Tarea 1

Oscar Andrés Rosas Hernández. *Facultad de Ciencias - UNAM*

Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$C\frac{d\,V}{dt} = -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \tag{1}$$

I. 1.A

¿Cuanto vale V_∞ en términos de C, R, V_{rest}, I_{ext}? Siendo V_∞ el voltaje en el estado estancionario cuando $t \to \infty$ y $\frac{d}{dx}Vt = 0$.

Pues primero que nada despejemos y apliquemos las condiciones que nos dijeron:

$$\begin{aligned} C\frac{d\,V}{dt} &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ C(0) &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ 0 &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$\begin{aligned} I_{ext} &= \frac{(V - V_{rest})}{R} \\ (I_{ext})(R) &= (V - V_{rest}) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$V_\infty = V_{rest} + (I_{ext})(R) \tag{2}$$

II. 1.B

Modifiquemos a (1) para llegar a algo como: $\tau\frac{d\,V}{dt} = -V + V_\infty$:

$$\begin{aligned} C\frac{d\,V}{dt} &= -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ RC\frac{d\,V}{dt} &= -(V - V_{rest}) + RI_{ext} \end{aligned}$$

Ahora definamos a $RC = \tau$, porque:

- R esta en farads, que se puede ver de muchas maneras, pero una útil es ver que $F = \frac{C}{V} = \frac{s}{\Omega}$ por lo que RC es una cantidad en segundos.
- RC es una constante famosa, que justo indica que tan cerca nos acercamos a que el capacitor este completamente cargado, por ejemplo a 4τ el capacitor esta cargado al 98 %.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau\frac{d\,V}{dt} &= -(V - V_{rest}) + RI_{ext} \\ &= -V + V_{rest} + RI_{ext} \\ &= -V + (V_{rest} + RI_{ext}) && \text{Por (2)} \\ &= -V + V_\infty \end{aligned}$$

III. 2.A

Probemos que $V(t) = V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ es solución a la ecuación diferencial.

Vamos a sustituir como es que es la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d\,V}{dt} &= \frac{d}{dt}V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{d}{dt}\left(V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= -\frac{d}{dt}V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty\frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty\frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Ahora, entonces, veamos que pasa si sustituimos desde un lado:

$$\begin{aligned} C\frac{d\,V}{dt} &= CV_\infty\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= CV_\infty\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \end{aligned}$$

Ahora, por el otro lado:

$$\begin{aligned} -\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} &= -\frac{(V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ &= -\frac{(V_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest}) - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{rest} - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_\infty - V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} - V_\infty}{R} \\ &= -\frac{-V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \\ &= \frac{V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \end{aligned}$$

Si te das cuenta llegamos por ambos lados a lo mismo, por lo que es solución.
De hecho si aplicamos la transformada de Laplace para intentar resolver la ecuación llegaremos a esta solución.

IV. 2.B

Probemos que $V(t) = V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}$ es solución a la ecuación diferencial.

Vamos a sustituir como es que es la derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d\,V}{dt} &= \frac{d}{dt}V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= V_\infty \frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$

Ahora, entonces, veamos que pasa si sustituimos desde un lado:

$$\begin{aligned}C\frac{d\,V}{dt} &= -CV_\infty \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -CV_\infty \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -V_\infty \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{-V_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}\end{aligned}$$

Ahora, por el otro lado:

$$\begin{aligned}-\frac{(V - V_{rest})}{R} + I_{ext} &= -\frac{(V_\infty(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest})}{R} + I_{ext} \\ &= -\frac{(V_\infty(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_{rest}) - RI_{ext}}{R} \\ &= -\frac{V_\infty(e^{-\frac{t}{\tau}}) - V_\infty}{R}\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $V_\infty = 0$, entonces ambos lados son iguales. Así que esta solución es solo válida si y solo si $V_\infty = 0$.
Es decir, esta solución es la que tenemos cuando dejamos a la neurona sola y en paz.