厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷解答

________学院________系________年级________专业

试卷类型:（理工类 A 卷） 考试时间:2022.4.23

一、填空题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 已知向量 $\vec{a}=(1,-1,3)$，$\vec{b}=(2,-3,1)$，$\vec{c}=(1,-2,0)$，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$ $\underline{\ -2\ }$ 。

2. 将 xoz 坐标面上抛物线的一段 $z=x^2\quad(1\le x\le 2)$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $\underline{z=x^2+y^2,\ 1\le z\le 4}$，该旋转曲面在 xoy 坐标面上的投影为 $\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3\,|\,\underline{1\le x^2+y^2\le 4,\ z=0}\}$。

3. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^x$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^x$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解，则该方程的通解为 $\underline{y=xe^x+C_1e^x+C_2e^{2x}}$ 。

4. 设 $x=-t\cos 2t$ 是无阻尼强迫振动方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=4\sin pt$ 的一个特解，其中 $k>0,\ p$ 为常数，则该振动系统的角频率 $k=$ $\underline{\ 2\ }$，干扰力的角频率 $p=$ $\underline{\ 2\ }$。

5. 设二元函数 $z=\dfrac{x\cos y+y\cos x}{1+\cos x+\cos y}$，则 $\mathrm{d}\,z\big|_{(0,0)}=$ $\underline{\dfrac{1}{3}(\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,y)}$ 。

6. 函数 $u=x^2+y^2+z$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿着椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 在该点的外法方向的方向导数为 $\underline{\dfrac{7}{6}\sqrt{6}}$ 。

二、（本题 8 分） 求过点 $(1,1,1)$ 且通过直线 $x=y=2z$ 的平面方程。

解： 取直线 $x=y=2z$ 上的一点 $(0,0,0)$，通过点 $(0,0,0)$ 和 $(1,1,1)$ 的直线的一个方向向量为 $\vec{s}_1=(1,1,1)$，直线 $x=y=2z$ 的一个方向向量为 $\vec{s}_2=(2,2,1)$，所求平面的一个法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,1,0)$，因此该平面方程为 $-(x-1)+(y-1)=0$，即 $x-y=0$。

三、（每小题 9 分，共 18 分）求解下列微分方程：

1. 求微分方程 $xy' = -\sqrt{x^2+y^2} + y \quad (x>0)$ 的通解；

解： 原微分方程变形为 $y' = -\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}$，令 $u = \frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入得

$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{1+u^2} + u$，整理得 $-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，从而 $-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，进一步有

$-\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C$，因此 $\sqrt{1+u^2} - u = Cx$，故 $2Cxu = 1 - C^2x^2$，即原微分方程的通解为 $y = \frac{1}{2C} - \frac{1}{2}Cx^2$。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)}$$

2. 求满足初始条件 $y(0)=0$， $y'(0)=4$ 的微分方程 $y'' - \frac{1}{1+x}y' = 8(x+1)^2$ 的特解。

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right).}$$

解： 令 $P(x) = y'$，则原微分方程为 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}P = 8(x+1)^2$，解得

$$P = e^{\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}(C_1 + 8\int(x+1)^2 e^{-\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x) = (1+x)[C_1 + 4(x+1)^2] = C_1(1+x) + 4(x+1)^3。$$

又 $P(0) = y'(0) = 4$，得 $C_1 = 0$，因此 $y' = 4(x+1)^3$，从而 $y = (x+1)^4 + C_2$，又 $y(0)=0$，得 $C_2 = -1$，

所以所求的特解为 $y = (x+1)^4 - 1$。

四、（本题 8 分）设曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$，试将此一般方程化为参数方程，

并求出该曲线在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处的切线方程。

解： 令 $x = 1+\cos\theta, y = \sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi$，则 $z = \sqrt{4-(1+\cos\theta)^2 - \sin^2\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\sin\frac{\theta}{2}$，

因此曲线 L 的参数方程可为 $x = 1+\cos\theta, y = \sin\theta, z = 2\sin\frac{\theta}{2}$， $0\le\theta\le 2\pi$。

在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处， $\theta = \frac{\pi}{2}$。所以该曲线在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处的一个切向量为

$\vec{s} = (-\sin\theta, \cos\theta, \cos\frac{\theta}{2})|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$，故所求的切线方程为 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$。

五、（本题 9 分）验证$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ $(t>0)$为热传导方程$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$的解，其中$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

证：$\frac{\partial u}{\partial t}=(-\frac{3}{2t}+\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2})\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$，$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{2t}\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(-\frac{1}{2t}+\frac{x^2}{4t^2})\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$。

由对称性，得$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(-\frac{1}{2t}+\frac{y^2}{4t^2})\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(-\frac{1}{2t}+\frac{z^2}{4t^2})\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$。因此

$\Delta u=(-\frac{3}{2t}+\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2})\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$，故$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$。

六、（本题 12 分）判别二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点(0, 0)处：(1)是否连续？ (2)一阶偏导数是否存在？ (3)是否可微？ 请给出判定理由。

解： (1) 由于当$(x,y)\neq(0,0)$时，$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0\right|\le\sqrt{x^2+y^2}$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续。

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}=1$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ 故$f(x,y)$在点$O(0,0)$处一阶偏导数存在。

(3)注意到 $\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\frac{\Delta x((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{-2\Delta x(\Delta y)^2}{(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})^3}$

因为$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0^+\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{-2\Delta x(\Delta y)^2}{(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})^3}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\neq0$，因此$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微。

七、（本题 11 分）设方程 $x^2+y^2-2yz-z^2+2=0$ 确定了二元函数 $z=z(x,y)$，试求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

解：方程两边分别对 x 和 y 求导，则 $\begin{cases} 2x-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 2y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ （*）

在上式中令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\begin{cases} x=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$，代入原方程求得

$\begin{cases} x=0 \\ y=z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=z=-1 \end{cases}$，故所有可能极值点为 $(0,1)$ 或 $(0,-1)$。

由（*）式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-z}{y+z},\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y+z}-\frac{x}{(y+z)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-(\frac{\partial z}{\partial x})^2}{y+z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-x}{(y+z)^2}(1+\frac{\partial z}{\partial y})=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{y+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial y}}{y+z}-\frac{y-z}{(y+z)^2}(1+\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{y+z},$$

在 $(0,1,1)$， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,1,1)}=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,1,1)}=0,C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,1,1)}=\dfrac{1}{2}$,从而

$AC-B^2=\dfrac{1}{4}>0,\ A>0,$因此， $z=z(x,y)$ 在 $(0,1)$ 取得极小值 1。

在 $(0,-1,-1)$， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,-1,-1)}=-\dfrac{1}{2},B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,-1,-1)}=0,C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,-1,-1)}=-\dfrac{1}{2}$,从而

$AC-B^2=\dfrac{1}{4}>0,\ A<0,$因此， $z=z(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 取得极大值−1。

八、（**本题 10 分**）已知 $f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。若 $f(x,2x)=x$ 和 $f_1'(x,2x)=x^3$，求 $f_{11}''(x,2x)$。

解：对 $f(x,2x)=x$ 两端关于 x 求导，有 $f_1'(x,2x)+2f_2'(x,2x)=1$。

将 $f_1'(x,2x)=x^3$ 代入，有 $f_2'(x,2x)=\dfrac{1-x^3}{2}$，然后两端关于 x 求导，得

$$f_{21}''(x,2x)+2f_{22}''(x,2x)=-\frac{3x^2}{2} \qquad \text{（I）}$$

对 $f_1'(x,2x)=x^3$ 两端关于 x 求导，得

$$f_{11}''(x,2x)+2f_{12}''(x,2x)=3x^2 \qquad \text{（II）}$$

又由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，且 $f_{12}''(x,2x)=f_{21}''(x,2x)$，联立（I）和（II），则有 $f_{11}''(x,2x)=-2x^2$。