凸性在最优化问题中的应用

南京外国语学校 戴江齐

2022.2

目录

线性规划

- $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$
- $\forall 1 \le i \le m, \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \le B_i$
- 求 $\max_x \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$
- 若固定 x_1 的取值，则答案关于 x_1 凸
  - 将 $x_1 = \alpha$ 和 $x_1 = \beta$ 的解取平均即得 $x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 的解
- 上下界费用流可直接写作 LP
  - 费用流最优解有整数性

组合模型

- 很多“看起来单调”（且没有背包规约）的组合优化问题都关于“选取集合的 size”凸
  - 例：区间代价满足四边形不等式，则将序列划分成 k 个区间的最小代价关于 k 凸
  - 注：若无特殊说明，课件中最大（小）值具有的凸性为二阶导 $\leq (\geq) 0$
- 证明：通常仍是给定 i 和 $i+2$ 的最优解，调整得 $i+1$ 的解

$(\max,+)$ 卷积

- 已知 a, b 凸，求 a 和 b 的 $(\max,+)$ 卷积 $c_i=\max_{j+k=i}(a_j+b_k)$（闵可夫斯基和）
  - 将差分排序再做前缀和：$O(n)$
- 对凸的 a 和不凸的 b 进行 $(\max,+)$ 卷积可以用决策单调解决
  - $b'_{l,r}=b_{r-l}$ 满足四边形不等式
  - 分治 $O(n\log n)$；SMAWK $O(n)$

例 (Buffed Buffet)

- 有 d 种食物，每种是连续或离散的。对于第 i 种食物，若它是连续的，则吃 N 的质量会获得 $\int_0^N (t_i - s_i x)dx$ 的美味度；若它是离散的，则每份有质量 w_i，吃 N 份会获得 $\sum_{i=1}^{N}(t_i - (i-1)s_i)$ 的美味度。现在你要吃质量恰为 W 的食物，求出最大可能美味度。
- $d \le 250, W \le 10^4$，输入全为整数
- Source: Gym 101221 B

例（醉醺醺的幻想乡）

- 考虑有源汇二分图上的流。源到左侧第 i 个点的流量上限为 c_i，且流量为 x（实数）时会产生 $a_ix^2 + b_ix$ 的费用；右侧点 i 到汇的流量上限为 d_i。求最小费用最大流。
- 单侧点数 100，值域 3，需求精确解
- Source: LOJ 2138

DP 模拟费用流

- 考虑特殊图（如链或树）上的费用流
- 固定边 e 的流量 w，记此时 e 左侧（下方）的最优费用为 c，则 c 关于 w 凸
- 可关于 e DP 并维护 c 关于 w 的凸包
  - 平衡树可以高效维护闵可夫斯基和等操作
  - 题目有特殊性质时，也可以使用堆甚至单调队列

例 (雪灾与外卖)

- 数轴上，有 n 个老鼠和 m 个洞。第 i 个洞最多容纳 w_i 只老鼠，且每容纳一只会产生 c_i 的代价；一只老鼠移动 1 的距离会产生 1 的代价。给定初始时老鼠和洞的位置，最小化每只老鼠都进洞的代价。
- $n, m \le 10^5$，值域 10^9
- Source: UOJ 455

例 (Conquer the World)

- 给定一棵 n 个点的树，结点 i 有 x_i 单位的军队，目标是让结点 i 至少有 y_i 单位的军队。每条边上有权，表示一单位军队经过这条边需要花费的代价。最小化总代价。
- $n \leq 2.5 \times 10^5, \sum_i x_i \leq 10^6$
- Source: Gym 102482 C

例 (Planet of Singles)

- 给定 01 序列 S，支持以 1 的代价交换相邻元素或以 c 的概率单点修改，目标是将其变为 T。最小化代价。
- $|S| = |T| \leq 5 \times 10^6$
- Source: 20200411 杂题选讲

分治

- 对于一些被规定了总规模的 LP（规模常常是费用流流量；或类似的组合问题），容易发现答案是关于规模的凸包
  - 例如链上最大 k 元独立集
  - 要求：整数性
- 可以分治求出前后每一半的凸包后尝试合并

例 (Jiry Matchings)

- 给定一棵 n 个点的树，边上带权。对每个 k，求恰有 k 条边的最大权匹配。
- $n \leq 2 \times 10^5$
- Source: Gym 102331 J

背包

- 背包问题不具有凸性，但当物品重量为常数 c 时，模 $c!$ 后相同的位置上具有凸性
  - 这一结论可以推广到若干个长为 c 的序列 $(\max, +)$ 卷积 (此时需结合分治)

例 (选课)

原题过于冗长，此处只展示关键部分。

- n 个物品，有重量 $w_i \leq 3$ 和代价 c_i。对每个 k，求恰好选重量为 k 的物品最少花费的代价。
- $n \leq 5 \times 10^5$
- Source: NOIWC 2020 T3

- 常常有诸如“最优解必在凸包的一条边上”的结论

例 (Division into Multiples)

- 有 $X+Y$ 个球，X 个写着 A，Y 个写着 B。试将球划分出尽量多的非空的堆使得每堆的数字之和均为 C 的倍数，允许有球不在任何一个堆里。
- $X, Y, A, B, C \leq 10^9$，多测 $T = 2 \times 10^4$
- Source: AGC 045 F

- 考虑以恰当的顺序增广并用数据结构维护残量网络

例 (序列)

- 给定长为 n 的序列 A, B。试选出 A 和 B 的下标各 K 个，要求公共下标至少有 L 个，并最大化被选中的 $2K$ 个元素之和。
- $n \leq 10^6$，多测 $T = 10$
- Source: NOI 2019 Day 1 T3

例 (雪灾与外卖：另解)

- Source: UOJ 455

例 (Jiry Matchings: 另解)

- Source: Gym 102331 J

wqs 二分

- 有时，容易判断答案 y 关于某个量 x 是凸的，且目标是求出 x 取某一定值时 y 的最大（小）值；但很难直接求出凸包
- 可以二分 k，并求 $y - kx$ 的最大（小）值和取最小值是对应的 x
  - 这等价于作了凸包的一条切线
  - 最终二分出的 k 与凸包相切于 $(x, \max(\min) y)$

例 (Mateusz and Escape Room)

- 给定长度为 n 的环，位置 i 有 c_i 个硬币，移动一个硬币 1 单位距离需要 1 代价，目标是让位置 i 的硬币个数 $\in [l_i, r_i]$，试最小化总代价。
- $n \le 3.5 \times 10^4$，值域 3.5×10^4
- Source: CF 1229 F

例 (Honorable Mention)

- 给定长度为 n 的序列 a。q 次查询 l, r, k，求 $a[l, r]$ 中 k 个不交非空子段和的最大值。
- $n, q \leq 3.5 \times 10^4$，值域 3.5×10^4
- Source: Gym 102331 H

例（树）

- 给定一张 n 个点 m 条边的图，边有黑白两种颜色且带权。求恰有 k 条黑色边的最小生成树。
- $n, m \leq 10^5$，值域 10^9
- Source: IOI 2012 集训队互测陈立杰

例 (邮局)

- 长度为 L 的链上有 n 个关键点，试放置 k 个邮局，使得每个关键点到最近的邮局的距离之和尽量小。
- $n \leq 2 \times 10^5, L \leq 10^9$

例 (Another IOI Problem)

- 把上述问题推广到环上。
- Source: ACM NFLSOJ 216

LP 对偶

- $Ax \le B, \max_x c^T x \to A^T y \ge C, \min_y B^T y$
- 取等条件
- 费用流对偶
  - $\min_x \sum c_i \max(x_{u_i} - x_{v_i} - d_i, 0)$
- 拉格朗日对偶与 min-max 定理
- 详见 IOI 2021 集训队论文丁晓漫《再探线性规划对偶在信息学竞赛中的应用》

例

- Aizu 2230 How to create a good game
- ZJOI 2020 Day 1 T3 序列

决策单调

- 四边形不等式与完全单调矩阵
  - 分治
  - 二分栈
  - SMAWK
- 详见彭思进 APIO 2021 课件

例

- Gym 102586 B Evacuation

拟阵

- 拟阵的定义
  - 性质很强的贪心结构
- 拟阵交
  - 二分图增广路
  - 带权：第二关键字
- 详见 IOI 2018 集训队论文杨乾澜《浅谈拟阵的一些拓展及其应用》

例

- CF 1284 G Seollal

谢谢观看！