Tarea 3: Gráficas y Juegos

Oscar Andrés Rosas Hernández [SoyOscarRH@gmail.com / 417024956]
Rodrigo Alfredo Lemus Palma [rodrigolemus97@ciencias.unam.mx / 417006954]

Facultad de Ciencias, UNAM, CDMX, México

1 Problema

Demuestra que si una gráfica conexa G tiene todos sus vértices de grado par, entonces G no contiene puentes.

It's a little easier: Si G contiene un puente entonces sea G' una de las subgraficas que se harian gracias a ese puente.

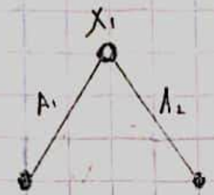
La suma de los grados de todos los vertices de G' es igual a 2 veces el numero de aristas en G', por lo tanto ese numero tiene que ser a fuerzas par, pero todos los nodos que tiene G' tienen un grado par excepto el nodo del que le arrancamos la arista que era un puente, por lo tanto la suma de los grados de vertices seria sumar puros numeros pares y un solo par, dando una suma impar, por lo tanto tenemos una contradiccion, por un lado porque sabemos por el teorema fundamental de graficas, el primero que vimos en clase que que la suma de grados de todos los vertices tiene que ser par, pero por otro lado estamos llegando a que ese numero tiene que ser impar.

QED.

2 PROBLEMA

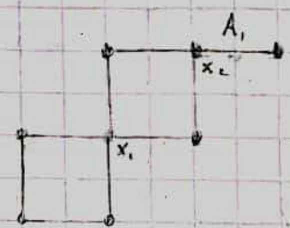
2.- Da un ejemplo de una gráfica que:

a) Contiene más puentes que vértices de corte



X_1 es vértice de corte
A_1, A_2 son puentes

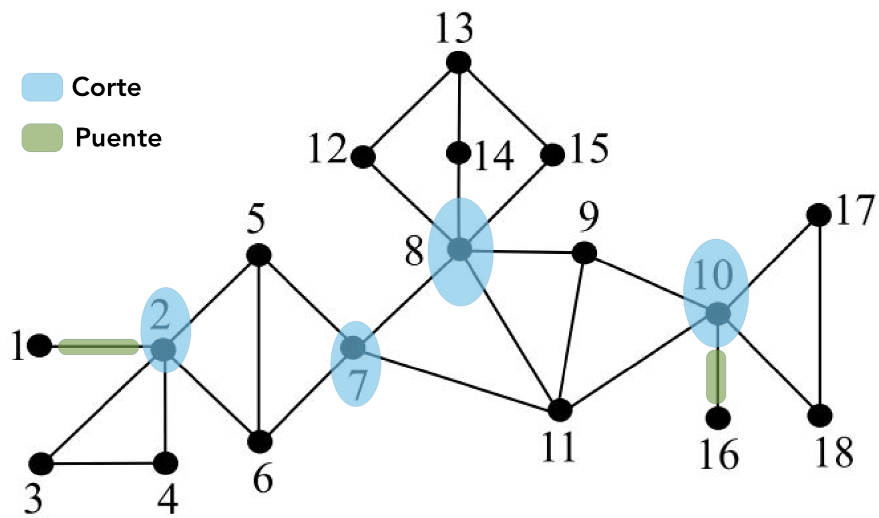
b) Contiene más vértices de corte que puentes.



X_1, X_2 vértices de corte
A es puente

3 Problema

Dada la grafica de la figura 1 determina cuales son vertices de corte y que aristas son puentes:



4 Problema

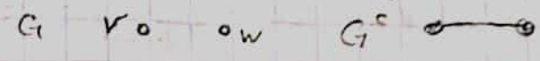
4: Demostrar que $\forall$ gráfica G no trivial G es conexa o G^c es conexa.

P.D: Si G es disconexa entonces G^c es conexa

Primero.

Sean $v, w \in V(G)$ ya que es disconexa $vw \notin A(G)$

así, $v, w \in A(G^c)$, entonces existe una trayectoria de v a w.

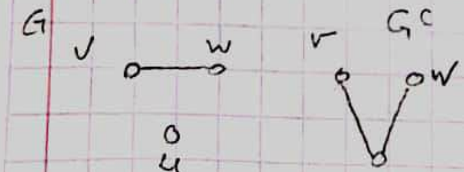


$\therefore$ El complemento de G es conexo

Ahora

Sean $v, w \in V(G)$ con $vw \in A(G)$, pero ya que G es disconexa, entonces debe existir $u \in V(G)$ en otra componente conexa de G así que ni uv ni $uw \in A(G)$, entonces $uw, vu \in A(G^c)$ volviendo a G^c conexa

$\therefore$ Si G es disconexa, G^c es conexa



P.D. Si G^c es disconexa, G es conexa

Sean $v, w \in V(G)=V(G^c)$ con $vw \notin A(G^c)$

entonces $vw \in A(G)$

$\rightarrow$ G es conexo

Ahora

Sean $v, w \in V(G^c)$ con $vw \in A(G^c)$ pero

ya que G^c es disconexa, debe existir

$u \in V(G)$ en otra componente conexa de G^c

así que ni uv ni $uw \in A(G^c)$

entonces $uw, vu \in A(G)$ volviendo a G conexa

$\therefore$ Si G^c disconexa $\rightarrow$ G conexa

$\therefore$ G es conexa o G^c es conexa $\blacksquare$

5 Problema

Demuestra que si G es una grafica 2 - conexa, entonces todo par de vertices esta en un ciclo.

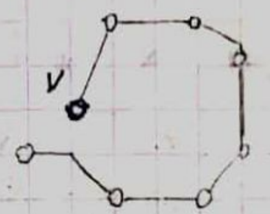
Recordemos que una grafica G es 2 - conexa si y solo si quitando cualquier vertice esta seguia siendo conexa. Ahora vamos a elegir a u como un nodo que tiene al menos dos vecinos, estos seran v, w.

Ahora como es 2 conexa entonces hay un camino de v a w que no incluye al nodo (u), vamos a llamarlo $caminito := v, x_1, x_2, \ldots, x_n, w$ ahora nota que que $v, x_1, x_2, \ldots, x_n, w, u, v$ es un ciclo, esto se puede hacer siempre.

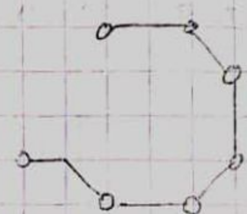
6 Problema

6.- Demuestra o da un contraejemplo:

a) Si un vértice v de una gráfica G no está en ningún ciclo de G entonces v es un vértice de corte.



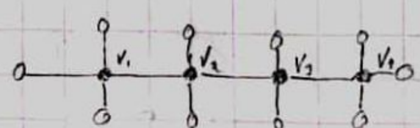
Si eliminamos el vertice V el cual no está en un ciclo:



Y la gráfica sigue siendo conexa, v no fue vértice de corte

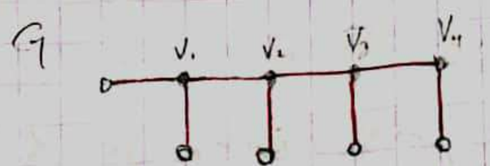
$\therefore$ La proposición es falsa

b) Un árbol de orden 3 o más tiene más vértices de corte que finales.



V_i $i=1,\dots,4$ son vértices de corte, los demás son vertices finales en total tenemos 4 vertices de corte y 10 vértices finales, por tanto la proposición es falsa.

c) Un árbol de orden 3 o más tiene más vértices de corte que puentes



V_i $i=1,..,4$ son vértices de corte, mientras que todas las aristas son puentes. La gráfica G suma 8 puentes.

$8 \ngtr 4$

$\therefore$ La proposición es falsa.

7 Problema

Demuestre que una grafica G es conexa, no trivial y no posee ciclos entonces hay un vertice de grado uno en G.

Por contradiccion, supongamos que no es cierto, que hay una grafica G donde todos sus vertices tiene un grado al menos de dos, pues bien, tomemos cualquier vertice, como sabemos que tiene un grado mayor de 1 entonces al menos tiene a dos vecinos sean u, w esos dos vecinos que veremos.

Ahora vamos por partes, supongamos que es una grafica conexa, entonces existe un camino entre cualquier quiera dos vertices en especial un camino entre uw, y considerando al vertice original tenemos un ciclo, contradiccion.

Bueno, ahora supongamos que no existe un ciclo, entonces no existe un camino entre uw (sino ya vimos que existiria un ciclo) por lo tanto G no es conexa.

Asi que no importa por donde lo veamos, contradiccion.

8 Problema

8.- Sea G una gráfica de orden n y tamaño m. Demuestra que si G no posee ciclos y $m = n-1$ entonces G es conexa.

Teo: Sea G gráfica de orden n y tamaño m. Si G es conexa y no posee ciclos entonces: $m = n-1$

Pba:

Supongamos que $G_1, G_2, \dots, G_w$ son las componentes conexas de G. P.D. $w = 1$ entonces G conexa.

Sup. G_i tiene orden n_i y tamaño m_i, podemos notar que $n_1 + n_2 + \dots + n_w = n$ y $m = m_1 + m_2 + \dots + m_w$

Ya que G no posee ciclos, G_i conexa y por el teorema enunciado al principio $m_i = n_i - 1$. Así,

$$m = \sum_{i=1}^{w} m_i = \sum_{i=1}^{w} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{w} n_i - \sum_{i=1}^{w} 1 = \sum_{i=1}^{w} n_i - w$$

$$= n - w$$

Pero por hipótesis: $m = n-1$

entonces $n - 1 = n - w \longrightarrow w = 1$

$\therefore$ G es conexa ∎

9 PROBLEMA

Demuestra que si v es un vertice de corte de una grafica G, entonces v no es un vertice de corte de G^C.

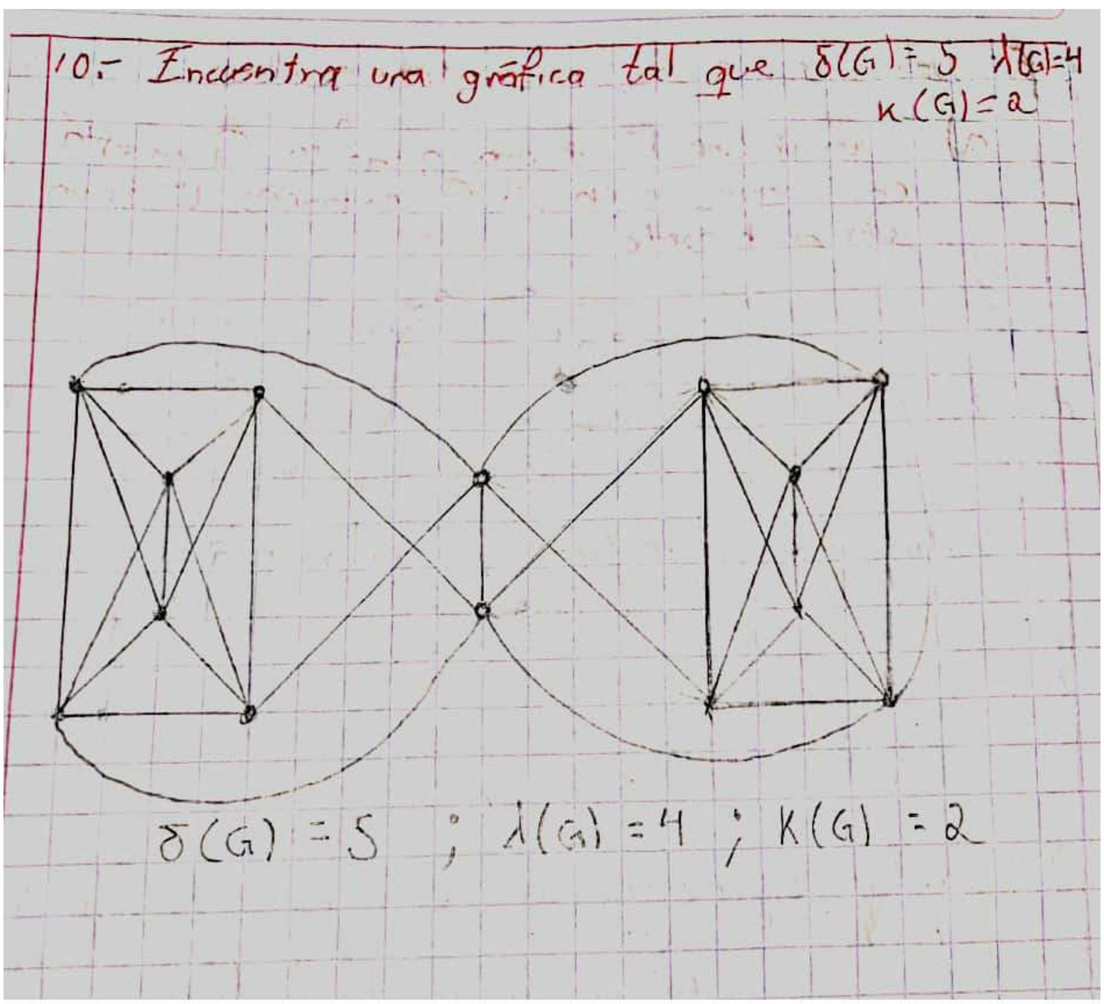
Sea v un vertice de corte de G, para probar que v es un vertice de corte en G^C basta ccon mostrar que $G^C - v$ es conexa, ahora, sean $u, w \in G - v$, la meta es probar que existe un $u - w$camino en G^C.

Como v es un vertice de corte en G entonces $G - v$ tiene mas de un componente, por lo tanto tenemos varios casos:

Si es que v, w estan dentro de diferentes componentes conexas entoncees $uw \in A(G^C)$ entonces todo listo.

Si es que estan en la misma componente la cosa se pone mas divertida, sea C1 la componente donde viven v, w, entonces tiene que existir al menos otra componente en $G - v$, eligamos un vertice de alguna de esas otras componentes $z \in C2$ donde $C2 \subset G - v$, como no existe una arista entre elementos de $C1$ y $C2$ dentro de G, por lo tanto z tiene que compartir una arista con todos los vertices de $C1$, por lo tanto existe un camino uw, de hecho este es uzw.

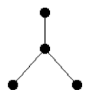
10 PROBLEMA



11 Problema

Dibuja todas las graficas posibles conexas de orden 4 y da el numero de conexidad puntual y lineal de cada una de ellas.Dibuja todas las graficas posibles conexas de orden 4 y da el numero de conexidad puntual y lineal de cada una de ellas.

claw = $K_{1,3}$ g6: Cs

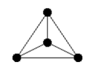


puntual = 1
lineal = 1

P_4 g6: Ch

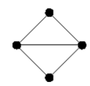
puntual = 1
lineal = 1

$K_4 = W_3$ g6: C~



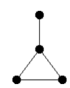
puntual = 3
lineal = 3

diamond = K_4 - e = 2-fan g6: Cz



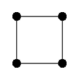
puntual = 2
lineal = 2

paw = 3-pan g6: Cx



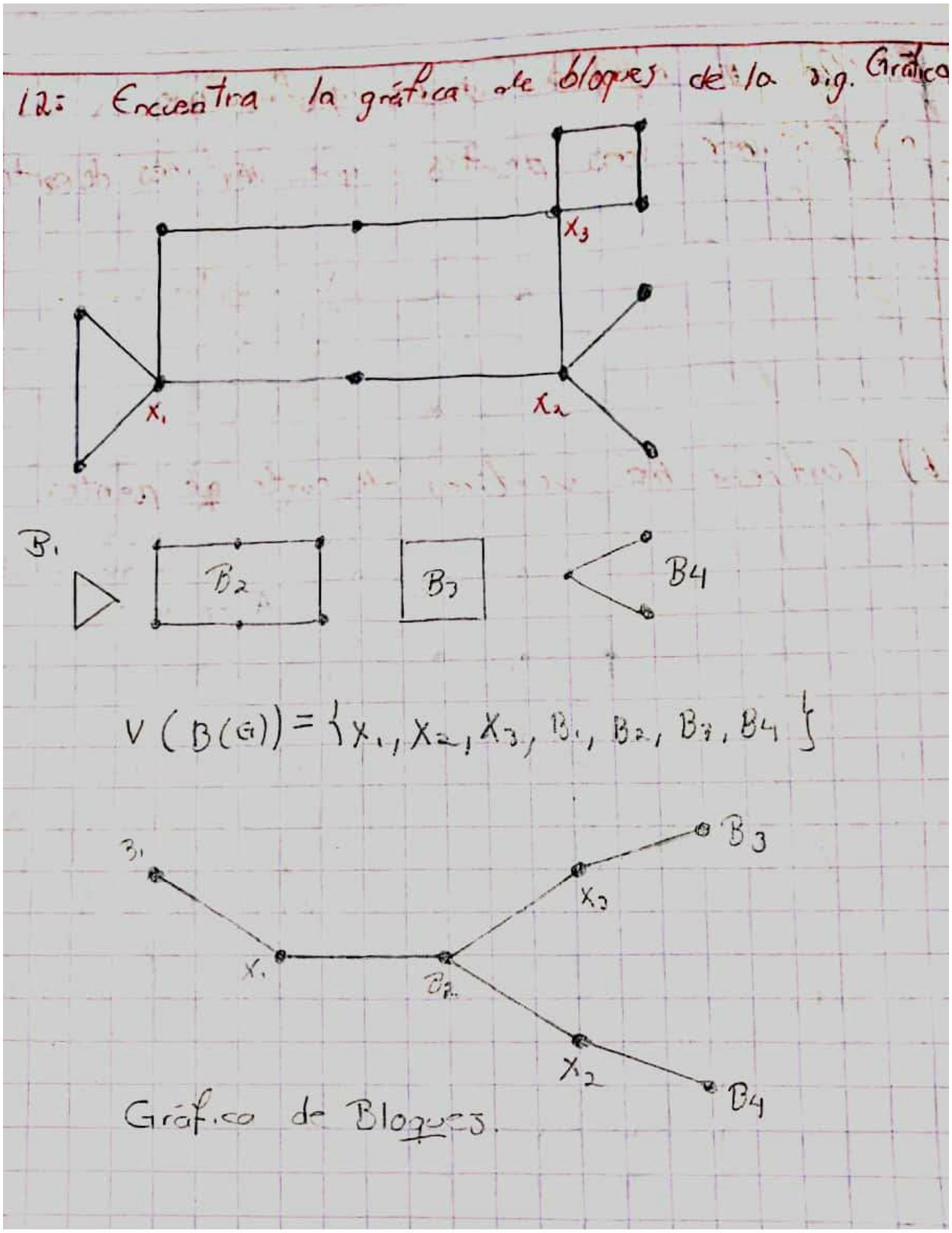
puntual = 1
lineal = 1

$C_4 = K_{2,2}$ g6: Cr



puntual = 2
lineal = 2

12 PROBLEMA


12: Encuentra la gráfica de bloques de la sig. Gráfica
X3
X1
X2
B1
B2
B3
B4
V(B(G)) = {X1, X2, X3, B1, B2, B3, B4}
B1
X1
B2
X3
B3
X2
B4
Gráfico de Bloques.

13 Problema

Pues, una trayectoria es bastante sencilla, supongamos que tenemos una trayectoria 3, esta tiene 3 vertices, digamos $x1 - - - x2 - - - x3$, entonces tenemos ahi dos bloques, $x1x2$ y $x2x3$, entonces podemos ver a la grafica de bloques de la trayectoria n como un isomorfismo de la trayectoria $n - 1$.

La idea es tan facilmente extensible a n que siento que la demostracion seria trivial.