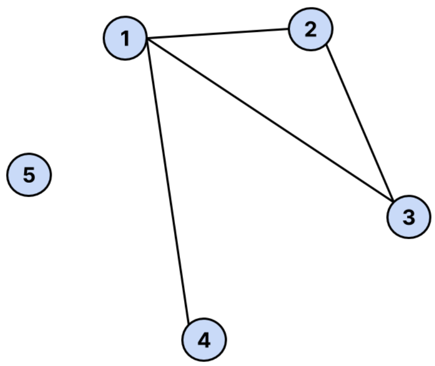


Sexto Problema

Crea tu propio conjunto de enteros S con $|S| > 4$ y dibuja la gráfica simple G cuyo conjunto de vértices es S y tal que $ij \in A(G)$ si i y j están relacionados por alguna regla impuesta a j e i.

Solución:

Digamos que $S = 1, 2, 3, 4, 5$ Y digamos que $ij \in A(G)$ $i, j \in S$ y $i + j \in A(G)$.



Septimo Problema

Determina el orden, tamaño y el grado de cada vértice de la gráfica de la figura 2.

7. Determina el orden, tamaño y el grado de cada vértice de la gráfica de la figura 2.

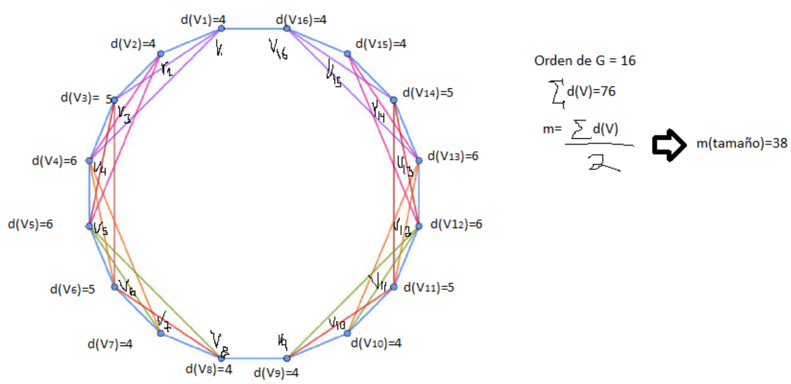
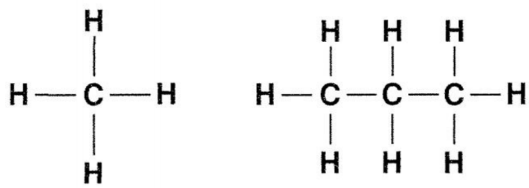


Figura 2: Gráfica del problema 7

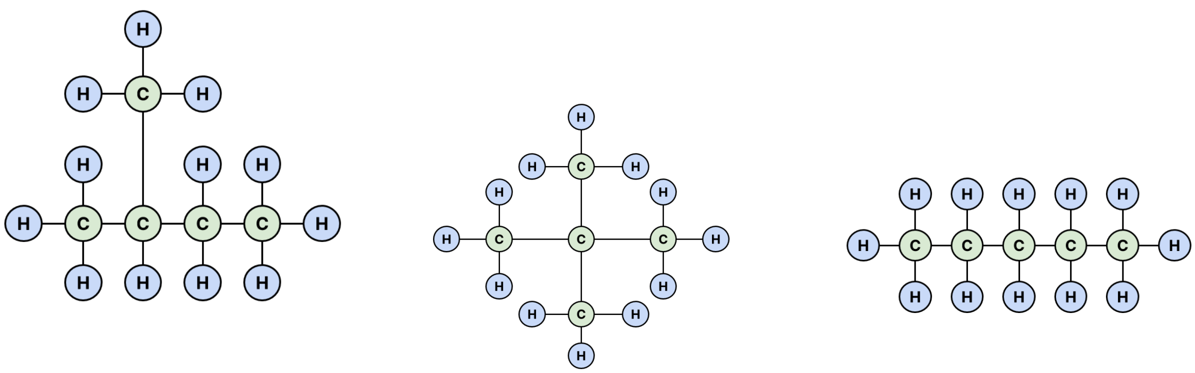
OCTAVO PROBLEMA

La figura 3 representa las moléculas químicas de metano (CH_4) y propano (C_3H_8).

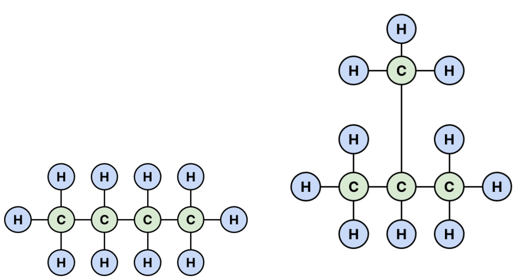
- a) Considerando estos diagramas como gráficas, ¿qué puedes decir acerca de los vértices que representan átomos de carbono (C) y átomos de hidrógeno (H)?
  - Los carbonos tiene todos grado 4.
  - Los hidrogenos tienen grado 1 (por lo tanto son vertices terminales).



- b) La fórmula C_5H_{12} representa a diferentes moléculas orgánicas, sabiendo que el carbono es tetravalente, dibuja las diferentes gráficas de sus isómeros.



- c) Hay dos moléculas químicas diferentes con la fórmula C_4H_{10}, dibuja las diferentes gráficas de las móleculas.



NOVENO PROBLEMA

Demuestra que para cualquier gráfica G con $|V(G)| \geq 2$, existen $a, b \in V(G)$, tal que $grado_G(a) = grado_G(b)$.

Demostración:

Va, vamos a demostrarlo por contradicción.

Recordemos que hay un límite al grado de los vertices, en el caso de una grafica simple es $n-1$. Entonces supongamos que todos son diferentes, entonces creamos una sucesión de dichos grados de los vertices.

- $grado(u_1) = 0$
- $grado(u_2) = 1$
- $\ldots$
- $grado(u_n) = n-1$

Ve que como estamos generando n naturales (considerando el cero) que tiene como tope maximo $n-1$ la unica secuencia que no tiene repetidos es $0, 1, \ldots, n-1$.

Entonces en una grafica con n vertices tenemos que el vertices con grado mayor es $n-1$, pero piensa que significa que un vertice tenga $n-1$ aristas, pues que esta conectado a todos los demas.

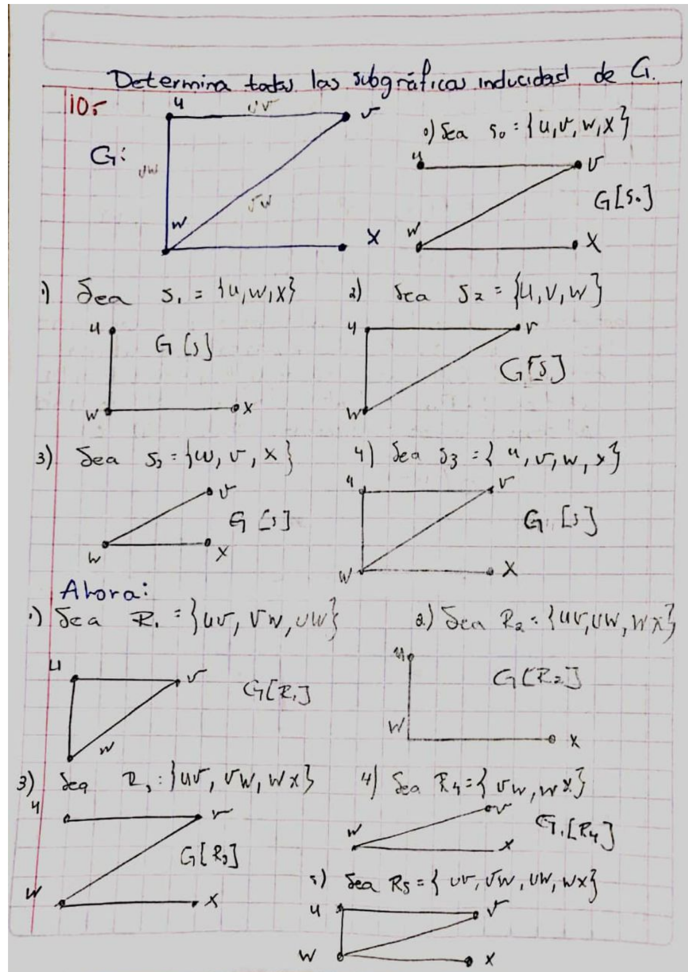
Pero eso no puede ser porque dijimos que $grado(u_1) = 0$, es decir no hay una grafica donde un nodo este conectado a todos los demas y al mismo tiempo haya un vertice que no tenga aristas.

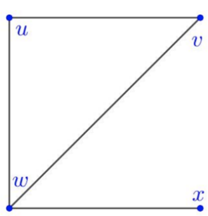
Contradicción.

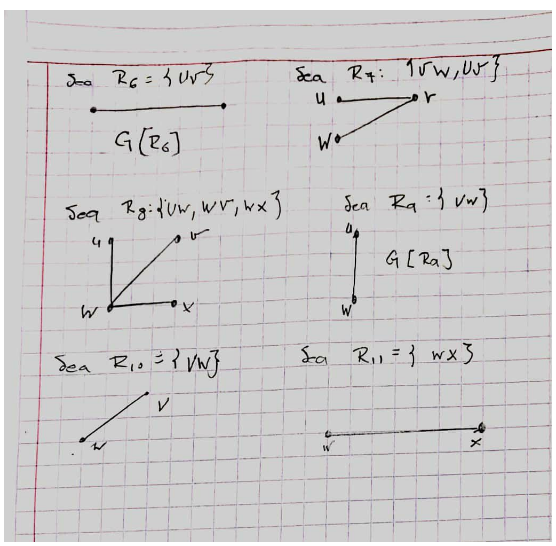
QED.

DECIMO PROBLEMA

Determina todos las subgráficas inducidas de la gráfica G.

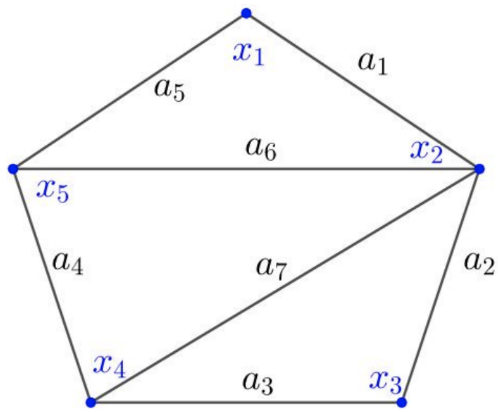






DECIMO PRIMER PROBLEMA

Escribe las matrices de incidencia y adyacencia de la siguiente gráfica.



Matriz de adjacencia:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	1	1	0	1
x_5	1	1	0	1	0

Matriz de incidencia:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a_1	1	1	0	0	0
a_2	0	1	1	0	0
a_3	0	0	1	1	0
a_4	0	0	0	1	1
a_5	1	0	0	0	1
a_6	0	1	0	0	1
a_7	0	1	0	1	0

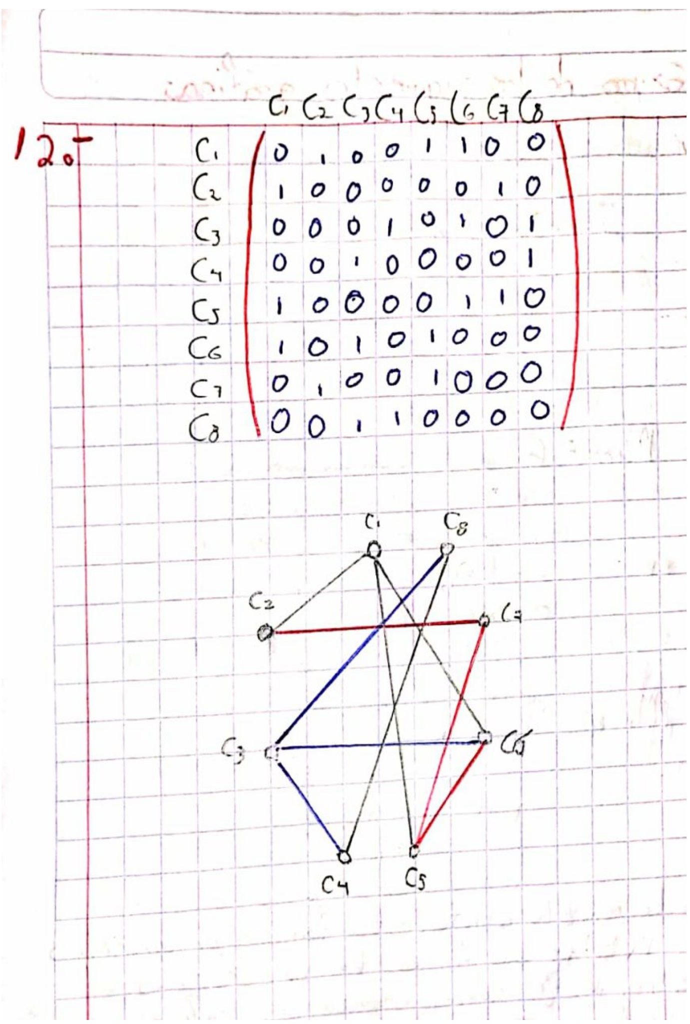
DECIMO SEGUNDO PROBLEMA

Cierta aerolínea tiene vuelos hacia distintas ciudades. Ocho de estas ciudades se indican con $C_1, C_2, \ldots, C_8$. Esta aerolínea tiene vuelos directos entre ciertos pares de ciudades.

Esta información se da en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 01001100 \\ 10000010 \\ 00010101 \\ 00100001 \\ 10000110 \\ 10101000 \\ 01001000 \\ 00110000 \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} = 1$ significa que hay un vuelo directo entre las ciudades $C_i y C_j$. Dibuja la gráfica que representa los vuelos entre las ocho ciudades.



DECIMO TERCERO PROBLEMA

Sea A la matriz de adyacencia para K_3, la gráfica completa de tres vértices. Utiliza inducción matemática para demostrar que para cada entero positivo n, todas las entradas a lo largo de la diagonal principal de A_n son iguales entre si y todas las entradas que no se encuentran en la diagonal principal son iguales entre si.

Demostración:

Va, para K_3 hagamos su matriz de adjacencia:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	1	0	1
x_3	1	1	0

Ahora, para este el caso base se cumple, se cumple que toda la diagonal principal de A_n es igual, todos los valores de esta son cero, y tambien pasa que todos los otros valores son iguales, son 1.

Ahora supongamos que esta proposición se cumple hasta k.

Ahora, veamos que es lo que pasa cuando intentamos añadir ese vértice $k + 1$.

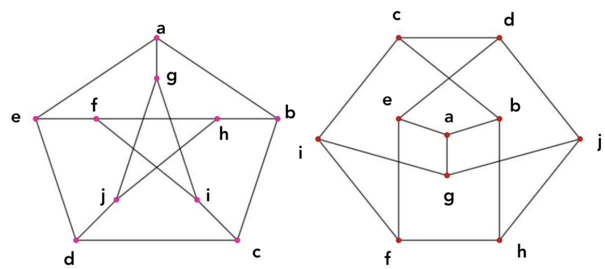
Bueno, toda la matriz de adjacencia va a seguir igual, solo se van a agregar una ultima fila y una ultima columna, la correspondiente a x_{k+1}, ahora, veamos que pasa en $A_{k+1}[k + 1][k + 1]$ (es decir la última casilla, la última casilla de la diagonal principal), esta puede tener dos valores para una grafica simple, 0 o 1, ahora no puede ser 1, porque eso significaría que hay una arista entre dos vertices iguales (el vertice x_{k+1}), y eso no es posible en una grafica simple, por lo tanto tiene que ser cero, y al ser cero eso quiere decir que se sigue cumpliendo que todos los elementos de la diagonal principal son iguales, todos son cero.

Ahora veamos que es lo que pasa en las otras casillas de la nueva fila y columna, aquí por definición el valor tiene que ser uno, porque un uno en una casilla $A_{k+1}[k + 1][i]$ o $A_{k+1}[i][k + 1]$, quiere decir que hay una arista entre x_{k+1} y x_i (con $i \neq k + 1$), y eso por definición de las A_n se cumpla, por eso son graficas completas, por lo tanto se cumple que las nuevas casillas que no son la que esta en la diagonal principal son iguales, todas son 1.

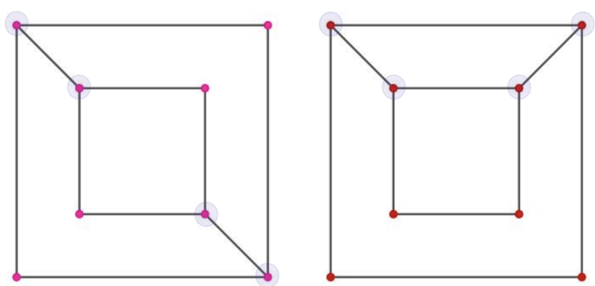
QED.

DECIMO CUARTO PROBLEMA

Al etiquetar adecuadamente los vértices, demuestra que las dos gráficas de la figura 6 son isomorfas.



Explica por qué las dos gráficas de la figura 7 no son isomorfas.



Aqui hay dos ideas equivalentes que decir:

- Por un lado como vimos en clase los isomorfismos preservan caminos, y podemos ver claramente que hay un camino en la segunda grafica entre los vertices de grafo 3.
  Pero no existe dicho camino en la figura 1, por lo tanto no son isomorfas.
- Otra forma de decirlo es que en la segunda figura los 4 vertices de grado 3 forman una subgrafica conexa, pero en la primera figura no es asi, por lo tanto tampoco pueden ser un isomorfismo.