厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期： 2024.1.9

得　分	
评阅人	

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. 曲线 $y=3x^5-5x^4+1$ 的拐点是（　　　）。

（A）$(1,-1)$；　（B）$(-1,1)$；　（C）$(0,1)$；　（D）$(2,17)$。

2. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　　）。

（A）$1+\cos x$；　（B）$1-\cos x$；　（C）$1+\sin x$；　（D）$1-\sin x$。

3. 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为（　　　）。

（A）$\sqrt{2}$；　（B）$\sqrt[3]{3}$；　（C）$\sqrt[4]{4}$；　（D）不存在最大项。

4. 下列不等式中错误的是（　　　）。

（A）$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1 x\mathrm{d}x<\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$。

5. 在下列的选项中，$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上不满足的是（　　　）。

（A）处处不连续；　（B）偶函数；　（C）有界；　（D）可积。

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）：

得　分	
评阅人	

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{x^6}=$____________________。

2. $\int_{-2}^{2}|\,(|x|-1)\,|\,\mathrm{d}x=$____________________。

3. 设常数 $b>a$，则当 $a=$________，$b=$ ________时，定积分 $\int_a^b(2x-x^2)\,\mathrm{d}x$ 取到最大值。

4. 函数 $f(x)=x\,\mathrm{e}^x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式是____________________。

5. 在极坐标下，双纽线 $\rho^2=3\cos 2\theta$ 所围成的平面图形的面积为____________________。

三、求下列不定积分（**每小题 6 分，共 12 分**）：

得　分	
评阅人	

1. $\int \frac{2x-2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

2. $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$。

四、（8 分）求曲线 $y=\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $1\le x\le 2$ 的一段弧的长度。

得　分	
评阅人	

五、求下列定积分（**每小题 6 分，共 12 分**）：

得　分	
评阅人	

1. $\int_{1}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\mathrm{d}x$；

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$。

六、（8 分）求反常积分 $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$。

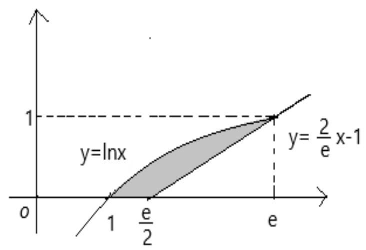
得　分	
评阅人	

七、(14 分) 设由曲线 $y = \ln x \quad (x \geq 1)$ 与两直线 $y = 0$、$y = \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1$ 所围成的平面图形为 D（见图）。试求：

得　分	
评阅人	

(1) 平面图形 D 的面积 A;

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。



八、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导且 $f''(x) \geq 0$，证明：

对于 $\forall a > 0$，都成立不等式 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geq a f(\frac{a}{2})$。

得　分	
评阅人	