



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2024.1.9

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分):

1. 曲线 $y = 3x^5 - 5x^4 + 1$ 的拐点是 (A)。

- (A) $(1, -1)$; (B) $(-1, 1)$; (C) $(0, 1)$; (D) $(2, 17)$ 。

2. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 (D)。

- (A) $1 + \cos x$; (B) $1 - \cos x$; (C) $1 + \sin x$; (D) $1 - \sin x$ 。

3. 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为 (B)。

- (A) $\sqrt{2}$; (B) $\sqrt[3]{3}$; (C) $\sqrt[4]{4}$; (D) 不存在最大项。

4. 下列不等式中错误的是 (C)。

- (A) $\int_0^1 x^2 dx < \int_0^1 x dx$; (B) $\int_0^1 \sin x dx < \int_0^1 x dx$;
(C) $\int_0^1 x dx < \int_0^1 \ln(1+x) dx$; (D) $\int_0^1 (1+x) dx < \int_0^1 e^x dx$ 。

5. 在下列的选项中, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上不满足的是 (D)。

- (A) 处处不连续; (B) 偶函数; (C) 有界; (D) 可积。

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分):

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - 1) dt}{x^6} = \underline{\frac{1}{3}}$ 。

2. $\int_{-2}^2 |(|x| - 1)| dx = \underline{2}$ 。

3. 设常数 $b > a$, 则当 $a = \underline{0}$, $b = \underline{2}$ 时, 定积分 $\int_a^b (2x - x^2) dx$ 取到最大值。

4. 函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式是 $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ 。

5. 在极坐标下, 双纽线 $\rho^2 = 3 \cos 2\theta$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{3}$ 。

三、求下列不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

$$1. \int \frac{2x-2}{x^2+2x+2} dx ;$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \int \frac{2x-2}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+2} d(x^2+2x+2) - 4 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} d(x+1) \\ &= \ln(x^2+2x+2) - 4 \arctan(x+1) + C . \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx .$$

$$\text{解: 令 } x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ 则 } \sqrt{x^2+1} = \sec t, \text{ 代入}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sec^3 t} d(\tan x) = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C .$$

四、（8 分）求曲线 $y = \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $1 \leq x \leq 2$ 的一段弧的长度。

$$\text{解: 由 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+(y')^2} dx = \sqrt{1^2 + [\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}]^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x-1} dx, \text{ 因此所求的一段弧的长度为}$$

$$l = \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x-1} dx = \frac{\sqrt{2}}{6} \int_1^2 (3x-1)^{\frac{1}{2}} d(3x-1) = \frac{\sqrt{2}}{9} (3x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{9} (5\sqrt{10} - 4) .$$

五、求下列定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

$$1. \int_1^3 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx ;$$

$$\text{解: 令 } t = \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \text{ 则 } x = \frac{1}{1-t^2}, \text{ 代入}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2) t d\left(\frac{1}{1-t^2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2) t \cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2}{t^2-1} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-2 - \frac{2}{t^2-1}\right) dt = -1 + \ln \frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - 1 . \end{aligned}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{解: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d \tan x = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} - (\ln |\sec x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{六、(8分) 求反常积分} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}} dx.$$

$$\text{解: 令} t = \frac{1}{x}, \text{ 则} x = \frac{1}{t}, \text{ 代入}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}(\frac{1}{t}+1)^3}} d\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t+1)^3}} dt = \int_0^{+\infty} (t+1)^{-\frac{3}{2}} dt =$$

$$= -2(t+1)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{+\infty} = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1}} + 2 = 2.$$

七、(14分) 设由曲线 $y = \ln x$ ($x \geq 1$) 与两直线 $y = 0$ 、 $y = \frac{2}{e}x - 1$ 所围成的平面图形为 D。

试求:

(1) 平面图形 D 的面积 A;

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

$$\text{解: (1)} A = \int_0^1 \frac{e}{2}(y+1) - e^y dy = \frac{e}{2} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + 1 \right) - e^y \Big|_0^1 = \frac{3}{4}e - (e-1) = 1 - \frac{1}{4}e.$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} V &= \pi \int_1^e \ln^2 x dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{e}{2} \stackrel{t=\ln x}{=} \pi \int_0^1 t^2 de^t - \frac{1}{6}\pi e = \pi \int_0^1 t^2 e^t dt - \frac{1}{6}\pi e \\ &= \pi e^t (t^2 - 2t + 2) \Big|_0^1 - \frac{1}{6}\pi e^3 = \pi(e-2) - \frac{1}{6}\pi e = \frac{5}{6}\pi e - 2\pi. \end{aligned}$$

八、(6分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导且 $f''(x) \geq 0$, 证明: 对于 $\forall a > 0$, 都成立不等式

$$\int_0^a f(x) dx \geq a f\left(\frac{a}{2}\right).$$

证法一: 作辅助函数 $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt - x f\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [0, a]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, a]$ 可导, 且

$$\varphi'(x) = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) = \int_{\frac{x}{2}}^x [f'(t) - f'\left(\frac{x}{2}\right)] dt \geq 0.$$

$$(或者 \varphi'(x) = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}f'\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{x}{2}[f'(\xi) - f'\left(\frac{x}{2}\right)] \geq 0, \text{ 其中 } \xi \text{ 在 } \frac{x}{2} \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

因此, $\varphi(x)$ 在 $[0, a]$ 单调不减, 故有 $0 = \varphi(0) \leq \varphi(a)$, 即 $\int_0^a f(x) dx \geq a f\left(\frac{a}{2}\right)$ 。

证法二: 由泰勒公式, 存在 ξ 在 a 与 x 之间, 使得 $f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)(x - \frac{a}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \frac{a}{2})^2$ 。

又因为根据题意有 $f''(\xi) \geq 0$, 所以 $f(x) \geq f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)(x - \frac{a}{2})$, 进一步地,

$$\int_0^a f(x) dx \geq \int_0^a f\left(\frac{a}{2}\right) dx + f'\left(\frac{a}{2}\right) \int_0^a (x - \frac{a}{2}) dx = a f\left(\frac{a}{2}\right), \text{ 得证。}$$