网络流

ynycoding

2023.12.10

网络流简介

网络流是一个定义在图上的概念。它定义在一个带权无向图上，其中权值被称为容量，表示这条边能够承受的最大流量大小。然后拥有两个特殊的节点：源点与汇点，表示你需要设计一种把流量从源点s运送到汇点t的方案，使得每条边的流量都不超过其容量大小。

性质：源点没有入边，汇点没有出边，除了这两个点之外的所有点必须满足流出的流量之和与流入的流量之和相等。

最大流：在满足网络流要求的情况下从源点流到汇点的最大流量大小。记为$f(s,t)$。

残量网络：图中剩下的容量组成的新图。

下面(u,v,c)表示一条从u到v，容量为c的边。

EK算法

EK算法：每次对一张网络流图，每次在残量网络中找到一条流量不为0的路径，对其进行增广。
复杂度：$O(VE^2)$。
由于其效率过于低下，在OI中几乎用不到。

Dinic算法及当前弧优化

在EK算法基础上进行了改进，优化了寻找路径的方式，同时每次对多条路径增广。
具体来说：Dinic算法每次增广前会先跑一遍bfs，对残量网络按到S距离分层，只寻找满足$d_v = d_u + 1$的路径。
同时我们每次不再只增广一条路，而是对所有满足条件的路径同时增广。
当前弧优化：在每次增广时对每个点维护一个指针，它指向最靠前的满足增广条件的边（$d_v = d_u + 1$且$cap_{u,v} > 0$）
复杂度：$O(mn^2)$。
同时在二分图上复杂度变为$O(m\sqrt{n})$。
由于Dinic好写，并且速度较快，于是它是OI中最常使用的最大流算法。

最高标号预流推进算法(HLPP)

复杂度有保证，为$O(n^2\sqrt{m})$。但由于一般题目中建出来的图都有特殊性质，经常打不过Dinic。
在OI比赛中未曾见到过（至少作者并没有）。可以大致提一下。
OI-wiki:HLPP。

最小路径覆盖

题面

给定一张DAG，要求用最少的路径覆盖整张图。数据范围：$n, m \le 100$。

最小路径覆盖

题面

给定一张DAG，要求用最少的路径覆盖整张图。数据范围：$n, m \leq 100$。

将每个点拆为两个点：入点和出点。
如果原图存在一条边(u, v)，那么连一条从u的出点向v的入点的流量为1的边，并且从s向所有出点连流量为1的边，从所有入点向t连流量为1的边。
$m - flow$就是答案。

Luogu3163

题面

Alice 和 Bob 居住在一个由 N 座岛屿组成的国家，岛屿被编号为 0 到 $N-1$。某些岛屿之间有桥相连，桥上的道路是双向的，但一次只能供一人通行。其中一些桥由于年久失修成为危桥，最多只能通行两次。
Alice 希望在岛屿 a_1 和 a_2 之间往返 a_n 次（从 $a1$ 到 $a2$ 再从 $a2$ 到 $a1$ 算一次往返）。同时，Bob 希望在岛屿 b_1 和 b_2 之间往返 b_n 次。这个过程中，所有危桥最多通行两次，其余的桥可以无限次通行。请问 Alice 和 Bob 能完成他们的愿望吗？
$4 \le N \le 50$，$0 \le a_1, a_2, b_1, b_2 \le N-1$，$1 \le a_n, b_n \le 50$。

题面

Alice 和 Bob 居住在一个由 N 座岛屿组成的国家，岛屿被编号为 0 到 $N-1$。某些岛屿之间有桥相连，桥上的道路是双向的，但一次只能供一人通行。其中一些桥由于年久失修成为危桥，最多只能通行两次。
Alice 希望在岛屿 a_1 和 a_2 之间往返 a_n 次（从 $a1$ 到 $a2$ 再从 $a2$ 到 $a1$ 算一次往返）。同时，Bob 希望在岛屿 b_1 和 b_2 之间往返 b_n 次。这个过程中，所有危桥最多通行两次，其余的桥可以无限次通行。请问 Alice 和 Bob 能完成他们的愿望吗？
$4 \le N \le 50,\ 0 \le a_1, a_2, b_1, b_2 \le N-1,\ 1 \le a_n, b_n \le 50$。

先$S->a1,b1 \quad a2,b2->T$跑一遍，然后$S->a1,b2 \quad a2,b1->T$再跑一遍。容易证明，有解当且仅当两次都满流。

最小割

对于一个图$G=(V,E)$，它的一个割定义为一种把V划分为两个集合S,T的方式，使得$s\in S,t\in T$。
割的容量$cap(S,T)$定义为$\sum_{u\in S,v\in T,(u,v)\in E}cap(u,v)$。意思就是需要断掉的边的容量之和，使得$S$的点不能到达$T$的点。
最小割就是使得$cap(S,T)$最小的一种划分方式。

最小割最大流定理

利用对偶原理可以得出最小割和最大流相等。
可以感性理解一下。
大概就是最小割限制了最大流的大小，而最大流又给出了一种可行的最小割，于是两者就相等了。

求最小割的方案

先跑一遍Dinic，然后从s开始bfs，沿着$c > 0$的边走，能到的点全部划到S，剩下的划到T。
大致证明：在跑完最大流后残量网络不连通，于是按照残量网络的连通块划分。而对于任意一个点集V都会满足其流入量之和等于流出量之和。于是S的流出量之和就是$f(s,t)$。于是此时被删掉的边容量之和就是$f(s,t) = c(s,t)$。

Luogu 4313

题面

小 P 所在的班级要进行文理分科。他的班级可以用一个 $n \times m$ 的矩阵进行描述，每个格子代表一个同学的座位。每位同学必须从文科和理科中选择一科。同学们在选择科目的时候会获得一个满意值。满意值按如下的方式得到：

1. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了文科，则他将获得 $art_{i,j}$ 的满意值，如果选择理科，将得到 $science_{i,j}$ 的满意值。
2. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了文科，并且他相邻（两个格子相邻当且仅当它们拥有一条相同的边）的同学全部选择了文科，则他会更开心，所以会增加 $same\_art_{i,j}$ 的满意值。
3. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了理科，并且他相邻的同学全部选择了理科，则增加 $same\_science_{i,j}$ 的满意值。

小 P 想知道，大家应该如何选择，才能使所有人的满意值之和最大。请告诉他这个最大值。

$n, m \leq 100$，读入数据均 ≤ 500。

Luogu4313

经典最小割题。先假设所有人文理都选，然后S向u连接容量为art的边，u向T连接容量为$science$的边。这样每个人必须割掉一条边，表示放弃一种。
对于第二种收益，先假设全部获得。然后从S连一条容量为$sameart$的边到虚点u，u再向所有有关的点连一条inf边。这样要么放弃收益，要么有关的同学全部放弃理科。
第三种类似。

LOJ 2384

题面

经过千辛万苦小 A 得到了一块切糕，切糕的形状是长方体，小 A 打算拦腰将切糕切成两半分给小 B 。出于美观考虑，小 A 希望切面能尽量光滑且和谐。于是她找到你，希望你能帮她找出最好的切割方案。

出于简便考虑，我们将切糕视作一个长 P 、宽 Q 、高 R 的长方体点阵。我们将位于第 z 层中第 x 行、第 y 列上 $(1 \le x \le P, 1 \le y \le Q, 1 \le z \le R)$ 的点称为 (x, y, z) ，它有一个非负的不和谐值 $v(x, y, z)$ 。一个合法的切面满足以下两个条件：

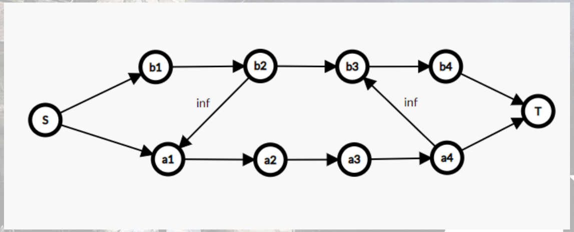
1. 与每个纵轴(一共有 $P \times Q$ 个纵轴)有且仅有一个交点。即切面是一个函数 $f(x, y)$ ，对于所有 $1 \le x \le P, 1 \le y \le Q$ ，我们需指定一个切割点 $f(x, y)$ ，且 $1 \le f(x, y) \le R$ 。
2. 切面需要满足一定的光滑性要求，即相邻纵轴上的切割点不能相距太远。对于所有的 $1 \le x, x' \le P$ 和 $1 \le y, y' \le Q$ ，若 $|x - x'| + |y - y'| = 1$ ，则 $|f(x, y) - f(x', y')| \le D$ ，其中 D 是给定的一个非负整数。可能有许多切面 f 满足上面的条件，小 A 希望找出总的切割点上的不和谐值最小的那个，即 $\sum_{x,y} v(x, y, f(x, y))$ 最小。

$P, Q, R \le 40, 0 \le D \le R$ ，且给出的所有的不和谐值不超过 1000 。

LOJ 2384

将每个点拆成$R-1$，与S,T一起依次连接R条边，边权为不和谐值，割掉这条边表示付出边权的代价。

对于所有相邻的点，对于每条边按如下方式进行限制：



可以发现这样可以保证相邻的高度差一定≤ 1。

LOJ 2042

题面

考虑有 n 个点的无向连通图中所有点对的最小割的容量，共能得到 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个数值。求这些数值中互不相同的有多少个。

$n \leq 1000, m \leq 10000$ 。

LOJ 2042

题面

考虑有 n 个点的无向连通图中所有点对的最小割的容量，共能得到 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个数值。求这些数值中互不相同的有多少个。

$n \leq 1000, m \leq 10000$ 。

每次任意找到两个点求最小割。
容易发现任何分别处于源点集和汇点集的点对的最小割不可能大于当前求出来的。
我们可以根据这个建一棵树。容易发现树上点对的答案就是路径min。可以证明一定一条边的割集就是子树内外的点。

最大权闭合子图

给定一个有向图，点有点权。如果一个点u被选了，所有u的出边指向的点v也必须选。求最大收益。（点权可以为负数）
利用最小割来解决。先假设所有正点权都选。正点权连到S，表示放弃这个点，负点权连到T，表示选择这个点。原图中所有(u,v)连接一条(u,v,∞)的边。

BZOJ1391

题面

有m个工作，m种机器，每种机器你可以租或者买过来. 每个工作包括若干道工序，每道工序需要某种机器来完成，你可以通过购买或租用机器来完成。租用的机器只能用一次，可以多次租用。现在给出这些参数，求最大利润。

$1 \le n \le 1200, 1 \le m \le 1200$。

BZOJ1391

题面

有m个工作，m种机器，每种机器你可以租或者买过来. 每个工作包括若干道工序，每道工序需要某种机器来完成，你可以通过购买或租用机器来完成。租用的机器只能用一次，可以多次租用。现在给出这些参数，求最大利润。

$1 \le n \le 1200, 1 \le m \le 1200$。

把原来的inf边改成租用的代价，来表示可以付出一定代价不选后面的点即可。

上下界循环流

循环流：没有源汇网络流。
上下界循环流：在网络流基础上，每条边多给一个下界，表示至少流这么多。
先强制每条边流下界这么多。建立超级源汇点S, t，令d_u为u的流出量-流入量，如果$d_u < 0$，那么连(S, u, d_u)，否则$d_u < 0$连$(u, T, -d_u)$。
最后跑一边最大流，检查一下是否满流。
正确性：这种做法保证了流量平衡，并且如果有解一定可以按如上方式构造。

上下界最大流

给定源点汇点s,t，求上下界最大流。
连接(t,s,∞)，先跑一遍上下界循环流。然后再把(t,s)边断掉，再跑一遍s到t的最大流。
大致证明：首先我们求出了一组合法的流，然后在这组流的基础上增广。容易发现一定可以增广出最大流。

上下界最小流

给定源点汇点s, t，求上下界最大流。
连接(t, s, ∞)，先跑一遍上下界循环流。然后再把(t, s)边断掉，再跑一遍t到s的最大流。
大致证明：首先我们求出了一组合法的流，然后在这组流的基础上退流。容易发现一定可以退出最小流。

CF1416F

题面

对于大小为 $n \cdot m$ 的矩阵 A 和 B，其中 A 的每个元素为一个权值 $w(i,j)$，B 的每个元素为一个方向 L/R/D/U。
初始你在 (i,j)，若 $B_{i,j}=L$，你可以走到 $(i,j-1)$ 处，依次类推。
定义 $S_{i,j}$ 表示从 (i,j) 出发能够到达的点的 $A_{i,j}$ 的和。
给定矩阵 S，构造 A 和 B 使得其生成的矩阵为 S。
A 的每个元素均为正整数。
$1 \le n \cdot m \le 10^5, S_{i,j} \in [2,10^9]$

CF1416F

题面

对于大小为 $n \cdot m$ 的矩阵 A 和 B，其中 A 的每个元素为一个权值 $w(i,j)$，B 的每个元素为一个方向 L/R/D/U。
初始你在 (i,j)，若 $B_{i,j} = L$，你可以走到 $(i,j-1)$ 处，依次类推。
定义 $S_{i,j}$ 表示从 (i,j) 出发能够到达的点的 $A_{i,j}$ 的和。
给定矩阵 S，构造 A 和 B 使得其生成的矩阵为 S。
A 的每个元素均为正整数。
$1 \le n \cdot m \le 10^5, S_{i,j} \in [2, 10^9]$

容易发现最终构成一个基环树森林。
如果一个方格周围有更小的值，那么显然可以构造。否则必须要有相等的值来变成环。
容易发现我们可以将一个偶环拆成若干个二元环来避免不能整除的情况。于是考虑构造环。
使用上下界可行流即可。

CF1592F2

题面

https://codeforces.com/problemset/problem/1592/F2

最小费用最大流简介

最小费用最大流（简称费用流）定义类似网络流，每条边多了一个费用，要求在求出最大流的基础上满足费用最小。下面(u,v,c,w)表示一条从u到v，容量为c，费用为w的边。

SSP算法

SSP算法：每次对一张网络流图，每次在残量网络中找到一条流量不为0的**最短**路径，对其进行增广。

如果图上存在单位费用为负的圈，SSP 算法正确无法求出该网络的最小费用最大流。此时需要先使用消圈算法消去图上的负圈。

由于会存在负权边，只能使用spfa找最短路。

复杂度：$O(nmf(s,t))$。

Prime-Dual算法

使用Johnson算法，使得可以在SSP算法基础上使用Dijkstra。
每次$h_u += dis's, u$，其中$dis'_{u,v} = dis_{u,v} - h_v + h_u$。
复杂度：$O(m \log n f(s,t) + nm)$。

capacity-scaling算法

capacity-scaling算法复杂度关于流量是弱多项式的。
算法流程：首先把图变成一个无源汇循环流。然后从大到小枚举一个2^t，每次求出$E_t=\{(u,v,\lfloor\frac{c}{2^t}\rfloor,w)|(u,v,c,w)\in E\}$的费用流。
具体就是在E_{t+1}的基础上，把所有边流量$\times 2$，然后需要给若干边流量加上一。给(u,v)加一时可以跑spfa找到从v到u的最短路，然后如果距离<0就增广。
复杂度：$O(m^2\log C)$。
如果太懒，可以写一个丐版cs，我愿称之为phased-augmentation。具体就是仍然类似地枚举t，然后每次只考虑$c\geq 2^t$的那些边，但是复杂度并没有啥保证。
类似的优化可以用于最大流的Dinic上，虽然不知道为啥，但是在很多情况下会快很多。本人用这个方法使得Dinic跑过了Luogu 4722（【模板】最大流加强版 / 预流推进）。同时在 csp2021交通规划 中拿到了75分的高分。

题面

同一时刻有 N 位车主带着他们的爱车来到了汽车维修中心。
维修中心共有 M 位技术人员，不同的技术人员对不同的车进行维修所用的时间是不同的。
现在需要安排这 M 位技术人员所维修的车及顺序，使得顾客平均等待的时间最小。
说明：顾客的等待时间是指从他把车送至维修中心到维修完毕所用的时间。
$2 \le M \le 9$，$1 \le N \le 60$，$1 \le T \le 10^3$。

Luogu 2053

题面

同一时刻有 N 位车主带着他们的爱车来到了汽车维修中心。
维修中心共有 M 位技术人员，不同的技术人员对不同的车进行维修所用的时间是不同的。
现在需要安排这 M 位技术人员所维修的车及顺序，使得顾客平均等待的时间最小。
说明：顾客的等待时间是指从他把车送至维修中心到维修完毕所用的时间。
$2 \le M \le 9$，$1 \le N \le 60$，$1 \le T \le 10^3$。

用点(i,j)表示第i个人维修的第j辆车，算出代价后直接跑带权二分图匹配。

LOJ 2003

题面

https://loj.ac/p/2003

Luogu 3347

题面

https://www.luogu.com.cn/problem/P3347

AGC 031E

题面

在二维平面上，有 n 颗珠宝，第i颗珠宝在 (x_i, y_i) 的位置，价值为 v_i。
现在有一个盗贼想要偷这些珠宝。
现在给出 m 个限制约束偷的珠宝，约束有以下四种：

1. 横坐标小于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
2. 横坐标大于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
3. 纵坐标小于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
4. 纵坐标大于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。

现在问你在满足这些约束的条件下，盗贼偷的珠宝的最大价值和是多少。
$1 \le N \le 80, 1 \le x_i, y_i \le 100$。

AGC 031E

题面

在二维平面上，有 n 颗珠宝，第i颗珠宝在 (x_i, y_i) 的位置，价值为 v_i。
现在有一个盗贼想要偷这些珠宝。
现在给出 m 个限制约束偷的珠宝，约束有以下四种：

1. 横坐标小于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
2. 横坐标大于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
3. 纵坐标小于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。
4. 纵坐标大于等于 a_i 的珠宝最多偷 b_i 颗。

现在问你在满足这些约束的条件下，盗贼偷的珠宝的最大价值和是多少。
$1 \le N \le 80, 1 \le x_i, y_i \le 100$。

首先枚举最终偷走的珠宝个数x。现在限制就可以转化为x或y小于等于a_i的至少或至多要偷a_i个。进一步转化一下，把限制变成第i个珠宝的x或$y \in [l_i, r_i]$。
于是只需要先让x的限制连到珠宝上，珠宝再连到y的限制上，最后跑一遍费用流。

Luogu4249

题面

在一些一对一游戏的比赛（如下棋、乒乓球和羽毛球的单打）中，我们经常会遇到 A 胜过 B，B 胜过 C 而 C 又胜过 A 的有趣情况，不妨形象的称之为剪刀石头布情况。有的时候，无聊的人们会津津乐道于统计有多少这样的剪刀石头布情况发生，即有多少对无序三元组 (A, B, C)，满足其中的一个人在比赛中赢了另一个人，另一个人赢了第三个人而第三个人又胜过了第一个人。注意这里无序的意思是说三元组中元素的顺序并不重要，将 (A, B, C)、(A, C, B)、(B, A, C)、(B, C, A)、(C, A, B) 和 (C, B, A) 视为相同的情况。

有 N 个人参加一场这样的游戏的比赛，赛程规定任意两个人之间都要进行一场比赛：这样总共有 $\frac{N*(N-1)}{2}$ 场比赛。比赛已经进行了一部分，我们想知道在极端情况下，比赛结束后最多会发生多少剪刀石头布情况。即给出已经发生的比赛结果，而你可以任意安排剩下的比赛的结果，以得到尽量多的剪刀石头布情况。

$N \leq 100$。

题面

在一些一对一游戏的比赛（如下棋、乒乓球和羽毛球的单打）中，我们经常会遇到 A 胜过 B，B 胜过 C 而 C 又胜过 A 的有趣情况，不妨形象的称之为剪刀石头布情况。有的时候，无聊的人们会津津乐道于统计有多少这样的剪刀石头布情况发生，即有多少对无序三元组 (A, B, C)，满足其中的一个人在比赛中赢了另一个人，另一个人赢了第三个人而第三个人又胜过了第一个人。注意这里无序的意思是说三元组中元素的顺序并不重要，将 (A, B, C)、(A, C, B)、(B, A, C)、(B, C, A)、(C, A, B) 和 (C, B, A) 视为相同的情况。

有 N 个人参加一场这样的游戏的比赛，赛程规定任意两个人之间都要进行一场比赛：这样总共有 $\frac{N*(N-1)}{2}$ 场比赛。比赛已经进行了一部分，我们想知道在极端情况下，比赛结束后最多会发生多少剪刀石头布情况。即给出已经发生的比赛结果，而你可以任意安排剩下的比赛的结果，以得到尽量多的剪刀石头布情况。

$N \leq 100$。

最大化三元环个数，等价于最小化$\sum_i win_i^2$，其中win_i表示i赢的次数。

由于x^2是下凸的，因此可以差分后建图，边权形如：$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$。

Luogu3980

题面

申奥成功后，布布经过不懈努力，终于成为奥组委下属公司人力资源部门的主管。布布刚上任就遇到了一个难题：为即将启动的奥运新项目招募一批短期志愿者。经过估算，这个项目需要 n 天才能完成，其中第 i 天至少需要 a_i 个人。布布通过了解得知，一共有 m 类志愿者可以招募。其中第 i 类可以从第 s_i 天工作到第 t_i 天，招募费用是每人 c_i 元。新官上任三把火，为了出色地完成自己的工作，布布希望用尽量少的费用招募足够的志愿者，但这并不是他的特长！于是布布找到了你，希望你帮他设计一种最优的招募方案。

$1 \le n \le 1000$，$1 \le m \le 10000$。

题面

申奥成功后，布布经过不懈努力，终于成为奥组委下属公司人力资源部门的主管。布布刚上任就遇到了一个难题：为即将启动的奥运新项目招募一批短期志愿者。经过估算，这个项目需要 n 天才能完成，其中第 i 天至少需要 a_i 个人。布布通过了解得知，一共有 m 类志愿者可以招募。其中第 i 类可以从第 s_i 天工作到第 t_i 天，招募费用是每人 c_i 元。新官上任三把火，为了出色地完成自己的工作，布布希望用尽量少的费用招募足够的志愿者，但这并不是他的特长！于是布布找到了你，希望你帮他设计一种最优的招募方案。

$1 \le n \le 1000$，$1 \le m \le 10000$。

对于所有i，连$(i, i+1, \inf - a_i, 0)$的边。每类志愿者连$(s_i, t_i+1, \inf, c_i)$的边。

CF1178H

题面

股票交易所里有 $2n$ 种股票，每种股票有两个属性 a_i, b_i，在时刻 $t \geq 0$，第 i 种股票的价格为 $a_i * \lfloor t \rfloor + b_i$。
每个时刻可以进行任意次股票交易，在时刻 t 时能够把股票 i 换成股票 j 当且仅当股票 i 在时刻 t 的价格不小于股票 j 在时刻 t 的价格。
现在你手上有 1 到 n 号股票各一张，现在要求的是把这些股票换成 $n+1$ 到 $2n$ 号股票各一张的最早时刻，以及在最早换完股票前提下的最少交易次数。
$1 \leq n \leq 2200, 0 \leq a_i, b_i \leq 10^9$，空间16MB。

CF1178H

题面

股票交易所里有 $2n$ 种股票，每种股票有两个属性 a_i, b_i，在时刻 $t \geq 0$，第 i 种股票的价格为 $a_i * \lfloor t \rfloor + b_i$。
每个时刻可以进行任意次股票交易，在时刻 t 时能够把股票 i 换成股票 j 当且仅当股票 i 在时刻 t 的价格不小于股票 j 在时刻 t 的价格。
现在你手上有 1 到 n 号股票各一张，现在要求的是把这些股票换成 $n+1$ 到 $2n$ 号股票各一张的最早时刻，以及在最早换完股票前提下的最少交易次数。
$1 \leq n \leq 2200, 0 \leq a_i, b_i \leq 10^9$，空间16MB。

首先发现可以等价于只在时刻0或T进行股票交易。
第一问考虑二分。将每股都交换成在时刻0能换出的在时刻T价值最大的股票，然后再进行判断。
这一步复杂度$O(nlog^2n)$。
第二问等价于一个费用流。但是由于空间限制，不能暴力连边。由于只能在时刻0或T连边，因此可以用前缀优化连边的方式将边数降至$O(n)$级别。

模拟费用流

观察费用流模型的特性，并使用更高效的算法来计算答案。

经典题

题面

给定一个长为n的有正有负的数组，要求对于$k = 1 \sim n$求出选出至多k段不相交区间时区间和的和的最大值。 $n \leq 2 \times 10^5$。

经典题

题面

给定一个长为n的有正有负的数组，要求对于$k = 1 \sim n$求出选出至多k段不相交区间时区间和的和的最大值。 $n \leq 2 \times 10^5$。

建立费用流模型并使用线段树去维护。
另解：由费用流的凸性，可以使用分治闵可夫斯基和。