计数与数学

煮僵尸 陈知轩

SEC.1 一些计数定理

THEOREMS

~~估计大家都学过~~

平面图的欧拉定理

平面图： 可以将所有点画在一个平面上，且所有的边不相交的图是平面图。

连通平面图的欧拉定理公式

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

其中 V,E 为平面图的点集和边集，F 表示平面图把平面分成的区域数量，注意计算最外层的无穷区域。

连通块计数公式

$$C = |V| - |E| + |F| - 1$$

E.G.1 CF1392I – KEVIN AND GRIDS

题目描述

给定两个序列a, b，构造一张网格图，每个点上 (i, j) 写着 $a_i + b_j$。

对于一个给定阈值 x，将图分为 $a_i + b_j \le x$ 和 $a_i + b_j \ge x$ 两组连通块。

定义一个能够连通到网格图边界的连通块的价值为 1，否则为 2 。

有 q 次查询，每次给定 x，求两种连通块价值之差。

$n, q, a_i, b_i, x \le 10^5$。

E.G.1 CF1392I – KEVIN AND GRIDS

简要思路

题目给出的权值计算方式非常特殊，考虑连通块计数公式$C = |V| - |E| + |F| - 1$。

分析答案的表达式，

$$S_1 - S_2 = C_1 - C_2 + 1\text{类被包含的个数} - 2\text{类被包含的个数}$$
$$= |V_1| - |V_2| - |E_1| + |E_2| + |F_1| - |F_2| + 1\text{类被包含的个数} - 2\text{类被包含的个数}$$

被包含即无法连接到边界，而当一个1类连通块被包含时，F_2 就增加一个区域。

考虑所有类型的区域：

1. 相邻的四个格点组成的区域。
2. 包裹一个1类连通块的区域。
3. 外层的无限区域。

不妨设两种连通块中四个格点组成的区域个数为D_1, D_2。

所以 $|S_1| - |S_2| = |V_1| - |V_2| - |E_1| + |E_2| + D_1 - D_2$。

由于值域小，处理 $a_i + b_j \le x$ 可以用卷积解决。

$E_1 = \sum[\max\{a_i, a_{i-1}\} + b_j \le x]$

SEC.2 一些小技巧

SKILLS

E.G.2 行走

题目描述

一个人从 $(0,0)$ 开始走 n 步，每次在 (x, y) 时可以走到 $(x+1, y+1)$ 或者 $(x+1, y-1)$。

求 n 步以后到达 (n, m) ，且中途 $y \geq 0$ 的方案数。

$n, m \leq 10^6$。

E.G.2 行走

简要思路

我们可以将所有的方案用一段折线表示，例如右图。

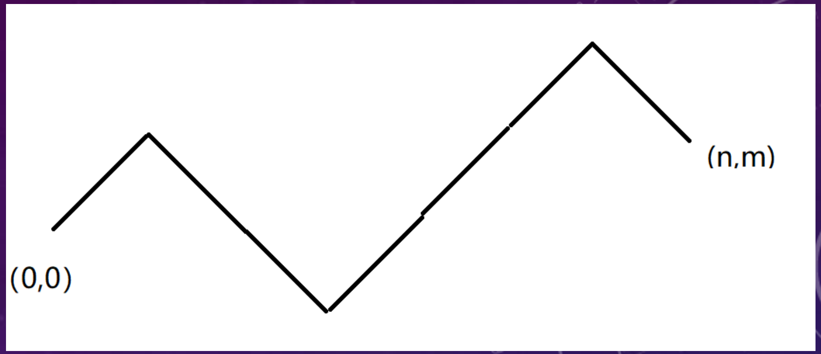
考虑对于任何一个非法方案，

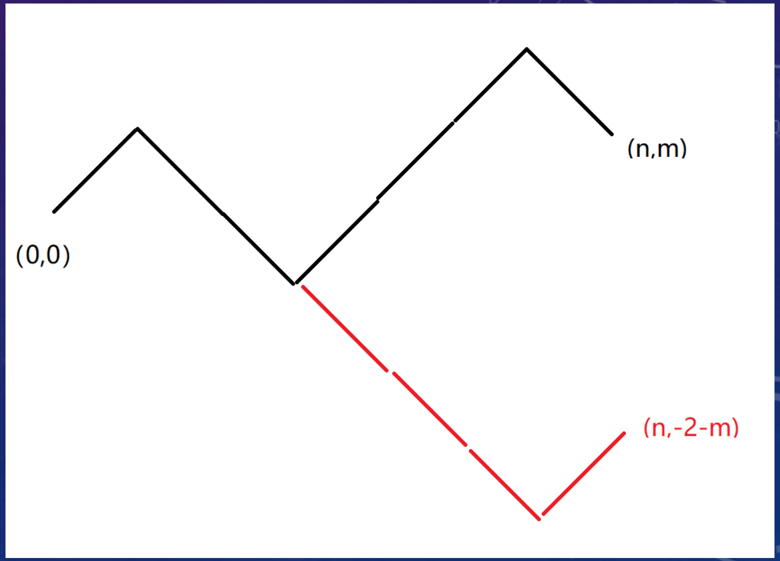
我们将其第一次到达 $(x, -1)$ 之后的部分关于直线 $y = -1$翻转，得到新的终点 $(n, -2-m)$。（如右图）。

容易发现任何一个非法方案都唯一对应一个翻转之后的方案。

因此答案就是到达 m 的方案数减去到达 $-2-m$ 的方案数。

这是两个组合数。





E.G.3 2022集训队互测 细菌

题目描述

有一个 $n \times m \times k$ 的立方体，用 (x, y, z) 表示每一个位置。

一开始有一个人位于 (a, b, c) ，他每次可以向 $(x \pm 1, y, z), (x, y \pm 1, z), (x, y, z \pm 1)$ 六个方向中的某一个走一步。

问他 d 步之内不离开立方体的方案数， $\bmod 998244353$。

$1 \le d, n, m, k \le 1.2 \cdot 10^5$。

E.G.3 2022集训队互测 细菌

简要思路

对于每一个维，求从 x 出发，走 i 步不离开 $[1,n]$ 的方案数。

最后合并 EGF 即可。

E.G.3 2022集训队互测 细菌

Algorithm1

d 比较小的时候，可以暴力 nd 递推。

E.G.3 2022集训队互测 细菌

Algorithm2

令 F_i 表示 i 步不离开的方案，于是有递推式：

$$F_i = 2F_{i-1} - (\,i-1\text{ 步从 } x \text{ 到达 } 1\,) - (\,i-1\text{ 步从 } x \text{ 到达 } n\,)$$

也就是假设 F_{i-1} 向两边走都行，然后减去会离开 $[1,n]$ 的情况。

Sub

回到了求方案数上，由于出现了上下两个界，采取相同的容斥无法同时满足。

考虑加强 **E.G.2** 中的容斥。

答案就是：

1. $a \to b$
2. 减去 $a \to b$ 关于 0 的对称点 p_1，减去 $a \to b$ 关于 $n+1$ 的对称点 q_1。
3. 加上 $a \to q_1$ 关于 0 的对称点 p_2，加上 $a \to p_1$ 关于 $n+1$ 的对称点 q_2。

$$\cdots$$

经过 $O(\frac{i}{n})$ 轮容斥就会离开可达范围。

要对于每一个 i 求解，复杂度为 $O(\frac{d^2}{n})$。

E.G.3 2022集训队互测 细菌

简要思路

结合算法1和算法2，复杂度为 $O\left(\min\left\{\frac{d^2}{n}, nd\right\}\right) = O\left(d \cdot \min\left\{\frac{d}{n}, n\right\}\right) = O(d\sqrt{d})$。

E.G.4 PREFIX SUM

题目大意

给定一个序列a_i，维护单点修改。每次查询求经过 k 次前缀和之后单点 a_i' 的值（取模）。

序列长度为 n ，操作数为 m ，k 为给定值。

$n \le 10^5, k \le 20$。

要求

用树状数组维护。

E.G.4 PREFIX SUM

简要思路

考虑经过 k 次前缀和之后， a_j对于 a_i' 的贡献。

考虑前缀和的组合意义，看成是每一次向后走若干步（可以为0）。

那么容易通过插板法得到方案数是 $C(i-j+k-1,k-1)$。

组合数可以看成是一个下降幂除以一个阶乘，那么可以展开为一个多项式：

$$F(i,j)=\sum_{a,b} f_{a,b}\, i^a j^b$$

由于在查询时，i 已经确定，那么可以看成是关于 j 的多项式 $F(j)=\sum f_a\cdot j^a$ 。

那么用树状数组维护 $a_j\cdot j^a$ 的前缀和即可。

E.G.5 RANDOM POINTS

题目描述

在连续的数轴 $[0,n]$上随机分布了 m 个点 x_i ，设 $x_{i-1} \leq x_i$。

给定序列 a_i， 求满足 $\forall i > 2, x_i \geq x_{i-2} + a_i$ 的概率。

$n, m \leq 50, a_i \in Z^+$。

核心思路

比较两个小数的差和一个整数，可以转化为求两个小数的整数部分，以及它们小数部分的排名。

那么 dp 时记录整数部分的值和小数部分的排名即可。

万能欧几里得

问题描述

有一条端点为 $(0,0) \to (A,B)$ 的有向线段 OP，我们认为其两端都是空的。

其中 A,B 是自然数，且 $\gcd(A,B)=1$。

（当 $g=\gcd(A,B)\neq 1$ 时，可以先求 $\frac{A}{g},\frac{B}{g}$ 的结果，然后将其复制 g 次）。

维护这样的一个过程：

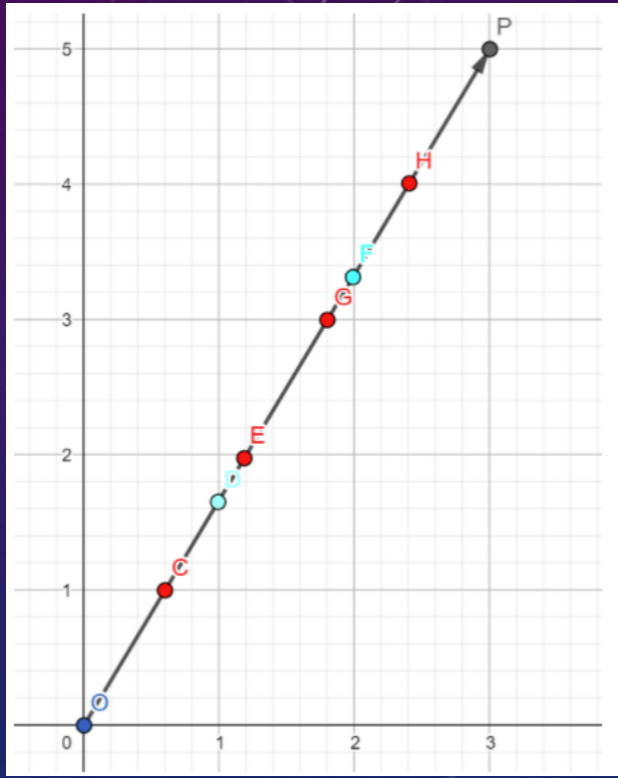
1. 一开始有一个空字符串 s。
2. 考虑点从 O 移动到 P 的过程：

   其 x 坐标每经过一个整点，就向 s 中加入字符 X。

   其 y 坐标每经过一个整点，就向 s 中加入字符 Y。

注意在 O,P 处不加入字符。容易发现在 $\gcd(A,B)=1$ 时，不会出现同时经过 x,y 上的整点。

图中是 $P=(3,5)$ 时的例子，此时的字符串为 YXYYXY。



万能欧几里得

简要思路

用四元组 $(A, B, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ 描述这样的一个万能欧几里得问题，则可以如下递归求解：

1. 若 $B \geq A$，则每次在 x 增加之前，y 都会增加 $\left\lfloor\frac{B}{A}\right\rfloor$个，

   可以转化为 $\left(A, B \bmod A, \mathrm{Y} \cdot \left\lfloor\frac{B}{A}\right\rfloor + \mathrm{X}, \mathrm{Y}\right)$。

2. 若 $B < A$，则可以直接翻转坐标系，转化为求解 $(B, A, \mathrm{Y}, \mathrm{X})$。

区间查询

用一棵二叉树维护出现的拼接操作，再引入可持久化操作来处理快速幂。

最终就可以用一棵 $O(\log A + \log B)$ 层的可持久化二叉树描述序列。

在这样的二叉树上进行区间查询的复杂度也为 $O(\log A + \log B)$。

短多项式幂

题目描述

给定 d 阶的多项式 $F(x)$， d 的大小几乎为常数。

求 $F^k(x) \bmod x^{n+1}$。

简要思路

介绍一个简单的 $O(nd) \sim O(n)$ 做法。

设 $G(x) = F^k(x)$，两边求导得到：

$$G'(x) = kF^{k-1}(x)\, F'(x)$$

$$G'(x)F(x) = kF^k(x)F'(x)$$

$$G'(x)\, F(x) = kF'(x)\, G(x)$$

$$\sum_{i=0}^{d} [x^{n-i}]G'(x)\, [x^i]\, F(x) = k \sum_{i=0}^{d-1} [x\hat{\ }i]F(x)\, [x^{n-i}]G(x)$$

$$\sum_{i=0}^{d} (n-i+1)[x^{n-i+1}]G'(x)\, [x^i]\, F(x) = k \sum_{i=0}^{d-1} [x\hat{\ }i]F(x)\, [x^{n-i}]G(x)$$

容易发现左边出现了 $[x^{n+1}]G(x)$，带入这个式子，即可递推 $G(x)$ 的每一项。

这种做法在处理开根号($k = \frac{1}{2}$) 时依然有效。

K-FWT K 进制FWT/高维卷积

概述

A是一个 n 维向量，每一维的值 $a_i \in [0, d_i)$，其中d_i是一个常数，表示每一维的长度。

容易定义这样的向量的加减法：

$$A \pm B = \left((a_1 \pm b_1) \bmod d_1, (a_2 \pm b_2) \bmod d_2, \cdots\right).$$

高维卷积是针对以这样的向量为形式幂指数的多项式的卷积。记作$F(x) = f_1 x^{\boldsymbol{A1}} + f_2 x^{\boldsymbol{A2}} \cdots$

记$[x^{\boldsymbol{A}}]F(x)$为$F(x)$中指数为$\boldsymbol{A}$的一项的系数。同理，记$G(x) = g_1 x^{\boldsymbol{B1}} + g_2 x^{\boldsymbol{B2}} \cdots$。

可以根据向量的加法，定义这样多项式之间的乘法。

高维卷积，就是每一维进行 DFT 过程的叠加。

K-FWT K 进制FWT/高维卷积

高维 DFT

对于多项式 $F(x)$，其高维 DFT 的结果也是一个多项式 $G(x)$。

$$[x^B]G(x) = \sum_A [x^A]F(x) \cdot \prod_i \omega_{d_i}^{a_i \cdot b_i}$$

也就是每一个维度分别进行 DFT 的叠加。

同理也容易得到 IDFT 的过程。

高维 DFT 的实现容易描述为：

1. 枚举 i，对于第 i 个维度进行 DFT。
2. 将多项式的所有项按照其它维度的值分类，每一类恰好包含 d_i个数。
3. 对于这 d_i 个数进行一维 DFT 。

容易发现其复杂度为 $O\left(\prod d_i \left(\log \sum d_i\right)\right)$。

而在实际应用过程中，由于模意义下单位根的处理，d_i 通常较小。

简单的模意义单位根处理技巧

原根单位根

设模数为 P。

模意义下任何一个数 x 的阶均是 $\varphi(P)$ 的因子，因此只有所有 $d|\varphi(P)$ 的 d 阶单位根存在。

在 $P^{\frac{1}{4}}\omega(p)\log P$ 的时间寻找一个原根，就可以得到所有的 $d|\varphi(P)$ 阶的单位根。

那么：ω_3 在 $\bmod 10^9+7$ 下的如何表示？

简单的模意义单位根处理技巧

简单的复数单位根

考虑 $\omega_3 = \cos\frac{1}{3}\pi + i \cdot sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。

假设 $\sqrt{3}$ 在 $\bmod P$ 意义下存在，即 3 在 $\bmod P$ 意义下存在二次剩余

那么就可以用一个复数组 $(a, b) = a + i \cdot b$ 来表示单位根以及中间过程的运算。

同理的，$\omega_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$，许多在数学上存在简单表示的复平面单位根在特定情况下可以使用。

SEC.3 杂题

PRO PRO PRO

E.G.6 FLYING BIRD

题目大意

一只鸟准备以沿着倾角为 θ 的斜线向上飞 h 米，它每飞一米就要花费 a 的力气，选择 θ 的倾角需要花费 $b\theta$ 的力气。

给定 h, a, b ，选择合适的 θ 最小化答案。

要求

$O(\log \epsilon)?, O(1)$。

E.G.6 FLYING BIRD

简要思路

实际上是求

$$f(\theta) = \frac{ah}{\sin\theta} + b\theta$$

在 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的最小值。

求导得：$f'(\theta) = b - \frac{ah}{\sin^2\theta} \cdot \cos\theta$，这是一个单调函数，且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内存在唯一零点。

令 $\cos\theta = x$，得到 ：

$$f'(\theta) = 0$$

$$b - \frac{ah}{1 - x^2} \cdot x = 0$$

$$b(1 - x^2) = ahx$$

解二次方程得到 x，然后用反三角函数即可得到 θ。

E.G.7 CF1085G - BEAUTIFUL MATRIX

题目大意

对于所有 $n \times n$ 且满足以下条件的矩阵：

1. 每一行是一个排列。
2. $a_{i,j} \neq a_{i-1,j}$ 。

我们称其为好的，按照字典序给所有好的矩阵排名。

给定一个合法的矩阵，求其排名。

$n \leq 2000$。

E.G.7 CF1085G - BEAUTIFUL MATRIX

简要思路

按照一般求 Cantor 的思路，只需要求方案数。

在确定了一行的前 i 个元素后，剩下的元素是一个局部错排问题：

局部错排：

n 个元素，满足 $\forall i \le m, p_i \ne i$，即前 i 个元素满足错排。

- 递推式

$$D(n,m)=\begin{cases} n! & m=0 \\ (n-1)(n-1)! & m=1 \\ (m-1)D(n-2,m-2)+(n-1)D(n-1,m-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

~~公式很麻烦，直接贴md了。~~

剩下的若干行方案数是直接错排。

在具体计算 Cantor 的时候，实际上要枚举 $< a_{i,j}$ 的所有没用过的数。

观察会发现后面的局部错排只有 $O(1)$ 种情况，可以用树状数组维护。

E.G.8 HAMILTON

题目描述

给定 $L\times n$ 个节点的图，分成 L 层，每层是 n 个点的完全图，相邻两层之间的n对点对应连边。

求这张图的哈密顿回路数量。

$L,n\le 500$。

E.G.8 HAMILTON

简要思路

哈密顿回路就是一个环，每层合并结束之后，总会剩下环上的若干段（这就类似插头 dp）。

考虑每一层先继承上一层的插头，然后和剩余的自由点进行合并，得到新的环段。

考虑将继承的 i 个段和 $n-2i$ 个自由点合并（每一个段对应两个插头）。

将 i 段合并成 j 段的方案数 $\frac{i!}{j!}C(i-1,i-j)$，但是每一个段必须包含至少两个点，因此这一层的自由点在合并方案不能孤立。

考虑容斥以去掉这种情况，枚举出现了至少 k 个孤立点即可。

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

题目描述

给定 n,k,d，求

$$[x^{nd}]\left(\sum_{i=0}\frac{x^{id}}{(id)!}\right)^k \bmod P$$

其中 $P=1049874433$ 是一个质数，且保证 $d|(P-1)$。

$n\le 10^9, d\in\{1,2,3,4,6\}, k\le 2\cdot 10^3$。

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

简要分析

显然需要单位根反演。

$$\sum_{i=0}\frac{x^{id}}{(id)!}=\sum_{i=0}[d|i]\frac{x^i}{i!}=\sum_{i=0}\frac{x^i}{i!}\cdot(\sum_{j=0}^{d-1}\omega^{ij}\cdot\frac{1}{d})=\frac{1}{d}\cdot\sum_{i=0}^{d-1}e^{\omega^i x}。$$

我们将题目转化为求这个多项式的 k 次幂。

如果我们将这个多项式的结果展开，容易发现结果的每一项就是 $\exp\left(c_0\omega^0+c_1\omega^1+\cdots+c_{d-1}\omega^{d-1}\right)$ 的形式。

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

$d=2$

$d=2$ 时，$\omega=-1$，即求 $(e^x+e^{-x})^k$。

最终的多项式一定是 $F(x)=\sum f_i e^{ix}$ 的形式。

实际上这个问题也可以具象化为：每次 $+1$ 或者 -1，问 k 步到达 i 处的方案数。

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

单根的线性表示

设全集 $U_d=\{\omega_d^0,\omega_d^1,\cdots,\omega_d^{d-1}\}$ 。用其中 $\varphi(d)$ 个元素，即可整系数线性表示出其他所有单位根。

其中线性表示意为：

对于一组基底 b_i ，用权值 $w_i(w_i\in Z)$ 表示一个数 $x=\sum w_i b_i$ 。

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

单根的线性表示

右图中，点 A,B,C,D,E,F 表示了 U_6中的所有元素。

$\varphi(6)=2$，假设我们以 A,B 为基底，

则得到其他元素的线性表示：

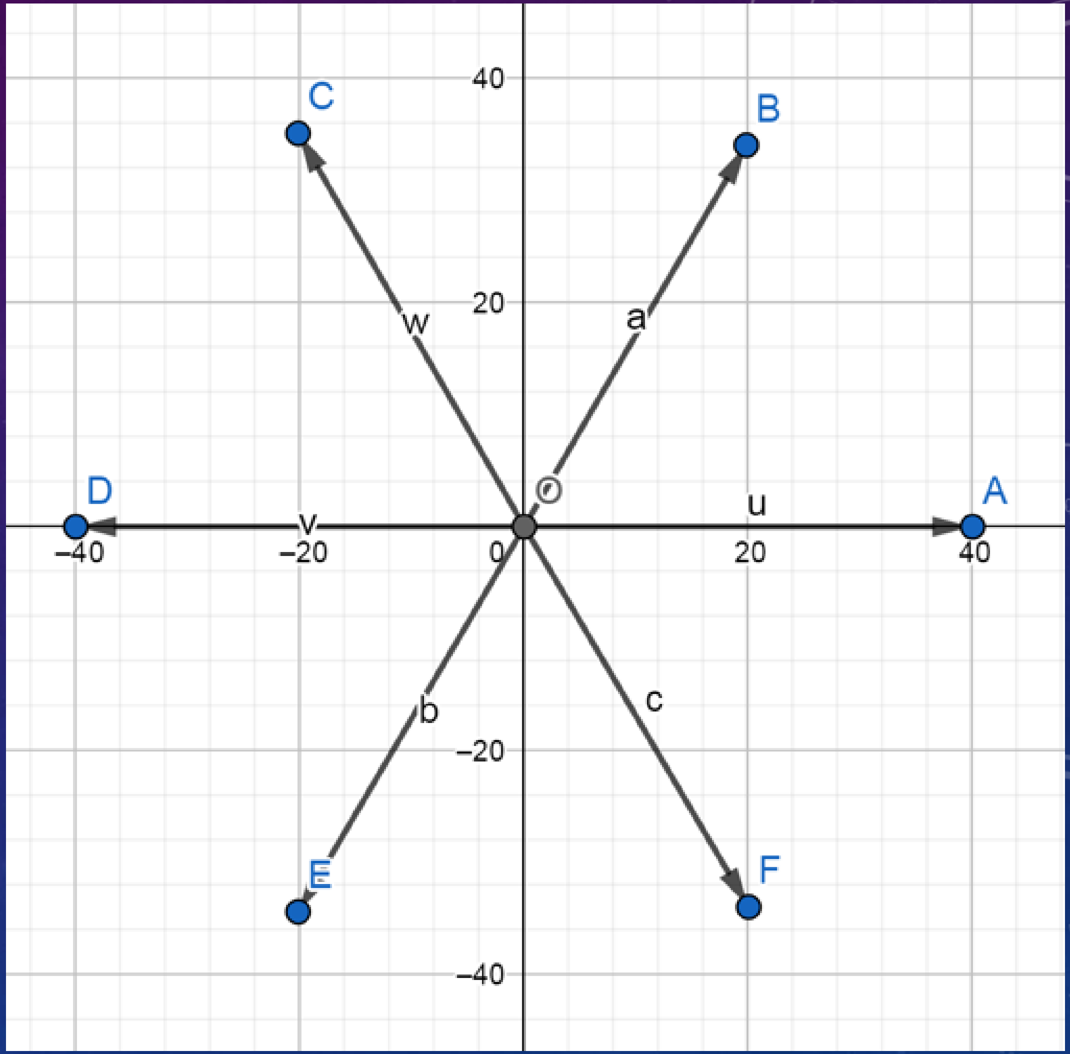
$$C=B-A$$

$$D=-A$$

$$E=-B$$

$$F=A-B$$

容易验证其在数值上的正确性。



E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

$d = 3, 4, 6$

3,4,6 有共通性，即$\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$ 。

虽然 d = 3,4 时有特异性解法，但是与正解无关，不再提及。

前面提到，最终多项式的每一项一定是：

$$\exp\left(c_0\omega^0 + c_1\omega^1 + \cdots + c_{d-1}\omega^{d-1}\right)$$

而我们知道，用 ω_0, ω_1 可以整系数线性表示出其他的单位根，因此最终每一项可以压缩为：

$$\exp\left(c_0\omega^0 + c_1\omega^1\right)$$

我们只需要求出这样的每一项的系数，这样就将维度压缩到了 2 维。

以 $d = 6$ 时为例，带入前面提到的线性表示，发现：

$$\sum_{i=0}^{d-1} e^{\omega^i x} = e^A + e^B + e^{B-A} + e^{-A} + e^{-B} + e^{A-B}。$$

其中 $A = \omega^0 x, B = \omega^1 x$。

我们设二元形式幂级数多项式 $[x^i y^j]F(x,y)$ 表示 e^{iA+jB}，则只需要求：

$$F(x,y) = x + y + x^{-1}y + x^{-1} + y^{-1} + xy^{-1}。$$

$$F^k(x,y)$$

E.G.9 [BJ UNITED ROUND #3] 押韵 | LOJ 6696. 复读机 加强版

$\boldsymbol{d = 3, 4, 6}$

给定一个偏移就可以将所有 x, y 的指数改成非负。

而 $F(x)$ 是一个短多项式，因此可以在 $O(k^2)$ 的时间内得到它的所有 $O(k^2)$ 项。

具体过程类似前面的一维短多项式幂，只需要将求导转化为对于 x 求偏导。

E.G.10 2022集训队互测 愚蠢的在线法官

题目描述

给你一棵有根树，每一个点有点权 v_i ，还有一个长度为 m 的序列 a_i。

求：

$$\det\begin{pmatrix} v_{\mathrm{LCA}(a_1,a_1)} & \cdots & v_{\mathrm{LCA}(a_1,a_m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\mathrm{LCA}(a_m,a_1)} & \cdots & v_{\mathrm{LCA}(a_m,a_m)} \end{pmatrix}$$

$n, m \le 10^6, 1 \le a_i \le n, 1 \le v_i < \mathrm{mod}, \mathrm{mod} = 998244353$。

E.G.10 2022集训队互测 愚蠢的在线法官

分析

显然：如果 a_i 中存在相同则矩阵有两行相同，答案为 0。

否则，考虑排列 p_i ，求 $\sum N(p) \cdot \prod v_{LCA(a_i,a_{p_i})}$。

设 $dp_{u,i}$ 表示子树内剩下 i 个点没有匹配 p_i ，容易得到一个 $\text{poly}(n)$ 的树形 dp。

ps: dp 过程中的排列可以看成在排列为 $1 \sim m$ 的基础上不断交换得到，

由此容易得到关于逆序对的转移系数。

观察会发现，当 $i > 1$ 时， 这 i 个点都等价，等价就意味着这样的情况 det 为 0。

于是退化为了 $dp_{u,0/1}$，可以 $O(1)$ 完成转移。

E.G.11 2022集训队互测 抽奖机

题目描述

有 n 个 mod 3 的加法单元，一开始这些单元为 0。

有 m 种操作，第 i 中操作选择 a_i 个单元 +1，b_i 个单元 +2（选出的两部分不交）。

你要进行 k 轮操作，每轮选择一种操作（每轮共有 $\sum \frac{n!}{a_i!b_i!(n-a_i-b_i)!}$ 种可能）。

问 k 轮以后，有 i 个单元为 1，j 个单元为 2 的方案数。

$$n \le 100, k \le 10^{18}, \mathrm{mod} = 10^9 + 9$$

E.G.11 2022集训队互测 抽奖机

简要分析

$\mathrm{mod} = 10^9 + 9$，存在 3 次单位根。考虑暴力 $3 - \mathrm{FWT}$ 。

容易发现任何一个多项式中，两个 1,2 个数相同的项系数也相同。

用 F 表示变换对应的多项式，就是 $F_{a_i,b_i} = 1$。

答案就是 F^k ，只需要做正反两次 $3 - \mathrm{FWT}$，中间对于每一项求 k 次幂。

考虑 $3 - \mathrm{FWT}$ 的过程，对于 $F'_{i,j}$ ，枚举 $i, j, n - i - j$ 三个部分中分别包含多少个 0,1,2，即可得到每一个 $F_{a,b}$ 对于 $F'_{i,j}$ 的贡献。

E.G.11 2022集训队互测 抽奖机

简要分析

而这个系数的可以看成是一个 2 维背包，也就是若干个二元多项式的幂，即：

$$H_{i,j}(x,y)=(1+x+y)^{n-i-j}(1+\omega x+\omega^2 y)^i(1+\omega^2 x+\omega^4 y)^j$$

暴力求 $H_{i,j}$ 的复杂度为 $O(n^3)$，由递推式：

$$H_{i,j}=H_{i,j-1}\cdot\frac{(1+\omega^2 x+\omega^4 y)}{1+x+y}$$

可以 $O(n^2)$ 求解一个系数，总复杂度为 $O(n^4+n^2\log k)$。

E.G. X ICPC2021-SHANGHAI A STRANGE FUNCTIONS

题目描述

给定 n 个函数 $f_i(x)$，每一个函数用两个数 k_i, a_i 描述，具体为：

$$f_i(x) = \begin{cases} |\arctan(k_i \sec(x - a_i))| & (x \neq a_i + (k + \frac{1}{2})\pi \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)) \\ \frac{\pi}{2} & (x = a_i + (k + \frac{1}{2})\pi \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)) \end{cases}$$

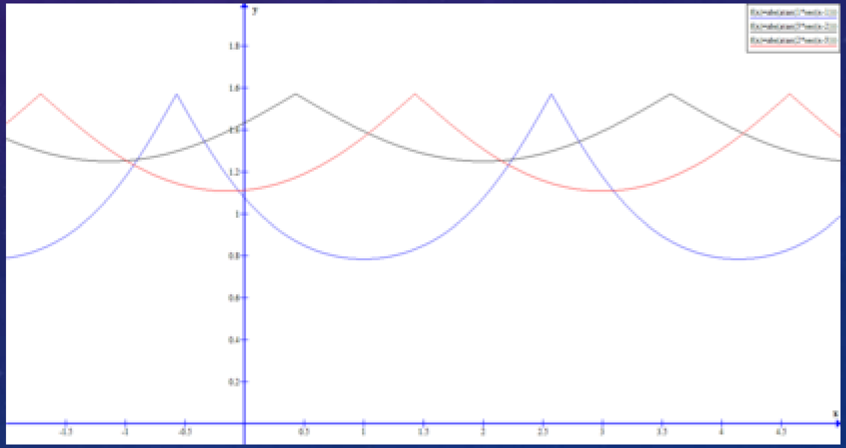
~~（太麻烦了懒得打）~~

对于每一个函数 $f_i(x)$ 判断是否存在一个点 x 使得 $\forall j \neq i, f_i(x) < f_j(x)$。

$n \leq 10^5$。

提示

右图是3个函数的图像。



E.G. X ICPC2021-SHANGHAI A STRANGE FUNCTIONS

简要思路

（口胡的

李超树，或者可能维护凸包。

E.G. X ICPC2021-SHANGHAI A STRANGE FUNCTIONS

官方做法

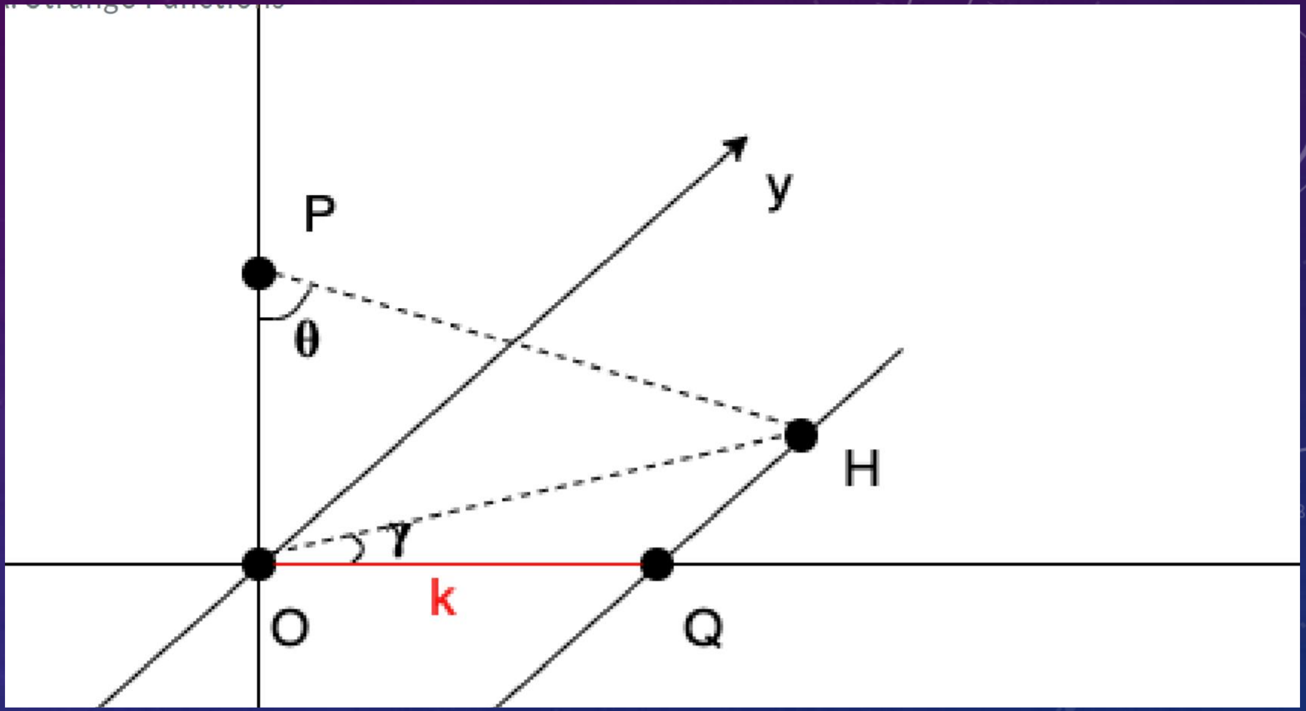
设 $a_i = 0$，图中的 $QH{:}\, x = k, OP = 1$，

则

1. $OH = k \cdot \sec\gamma$
2. $\theta = \arctan k \cdot \sec\gamma$

从而比较 θ 只需要比较 OH，

而 H 可以看做角 γ 与直线 QH 的交点。



E.G. X ICPC2021-SHANGHAI A STRANGE FUNCTIONS

官方做法

添加直线 $x=-k$ 即可得到对于所有 γ 的情况。

这样，每一个点函数都对应了

直线 $x=k, x=-k$ 旋转 a_i 之后的结果。

答案就是是否存在一个角度 γ，使得这条直线离远点最近。

右图是原图在平面 Oxy 上的投影。

可以半平面交解决这个问题。