Tarea 4: Gráficas y Juegos

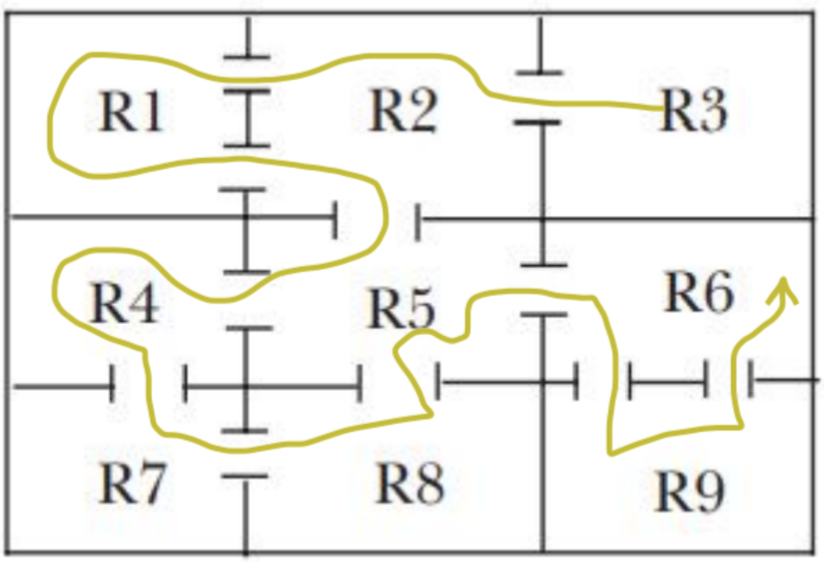
Oscar Andrés Rosas Hernández [SoyOscarRH@gmail.com / 417024956]
Rodrigo Alfredo Lemus Palma [rodrigolemus97@ciencias.unam.mx / 417006954]

Facultad de Ciencias, UNAM, CDMX, México

2 Problema

El diagrama de la Figura 2 muestra las nueve habitaciones del segundo piso de una casa con puertas entre varias estancias ¿Es posible comenzar en alguna habitación y caminar para que cada puerta sea cruzada exactamente una vez? ¿Cómo se relaciona esta pregunta con la teoría de gráficas?

Claro, mira:



La idea es ver esto como una grafica, donde las habitaciones son nodos / vertices y las puertas son aristas en este caso no es una grafica simple pues por ejemplo hay mas de un vertice entre R6 y R9 (tambien podemos asignarles un peso a cada arista en este casi casi todas tendrian 1 pero entre R6 y R9 habria un 2).

Total, ahora el problema se reduce a encontrar un camino euleriano.

4 Problema

¿Cuál es la longitud de un paseo euleriano en un árbol de orden $n \geq 2$?

Pues siendo rigurosos un arbol no tiene un paseo euleriano. Pero hay algo que se parece mucho: La técnica del recorrido de Euler (ETT), que se llama asi por el gran Leonhard Euler, es un método para representar árboles.

El árbol se ve como una grafica dirigida que contiene dos aristas dirigidos para cada vertice del árbol.

Hay $|V| - 1$ aristas, y vamos a pasar por cada una dos veces, una bajando y otra subiendo. Por lo tanto tendremos $2(|V| - 1)$ viajes por las aristas, vamos a empezar en la raiz y cada vez que viajemos por un vertice lo agregaremos al caminno, por lo tanto habra $2|V| - 1$ vertices en el camino.

6 Problema

Demuestra que si G es una gráfica Euleriana, entonces G no puede tener puentes

Ok, entonces sea G unan grafica euleriana, es decir que todos sus vertices tiene grado par pero no son 0.

Supongamos entonces que existe un puente, sea ese puente (e) aquel que conecte a u, v, ahora por definición de un puente tenemos que $G - e$ ya no es conexa, es decir ahora el vertice u tiene un grado impar, veamos que pasa si sumamos el grado de todos los vertices de la componente a la que pertence u.

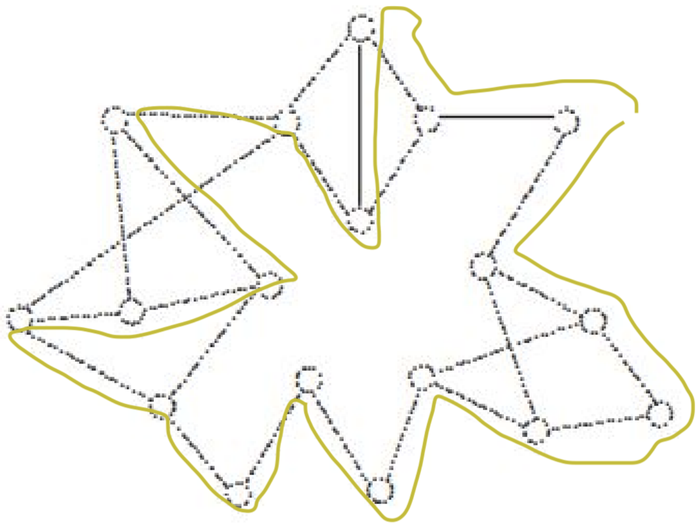
- Por un lado es la suma de un puros vertices pares y u que es impar, por lo tanto impar
- Pero por el primer teorema de graficas tenemos el resultado de que la suma de grados es igual a dos veces la cantidad de aristas, por lo tanto es un numero par.

Contradicción.

8 Problema

La figura muestra una gráfica G de orden 18 ¿G es hamiltoniana?

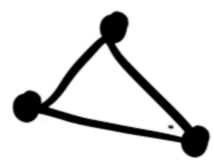
Pues si, para que una grafica sea hamiltoniana basta con que exista un camino cerrado hamiltoniano es decir que visita todos los vertices una vez. Mira:



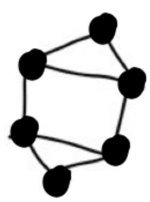
10 PROBLEMA

- **Encuentra una gráfica que sea Euleriana y Hamiltoniana**
- **Encuentra una gráfica que sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana**
- **Encuentra una gráfica que sea Hamilitoniana y que no sea Euleriana**
- **Encuentra una gráfica que no sea Euleriana y que no sea Hamiltoniana**

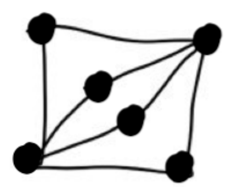
H✓ E✓



H✓ E✗



H✗ E✓



H✗ E✗